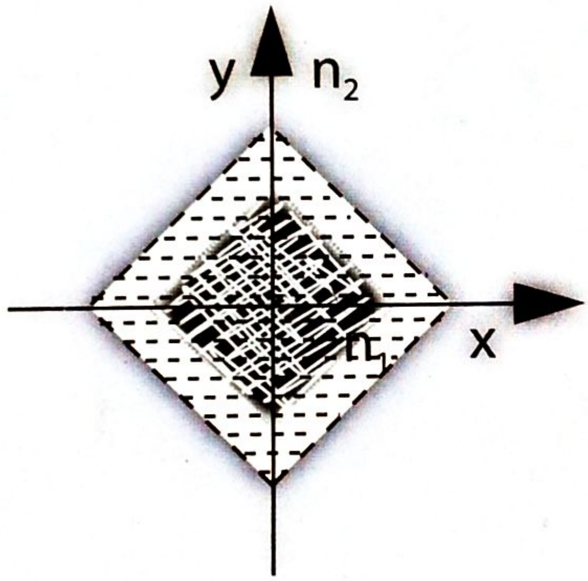
Tome 1

Mohammed Hazi

م. براوي

Topologie
Au delà des travaux dirigés



Visite guidée dans les espaces topologiques

Exercices et problèmes corrigés

Office des Publications Universitaires

Quelques Notations

Le renvoi est fait à la page où le terme est apparu pour la première fois.

Sup A:	borne supérieure de A	9
$\lvert . \rvert$:	valeur absolue	10
Inf A:	borne inférieure de A	10
$[x]$:	partie entière de x	12
$(\mathbb{R}, \lvert . \rvert)$:	droite réelle munie de la topologie usuelle	15
$\not\subset$	négation de la relation d'inclusion	16
$C_{\mathbb{R}}F$:	Complémentaire de F dans $\mathbb{R}$	21
$\overline{A}$:	adhérence de A	23
A\B:	ensemble des points de A qui n'appartiennent pas à B	26
A':	ensemble dérivé de A	26
Max A:	plus grand élément de A	27
Min A:	plus petit élément de A	27
$\overset{\circ}{A}$:	intérieur de A	29
$\mathcal{F}_r(A)$:	frontière de A	29
$E_x(A)$:	extérieur de A	29
$\mathcal{P}(E)$:	famille des parties de E	53
$\nexists$:	négation du quantificateur existenciel	77
$f: (E,\tau) \to (F,\sigma)$:	fonction de l'espace topologique (E,τ) dans l'espace topologique (F,σ).	97
Arctg x:	arctangente de x	169
th x:	tangente hyperbolique de x	169
$E/\mathcal{R}$	ensemble quotient	180

1

Topologie usuelle de la droite réelle

1.1 Quelques Propriétés fondamentales des intervalles

Exercice 1

Démontrer que pour qu'une partie non vide I de $\mathbb{R}$ soit un intervalle, il faut et il suffit qu'elle possède la propriété (caractéristique) suivante:

$$\forall\ a,b\in I\quad a\leq b\ \Rightarrow \left[a,b\right]\subset I.$$

Solution

La condition est nécessaire. En effet, si I est un intervalle alors il devient clair que $\left[a,b\right]\subset I$ chaque fois que a et b sont dans I .

Montrons que la condition est suffisante. Pour cela, on procède par étape:

1. I n'est ni majoré ni minoré.

Pour tout réel x il existe deux éléments a et b de I tels que $a<x<b$. Comme $\left[a,b\right]\subset I$ par hypothèse, on déduit que $x\in I$. D'où $I=\mathbb{R}=\left]-\infty,+\infty\right[$.

2. I est majoré mais non minoré.

Dans ce cas, I admet une borne supérieure $c=\operatorname{Sup} I$. Il vient que pour tout x de $\mathbb{R}$ tel que $x<c$ il existe deux éléments a et b de I tels que $a<x<b\leq c$. Or $\left[a,b\right]\subset I$, donc $x\in I$. Il en résulte que:

$$I=\left]-\infty,c\right[\ \text{ou}\ I=\left]-\infty,c\right].$$

3. I est minoré et non majoré.

On raisonne de la même manière qu'en (2). On aboutira à :

$$I =]\mathrm{Inf}\ I, +\infty[\text{ ou } I = [\mathrm{Inf}\ I, +\infty[,$$

Inf I désignant la borne inférieure de I

4. I est borné.

Posons $c = \mathrm{Sup}\ I$ et $d = \mathrm{Inf}\ I$ puis montrons que I est l'intervalle d'origine d et d'extrémité c. Pour chaque x de $]d,c[$ il existe, par définition de d et c, deux éléments a et b de I tels:

$$d \leq a < x < b \leq c.$$

Or $[a,b] \subset I$, donc $x \in I$. On conclut que:

$$I =]d,c[\text{ ou } I =]d,c] \text{ ou } I = [d,c[\text{ ou } I = [d,c].$$

Exercice 2

Soit I un intervalle ouvert. Montrer que pour tout x de I, il existe un réel $r_x > 0$ tel que:

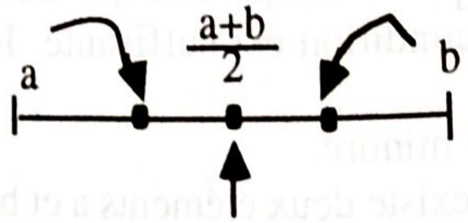
$$]x-r_x, x+r_x[\subset I.$$

Solution

On distingue, suivant les différents types d'intervalles ouverts quatre cas possibles.

1. $I =]a, b[$

En observant les différentes positions que peut prendre x sur I, on



peut affirmer que le nombre $r_x = \mathrm{Inf}\ \{x-a, b-x\}$ (et tout reél positif qui lui est inférieur) convient.

En effet, si $x \leq \frac{a+b}{2}$ alors $r_x = x-a$ convient. Si y est un point de $]x-r_x, x+r_x[$, il vient:

D'où:

$$|y-x| < x-a.$$

Donc:

$$a-x < y-x < x-a.$$

$$a < y < 2x-a \leq a+b-a = b,$$

ce qui signifie que y est dans $]a,b[$ et assure que $]x-r_x, x+r_x[\subset I$.

Par ailleurs, si $\frac{a+b}{2}\leq x$, on prend $r_x = b-x$. Si y est un point de $]x-r_x, x+r_x[$, il vient:

$$|y-x| < b-x.$$

D'où:

$$x-b < y-x < b-x.$$

Donc:
$a+b-b \leq 2x-b < y < b$,

ce qui signifie que y est dans $]a,b[$ et assure, encore une fois, l'inclusion annoncée.

2. si $I =]a,+\infty[$, tout réel $r_x \leq x-a$ convient.

3. si $I =]-\infty, a[$, tout réel $r_x \leq a-x$ convient.

4. si $I =]-\infty,+\infty[$, tout réel $r_x > 0$ convient.

Exercice 3

1. Montrer que tout intervalle I de $\mathbb{R}$ contient un point rationnel.

2. Montrer que 1) subsiste si l'on remplace le mot " rationnel " par "irrationnel".

3. En déduire que tout réel x admet, pour tout $\varepsilon > 0$, une valeur rationnelle (respectivement irrationnelle) approchée r à ε près par défaut (respectivement par excès).

Solution

1. Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ renfermant un intervalle borné (a,b), il suffit de mener la preuve pour ce type. Posons $h = b-a > 0$. D'après le principe d'Archimède[4], il existe un entier naturel n satisfaisant à:

$$n > \frac{1}{h},$$

8. Archimède est né vers 287 av J-C à Syracuse et mort vers 212 av J-C. Il excelle en géométrie, mais il est connu surtout pour ses travaux en statique et hydrostatique. Il est l'auteur du célèbre principe de la poussée qui porte son nom.

donc, $h > \frac{1}{n}$.

Le même principe d'Archimède permet d'affirmer qu'il existe un entier $[na]$ (dit partie entière de na) tel que:

$$[na] \leq na < [na] + 1.$$

Par suite:

$$n\,a < [na] + 1 \leq n\,a + 1.$$

Donc:

$$a < \frac{[na] + 1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b-a),$$

c'est-à-dire:

$$a < \frac{[na] + 1}{n} < b.$$

Ainsi, nous obtenons:

$$\frac{[na]+1}{n} \in [a,b] \cap \mathbb{Q}.$$

2. Soit q un des rationnels de (a,b). Le principe d'Archimède, encore une fois, assure l'existence d'un entier naturel n satisfaisant à:

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{b-q} < n.$$

D'où:

$$a < q < q + \frac{\sqrt{2}}{n} < b.$$

Ainsi, le nombre irrationnel $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ convient.

Signalons en guise de conclusion que la démonstration menée ici permet en fait, d'établir par itération que tout intervalle I contient une infinité de nombres rationnels et de nombres irrationnels.

3. Il suffit de rappeler cette définition. Soient $\varepsilon > 0$, x et r deux réels. On dit que r est une valeur approchée de x à ε près si on a:

$$|x-r| \leq \varepsilon.$$

r est dit valeur approchée par défaut si $r \leq x$, par excès si $x \leq r$.

Ainsi, les intervalles $]x-\varepsilon, x[$ et $]x, x+\varepsilon[$ contiennent, grâce à (ii), des rationnels et des irrationnels répondant à la question.

Remarque: $\mathbb{Q}$ et $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ vérifiant cette propriété sont dits denses dans $\mathbb{R}$. Le chapitre suivant détaillera cette notion.

Exercice 4

1. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} = ([a_n, b_n])_n$ une famille d'intervalles fermés emboîtés. Démontrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \phi$.

2. Montrer à l'aide d'un contre-exemple, que ce résultat peut-être mis en défaut si les intervalles considérés étaient ouverts ou semi-ouverts.

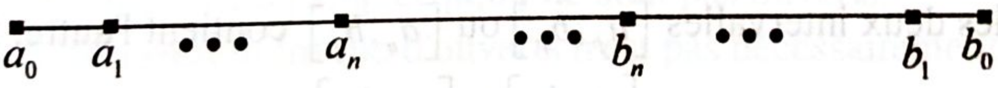
Solution

1. Considérons les deux ensembles

$$A = \{a_0, a_1, ..., a_n, ...\},$$
$$B = \{b_0, b_1, ..., b_n, ...\},$$

formés respectivement des extrémités gauches et droites des intervalles $(I_n)_n$. Comme les intervalles sont emboîtés, c-à-d, vérifiant:

$I_{n+1} \subset I_n, \forall n \in \mathbb{N}$



on constate que chaque a_n de A minore B et chaque b_n de B majore A . On déduit que :

$a_n \leq \sup A \leq \inf B \leq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

On conclut alors que l'intervalle $[\sup A, \inf B]$ (lequel peut être dégénéré si $\inf B = \sup A$) est contenu dans chaque intervalle I_n . Donc, il est inclus dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Ce dernier est alors non vide.

Signalons au passage que ce résultat est connu sous l'appellation de théorème des intervalles emboîtés de Cantor.

2. Si pour tout entier naturel n on prend $I_n =]1, 1+e^{-n}[$, alors:

i) I_n est ouvert,

ii) $I_{n+1} = \left]1, 1+e^{-(n+1)}\right[\subset I_n, \forall n \in \mathbb{N}$,

et pourtant

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \left]1, \inf\left\{1+e^{-n}, n\in\mathbb{N}\right\}\right[=]1,1[= \phi .$$

Exercice 5

Démontrer que pour que l'intersection d'une famille d'intervalles fermés emboîtés $\sigma = (I_n)_n = \left(\left[a_n, b_n\right]\right)_n$ soit réduite à un singleton, il faut et il suffit qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un élément $\left[a_{n_0}, b_{n_0}\right]$ de σ dont la longueur ne dépasse pas ε.

Solution

La condition est nécessaire.

En conservant les notations de l'exercice précédent, on peut, grâce aux propriétés caractéristiques des bornes inférieure et supérieure, affirmer, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence de deux intervalles $\left[a_p, b_p\right]$ et $\left[a_q, b_q\right]$ dans σ de telle sorte que:

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a_p \text{ et } b_q < \inf B + \frac{\varepsilon}{2} .$$

L'un des deux intervalles $\left[a_p, b_p\right]$ ou $\left[a_q, b_q\right]$ contient l'autre. Si on a

$$\left[a_q, b_q\right] \subset \left[a_p, b_p\right]$$

(le contraire se traite de même) alors:

$$b_q < \inf B + \frac{\varepsilon}{2} \wedge \sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a_p < a_q .$$

Or on a $\inf B = \sup A$, donc:

$$b_q - a_q < \inf B - \sup A + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

c'est-à-dire, $b_q - a_q < \varepsilon$. Ainsi, on a exhibé un intervalle $\left[a_q, b_q\right]$ de σ dont la longueur ne dépasse pas ε.

La condition est suffisante.

L'intersection des éléments de la famille σ coïncide d'après l'exercice précédent, avec l'intervalle $\left[\text{Sup } A, \text{Inf } B\right]$. Ainsi, tout intervalle contenant ce dernier doit jouïr d'une longueur au moins égale à Inf B - Sup A = L Or σ contient des intervalles dont la longueur est aussi petite que l'on veut, autrement dit:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \left[a_\varepsilon, b_\varepsilon\right] \in \sigma \,/\, \left[\text{Sup } A, \text{Inf } B\right] \subset \left[a_\varepsilon, b_\varepsilon\right],$$

avec $\left|a_\varepsilon - b_\varepsilon\right| < \varepsilon$; donc son intersection coïncide avec un singleton.

1.2 ouverts

Exercice 6

Montrer que :

1. i) tout intervalle ouvert est un sous-ensemble ouvert,
   ii) la réciproque est fausse.
2. i) tout singleton de $\mathbb{R}$ n'est pas ouvert.
   ii) c'est le cas de toute partie finie non vide de $\mathbb{R}$ en général.
3. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas ouverts.
4. les intervalles $[a,b[$ et $]a,b]$ ne sont pas ouverts.
5. l'intersection infinie d'ouverts n'est pas nécessairement ouverte

Solution

1. i) Il suffit de rappeler cette définition fondamentale d'un ouvert pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$:

$$\Omega \text{ ouvert de } \left(\mathbb{R}, |.|\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega = \phi \\ \text{ou} \\ \forall\, x \in \Omega\ \ \exists\, I_x \text{ (intervalle ouvert) } / \ x \in I_x \subset \Omega \end{cases}$$

ii) On le constate aisément sur ces deux ouverts

$$]-7,-3[\ \cup\ ]2,9[\ = \Omega_1 \text{ et }]-\infty,4[\ \cup\ ]11,20[\ = \Omega_2$$

lesquels ne sont pas des intervalles.

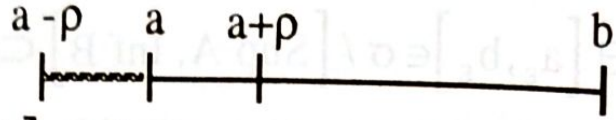
2. i) et ii) Les parties finies en général et les singletons en parti-

culier ne peuvent contenir d'intervalles ouverts. Par conséquent, ne sont pas ouverts.

3. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas ouverts pour la même raison citée dans 2.

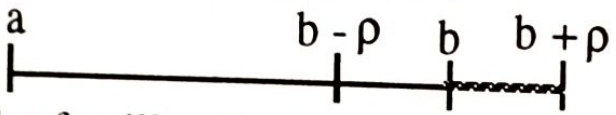
4. $[a,b[$ ne peut pas être ouvert, car:

$$]a-\rho, a+\rho[\not\subset [a,b[, \ \forall \rho > 0.$$



C'est le cas de $]a,b]$, puisque:

$$]b-\rho, b+\rho[\not\subset]a,b], \ \forall \rho > 0.$$



5. En prenant les familles d'ouverts

$$\Omega_n = \left]4-\frac{1}{1+n}, 4+\frac{1}{1+n}\right[\text{ ou } \Delta_n = \left]-1, 10+\frac{1}{1+n}\right[, n\in\mathbb{N},$$

on obtient $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \{4\}$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n =]-1,10]$, lesquels ne sont pa ouverts comme on vient de le voir.

Exercice 7

Démontrer qu'un sous-ensemble non vide A de $\mathbb{R}$ est ouvert si, e seulement si, il est réunion d'intervalles ouverts.

Solution

Il est clair que la condition est suffisante. Montrons qu'elle es nécessaire. En effet, si A est un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}$ on peut, grâce à l'exercice précédent, écrire:

$$\forall x\in A \, \exists \, I_x \, / \, x\in I_x \subset A,$$

où I_x désigne comme désormais convenu, un intervalle ouvert contenant x. Quand x parcourt tout A on arrive à:

D'où :
$$A \subset \bigcup_{x\in A} I_x \subset A.$$

$$A = \bigcup_{x\in A} I_x.$$

Il est utile de remarquer que ce résultat présente une caractérisation importante de la notion d'ouvert dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit U un ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On définit:

$$-U = \left\{x\in \mathbb{R} \,/\, -x\in U\right\},$$

$$\lambda U = \left\{x\in \mathbb{R} \,/\, \lambda^{-1} x\in U \,;\, \lambda\in \mathbb{R}^*\right\},$$

$$U + a = \left\{x\in \mathbb{R} \,/\, x - a \in U \,;\, a\in \mathbb{R}\right\}.$$

Montrer que chacun de ces sous-ensembles est ouvert si, et seulement si, U l'est.

Solution

i) Si U est ouvert alors:

$$x\in -U \;\Rightarrow\; -x\in U \;\Rightarrow\; \exists\, r > 0 \,/\,]-x-r,-x+r[\;\subset U$$

$$\Rightarrow\; \exists\, r > 0 \,/\,]x-r,x+r[\;\subset -U.$$

Donc, -U est ouvert.

Réciproquement, si -U est ouvert, alors:

$$x\in U \;\Rightarrow\; -x\in (-U) \;\Rightarrow\; \exists\, r > 0 \,/\,]-x-r,-x+r[\;\subset -U$$

$$\Rightarrow\; \exists\, r > 0 \,/\,]x-r,x+r[\;\subset U.$$

Donc, U est ouvert.

ii) Supposons que U soit ouvert. Alors:

$$x\in \lambda U \;\Rightarrow\; \lambda^{-1} x\in U \;\Rightarrow\; \exists\, r > 0 \,/\,]\lambda^{-1}x-r, \lambda^{-1}x+r[\;\subset U$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists\, r > 0 \,/\,]x-\lambda r, x+\lambda r[\;\subset \lambda U & \text{si} \quad \lambda > 0, \\ \exists\, r > 0 \,/\,]x-(-\lambda r), x+(-\lambda r)[\;\subset \lambda U & \text{si} \quad \lambda < 0. \end{cases}$$

Donc, λU est ouvert.

Inversement, si λU est ouvert, on a:

$$x\in U \Rightarrow \lambda x\in \lambda U \Rightarrow \exists\, r>0 \,/\, \left]\lambda x-r, \lambda x+r\right[\subset \lambda U$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists\, r>0 \,/\, \left]x-\lambda^{-1}r, x+\lambda^{-1}r\right[\subset U & \text{si } \lambda>0, \\ \exists\, r>0 \,/\, \left]x-(-\lambda^{-1}r), x+(-\lambda^{-1}r)\right[\subset U & \text{si } \lambda<0. \end{cases}$$

Donc, U est ouvert.

iii) Soit donné U ouvert. On a:

$$x\in U+a \Rightarrow x-a\in U \Rightarrow \exists\, r>0 \,/\, \left]x-a-r, x-a+r\right[\subset U$$
$$\Rightarrow \exists\, r>0 \,/\, \left]x-r, x+r\right[\subset U+a.$$

Donc, U+a est ouvert.

Réciproquement, si U+a est ouvert, alors:

$$x\in U \Rightarrow x+a\in U+a \Rightarrow \exists\, r>0 \,/\, \left]x+a-r, x+a+r\right[\subset U+a$$
$$\Rightarrow \exists\, r>0 \,/\, \left]x-r, x+r\right[\subset U.$$

Donc, U est ouvert. L'exercice est achevé.

Exercice 9

Soient a et b (a > b) deux réels. Démontrer que:

$$\left]a,b\right[= \bigcup_{n\in \mathbb{N}^*} \left]a+\frac{1}{n}, b\right[.$$

Solution

On a :

$$\bigcup_{n\in \mathbb{N}^*} \left]a+\frac{1}{n}, b\right[= \left]\operatorname{Inf}\left\{a+\frac{1}{n}, n\in \mathbb{N}^*\right\}, b\right[.$$

Donc, Il suffit de montrer que:

$$\operatorname{Inf}\left\{a+\frac{1}{n}, n\in \mathbb{N}^*\right\} = a. \qquad (*)$$

Pour cela, on utilise la propriété caractéristique de la borne inférieure. On a trivialement:

$$a < a+\frac{1}{n}, \ \forall\, n\in \mathbb{N}^*.$$

De plus, pour $\varepsilon > 0$, l'inégalité $a + \frac{1}{n} < a + \varepsilon$, d'inconnue n de $\mathbb{N}^*$, admet toujours une solution: $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, par exemple. D'où (*).

***Exercice* 10**

Soit $(J_i)_{1 \le i \le n}$ une famille de p intervalles ouverts, deux à deux disjoints. Soit I un intervalle ouvert borné contenant $\bigcup_{k=1}^{n} J_k$.

Si tout intervalle J_k possède une longueur L_k, montrer alors que la longueur de I, notée L, vérifie:

$$\sum_{k=i}^{n} L_k \le L.$$

Solution

Soit $I =]a,b[$ et $J_k =]c_k, d_k[$. Pour tout $k \neq 1$, on a ou bien $c_k < d_k < c_1$ ou bien $d_1 < c_k < d_k$, sinon on aurait $J_1 \cap J_k \neq \phi$.

Procédons par récurrence. la relation est triviale pour $n = 1$, car $a \le c_1 \le d_1 \le b$, par suite $d_1 - c_1 \le b - c$, c-à-d $L_1 \le L$.

Soient $J_{i_1}, J_{i_2}, \ldots, J_{i_p}$ les intervalles inclus dans $]a, c_1[$ et $J_{j_1}, J_{j_2}, \ldots, J_{j_{n-1-p}}$ les intervalles inclus dans $]d_1, b[$. L'hypothèse de récurrence permet d'obtenir :

$$\sum_{K=1}^{p} L_{i_k} \le c_1 - a \text{ et } \sum_{k=1}^{n-1-p} L_{j_k} \le b - d_1.$$

Par conséquent:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_1 + \sum_{k=1}^{p} L_{i_k} + \sum_{k=1}^{n-p-1} L_{j_k} \le d_1 - c_1 + c_1 - a + b - d_1 \le b - a = L.$$

***Exercice* 11**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(I_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ une famille d'intervalles ouverts, deux à deux disjoints, contenus dans I.

Démontrer qu'il existe une partie dénombrable D de Λ telle que

$$\alpha \notin D \quad \Rightarrow \quad I_\alpha = \phi .$$

Solution

Remarquons, de prime abord, que dire qu'un intervalle non dégénéré est vide signifie que sa longueur est nulle. Nous pouvons maintenant réecrire le résultat de cet exercice comme suit:
" La famille des intervalles ouverts de longueurs non nulles est au plus dénombrable ".

Nous menons la démonstration en deux étapes.

i) I borné

Il est alors loisible de poser $I =]a,b[$ et L = b-a. Pour tout entier naturel non nul n, l'ensemble E_n des éléments α de Λ tels que la longueur de I_α soit plus grande que L/n, est fini. Bien plus, il contient n-1 éléments précisément. L'ensemble D des éléments α de Λ tels que la longueur de I_α est non nulle coïncide avec la réunion dénombrable des parties finies E_n. Il est donc lui-même dénombrable

ii) I non borné

Pour tout entier naturel non nul n, les intervalles $I_\alpha \cap]-n, n[$ sont deux à deux disjoints. Au vu du cas (i), l'ensemble D_n des éléments α de Λ tels que $I_\alpha \cap]-n, n[\neq \phi$, est dénombrable. Comme

$$I_\alpha \neq \phi \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \,/\, I_\alpha \cap]-n, n[\neq \phi,$$

l'ensemble D des éléments α de Λ tels que $I_\alpha \neq \phi$ est constitué de la réunion des parties D_n, c-à-d, une réunion dénombrable de parties, elles-mêmes, dénombrables. On conclut donc que D est dénombrable

Exercice 12

Démontrer que la famille des ouverts, deux à deux disjoints, de $(\mathbb{R},|.|)$, est dénombrable.

Solution

On procède par l'absurde.

Soit $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une telle famille. Supposons qu'elle ne soit pas dénombrable. Le résultat porté par l'exercice précédent reste vrai si l'on remplace le mot intervalle par partie, puisque tout ouvert est réunion d'intervalles ouverts. De plus, Si on prend $A = \mathbb{Q}$, on écrit:

$$\forall \lambda \in \Lambda \ \Omega_\lambda \cap \mathbb{Q} \neq \phi .$$

Ceci conduit à la non dénombrabilité de l'ensemble $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\Omega \cap \mathbb{Q})$. Il en résulte que $\mathbb{Q}$ est non dénombrable du fait que les ouverts Ω_λ sont deux à deux disjoints. C'est la contradiction recherchée! Ainsi, $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est dénombrable.

1.3 *Fermés*

Exercice 13

Montrer que:

1. les singletons de $(\mathbb{R},|.|)$ sont fermés.
2. toute partie finie non vide de $(\mathbb{R},|.|)$ est fermée.
3. tout intervalle fermé est une partie fermée.
4. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés.
5. les intervalles $[a,b[$ et $]a,b]$ ne sont pas fermés
6. $\mathbb{R}$ et ϕ sont fermés.
7. une réunion infinie de fermés n'est pas nécessairement fermée.

Solution

1. Le complémentaire $C_{\mathbb{R}}\{a\} =]-\infty, x[\cup]a,+\infty[$ de tout singleton $\{a\}$ est ouvert. Celui-ci est alors fermé.

2. Considérons une partie finie $F = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ telle que $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{p-1} \leq a_p$.
Son complémentaire

$$C_{\mathbb{R}}F =]-\infty, a_1[\cup]a_1, a_2[\cup ... \cup]a_{p-1}, a_p[\cup]a_p, +\infty[$$

est ouvert. Donc, elle est fermée.

3. En effet, les complémentaires:

$$C_{\mathbb{R}}[a, b] =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$$

$$C_{\mathbb{R}}[a,+\infty[=]-\infty, a[$$

$$C_{\mathbb{R}}]-\infty, a] =]a,+\infty[$$

des trois types d'intervalles fermés sont ouverts. Donc, ces intervalles sont des parties fermées.

4. On a:

$$C_{\mathbb{R}}\mathbb{N} =]-\infty, 0[\cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+1[\right),$$

$$C_{\mathbb{R}}\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[.$$

Ces complémentaires sont ouverts. D'où le résultat.

5. Les complémentaires

$$C_{\mathbb{R}}[a, b[=]-\infty, a[\cup [b,+\infty[,$$
$$C_{\mathbb{R}}]a, b] =]-\infty, a] \cup]b,+\infty[.$$

ne sont pas ouverts, car le premier ne peut contenir aucun intervalle ouvert centré en b, le second en a. Donc, $[a,b[$ et $]a,b]$ ne sont pas fermés

6. $\mathbb{R}$ et ϕ sont fermés car l'un est le complémentaire de l'autre, ouvert.

7. Tous les éléments de la famille $\left(A_n = \left[-1, 2-\frac{1}{n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont fermés alors que leur réunion

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-1, 2-\frac{1}{n}\right] = [-1,2[$$

ne l'est pas.

Exercice 14

Montrer que $\mathbb{Q}$ et $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ ne sont ni ouverts ni fermés.

Solution

Les deux ensembles $\mathbb{Q}$ et $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ étant tous les deux denses dans $\mathbb{R}$, aucun d'eux ne peut contenir un intervalle ouvert. Ils ne peuvent donc être ouverts. Comme chacun est le complémentaire de l'autre, ils ne peuvent être fermés, non plus.

Exercice 15

Démontrer que les seules parties de $(\mathbb{R},|.|)$, à la fois ouvertes et fermées, sont ϕ et $\mathbb{R}$.

Solution

On procède par l'absurde.

Supposons qu'une partie A de $(\mathbb{R},|.|)$ soit ouverte et fermée et ne soit ni vide ni égale à $\mathbb{R}$, puis considérons un point x de $C_{\mathbb{R}}A$. Il en résulte que l'un des sous-ensembles $A\cap [x,+\infty[$ et $A\cap]-\infty,x]$ est non vide. Supposons, sans restriction de généralité, qu'il s'agit de $B = A\cap [x,+\infty[$. Il est évident que B est fermé. De plus, il est minoré. Il jouït donc d'une borne inférieure que l'on note b. En réalité b est l'élément minimal de B. Par ailleurs, B peut, du fait que x ne lui appartient pas, s'écrire sous la forme $B = A\cap]x,+\infty[$ ce qui le rend ouvert. On déduit qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ de telle sorte que $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\subset B$. Cela est en contradiction avec $b = \text{Inf } B$.

Remarque: $(\mathbb{R},|.|)$, vérifiant cette propriété, est dit espace connexe.

1.4 Adhérence, points d'accumulation

Exercice 16

1. Déterminer les adhérences des parties de $(\mathbb{R},|.|)$ suivantes:
   i) $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$.
   ii) $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$.
   iii) $]a,+\infty[$ et $[a,+\infty[$.
   iv) $\mathbb{Q}$ et $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.
2. Déterminer tous les fermés de $(\mathbb{R},|.|)$ contenant $\mathbb{Q}$.

Solution

1. Rappelons de prime abord qu'un point a est adhérent à un ensemble A, ou a est un point de l'adhérence $\overline{A}$ de A, si tout intervalle ouvert centré en a rencontre A. Sur ce, il vient aisément:

i) $\mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{N} = \overline{\mathbb{N}}$.

ii) $\overline{[a, b]} = \overline{[a, b[} = \overline{]a, b]} = \overline{]a, b[} = [a, b]$

iii) $\overline{]a,+\infty[} = \overline{[a,+\infty[} = [a,+\infty[$.

vi) $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

2. Il ressort de 1.iv) que le plus petit fermé contenant $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$. Donc, $\mathbb{R}$ est le seul fermé contenant $\mathbb{Q}$.

Exercice 17

1. Donner des exemples de sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$ tels que $A \cap \overline{B}$ ne soit pas contenu dans $\overline{A \cap B}$.

2. Donner des exemples de deux ouverts A et B de $\mathbb{R}$ tels que les sous-ensembles $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ soient tous distincts.

Solution

1. La paire $(\mathbb{Q}, C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q})$ convient. En effet, on a:

$\sharp$.
$$\mathbb{Q} \cap \overline{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q},$$
$$\overline{\mathbb{Q} \cap C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}} = \overline{\phi} = \phi.$$

On peut aussi prendre la paire $(\{2,3,4\},]3,5])$, puisque:
$$\{2,3,4\} \cap \overline{]3,5]} = \{2,3,4\} \cap [3,5] = \{3,4\},$$
$$\overline{\{2,3,4\} \cap]3,5]} = \overline{\{4\}} = \{4\}.$$

2. La première paire ci-dessus convient, car:
$$\overline{\mathbb{Q}} \cap C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} \cap \overline{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}} = \mathbb{Q},$$
$$\overline{\mathbb{Q} \cap C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}} = \phi, \quad \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

C'est aussi le cas pour la paire $\left(\{3,6,7\} \cup]0,5],\ \{0,4\} \cup\ ]5,7[\right)$, puisqu'on a:

$$\overline{\{3,6,7\}\cup]0,5]} \cap \left(\{0,4\}\cup]5,7[\right) =$$
$$= \left(\{3,6,7\}\cup[0,5]\right)\cap\left(\{0,4\}\cup]5,7[\right) = \{0,4,6\},$$

$$\left(\{3,6,7\}\cup]0,5]\right) \cap \overline{\{0,4\}\cup]5,7[} =$$
$$= \left(\{3,6,7\}\cup]0,5]\right) \cap \left(\{0,4\}\cup[5,7]\right) = \{4,5,6,7\},$$

$$\overline{\left(\{3,6,7\}\cup]0,5]\right)} \cap \overline{\{0,4\}\cup]5,7[} =$$
$$= \left(\{3,6,7\}\cup[0,5]\right) \cap \left(\{0,4\}\cup[5,7]\right) = \{0,4,5,6,7\},$$

$$\overline{\left(\{3,6,7\}\cup]0,5]\right) \cap \left(\{0,4\}\cup]5,7[\right)} = \overline{\{4,6\}} = \{4,6\}.$$

Exercice 18

1. Démontrer que pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}$ on a:

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega \cap \mathbb{Q}} = \overline{\Omega \cap C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}}\,.$$

2. Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que ce résultat est faux si l'on considère Ω non ouvert.

Solution

1. Le résultat est évident si $\Omega = \phi$. Par ailleurs, On a clairement:

$$\overline{\Omega\cap\mathbb{Q}} \subset \overline{\Omega} \text{ et } \overline{\Omega \cap C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}} \subset \overline{\Omega}\,.$$

D'autre part, si $x\in \overline{\Omega}$, alors:

$$]x\text{-}\varepsilon,\ x+\varepsilon[\ \cap\ \Omega \neq \phi,\ \forall\ \varepsilon > 0.$$

Comme $]x\text{-}\varepsilon,\ x+\varepsilon[\ \cap\ \Omega$ est ouvert, il en résulte que:

$$\left(]x\text{-}\varepsilon,\ x+\varepsilon[\ \cap\ \Omega\right) \cap\ \mathbb{Q} \neq \phi,\ \ \forall\ \varepsilon > 0,$$

c-à-d

$$]x\text{-}\varepsilon,\ x+\varepsilon[\ \cap\ (\Omega \cap \mathbb{Q}) \neq \phi.$$

D'où

$$x\in\ \overline{\Omega\cap\mathbb{Q}}\,.$$

Donc

$$\overline{\Omega} \subset \overline{\Omega \cap \mathbb{Q}}\,.$$

En remplaçant $\mathbb{Q}$ par $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$, on obtient de même:

$$\overline{\Omega} \subset \overline{\Omega \cap C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}}\,.$$

2. Il suffit de prendre $\Omega = \mathbb{N}$. On a:

$$\overline{\mathbb{N}} = \overline{\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \neq \overline{\mathbb{N} \cap C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}} = \phi.$$

Exercice 19

Déterminer les ensembles dérivés de:

i) $\{0, 1, 2\}$ et A fini.

ii) $\mathbb{Q}$ et $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

iii) $[a,b]$, $[a,b[$, $]\,a,b]$ et $]a,b[$.

iv) $\left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$.

Solution

Par définition, l'ensemble dérivé B' d'une partie B de $(\mathbb{R}, |.|)$ est l'ensemble de ses points d'accumulation. Un point x de $\mathbb{R}$ est d'accumulation d'une partie B si :

$$]x-r, x+r[\, \cap \left(B \setminus \{x\}\right) \neq \phi, \quad \forall\, r > 0.$$

Ainsi, on trouve:

i) $\{0, 1, 2\}' = A' = \phi$, car tout point x de $\mathbb{R}$ peut être centre d'un intervalle ouvert ne rencontrant A qu'au plus en ce point lui-même.

ii) $\mathbb{Q}' = (C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q})' = \mathbb{R}$, car tout point x de $\mathbb{R}$ est centre d'un intervalle ouvert rencontrant $\mathbb{Q}$ et $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ en une infinité de points.

iii) $[a,b]' = [a,b[' = \,]\,a,b]' = \,]a,b[' = [a,b]$, grâce à la propriété fondamentale des intervalles décrite dans l'exercice 2.

iv) $\left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}' = \{0\}$.

En effet, 0 est un point d'accumulation de cet ensemble. On peut se référer à l'exercice ci-après. Tout autre point x de $\mathbb{R}$ ne peut être d'accumulation pour la même raison invoquée dans le cas (i).

***Exercice* 20**

1. Démontrer que les bornes $\inf A$ et $\sup A$ d'un ensemble A de $(\mathbb{R},|.|)$, quand elles existent et ne coïncident pas avec $Max\,A$ et $Min\,A$ respectivement, sont des points d'accumulation pour A.

2. Montrer que ce n'est pas le cas si $\sup A = Max\,A$ et $\inf A = Min\,A$

3. Montrer que tout ouvert borné de $(\mathbb{R},|.|)$ ne peut contenir ses bornes.

Solution

1. La propriété caractéristique de la borne supérieure permet d'écrire:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists x_\varepsilon \in A / \sup A - \varepsilon < x_\varepsilon \leq \sup A.$$

C'est-à-dire:

$$]\sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon[\cap A \neq \phi, \forall \varepsilon > 0.$$

Donc, $\sup A$ est un point d'accumulation pour A.

Le cas de la borne inférieure se traite de même.

2. Il suffit de prendre A fini.

3. En effet, si Ω est un ouvert contenant ses bornes il contiendrait des intervalles ouverts centrés en ces bornes, ce serait en contradiction avec la définition de ces bornes.

***Exercice* 21**

1. Démontrer qu'un point x de $(\mathbb{R},|.|)$ est un point d'accumulation d'une partie A si, et seulement si, tout voisinage de x rencontre A en une infinité de points.

2. Que dire d'une partie bornée de $(\mathbb{R},|.|)$ ne possédant pas de points d'accumulation?

Solution

1. La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit V un voisinage de x. Nous pouvons poser, sans restreindre de généralité, $V =]a,b[$. Supposons que:

$$]a,b[\cap A = \{y_1, y_2, ..., y_p\}$$

(c-à-d un ensemble fini de p éléments) et posons:

$$a' = \underset{1\le i\le p}{Max}\{y_i / y_i < x\} \;;\; b' = \underset{1\le i\le p}{Min}\{y_i / y_i > x\}$$

Il vient $x \in]a',b'[$ et $]a',b'[\cap A = \phi$, ce qui contredit le fait que x est d'accumulation.

2. Elle est, au vu de ce qui précède, nécessairement finie.

Attention: une partie infinie peut ne pas avoir de points d'accumulation comme on peut le constater, par exemple, sur le cas de $A = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.

***Exercice* 22**

Démontrer que pour qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ soit fermé, il faut et il suffit qu'il contienne tous ses points d'accumulation.

Solution

La condition est nécessaire:

Soit A un sous-ensemble fermé et $x \notin A$. $C_{\mathbb{R}}A$ étant ouvert, il est voisinage de x et ne rencontre pas A. Donc, x ne peut pas être un point d'accumulation de A.

La condition est suffisante:

Si A est tel qu'aucun de ses points ne lui est d'accumulation, il existerait, pour tout point x de $C_{\mathbb{R}}A$, un voisinage ne rencontrant pas A. Ce voisinage serait alors inclus dans $C_{\mathbb{R}}A$, lequel deviendrait voisinage de tous ses points, donc un ouvert. Il en résulte que A est fermé.

***Exercice* 23**

Montrer que l'ensemble dérivé A' d'une partie A de $\mathbb{R}$ est fermé.

Solution

Il suffit de montrer que $C_{\mathbb{R}}A'$ est ouvert. Pour cela on montre que $C_{\mathbb{R}}A'$ est voisinage de chacun de ses points. Soit a un de ces points et ρ un réel strictement positif. On écrit:

$$]a-\rho, a+\rho[\cap A = \begin{cases} \phi \\ ou \\ \{a\} \end{cases}$$

On déduit que tout point b de $]a-\rho,a+\rho[$ ne peut être dans A' puisqu' un de ses voisinages ne rencontre A qu'en a au plus. Donc: $]a-\rho,a+\rho[\subset C_{\mathbb{R}}A'$,

ce qui signifie que $C_{\mathbb{R}}A'$ est un voisinage de a et achève la preuve.

1.5 *Intérieur, frontière, extérieur*

Exercice 24

1. Déterminer:

i) $\overset{o}{A}$, (A fini), $\overset{o}{\overbrace{\{-1,0,2\}\cup[3,5[}}$,

ii) $\overset{o}{\widehat{]a,b[}}$, $\overset{o}{\widehat{[a,b]}}$, $\overset{o}{\widehat{[a,b[}}$, $\overset{o}{\widehat{]a,b]}}$,

iii)) $\overset{o}{\mathbb{N}}$, $\overset{o}{\mathbb{Z}}$, $\overset{o}{\mathbb{Q}}$, $\overset{o}{\widehat{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}}}$.

2. Donner un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ tel que les parties A, $\overset{o}{A}$, $\overline{A}$, $\overset{o}{\overline{A}}$ et $\overline{\overset{o}{A}}$ soient toutes distinctes.

3. Déterminer:

i) $\mathcal{F}_r(]a,b[)$, $\mathcal{F}_r([a,b])$, $\mathcal{F}_r(]a,b])$, $\mathcal{F}_r([a,b[)$.

ii) $\mathcal{F}_r(\mathbb{N})$, $\mathcal{F}_r(\mathbb{Z})$, $\mathcal{F}_r(C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q})$ et $\mathcal{F}_r(\mathbb{Q})$,

iii) $E_x(\{-1,2\})$, $E_x([a,b])$, $E_x(]a,b[)$, $E_x(]a,b])$ et $E_x([a,b[)$.

iv) $E_x(\mathbb{N})$, $E_x(\mathbb{Z})$, $E_x(\mathbb{Q})$ et $E_x(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$.

Solution

1. Rappelons que pour un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ on a:

$$\overset{o}{A}=\{x\in A/\exists r>0/\,]x-r,x+r[\subset A\},$$

$$\mathscr{F}_r(A) = \overline{A} / \overset{\circ}{A};\ \ E_x(A) = \overset{\circ}{\widehat{C_{\mathbb{R}} A}}.$$

Une application directe de ces définitions donne immédiatement:

i) $\overset{\circ}{A} = \phi;\ \overset{\circ}{\overbrace{\{-1,0,2\}\cup[3,5[}} =]3,5[$.

ii) $\overset{\circ}{\widehat{]a,b[}} = \overset{\circ}{\widehat{[a,b]}} = \overset{\circ}{\widehat{[a,b[}} = \overset{\circ}{\widehat{]a,b]}} =]a,b[$.

iii) $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \overset{\circ}{\widehat{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}}} = \phi$.

2. La partie $A =]-1,0]\cup[0,1[\cup\{2,3\}$ convient, puisqu' on a:

$$\overset{\circ}{A} =]-1,0[\cup]0,1[,\ \overline{A} = [-1,1]\cup\{2,3\},\ \overset{\circ}{\overline{A}} =]-1,1[,\ \overline{\overset{\circ}{A}} = [-1,1].$$

3. On a:

i) $\mathscr{F}_r(]a,b[) = \mathscr{F}_r([a,b]) = \mathscr{F}_r(]a,b]) = \mathscr{F}_r([a,b[) = \{a,b\}$.

ii) $\mathscr{F}_r(\mathbb{N}) = \mathbb{N},\ \mathscr{F}_r(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z},\ \mathscr{F}_r(C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}) = \mathscr{F}_r(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

iii) $E_x(\mathbb{N}) =]-\infty,0[\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n,n+1[\right),\ E_x(\mathbb{Z}) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n,n+1[$,

iv) $E_x(\mathbb{Q}) = E_x(\mathbb{R}-\mathbb{Q}) = \phi$.

1.6 *Densité*

***Exercice* 25**

Démontrer qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est partout dense si, et seulement si, elle rencontre tout intervalle ouvert.

Solution

A est partout dense dans $\mathbb{R}$ alors $\overline{A} = \mathbb{R}$. On déduit que si I est un intervalle ouvert, on obtient trivialement $I \subset \overline{A}$. Il s'en suit que tous les points de I adhérent à A. Or I est voisinage de chacun de ses points, donc $I \cap A \neq \phi$.

Inversement, Si l'on suppose que tout intervalle ouvert I coupe A et si x est un point de $\mathbb{R}$, on obtient pour tout réel $r > 0$:

$$]x-r,x+r[\cap A \neq \phi.$$

Par conséquent:

$$\overline{A} = \mathbb{R}.$$

Exercice 26

Démontrer que l'intersection dénombrable d'ouverts partout denses dans $\mathbb{R}$ est, elle même, partout dense.

Solution

Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts partout denses dans $\mathbb{R}$. Posons $\Omega = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. On a à montrer que $\overline{\Omega} = \mathbb{R}$. Pour cela, il suffit que tout intervalle ouvert I rencontre Ω.

Nous procédons par étapes.

Ω_0 étant un ouvert partout dense, l'intersection $I \cap \Omega_0$ constitue un ouvert non vide. Soit x_0 un de ses points. Il existe alors un réel $r_0 > 0$ de sorte que:

$$]x_0-r_0,\ x_0+r_0[\subset I \cap \Omega_0.$$

Par suite:

$$\left[x_0-\frac{r_0}{2},\ x_0+\frac{r_0}{2}\right] \subset \left]x_0-r_0\ ,\ x_0+r_0\right[\subset I \cap \Omega_0. \qquad (*)$$

Pour les mêmes raisons, l'ensemble ouvert $\left]x_0-\frac{r_0}{2},\ x_0+\frac{r_0}{2}\right[\cap \Omega_1$ contient l'ouvert $\left]x_1-\frac{r_0}{2^2},\ x_1+\frac{r_0}{2^2}\right[$, ce qui permet d'affirmer que:

$$\left[x_1-\frac{r_0}{2^3},\ x_1+\frac{r_0}{2^3}\right] \subset \left]x_1-\frac{r_0}{2^2},\ x_1+\frac{r_0}{2^2}\right[\subset \left]x_0-\frac{r_0}{2},\ x_1+\frac{r_0}{2}\right[\cap \Omega_1.$$

En poursuivant cette opération, on construit peu à peu une famille d'intervalles fermés emboîtés $\left(\left[x_n-\frac{r_0}{2^{n+1}}, x_n+\frac{r_0}{2^{n+1}}\right]\right)_n$ telle que

$$\left[x_n-\frac{r_0}{2^{2n+1}}, x_n+\frac{r_0}{2^{2n+1}}\right] \subset \Omega_n, \quad \forall\, n\in \mathbb{N}. \qquad (**)$$

Il est aisé de constater qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un intervalle dont la longueur ne dépasse pas ε. Il suffit pour cela de choisir un indice n tel que $\frac{r_0}{2^{2n}} \leq \varepsilon$, c-à-d:

$$n \geq \left[\frac{\mathrm{Log}\,\frac{r_0}{\varepsilon}}{2\,\mathrm{Log}2}\right] + 1$$

Grâce à l'exercice (5), on peut affirmer que l'intersection

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[x_n-\frac{r_0}{2^{2n+1}}, x_n+\frac{r_0}{2^{2n+1}}\right]$$

est réduite à un seul point, que l'on note a.
Maintenant, si l'on observe les relations (*) et (**) simultanément il ressort que a appartient à la fois à I et à Ω. Donc:

$$I \cap \Omega \neq \phi.$$

Remarque: L'espace $(\mathbb{R},|.|)$ est dit de Baire[9].

Exercice 27

1. Montrer que, dans $(\mathbb{R},|.|)$, l'intérieur de toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est vide.
2. En déduire que $\mathbb{R}$ ne peut pas être dénombrable.

Solution

1. C'est une écriture équivalente de l'exercice précédent. En clair,

9. René Baire est né le 21 janvier 1874 à Paris et mort le 5 juillet 1932 à Chambéry. Il est, avec Emile Borel et Henri Lebesgue un des mathématiciens français du début du 20ème siècle dont les idées nouvelles ont le plus influencé le développement de l'analyse.

si (F_n) est une suite de fermés d'intérieurs vides de $(\mathbb{R},|.|)$ alors $(C_{\mathbb{R}}F_n)$ serait une suite d'ouverts partout denses. Donc, d'après Baire:

$$\mathbb{R} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (C_{\mathbb{R}}F_n)} = \overline{C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)} = C_{\mathbb{R}}\overset{\circ}{\overbrace{\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)}}.$$

D'où

$$\overset{\circ}{\overbrace{\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)}} = \phi.$$

2. En effet, si $\mathbb{R}$ était dénombrable il s'écrirait sous la forme:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}.$$

Or les singletons sont fermés d'interieur vide, donc $\mathbb{R}$ serait, d'après le théorème de Baire, d'intérieur vide, ce qui est absurde.

1.7 Quelques problèmes de plus

Exercice 28

Soient a et b (a < b) deus réels et $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'ouverts telle que:

$$[a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda .$$

Démontrer qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in L\subset\Lambda}$ (L finie) telle que

$$[a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in L} \Omega_\lambda .$$

Solution

Désignons par A l'ensemble des élément x de $[a,b]$ tels que, pour une partie convenable J de Λ on ait:

$$[a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in J} \Omega_\lambda$$

Il est clair que A n'est pas vide, puisqu'il renferme a. De plus, Il e[s]
majoré par b. On affirme ainsi que A admet une borne supérieure
dans $[a,b]$. Soient λ_0 un indice de Λ tel que c soit dans Ω_{λ_0} et α u[n]
réel strictement positif tel que $]c-\alpha, c+\alpha[\subset \Omega_{\lambda_0}$. Si l'on prend u[n]
point x de $A\cap\,]c-\alpha, c]$ et une partie finie J de Λ telle que

$$[a,x]\subset \bigcup_{\lambda\in J}\Omega_\lambda$$

on voit que c appartient à A, car

$$[a,c]\subset \bigcup_{\lambda\in J\cup\{\lambda_0\}}\Omega_\lambda .$$

Maintenant, si c < b on obtient, en posant $c+\mathrm{Min}\left(\frac{b-c}{2},\frac{\alpha}{2}\right)=c'$:

$$c<c' \text{ et } [a,c']\subset \bigcup_{\lambda\in J\cup\{\lambda_0\}}\Omega_\lambda ;$$

ce qui montre l'appartenance de c' à A. Or cela est en contradictio[n]
avec c = Sup A, donc seule reste l'éventualité c = b.

Remarque: Ce résultat est du à Borel[10]-Lebesgue[11].

Exercice 29

Démontrer que toute partie infinie et bornée de $\mathbb{R}$ admet un poi[nt]
d'accumulation.

Solution

Soit A une partie infinie bornée de $\mathbb{R}$. Elle est incluse dans un

10. Emile Borel, mathématicien français, est né le 7 janvier 1871 à Sain[t]-Affrique et mort le 3 février 1956 à Paris. Il est, avec Baire et Lebesgue, l[e] fondateur de la théorie de la mesure et de l'étude moderne des fonctions. Il a aussi grandement contribué au déveleppement du calcul des probabilités.

11. Henri Léon Lebesgue, mathématicien Français, est né le 28 juin 1875 à Beauvais et mort le 26 juillet 1941 à Paris. Il soutient sa thèse en 1902, sous le titre *Intégrale, longueur, aire*. Dans cette thèse, Lebesgue présente la théori[e] d'une nouvelle intégrale, qui porte son nom de nos jours.

intervalle fermé et borné $[a,b]$. Supposons maintenant qu'elle ne contient aucun point d'accumulation. Il en ressort alors que tout point x de $[a,b]$ admet un voisinage ouvert $]x-\rho_x, x+\rho_x[$ ne rencontrant A qu'au plus en un point, x lui-même. La famille $(]x-\rho_x, x+\rho_x[)_{x\in[a,b]}$ constitue un recouvrement ouvert pour $[a,b]$. On peut, grâce à l'exercice précédent, affirmer qu'il existe une sous-famille finie $\left(]x_i-\rho_{x_i}, x_i+\rho_{x_i}[\right)_{1\le i\le p}$ telle que :

$$[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{p}]x_i-\rho_{x_i}, x_i+\rho_i[.$$

D'où:

$$A=A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{p}]x_i-\rho_{x_i}, x_i+\rho_i[\right)=\bigcup_{i=1}^{p}\left(A\cap]x_i-\rho_i+x_i+\rho_i[\right).$$

Or l'ensemble $A\cap]x_i-\rho_i, x_i+\rho_i[$ ne contient qu'un point au plus (x_i lui-même) donc le nombre d'éléments de A ne peut, au plus, dépasser p. C'est la contradiction recherchée!

Remarque: Ce résultat est dû à Bolzano[5]-Weierstrass[6].

***Exercice* 30**

Démontrer que toute suite réelle bornée admet (au moins) une valeur d'adhérence.

Solution

Rappelons, tout d'abord, que tout point d'accumulation de l'ensemble des valeurs d'une suite est une valeur d'adhérence pour

5. Bernhard Bolzano, mathématicien et philosophe tchèque de langue allemande, est né en 1781 et mort en 1848 à Prague. Ses travaux portent essentiellement sur les fonctions, la logique et la théorie des nombres.

6. Karl Théodore Weierstrass, mathématicien allemand, est né le 31 octobre 1815 à Ostenfelde et mort le 19 février 1897 à Berlin. Son œuvre mathématique renferme la théorie des fonctions abéliennes et elliptiques et la théorie des fonctions analytique. L'histoire retient qu'en 1877, il s'oppose à son collègue, et pourtant ami, Kronecker au sujet des découvertes troublantes de Cantor.

cette suite.

Soit (u_n) une suite réelle bornée. Posons:

$$U = \{u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots\}.$$

Nous distinguons deux cas.

i) Si U est infinie, l'exercice précédent assure que U admet un point d'accumulation. Ce point est donc une valeur d'adhérence pour (u_n).

ii) Si U est finie, il est plausible d'extraire de (u_n) une sous-suite constante dont la limite constitue une valeur d'adhérence pour (u_n).

Remarque: Ce résultat est dû à Bolzano-Weierstrass.

Exercice 31

Montrer que, dans $(\mathbb{R}, |.|)$, toute suite de Cauchy[14] est convergente.

Solution

Soit (u_n) une telle suite. Elle est bornée. Grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut, en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)}) = (v_n)$ convergente (φ est l'application d'extraction). Posons $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = L$ puis montrons que (u_n) converge vers L. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_1 de $\mathbb{N}$ tel que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_1 \;\Rightarrow\; |v_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, la suite (u_n) étant de Cauchy, on affirme qu'il existe un entier naturel n_2 tel que

$$\forall\, p, q \in \mathbb{N} \quad p > q \geq n_2 \;\Rightarrow\; |u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

14. Augustin Louis Cauchy, né le 21 août 1789 à Paris et mort le 23 mai 1857 à Sceaux, est le mathématicien français le plus prolifique. Son oeuvre scientifique renferme plus de 800 articles sur les sujets mathématiques et physiques les plus variés. Il est à l'origine de l'analyse moderne. On lui doit notamment la théorie des équations différentielles.

Posons Max $(n_1, n_2) = n_0$. Il vient:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |u_n - L| = |u_n - v_n + v_n - L| \leq |u_n - v_n| + |v_n - L|$$

$$\leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi, (u_n) converge vers L.

Exercice 32

Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

i) Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, tout point a admet un système fondamental de voisinages fermés.

ii) Pour tout fermé F de $(\mathbb{R}, |.|)$ et tout x de $C_{\mathbb{R}}F$, il existe deux ouverts disjoints Ω_F et Ω_x tels que $F \subset \Omega_F$ et $x \in \Omega_x$.

Solution

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Soient F un fermé de $\mathbb{R}$ et x un élément de l'ouvert $C_{\mathbb{R}}F$. Le point x jouït, d'après (i), d'un voisinage fermé W contenu dans $C_{\mathbb{R}}F$. Il en ressort que F est inclus dans $C_{\mathbb{R}}W$. Le choix de $\overset{o}{W} = \Omega_x$ et $C_{\mathbb{R}}W = \Omega_F$ termine (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i)

On peut, sans restreindre de généralité, se suffire du cas d'un voisinage ouvert V de x. Appliquons alors la propriété (ii) aux deux parties fermées $\{x\}$ et $C_{\mathbb{R}}V$. Si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints le premier contenant x et le second $C_{\mathbb{R}}V$, on obtient:

$$x \in \Omega_1 \subset C_{\mathbb{R}}\Omega_2 \subset V.$$

Comme $C_{\mathbb{R}}\Omega_2$ est fermé on peut affirmer que:

$$\overline{\Omega_1} \subset C_{\mathbb{R}}\Omega_2 \subset V.$$

On déduit que le voisinage ouvert V contient un voisinage fermé $\overline{\Omega_1}$ de x, ce avec quoi s'achève (i).

Exercice 33

Soient $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ la famille des intervalles ouverts de $(\mathbb{R},|.|)$ et A une partie non vide. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (I_\lambda \cap A)_{\lambda\in\Lambda}$ constitue une base pour la topologie induite σ_A de A.

Solution

Soit O un ouvert de σ_A. Il existe par définition un ouvert Ω de σ tel que $\Omega \cap A = O$. Or Ω est réunion d'intervalles ouverts $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = \Omega$, on écrit donc:

$$O = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) \cap A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (I_\lambda \cap A).$$

Comme $I_\lambda \cap A$ est un élément de $\mathcal{B}$, on conclut que celle-ci constitue une base pour σ_A.

Exercice 34

Soit F un sous-ensemble fermé d'intérieur vide et Ω un ouvert non vide dans $(\mathbb{R},|.|)$. Démontrer l'existence d'un intervalle ouvert I inclus dans Ω et ne rencontrant pas F.

Solution

Soient F un fermé d'intérieur vide $(\mathbb{R},|.|)$. l'ensemble $C_{\mathbb{R}} F = O$ est un ouvert partout dense. Il rencontre tout ouvert non vide Ω. En éffet, si tel n'était pas le cas, il existerait un ouvert U contenu dans F, ce qui conterdirait l'inexistence de points intérieurs dans F. On en déduit que $O \cap \Omega$ est non vide. De plus, c'est un ouvert. Par conséquent, il s'écrit sous forme d'une réunion d'intervalles ouverts. On conclut qu'il existe (au moins) un intervalle ouvert I contenu dans $O \cap \Omega$, donc dans Ω.

Exrcice 35

1. Démontrer que tout ouvert non vide de $(\mathbb{R},|.|)$ est réunion dénombrable de fermés.

2. En déduire que tout fermé non vide de $(\mathbb{R},|.|)$ est une intersec-

tion dénombrable d'ouverts.

Solution

1. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul F on pose:

$$A_n = \left\{ x \in \Omega / \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[\subset \Omega \right\}.$$

Les sous-ensembles A_n ne sont pas tous vides du fait que Ω est ouvert non vide. De plus, ils vérifient $A_n \subset A_{n+1}$. Par ailleurs, si y est un élément de $\overline{A_n}$, l'intervalle $\left] y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n} \right[$ contient un point x de A_n. Donc, y appartient à $\left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[$. Par conséquent, il est dans Ω. On a ainsi obtenu:

$\overline{A_n} \subset \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D'où:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{A_n} \subset \Omega. \qquad (*)$$

D'autre part, on remarque que pour tout x de Ω, il existe un indice n tel que x appartient à (Ω étant ouvert, il contient l'intervalle $\left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[$). Donc:

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{A_n}. \qquad (**)$$

La conjonction de (*) et (**) donne l'égalité recherchée:

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{A_n}.$$

2. Si F est un fermé non vide de $\mathbb{R}$ son complémentaire est un ouvert non vide. Celui-ci peut se mettre, grâce à la question (1) sous la forme:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n = C_{\mathbb{R}} F$$

où (K_n) est une suite de fermés de $\mathbb{R}$. D'où:

$$F = C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} K_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} C_{\mathbb{R}} K_n.$$

$C_{\mathbb{R}}K_n$ étant un ouvert, la question est achevée.

Exercice 36

Soit A un sous-ensemble de $(\mathbb{R},|.|)$. Démontrer que:

A est borné $\Leftrightarrow \left(\forall V \in \mathcal{V}(0)\ \exists \rho > 0 : |\lambda| \geq \rho \Rightarrow A \subset \lambda V\right)$

Solution

$\Rightarrow$)

Si A est un sous-ensemble borné, il existe par définition, deux réels a et b tels que $A \subset [a,b]$. Or l'intervalle $[a,b]$ est inclus d $[-c,c]$, où $c = Max\{|a|,|b|\}$, donc:

$A \subset [-c,c]$.

Maintenant, soit V un voisinage de zéro. Il existe un réel $\alpha > 0$ que $[-\alpha,\alpha] \subset V$. Si l'on pose $\frac{c}{\alpha} = \rho$ il vient clairement:

$$|\lambda| \geq \rho \Rightarrow c \leq \alpha|\lambda| \Rightarrow [-c,c] \subset [-\alpha|\lambda|, \alpha|\lambda|].$$

Comme

$$[-\alpha|\lambda|, \alpha|\lambda|] \subset \lambda[-\alpha,\alpha]$$

on déduit:

$$|\lambda| \geq \rho \Rightarrow A \subset [-c,c] \subset \lambda[-\alpha,\alpha] \subset \lambda V.$$

($\Leftarrow$

Supposons que A satisfait à la contrainte posée. On sait que:

$$V = [-1,1] \in \mathcal{V}(0).$$

Donc:

$$\exists \rho > 0 / A \subset \rho V.$$

Or

donc,

$$\rho V = [-\rho, \rho],$$

$$A \subset \left[-\rho, \rho\right].$$

Par suite, A est borné.

Exercice 37

1. Soit a un nombre rationnel. Construire deux suites convergentes vers a, l'une rationnelle et l'autre irrationnelle.

2. Répondre à la même question en prenant a irrationnel.

3. En déduire que $\mathbb{Q}$ et $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ ne sont pas complets.

Solution

1. Si a est un nombre rationnel, on peut de diverses manières le rendre limite de plusieurs (infinité en réalité) suites rationnelles, dont la plus simple est la constante $u_n = a$. Ainsi, les suites $u_n = a+\dfrac{1}{n}$,

$v_n = a-\dfrac{2}{1+n}$ et $w_n = a+\dfrac{n^2}{1+n^3}$ sont, à titre d'exemples, rationnelles convergeant vers a.

De même, tout rationnel a peut être limite de suites irrationnelles. C'est le cas, par exemple, des suites $t_n = a+\dfrac{\sqrt{2}}{n}$, $x_n = a+e^{-n}$,

$y_n = a+\dfrac{\pi}{n^2}$ et $z_n = a\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$.

2. Si a est un nombre irrationnel, on peut, comme précédemment, trouver une infinité de suites irrationnelles convergentes le prenant comme limite. On peut, à titre indicatif, citer les suites $q_n = a$,

$r_n = a+\dfrac{1}{n}$, $s_n = a+\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ et $t_n = a+\dfrac{n^4}{n^5-n+10}$.

Enfin, si a est irrationnel, la suite rationnelle $\left(\dfrac{[na]+1}{n}\right)$ converge vers a. En effet, on sait que:

$$na < [na]+1 \leq na+1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$a < \frac{[na]+1}{n} \leq a+\frac{1}{n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Le théorème des gendarmes (de l'encadrement) permet de conclure.

3. $\mathbb{Q}$ et $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ ne peuvent pas être complets, puisque chacun d'eux contient des suites de Cauchy dont les limites sont dans l'autre. Ces suites ne peuvent-être convergentes dans le sous-espace considéré.

Exercice 38

En utilisant la caractérisation par les suites, montrer que les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés.

Solution

Soient (u_n) une suite convergente d'entiers naturels et L sa limite. On écrit par définition:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \ \Rightarrow\ u_n \in \left]L-\varepsilon, L+\varepsilon\right[. \qquad (*)$$

Si L n'appartient pas à $\mathbb{N}$ alors deux cas possibles se présentent:

i) $L < 0$

En prenant $\varepsilon = \frac{|L|}{2}$,on constate que l'intervalle

$$\left]L-\frac{|L|}{2}, L+\frac{|L|}{2}\right[= \left]\frac{3L}{2}, \frac{L}{2}\right[$$

ne contient aucun élément de notre suite, ce qui conterdit (*).

ii) $L > 0$

Il est clair que l'intervalle ouvert $][L], [L]+1[$ contient L et ne renferme aucun entier naturel. Si l'on choisit un réel positif ε_0 tel que

$$\varepsilon_0 \leq \mathrm{Min}\,(L-[L], [L]+1-L)$$

on voit que l'intervalle $\left]L-\varepsilon_0, L+\varepsilon_0\right[$, contenu dans $][L], [L]+1[$, ne contient à son tour aucun entier naturel, donc aucun terme de notre suite. C'est en contradiction avec (*).

Le cas de $\mathbb{Z}$ se traite de même.

Exercice 39

Déterminer les valeurs d'adhérence des suites réelles suivantes:

$$u_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad ; \quad v_n = \frac{1}{n} + (1+(-1)^n)$$

$$w_n = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) ; \quad x_n = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Solution

Les suites (u_n) et (v_n) admettent deux sous-suites convergentes chacune. En clair, on a:

$u_{2n} = 1+\frac{1}{2n}$, convergeant vers 1,

$u_{2n+1} = -1-\frac{1}{2n+1}$, convergeant vers -1,

$v_{2n} = \frac{1}{2n} + 2$, convergeant vers 2,

$v_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$, convergeant vers 0.

On conclut que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est $\{-1,1\}$, celui de la suite (v_n) est $\{0,2\}$.

Concernant la suite $w_n = \sin n\frac{\pi}{4} + \sin n\frac{\pi}{2}$, on observe comme précédemment, que ses seules sous-suites convergentes sont:

$w_{4n} = 0$, $w_{8n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})$, $w_{8n+2} = 1$, $w_{8n+3} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})$,

$w_{8n+5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})$, $w_{8n+6} = -1$ et $w_{8n+7} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})$.

Ainsi, l'ensemble de ses valeurs d'ahérence est:

$$\left\{0, \pm 1, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2}), \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})\right\}.$$

Enfin, le même traitement donne pour la dernière suite l'ensemble:

$$\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Exercice 40

Montrer que si une suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $p_n\in\mathbb{Z}$ et $q_n\in\mathbb{N}^*$ converge vers un irrationnel a alors:

$$\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to\infty} p_n = \pm\infty.$$

Solution

On procède par l'absurde. Si la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était bornée dans $\mathbb{N}$ elle admettrait une sous-suite (stationnaire) convergente $(q_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vers un entier naturel q. Comme la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée on déduit que la sous-suite $\left(\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est, elle aussi bornée. Il en résulte que la sous-suite $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}$ est bornée. Celle-ci admet alors une sous-suite (stationnaire) convergente $(p_{n_{k'}})_{k'\in\mathbb{N}}$ vers un entier p. Il en ressort que la sous-suite $\left(\frac{p_{n_{k'}}}{q_{n_{k'}}}\right)_{k'\in\mathbb{N}}$ converge vers le rationnel $\frac{p}{q}$. Cela est en contradiction avec l'unicité de la limite, puisque cette sous-suite convergeait déja vers l'irrationnel a.

Exercice 41

1. Démontrer que pour qu'une suite réelle soit convergente il faut et il suffit que ses deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite.

2. En déduire que si les sous-suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes alors la suite (u_n) l'est aussi.

Solution

1. Il s'agit bien entendu de démontrer que la condition est suffisante. Posons L la limite commune des deux sous-suites citées et

montrons que la suite (u_n) converge vers L. On a:

$$L = \lim_{n \to \infty} u_{2n} \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0 \Rightarrow |u_{2n} - L| \leq \varepsilon\right)$$

$$L = \lim_{n \to \infty} u_{2n+1} \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_1 \Rightarrow |u_{2n+1} - L| \leq \varepsilon\right)$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \mathrm{Max}(n_0, n_1) \Rightarrow \begin{cases} |u_{2n} - L| \leq \varepsilon, \\ |u_{2n+1} - L| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

En posant $2 \,\mathrm{Max}(n_0, n_1) = n_2$ il vient:

$$n \geq n_2 \Rightarrow n = n_2 + k \ ; k \in \mathbb{N}.$$

Si k est pair on peut écrire $n = 2(\mathrm{Max}(n_0, n_1) + k')$, k' étant dans $\mathbb{N}$. On assure donc que:

$$|u_n - L| = |u_{2n'} - L| \leq \varepsilon,$$

avec $n' = \mathrm{Max}(n_0, n_1) + k' \geq \mathrm{Max}(n_0, n_1)$

Si k est impair, n prend la forme $n = 2\left(\mathrm{Max}(n_0, n_1) + k''\right) + 1$, $k'' \in \mathbb{N}$, ce qui permet d'avoir

$$|u_n - L| = |u_{2n''} - L| \leq \varepsilon$$

avec $n'' = \mathrm{Max}(n_0, n_1) + k'' \geq \mathrm{Max}(n_0, n_1)$. Ainsi, la suite (u_n) converge vers L.

2. Il suffit, eu égard à la première question, de démontrer que les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.

Posons

$$L_1 = \lim_{n \to \infty} u_{2n+1} \ ; \ L_2 = \lim_{n \to \infty} u_{2n} \ ; \ L_3 = \lim_{n \to \infty} u_{3n}$$

On remarque que la sous-suite (u_{6n}) est extraite à la fois de (u_{2n}) et (u_{3n}). Par conséquent, on obtient:

$$L_3 = \lim_{n \to \infty} u_{3n} = \lim_{n \to \infty} u_{6n} = \lim_{n \to \infty} u_{2n} = L_2.$$

C'est le cas aussi pour la sous-suite (u_{6n+3}), extraite à la fois de

(u_{2n+1}) et (u_{3n}), qui permet d'avoir:

$$L_1 = \lim_{n \to \infty} u_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} u_{6n+3} = \lim_{n \to \infty} u_{3n} = L_3 .$$

Ainsi, on trouve $L_2 = L_3 = L_1$. C'est l'égalité voulue.

Exercice 42

Soit A une partie bornée de $(\mathbb{R}, |.|)$. On pose:

$$B = \left\{ z = |x-y| \in \mathbb{R}_+ \ ; \ x, y \in A \right\}.$$

a) Montrer que B est borné.

b) On pose $\operatorname{Sup} B = \delta(A)$.

i) Montrer que

$$\delta(A) \leq \operatorname{Sup} A - \operatorname{Inf} A.$$

ii) Montrer que:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x_\varepsilon, y_\varepsilon \in A : |x_\varepsilon - y_\varepsilon| \geq \operatorname{Sup} A - \operatorname{Inf} A - 2\varepsilon.$$

iii) En déduire que:

$$\delta(A) = \operatorname{Sup} A - \operatorname{Inf} A.$$

Solution

a) On a:

$$\forall \ z \in B \ \ z = |x-y| \ ; \ x, y \in A.$$

D'où

$$0 \leq z \leq |x| + |y| \leq 2 \operatorname{Sup} A.$$

B est donc borné.

b-i) On a:

$$\forall \ x, y \in A \ \ x \leq \operatorname{Sup} A, \ \ y \geq \operatorname{Inf} A.$$

D'où

$$x - y \leq \operatorname{Sup} A - \operatorname{Inf} A. \qquad (*)$$

De même, on a:

$$\forall \ x, y \in A \ \ x \geq \operatorname{Inf} A , \ y \leq \operatorname{Sup} A.$$

D'où

$$x - y = -(y - x) \geq -(\operatorname{Sup} A - \operatorname{Inf} A). \qquad (**)$$

La conjonction de (*) et (**) entraîne $|x-y| \leq \sup A - \inf A$, ce qui assure

$$\delta(A) = \operatorname*{Sup}_{x,y\in A} |x-y| \leq \operatorname{Sup} A - \operatorname{Inf} A.$$

ii) Rappelons les propriétés caractéristiques des bornes supérieure et inférieure:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in A \,/\, \operatorname{Sup} A - \varepsilon < x_\varepsilon \leq \operatorname{Sup} A,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists y_\varepsilon \in A \,/\, \operatorname{Inf} A \leq y_\varepsilon < \operatorname{Inf} A + \varepsilon.$$

Il vient:

$$\operatorname{Sup} A - \operatorname{Inf} A - 2\varepsilon < x_\varepsilon - y_\varepsilon \leq \operatorname{Sup} A - \operatorname{Inf} A.$$

D'où

$$\operatorname{Sup} A - \operatorname{Inf} A - 2\varepsilon < x_\varepsilon - y_\varepsilon \leq |x_\varepsilon - y_\varepsilon| \leq \operatorname{Sup} A - \operatorname{Inf} A.$$

iii) C'est une conséquence immédiate des questions (i) et (ii).

Exercice 43

Montrer que l'intersection de chacune des suites d'intervalles suivantes est vide:

i) $\left]0,a\right] \supset \left]0,\frac{a}{2}\right] \supset \dots \supset \left]0,\frac{a}{n}\right] \supset \dots ; \quad a > 0,$

ii) $\left]\alpha,\alpha+a\right] \supset \left]\alpha,\alpha+\frac{a}{2}\right] \supset \dots \supset \left]\alpha,\alpha+\frac{a}{n}\right] \supset \dots,$

iii) $\left[\alpha-a,\alpha\right[\supset \left[\alpha-\frac{a}{2},\alpha\right[\supset \dots \supset \left[\alpha-\frac{a}{n},\alpha\right[\supset \dots,$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

Solution

i) Posons:

$$A = \left]0,a\right] \cap \left]0,\frac{a}{2}\right] \cap \dots \cap \left]0,\frac{a}{n}\right] \cap \dots = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0,\frac{a}{n}\right].$$

On a immédiatement:

$$A = \left]0, \operatorname*{Inf}_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a}{n}\right] = \phi.$$

ii) Posons:

$$B = \bigcap_{n\in \mathbb{N}^*} \left]\alpha, \alpha + \frac{a}{n}\right].$$

Supposons que B ne soit pas vide. Il en découle qu'il existe un point b de B tel que b-α soit un point de A. C'est absurde, car celui-ci est vide. Conclusion: B est vide.

iii) Raisonner comme en ii).

Exercice 44

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que A et son complémentaire $C_{\mathbb{R}}A$ soient ouverts.

1. Montrer que A n'est pas bornée.

2. On suppose que $C_{\mathbb{R}}A \neq \phi$ et on considère un point b de $C_{\mathbb{R}}A$.

On pose:

$$B = \left\{t\in A \,/\, t > b\right\}.$$

Montrer que B n'est pas vide et qu'elle admet une borne inférieure m.

3. a) Montrer que m n'appartient ni à A ni à $C_{\mathbb{R}}A$.

b) En déduire que $A = \mathbb{R}$.

Solution

1. Si A était borné il admettrait une borne supérieure M = sup A. Deux cas possibles se présentent.

i) $M\in A$

Comme A est ouvert, on peut avoir:

$$\exists\, r > 0 \,/\,]M-r, M+r[\subset A.$$

Autrement dit, M n'est plus la borne supérieure de A. Absurde!

ii) $M\notin A$

M est alors dans $C_{\mathbb{R}}A$. Celui-ci étant ouvert, on peut, comme précédemment, affirmer que:

$$\exists\, r > 0 \,/\,]M-r, M+r[\subset C_{\mathbb{R}}A. \tag{*}$$

Or la propriété caractéristique de la borne supérieure stipule que:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, x_\varepsilon \in A \,/\, M-\varepsilon < x_\varepsilon \leq M;$$

donc, pour $\varepsilon = r$, le point x_ε de A serait dans $C_{\mathbb{R}}A$. Absurde!

Ainsi, on conclut que A est non borné.

2. Si B était vide A serait majoré par b. comme A est non borné, il est donc non minoré. On déduit que A est de la forme $]-\infty, b[$; ce qui donne immédiatement $C_{\mathbb{R}}A = [b,+\infty[$ et conduit à une contradiction avec $C_{\mathbb{R}}A$ ouvert. Ainsi, B n'est pas vide.

Par ailleurs, B est par construction minoré par b. Par conséquent, il admet une borne inférieure, notée m.

3.a) Supposons par l'absurde que m soit dans A. Celui-ci étant ouvert, on écrit:

$$\exists\, r > 0 \,/\,]m-r, m+r[\subset A.$$

Il en résulte que tous les éléments de l'intervalle $]m-r, m[$ sont dans B. Cela est en contradiction avec la définitin de m.

Supposons maintenant que m soit dans $C_{\mathbb{R}}A$. on peut, grâce à la propriété caractéristique de la borne inférieure, écrire:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, x_\varepsilon \in B \,/\, m \leq x_e < m+\varepsilon.$$

De plus, $C_{\mathbb{R}}A$ étant ouvert, on écrit:

$$\exists\, r > 0 \,/\,]m-r, m+r[\subset C_{\mathbb{R}}A.$$

On déduit que pour $\varepsilon = r$, il existe un point x_ε dans B (donc dans A) tel que

$$x_\varepsilon \in \;]m-r, m+r[\subset C_{\mathbb{R}}A.$$

Absurde.

Conclusion: m n'est ni dans A ni dans son complémentaire.

b) Il ressort du raisonnement mené ci-dessus que l'hypothèse " $C_{\mathbb{R}}A \neq \phi$" n'est pas plausible. On conclut que $C_{\mathbb{R}}A = \phi$ et donc $A = \mathbb{R}$.

Exercice 45

Soit G un sous-groupe additif de $(\mathbb{R}, |.|)$.

1. Montrer que:

$$x \in G \quad \Rightarrow \quad n\, x \in G, \;\; \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

2. En déduire l'équivalence des trois assertions:

i) $\overline{G} = \mathbb{R}$.
ii) G admet au moins un point d'accumulation.
iii) 0 est un point d'accumulation de G.

3. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes:

α) G discret.

β) 0 est point isolé de G.

γ) $G = a\,\mathbb{Z} = \left\{na,\ n\in \mathbb{Z}\ ;\ a>0\right\}$.

4. Déterminer alors les sous-groupes fermés de $(\mathbb{R},|.|)$.
5. Préciser si les sous-groupes ci-après sont discrets ou denses dans $\mathbb{R}$:

α) $G_1 = \mathbb{Z}$.

β) $G_2 = \mathbb{Q}$.

γ) $G_3 = \left\{a + b\,u\ ;\ a,b\in \mathbb{Z}, u\notin \mathbb{Q}\right\}$.

θ) $G_4 = \left\{2\,a + 3\,b\ ;\ a,b\in \mathbb{Z}\right\}$.

Solution

1. Rappelons que:

G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x,y\in G \Rightarrow (x+y)\in G, \\ x\in G \Rightarrow -x\in G. \end{cases}$

Soit n un entier naturel. Si x et (n-1) x sont deux éléments de G, alors $nx = (n-1)\,x + x$ appartient à G. D'où:

Par suite:
$$nx\in G \Rightarrow -(nx) = (-n)\,x\in G.$$

$$x\in G \Rightarrow nx\in G, \quad \forall\, n\in \mathbb{Z}.$$

2. i) $\Rightarrow$ ii)

Etant donné que $\mathbb{R}$ n'admet aucun point isolé, toute partie partout dense de $\mathbb{R}$ admet au moins un point d'accumulation. C'est le cas de G.

ii) $\Rightarrow$ iii)

Soit a un point d'accumulation de G. Tout voisinage de a contient alors une infinité de points de G. On a:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x,y \in G,\ x \neq y \,/\, x,\ y \in \left]a - \frac{\varepsilon}{2},\ a + \frac{\varepsilon}{2}\right[.$$

Or $x-y \in G$ et $|x-y| < \varepsilon$, donc:

$$\forall\, \varepsilon > 0\quad \exists\, z \neq 0 \,/\, z \in G \cap \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[;$$

ce qui signifie que 0 est un point d'accumulation de G.

iii) $\Rightarrow$ i)

Soit $]a,\beta[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Supposons que 0 soit un point d'accumulation de G. Il existe donc un élément non nul y de G tel que:

$$|y| < \frac{\beta - \alpha}{2}. \tag{*}$$

En vertu de la question (1), il apparaît clairement que tous les points ny ($n \in \mathbb{Z}$) appartiennent à G. Comme x vérifie la relation (*), on peut affirmer qu'il existe un entier n_0 de $\mathbb{Z}$ tel que:

$$n_0 y \in]a,\beta[.$$

D'où:

$$G \cap]a,\beta[\neq \phi.$$

Conclusion: $\overline{G} = \mathbb{R}$.

3. α) $\Rightarrow$ β)

G étant discret, tous ses points sont isolés. En particulier, 0 est un point isolé.

β) $\Rightarrow$ γ)

0 ne pouvant pas être un point d'accumulation, fait que G n'admet, en fait, aucun point d'accumulation d'après la question précédente. Par conséquent, G est fermé. Supposons que $G \neq \{a\}$ et posons:

$$a = \operatorname{Inf}\{g \in G \,/\, g > 0\}.$$

a existe et est strictement positif, car 0 est isolé dans le fermé G. Il en résulte, grâce à la question (1), que:

$$a\,\mathbb{Z} \subset G.$$

D'autre part, si $x \in G$ il existe un élément unique n_0 de $\mathbb{Z}$ sati faisant à:

$$x = n_0 a + r\ ,\quad 0 < r < a.$$

Comme $r = x - n_0 a \in G$ on en déduit, conformément à la définition a, que r est nul. Donc:

$$a\,\mathbb{Z} = G.$$

$\gamma) \Rightarrow \alpha)$

Si $a = 0$, alors $G = \{0\}$ est évidemment discret.

Si $a > 0$, alors pour tout n de $\mathbb{Z}$ on a:

$$](n-1)\,a, (n+1)\,a[\ \cap\ G = \{n\,a\}.$$

On en conclut de même que G est discret.

4. D'après les questions (2) et (3), il ressort que pour un grou G quelconque, le point 0 est soit isolé soit d'accumulation. Si de pl G est fermé alors soit $G = a\mathbb{Z}$ ou $G = \{0\}$, soit $\overline{G} = \mathbb{R}$, donc G $\mathbb{R}$. Les sous-groupes fermés de $(\mathbb{R}, |.|)$ sont donc $\{0\}$, $\mathbb{R}$ et les a avec $a > 0$.

5. On a facilement:

$\alpha)$ $G_1 = \mathbb{Z}$ est discret.

$\beta)$ $G_2 = \mathbb{Q}$ est partout dense dans $\mathbb{R}$.

$\gamma)$ $G_3 = \{a+bu\ ;\ a,b \in \mathbb{Z}, u \notin \mathbb{Q}\}$ n'est pas de la forme $a\,\mathbb{Z}$, car est irrationnel. Il s'en suit que G_3 est partout dense dans $\mathbb{R}$.

$\theta)$ $G_4 = \{2a + 3b\ ;\ a,b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$, car les nombres 2 et 3 so premiers entre eux. Conséquence: G_4 est discret.

2

Espaces topologiques: Propriétés générales

2.1 Ouverts, fermés

Exercice 46

Un espace topologique est la donnée d'un couple formé d'un ensemble non vide E et d'une sous-famille de ses parties τ satisfaisant aux trois conditions, connues sous l'appellation d'**axiomes de Hausdorff:**

O_1 : $\mathbb{R}$ et ϕ appartiennent à τ.

O_2 : τ est stable par réunion (**finie ou infinie**), c'est-à-dire:

$$\forall\ (\Omega_i)_{i\in I} \subset \tau \quad \bigcup_{i\in I} \Omega_i \in \tau.$$

O_3 : τ est stable par intersection **finie**, c'est-à-dire :

$$\forall\ (\Omega_j)_{j\in J} \subset \tau \ \text{(J finie)} \quad \bigcap_{j\in J} (\Omega_j \in \tau.$$

$(\mathbb{R},|.|)$ en est un exemple fondamental.

Les éléments de τ sont dits ensembles ouverts de (E,τ) ou ouverts tout court

1. i) Dire si les familles $\tau_1 = \{\phi,E,\{a\}\}$ et $\tau_2 = \{\phi,E,\{b\}\}$ sont des topologies sur $E = \{a,b\}$ ou non.

ii) Donner toutes les autres topologies possibles sur E.

2. Montrer que les couples $(E,\{\phi,E\})$ et $(E,\mathcal{P}(E))$ sont des

espaces topologiques pour tout ensemble non vide E.

3. Soit E un ensemble infini et τ une famille constituée de ϕ et de toute partie de E dont le complémentaire est fini. Montrer que τ forme une topologie sur E.

Solution

1. i) Oui, elles le sont. Elles verifient trivialement les trois axiomes de Hausdorff.

ii) Les autres topologies possibles sur E sont:

$$\tau_3 = \{\phi, E\}, \tau_4 = \{\phi, E, \{a\}, \{b\}\}.$$

2. C'est aussi clair que la question précédente. Signalons juste au passage que le premier espace s'appelle **espace grossier**, le second s'appelle **espace discret**.

3. Vérifions que τ satisfait aux trois axiomes précités. On a:

i) $\phi \in \tau$ par construction et $E \in \tau$ car $C_E E = \phi$ est fini. D'où O_1.

ii) Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une sous-famille de τ. A-t-on $\bigcup_{i \in I} \Omega_i \in \tau$? Pour tout $i \in I$, $C_E \Omega_i$ est fini, donc

$$C_E \left(\bigcup_{i \in I} \Omega_i \right) = \bigcap_{i \in I} C_E \Omega_i$$

l'est aussi; par suite $\bigcup_{i \in I} \Omega_i \in \tau$. D'où O_2.

iii) Pour vérifier O_3 il suffit de considérer deux éléments de τ. Ainsi, si Ω_1 et Ω_2 sont ces deux éléments alors $C_E \Omega_1$ et $C_E \Omega_2$ sont finis. Il en résulte que

$$C_E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = C_E \Omega_1 \cup C_E \Omega_2$$

est fini et donc $\Omega_1 \cap \Omega_2 \in \tau$, ce qui achève O_3.

Il y a lieu d'observer que:

a) τ est dite **topologie cofinie** (ou de Zariski[15]).

b) En changeant le terme " fini " par le terme " dénombrable " on obtient une autre topologie sur E (non dénombrable) dite topologie **codénombrable**.

Exercice 47

1. Déterminer toutes les topologies possibles sur un ensemble de trois éléments.

2. Que peut-on dire d'un ensemble sur lequel coïncident les topologies grossière et discrète?

3. On considère dans $\mathbb{Z}$ la famille $\tau = \left\{\phi, \left\{n\,\mathbb{Z}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\right\}$. Est-elle une topologie sur $\mathbb{Z}$?

Solution

1. Soit $E = \{a,b,c\}$. On a comme précédemment:

$$\tau_1 = \{\phi,E\} \text{ (grossière)},$$

$$\tau_2 = \{\phi,E,\{a\}\},\ \tau_3 = \{\phi,E,\{b\}\},\ \tau_4 = \{\phi,E,\{c\}\},$$

$$\tau_5 = \{\phi,E,\{a,b\}\},\ \tau_6 = \{\phi,E,\{a,c\}\},\ \tau_7 = \{\phi,E,\{b,c\}\},$$

$$\tau_8 = \{\phi,E,\{a\},\{a,b\}\},\ \tau_9 = \{\phi,E,\{a\},\{a,c\}\},\ \tau_{10} = \{\phi,E,\{a\},\{b,c\}\},$$

$$\tau_{11} = \{\phi,E,\{b\},\{a,b\}\},\ \tau_{12} = \{\phi,E,\{b\},\{a,c\}\},\ \tau_{13} = \{\phi,E,\{b\},\{b,c\}\}$$

$$\tau_{14} = \{\phi,E,\{c\},\{a,b\}\},\ \tau_{15} = \{\phi,E,\{c\},\{a,c\}\},\ \tau_{16} = \{\phi,E,\{c\},\{b,c\}\}$$

$$\tau_{17} = \{\phi,E,\{a\},\{b\},\{a,b\}\},\ \tau_{18} = \{\phi,E,\{a\},\{c\},\{a,c\}\},$$

$$\tau_{19} = \{\phi,E,\{b\},\{c\},\{b,c\}\},\ \tau_{20} = \{\phi,E,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\},$$

$$\tau_{21} = \{\phi,E,\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\},\ \tau_{22} = \{\phi,E,\{c\},\{a,b\},\{b,c\}\},$$

---

15. Oscar Zariski, mathématicien d'origine russe, est né le 24 avril 1899 à Kobrin (Belarussie) et mort le 4 juillet 1986 à Brookline (USA). Il s'installe aux USA après des études en Italie. Son domaine de recherche est la géomérie algébrique.

$\tau_{23} = \{\phi, E, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$, $\tau_{24} = \{\phi, E, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$

$\tau_{25} = \{\phi, E, \{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$, $\tau_{26} = \{\phi, E, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$

$\tau_{27} = \{\phi, E, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,c\}\}$, $\tau_{28} = \{\phi, E, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$

$\tau_{29} = \{\phi, E, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\} = \mathcal{P}(E)$ (discrète).

2. Il ne peut-étre qu'un singleton. S'il contenait un point de plus sa topologie discrète serait distincte de la grossière.

3. Ce n'est pas une topologie sur $\mathbb{Z}$. Elle n'est pas stable par rapport à la réunion. En effet, si n_1 et n_2 sont deux entiers naturels premiers entre eux, on ne pas trouver un entier naturel m tel que

$$n_1\mathbb{Z} \cup n_2\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}.$$

Exercice 48

Soit f une fonction définie d'un espace (E,τ) dans $(\mathbb{R}, |.|)$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes:

1. $f^{-1}([-\infty, \lambda])$ est fermé dans E, $\forall \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. $f^{-1}(]\lambda, +\infty])$ est ouvert dans E, $\forall \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

Solution

Il suffit de passer aux complémentaires. On a:

$$C_E\left(f^{-1}([-\infty, \lambda])\right) = f^{-1}\left(C_{\overline{\mathbb{R}}}([-\infty, \lambda])\right) = f^{-1}(]\lambda, +\infty]),$$

$$C_E\left(f^{-1}(]\lambda, +\infty])\right) = f^{-1}\left(C_{\overline{\mathbb{R}}}(]\lambda, +\infty])\right) = f^{-1}([-\infty, \lambda]).$$

Exercice 49

1. Soient E et F deux ensembles non vides. On munit F d'une topologie θ et on définit sur E la famille suivante:

$$\tau = \{A \subset E \,/\, \exists\, B \in \theta,\ A = f^{-1}(B)\},$$

f étant une application de E dans F.

Montrer que τ est une topologie sur E.

2. On considère dans $\mathbb{R}$ la famille σ constituée de ϕ, $\mathbb{R}$ et de toute partie dont le complémentaire est un intervalle fermé centré en zéro. (On admet que l'intervalle dégénéré $[0]$ est fermé centré en 0.)

Montrer que σ est une topologie sur $\mathbb{R}$.

Solution

1. Montrons que τ satisfait aux trois axiomes de Hausdorff. On a trivialement:

$$\phi = f^{-1}(\phi) \text{ et } E = f^{-1}(F).$$

D'où $\phi \in \tau$ et $E \in \tau$. L'axiome O_1 est vérifié.

Soit $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une sous-famille de τ. Pour tout λ de Λ, il existe un élément B_λ de θ de sorte que:

$$\Omega_\lambda = f^{-1}(B_\lambda).$$

D'où:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda) = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right).$$

Comme $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ appartient à θ, il s'en suit que $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda$ appartient à τ.

L'axiome O_2 est vérifié.

Enfin, si Ω_1 et Ω_2 sont deux éléments de τ, il existe deux éléments B_1 et B_2 de θ tels que:

$$\Omega_1 = f^{-1}(B_1) \text{ et } \Omega_2 = f^{-1}(B_2).$$

On déduit que:

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2).$$

Or, $B_1 \cap B_2$ est dans θ, donc $\Omega_1 \cap \Omega_2$ appartient à τ. C'est ce qui achève l'axiome O_3. On conclut que τ est une topologie sur E.

2. On a à s'assurer de la stabilité de σ par rapport à la réunion et l'intersection finie. Soit $(\Omega_a)_{a\in L\subset\mathbb{R}}$ une sous-famille de σ. (On suppose qu'elle ne renferme ni ϕ ni $\mathbb{R}$; le premier étant neutre pour la réunion, le second mène à un résultat trivial). On a:

$$\bigcup_{a\in L} \Omega_a = \bigcup_{a\in L} \left( ]-\infty,a[\cup]a,+\infty[\right) =]-\infty,-\inf L[\cup]-\inf L,+\infty[\in \sigma,$$

inf L pouvant être nul.

Enfin, si Ω_a et Ω_b sont deux éléments de σ, on a de même:

$$\Omega_a \cap \Omega_b = \left( ]-\infty,-a[\cup]a,+\infty[\right) \cap \left( ]-\infty,-b[\cup]b,+\infty[\right)$$
$$=]-\infty,-\mathrm{Min}\,(a,b)[\cup]\mathrm{Min}\,(a,b),+\infty[\in \sigma.$$

Exercice 50

1. Vérifier que toute partie d'un espace discret est fermée.

2. Si $E = \{a,b,c\}$ et $\tau = \{\phi, E, \{a\}, \{a,b\}\}$ montrer que les parties $\{c\}$ et $\{b,c\}$ sont fermées.

3. Montrer que toute partie finie (resp. dénombrable) d'un espace cofini (resp. codénombrable) est fermée et réciproquement.

4. Vérifier que E et ϕ sont deux parties à la fois ouvertes et fermées pour toute topologie définie sur E.

5. Un espace topologique quelconque E peut-il admettre, en sus de E et de ϕ, des parties en même temps ouvertes et fermées? des parties lesquelles ne sont ni ouvertes ni fermées?

Solution

1. On sait qu'un sous-ensemble F d'un espace (E,τ) est fermé si son complémentaire $C_E F$ est ouvert.

Ainsi, toute partie d'un espace discret est fermée, puisque $\tau = \mathcal{P}(E)$ est stable par passage au complémentaire. Il en découle en fait que dans l'espace discret (E,P(E)), toute partie est à la fois fermée et ouverte.

2. Elles le sont puisque leurs complémentaires $\{a,b\}$ et $\{a\}$ sont des éléments de τ.

3. On a clairement:

F fermée $\Leftrightarrow C_E F$ ouvert $\Leftrightarrow C_E(C_E F) = F$ finie (resp. dénombrable).

4. C'est bien le cas, car l'une est le complémentaire de l'autre ouverte.

5. Oui. C'est le cas de l'espace discret.

Un espace peut contenir des parties ni ouvertes ni fermées, comme $\mathbb{Q}$ et $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ dans $(\mathbb{R},|.|)$.

Exercice 51

Montrer que dans un espace topologique E:

P_1 : E et ϕ sont fermés.

P_2 : toute intersection (finie ou infinie) de parties fermées est fermée.

P_3 : toute réunion finie de parties fermées est fermée.

Solution

Ces propriétés, au demeurant simples mais fondamentales, s'obtiennent des axiomes de Hausdorff O_1, O_2 et O_3 par passage aux complémentaires.

P_1 étant rencontrée en haut, voyons en détails P_2 et P_3.

Considérons une famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de E. On écrit alors:

$$C_E\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} C_E F_i.$$

$C_E F_i$ étant ouvert pour tout $i\in I$, il en découle, en vertu de l'axiome O_2 que $\bigcup_{i\in I} C_E F_i$ est ouvert. Par conséquent, $\bigcap_{i\in I} F_i$ est fermé.

Acquittons-nous, enfin, de P_3. Si $(F_i)_{1\leq i\leq r}$ est une famille finie de fermés de E alors, pour tout $i = 1, 2, ..., r$, $C_E F_i$ est ouvert. D'après l'axiome O_3 l'ensemble:

$$C_E\left(\bigcup_{i=1}^{r} F_i\right) = \bigcap_{i=1}^{r} C_E F_i$$

est ouvert. D'où $\bigcup_{i=1}^{r} F_i$ est fermé.

Exercice 52

Montrer que dans un espace topologique, une réunion infinie de parties fermées n'est pas nécessairement fermée.

Solution

En voici un contre-exemple. On considère dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$ la suit d'intervalles fermés:

$$(A_n)_{n\in \mathbb{N}^*} = \left(\left[0,1-\frac{1}{n}\right]\right)_{n\in \mathbb{N}^*}.$$

On a:

$$\bigcup_{n>0}\left(\left[0,1-\frac{1}{n}\right]\right) = [0,1[,$$

lequel n'est pas fermé.

Exercice 53

Soient E un ensemble quelconque et σ une sous-famille de $\mathcal{P}(E)$ satisfaisant aux trois conditions suivantes:

O_1' : $E\in\sigma$ et $\phi\in\sigma$.

O_2' : σ est stable par réunion finie.

O_3' : σ est stable par intersection (finie ou infinie).

Montrer qu'il existe sur E une et une seule topologie τ pour laquelle la famille des fermés coïncide avec σ.

Solution

Proposons:

$$\tau = \left\{A\in \mathcal{P}(E):\ C_E A\in\sigma\right\}.$$

Montrons tout d'abord que τ constitue une topologie sur E.

E et ϕ sont bien entendu des éléments de τ, puisqu'ils appartiennent à σ et que l'un est le complémentaire de l'autre.

On considère, en vue de vérifier l'axiome O_2, une sous-famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ de τ. A-t-on $\bigcup_{i\in I}\Omega_i\in\tau$? La définition de τ permet de voir que, pour tout i de I, $C_E\Omega_i\in\sigma$. En remarquant que:

$$C_E\left(\bigcup_{i\in I}\Omega_i\right) = \bigcap_{i\in I}(C_E\Omega_i)$$

on obtient, à la lumière de O_3', $\bigcap_{i\in I} C_E\Omega_i \in \sigma$. D'où $\bigcup_{i\in I} \Omega_i \in \tau$.

Le même raisonnement permet facilement de montrer que τ satisfait aussi à O_3. C'est donc une topologie.

Montrons, à présent, que σ coïncide avec la famille des fermés de l'espace (E,τ). Désignons cette famille par θ.

Si F est un élément de σ alors $C_E F$ appartient, par construction, à τ. Il en résulte que $C_E(C_E F) = F \in \theta$. D'où $\sigma \subset \theta$.

Inversement, si F est un élément de θ alors $C_E F$ apprtient à τ. par conséquent, $C_E(C_E F) = F$ appartient à σ. L'inclusion $\theta \subset \sigma$ en découle. Ainsi, on conclut que $\theta = \sigma$.

Terminons cette preuve par l'unicité de τ. Supposons qu'il en existe une autre τ' sur E vérifiant les conditions sus-citées. Suite à ce qui précède, il s'avère que les familles de fermés de chacun des deux espaces (E,τ) et (E,τ') coïncident avec σ, donc coïncident elles-mêmes.

2.2 Voisinages

Exercice 54

1. Notons $\mathcal{V}(x)$ la famille de tous les voisinages d'un point x de (E,τ). Vérifier que si E est un espace grossier alors $\mathcal{V}(x) = \{E\}$.

2. Si (E,τ) est un espace discret et x un de ses points, montrer que toute partie de E contenant x en est un voisinage.

3. Soient $E = \{a,b,c,d\}$ et $\tau = \{\phi, E, \{a\}, \{d\}, \{a,d\}\}$. Déterminer $\mathcal{V}(a)$, $\mathcal{V}(b)$ et $\mathcal{V}(d)$.

Solution

Rappelons tout d'abord cette définition:

$$V_x \text{ voisinage de } x \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ \Omega_x \in \tau \,/\, x \in \Omega_x \subset V_x .$$

1. C'est le cas, car E est l'unique ouvert non vide de τ.

2. Le singleton $\{x\}$ étant ouvert, toute partie le contenant en est un voisinage de x. En somme, on a

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset E / x \in V\}.$$

3. On remarque que $\{a\}$ (resp. $\{d\}$) est le plus petit ouvert contenant a (resp.d). Il s'en suit que $\mathcal{V}(a)$ (resp. $\mathcal{V}(d)$) sera constituée de tous les sous-ensembles contenant a (resp. d). D'où:

$\mathcal{V}(a) = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, E\}$,

$\mathcal{V}(a) = \{\{d\}, \{a,d\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}, E\}$,

$\mathcal{V}(b) = \{E\}$.

Exercice 55

Soient $E = \{1,2,3\}$ et $\tau = \{\phi, E, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$.

1. Vérifier que (E,τ) est un espace topologique.

2. Les deux ensembles $A = \{3\}$ et $B = \{1,3\}$ sont-ils fermés? ouverts? ouverts et fermés? ni ouverts ni fermés?

3. Déterminer $\mathcal{V}(1)$ et $\mathcal{V}(3)$.

Solution

1. τ contient ϕ et E et elle stable par rapport à la réunion et l'intersection finie. Donc, c'est une topologie.

2. A et B sont fermés car leurs complémentaires respéctifs $\{1,2\}$ et $B = \{2\}$ sont ouverts. A n'est pas ouvert car il n'appartient pas à τ. Ce n'est pas le cas de B, qui lui, est aussi ouvert.

3. On a:

$$\mathcal{V}(1) = \{V \subset E / 1 \in V\} = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, E\},$$

$$\mathcal{V}(3) = \{V \subset E / 3 \in V\} = \{\{1,3\}, E\}.$$

Exercice 56

Montrer que:

1. dans un espace (E,τ), si A et B sont deux parties telles que $A \subset B$ alors tout voisinage de B est voisinage de A.

2. tout voisinage de A est voisinage de chacun des points de A.
3. la réciproque de (2) est vraie.

Solution

1. On sait que:

$$V_A \text{ voisinage de } A \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ \Omega_A \in \tau / A \subset \Omega_A \subset V_A.$$

Ainsi, si V_B est un voisinage de B on écrit:

$$\exists\ \Omega_B \in \tau / B \subset \Omega_B \subset V_B.$$

Comme $A \subset B$, donc:

$$\exists\ \Omega_B \in \tau / A \subset \Omega_B \subset V_B.$$

V_B est alors un voisinage de A.

2. Evident!

3. Autrement dit, si W est voisinage de chacun des points de A, il est voisinage de A.

Soit W un voisinage de tout point de A. On écrit alors:

$$\forall\ x \in A\ \exists\ \Omega_x \in \tau / x \in \Omega_x \subset W.$$

D'où:

$$A \subset \bigcup_{x \in A} \Omega_x \subset W.$$

Comme $\bigcup_{x \in A} \Omega_x$ est ouvert il vient que W est un voisinage de A.

Exercice 57

Montrer que pour qu'un sous-ensemble A non vide d'un espace topologique (E,τ) soit ouvert, il faut et il suffit qu'il soit voisinage de chacun de ses points.

Solution

Il est clair que la condition est nécessaire, car si A est ouvert, il est, en vertu de la définition rapportée ci-dessus, voisinage de chacun de ses points en prenant $\Omega_A = A$ lui-même.

Pour ce qui est de la condition suffisante, il suffit de poser W = A dans la preuve de l'exercice précédent.

Exercice 58

Soient a un point d'un espace (E,τ) et $\mathcal{V}(a)$ la famille de tous ses voisinages. Montrer que:

P_1 : a appartient à tout ensemble V de $\mathcal{V}(a)$.

P_2 : si $V \in \mathcal{V}(a)$ et W une partie de E contenant V, alors $W \in \mathcal{V}(a)$.

(On dit que la famille $\mathcal{V}(a)$ est **absorbante**.)

P_3 : $\mathcal{V}(a)$ est stable par intersection **finie**.

P_4 : pour tout élément V de $\mathcal{V}(a)$, il existe un élément W de $\mathcal{V}(a)$ de sorte que :

$$V \in \mathcal{V}(y), \quad \forall\, y \in W.$$

Solution

1. C'est par défintion même du voisinage V.

2. W renferme l'ouvert que renferme V par hypothèse. Donc, il est lui-même voisinage de a.

3. C'est dû à la stabilité de τ par rapport à l'intersection finie.

4. Soit V un voisinage de a. Il existe un ouvert Ω vérifiant $a \in \Omega \subset V$. On en déduit que V est un voisinage de Ω. Il s'en suit que V est un voisinage de chaque point y de Ω. Il suffit pour conclure de prendre $W = \Omega$.

Exercice 59

Soit E un ensemble non vide. Pour tout a de E, on considère la famille $\mathcal{R}(a)$ de parties de E satisfaisant aux quatre propriétés P_1, P_2 P_3 et P_4 de l'exercice précédent.

Démontrer qu'il existe alors une et une seule topologie sur E pour laquelle $\mathcal{R}(a)$ coïncide avec la famille de voisinages $\mathcal{V}(a)$ de a.

Solution

Posons:

$$\tau = \left\{ \Omega \in E \,/\, \forall\, x \in \Omega,\ \Omega \in \mathcal{R}(x) \right\}$$

et montrons que τ est la topologie cherchée.

a) τ est une topologie sur E.

Il est clair que ϕ et E appartiennent à τ par construction. Considérons, en vue de vérifier l'axiome O_2, une famille $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$

d'éléments de τ et x un point de $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$. Il existe un indice λ_0 de Λ tel que $x \in \Omega_{\lambda_0}$. Par conséquent, $\Omega_{\lambda_0} \in \mathcal{V}(x)$ par définition de τ. Comme $\Omega_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$ il en résulte, grâce à P_2, que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda \in \mathcal{R}(x)$.

Donc $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda \in \tau$, ce qui achève O_2.

Considérons enfin deux éléments Ω_1 et Ω_2 de τ et un point x de $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Ω_1 et Ω_2 sont alors des éléments de $\mathcal{R}(x)$. D'après P_3, on voit que

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 \in \mathcal{R}(x).$$

Par suite, $\Omega_1 \cap \Omega_2 \in \tau$.

Conclusion: (E,τ) est un espace topologique.

b) $\mathcal{R}(x) = \mathcal{V}(x)$ dans (E,τ).

Montrons d'abord que $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{R}(x)$. Soit V un voisinage de x dans (E,τ). Il existe alors un ouvert $\Omega \in \tau$ tel que $x \in \Omega \subset V$. Ω étant dans τ, il appartient de ce fait à $\mathcal{R}(x)$. Il en découle, d'après P_2, que $V \in \mathcal{R}(x)$. D'où l'inclusion posée.

Inversement, montrons que

$$\mathcal{R}(x) \subset \mathcal{V}(x).$$

Soit V un élément de $\mathcal{R}(x)$. Il s'agit de trouver un élément U de τ tel que $x \in U \subset V$. La partie $U = \{y \in E : V \in \mathcal{R}(y)\}$ convient. En effet:

$x \in U$: car $V \in \mathcal{R}(x)$ par hypothèses.

$U \subset V$: car $y \in U$ signifie $V \in \mathcal{R}(x)$ et donc $y \in V$ d'après P_1.

$U \in \tau$: détaillons ce point.

D'après la définition de U, $V \in \mathcal{R}(y)$ pour tout y de U. Par suite, et grâce à P_4, il existe, pour tout y de U, un élément W de $\mathcal{R}(y)$ de sorte que $V \in \mathcal{R}(z)$ quel que soit $z \in W$. Or de l'appartenance de V à $\mathcal{R}(z)$ découle celle de z à U, donc $W \subset U$. D'après P_2, $U \in \mathcal{R}(y)$ quel que soit $y \in U$. Donc $U \in \tau$ d'après la définition de τ. Ainsi, on a bien la seconde inclusion.

2.3 Espaces séparés

Exercice 60

On dit qu'un espace (E,τ) est **séparé** (ou que la topologie τ est séparée), s'il satisfait à la condition (de Hausdorff) suivante:
Pour tout x et y de E ($x \neq y$), il existe un voisinage V de x et un autre W de y tels que $V \cap W = \phi$.

Montrer que:
1. tout espace grossier de plus d'un élément n'est pas séparé.
2. si E est discret alors il est séparé.
3. $(\mathbb{R},|.|)$ est séparé.
4. les topologies cofinie et codénombrable ne sont pas séparées.
5. la topologie τ définie dans l'exercice 49 est séparée si l'on donne f injective.

Solution

1. Cet espace ne compte qu'un seul voisinage pour l'ensemble de ses points. Il ne peut conséquement être séparé.

2. Les singletons $\{x\}$ et $\{y\}$ sont deux voisinages disjoints de x et y. E est séparé.

3. C'est le cas $(\mathbb{R},|.|)$, car les intervalles

$$\left]x-\frac{|x-y|}{2},\ x+\frac{|x-y|}{2}\right[\quad \text{et} \quad \left]y-\frac{|x-y|}{2},\ y+\frac{|x-y|}{2}\right[$$

sont deux voisinages disjoints de x et y.

4. Le contraire conduirait, à travers l'égalité $V \cap W = \phi$, à ce que V (ou W) soit fini (resp. dénombrable), ce qui est exclu.

5. Soient x et y deux éléments distincts de E. f étant injective, les éléments f(x) et f(y) sont alors distincts dans l'espace séparé F. Par suite, il existe deux voisinages ouverts disjoints V et W de f(x) et f(y) respectivement. Par conséquent, $f^{-1}(V)$ et $f^{-1}(W)$ sont deux ouverts de τ contenant respectivement x et y. De plus:

$$f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) = f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(\phi) = \phi.$$

Donc, (E,τ) est séparé.

Exercice 61

1. Démontrer que pour qu'un espace E soit séparé, il faut et il suffit que l'intersection de tous les voisinages fermés de chaque point a coïncide avec $\{a\}$.

2. Montrer que ce n'est pas le cas si l'on prend les voisinages non fermés.

Solution

1. Soit a un point d'un espace séparé E. On veut établir l'égalité:

$$\{a\} = \bigcap_{V_a \in \mathcal{V}(a), V_a \text{ fermé}} V_a .$$

Supposons que cette intersection contienne un autre point b distinct de a. Il existe par hypothèse deux voisinages ouverts U de a et W de b de sorte que $U \cap W = \phi$. Il en résulte que $C_E W$ est un voisinage fermé de a (il contient U) ne contenant pas b. Absurde!

Inversement, considérons deux éléments distincts a et b de E. L'égalité ci-dessus entraîne l'existence d'un voisinage fermé V de a ne renfermant pas b. Il s'en suit qu'il existe un ouvert Ω satisfaisant à

$$a \in \Omega \subset \overline{\Omega} \subset V.$$

On en déduit que $b \notin \overline{\Omega}$. On conclut que Ω et $C_E \overline{\Omega}$ sont deux ouverts disjoints, l'un contient a l'autre contient b. E est alors séparé.

2. Examinons le contre-exemple suivant.

Soit E un espace muni de la topologie cofinie. On sait qu'il n'est pas séparé. Cependant, pour tout a de E on a:

$$\{a\} = \bigcap_{V_a \in \mathcal{V}(a)} V_a,$$

V_a étant un voisinage quelconque de a. En effet, le contraire suppose l'existence d'un élément b de E, distinct de a, appartenant à $\bigcap_{V_a \in \mathcal{V}(a)} V_a$. Ceci est impossible car $E \setminus \{b\}$ est un voisinage de a ne contenant pas b.

Exercice 62

Montrer que
1. toute partie finie d'un espace séparé est fermée.
2. tout espace séparé et fini est discret.

Solution

1. Soit $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ une partie finie de p éléments d'un espace séparé E. Montrons que $C_E A$ est ouvert.

E étant séparé, il existe pour tout x de $C_E A$ et tout a_i $(1 \le i \le p)$ de A deux voisinages ouverts (il est plausible de les prendre comme tels) V_{a_i} de a_i et W_x^i de x tels que

$$V_{a_i} \cap W_x^i = \phi.$$

D'où:

$$\left(\bigcup_1^p V_{a_i}\right) \cap \left(\bigcap_1^p W_x^i\right) = \phi.$$

Comme $\bigcup_1^p V_{a_i}$ renferme A et $\bigcap_1^p W_x^i$ est un voisinage ouvert de x, contenu dans $C_E A$, on déduit que $C_E A$ est, lui même, voisinage de x. Donc, il est ouvert. Par suite, A est fermée.

2. C'est le cas. Tout singleton de E est fermé conformément à la première question. Il devient ouvert, puisqu'il est un complémentaire d'une partie finie, donc fermée. Ainsi, tout singleton de E est, à la fois, ouvert et fermé. La topologie de E est alors la discrète $\mathcal{P}(E)$.

2.4 Points intérieurs, Intérieur d'un ensemble

Exercice 63

Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique (E,τ). On note $\overset{o}{A}$ l'ensemble des points intérieurs de A:

$$x \in \overset{o}{A} \quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathcal{V}(x).$$

1. Montrer que

i) si A est une partie d'un espace grossier (E,τ) alors:

$$\overset{o}{A} = \phi \text{ si } A \neq E,$$
$$\overset{o}{A} = E \text{ si } A = E.$$

ii) si A est une partie d'un espace discret alors $\overset{o}{A} = A$.

2. On munit $\mathbb{Z}$ de la topologie cofinie. Déterminer $\overset{o}{\widehat{\{-1,0\}}}$, $\overset{o}{\widehat{\mathbb{Z}^*}}$ et $\overset{o}{\mathbb{N}}$.

3. Soit $E = \{a,b,c,d\}$ et $\tau = \{E,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$. Déterminer

$$\overset{o}{\widehat{\{c\}}},\ \overset{o}{\widehat{\{d\}}} \text{ et } \overset{o}{\widehat{\{a,c,d\}}}.$$

Solution

1. i) Ceci s'explique par le fait que dans la topologie grossière τ, tout point ne peut jouïr que d'un seul voisinage: E lui-même.

ii) A est ouverte et par conséquent, elle est voisinage de chacun de ses points. Donc, chacun de ses points est intérieur.

2. On a:

$$\overset{o}{\widehat{\{-1,0\}}} = \overset{o}{\mathbb{N}} = \phi \text{ et } \overset{o}{\widehat{\mathbb{Z}^*}} = \mathbb{Z}^*.$$

Les deux premiers sous-ensembles ne sont voisinages d'aucun de leurs points, le troisième l'est. D'où le résultat.

3. On a pour les mêmes raisons:

$$\overset{\circ}{\widehat{\{c\}}} = \overset{\circ}{\widehat{\{d\}}} = \phi \text{ et } \overset{\circ}{\widehat{\{a,c,d\}}} = \{a\}.$$

Exercice 64

Montrer que:

1. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A, pour tout sous-ensemble A d'un espace topologique E.

2. pour qu'un ensemble A de (E,τ) soit ouvert, il faut et il suffit qu'il coïncide avec son intérieur.

Solution

1. On va montrer que $\overset{\circ}{A}$ coïncide avec la réunion de toutes les parties ouvertes contenues dans A.

Si $x\in \overset{\circ}{A}$ alors $A\in \mathcal{V}(x)$. Par suite, Il existe un ouvert Ω_x satisfaisant à

$$x\in \Omega_x \subset A.$$

D'où :

$$\overset{\circ}{A} \subset \bigcup_{x\in \overset{\circ}{A}} \Omega_x \subset \bigcup_{x\in A} \Omega_x .$$

Inversement, si $x\in \bigcup_{x\in A} \Omega_x$, Ω_x étant une partie ouverte contenue dans A, alors $x\in \Omega_x \subset A$. Donc, $A\in \mathcal{V}(x)$; par suite $x\in \overset{\circ}{A}$. D'où

$$\bigcup_{x\in A} \Omega_x \subset A .$$

Conclusion:

$$A = \bigcup_{x\in A} \Omega_x .$$

Autre méthode

On pose par définition:

$$\overset{\circ}{A} = \left\{ x \in A \,/\, \exists\, \Omega \in \tau : x \in \Omega \subset A \right\} = \bigcup_{\Omega \in \tau,\ \Omega \subset A} \Omega$$

d'où l'affirmation.

2. C'est une conséquence immédiate de (1).

Exercice 65

Soient A et B deux parties d'un espace E. Montrer que:

1. $A \subset B$ et A ouverte $\Rightarrow$ $A \subset \overset{\circ}{B}$.

2. $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

3. $\overset{\circ\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$.

4. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

5. i) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.

ii) Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

6. $A \in \mathcal{V}(B) \Leftrightarrow B \subset \overset{\circ}{A}$.

Solution

1. Comme A est ouverte, elle est voisinage de chacun de ses points. Or $A \subset B$, donc B est voisinage de chacun des points de A. D'où l'inclusion annoncée.

2. On a $\overset{\circ}{A} \subset A$ par définition. Or $A \subset B$ donc il vient grâce à (1)

$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}.$$

3. $\overset{\circ\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A}$ par définition. D'autre part:

$$x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow \overset{\circ}{A} \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \overset{\circ\circ}{A}.$$

Donc:

$$\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}.$$

4. On a:

$$A \cap B \subset A \Rightarrow \widehat{A \cap B}^{\circ} \subset \overset{\circ}{A} \text{ et } A \cap B \subset B \Rightarrow \widehat{A \cap B}^{\circ} \subset \overset{\circ}{B}$$

D'où:

$$\widehat{A \cap B}^{\circ} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

D'autre part, on voit que:

$$\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A} \subset A \text{ et } \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{B} \subset B.$$

Par suite $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B$ et donc:

$$\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \widehat{A \cap B}^{\circ}.$$

5. i) On a clairement:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\circ}{A} \subset A \\ \overset{\circ}{B} \subset B \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset A \cup B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \widehat{A \cup B}^{\circ}.$$

ii) Si $(E,\tau) = (\mathbb{R}, |.|)$, $A = [-2,2[$ et $B =]-4,-2]$ alors il vient:

$$\overset{\circ}{A} =]-2,2[, \quad \overset{\circ}{B} =]-4,-2[, \quad \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]-4,-2[\cup]-2,2[,$$

$$A \cup B =]-4,2[, \quad \widehat{A \cup B}^{\circ} = A \cup B =]-4,2[.$$

Il ressort que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ est strictement inclus dans $\widehat{A \cup B}^{\circ}$.

6. On a :

$$A \in \mathcal{V}(B) \Leftrightarrow B \subset \Omega \subset \overset{\circ}{A} \subset A$$

Ω désignant un ouvert de E.

2.5 Points adhérents, adhérence d'un ensemble

Exercice 66

Soit A une partie non vide d'un espace E. On dit qu'un point a de E est **adhérent** à A, si tout voisinage de a rencontre A.

On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A et on écrit:

$$a \in \overline{A} \iff \forall V \in \mathcal{V}(a) \; V \cap A \neq \phi.$$

1. Montrer que:

i) si $A \neq \phi$ est une partie d'un espace grossier E alors $\overline{A} = E$.

ii) si A est une partie d'un espace discret E alors $\overline{A} = A$.

2. Soit E un espace muni de sa topologie cofinie. Montrer que:

i) A finie $\Rightarrow$ $\overline{A} = A$.

ii) A infinie $\Rightarrow$ $\overline{A} = E$.

3. Soient $E = \{a,b,c,d\}$ et $\tau = \{\phi, E, \{b,c\}, \{b,c,d\}\}$. Déterminer $\overline{\{a\}}$, $\overline{\{b\}}$, $\overline{\{c\}}$, $\overline{\{d\}}$ et $\overline{\{a,d\}}$.

Solution

1\. i) Tout x de E jouït de E comme unique voisinage. Or celui-ci renferme A, donc $\overline{A} = E$.

ii) En effet pour tout x de $\overline{A}$, $\{x\} \in \mathcal{V}(x)$ et $\{x\} \cap A \neq \phi$. D'où $x \in A$. Par suite, $\overline{A} \subset A$, ce qui achève l'égalité.

2\. i) Soit A une telle partie. Montrons que $\overline{A} \subset A$.

Si x est un point de $\overline{A}$ n'appartenant pas à A il serait dans son complémentaire $C_E A$, ouvert. Donc $C_E A$ est un voisinage de x qui doit rencontrer A. Absurde. d'où l'inclusion.

ii) Si x est un point de E n'appartenant pas à $\overline{A}$ il jouïrait d'un voisinage ouvert V tel que $V \cap A = \phi$. Donc, A infinie serait contenue dans $C_E V$ fini. Absurde!

3\. On a:

i) $\overline{\{a\}} = \{a\}$, $\overline{\{b\}} = \overline{\{c\}} = E$.

ii) $\overline{\{d\}} = \{a,d\}$, $\overline{\{a,d\}} = \{a,d\}$.

Exercice 67

Montrer que $\overline{A}$ est fermée dans tout espace topologique E.

Solution

Il suffit qu'on montre que $C_E\overline{A} = \overset{o}{\widehat{C_E A}}$. A cet effet , on a:

$$x \in C_E\overline{A} \Leftrightarrow \exists\, V \in \mathcal{V}(x) \,/\, V \cap A = \phi$$
$$\Leftrightarrow \exists\, V \in \mathcal{V}(x) \,/\, V \subset C_E A.$$

On conclut que $C_E A \in \mathcal{V}(x)$ et donc $x \in \overset{o}{\widehat{C_E A}}$. D'où:

$$C_E\overline{A} \subset \overset{o}{\widehat{C_E A}}.$$

Inversement, si $x \in \overset{o}{\widehat{C_E A}}$ alors $C_E A$ est un voisinage de x ne rencontrant pas A. Cela exclut x de $\overline{A}$. Autrement dit, $x \in C_E\overline{A}$. D'où :

$$\overset{o}{\widehat{C_E A}} \subset C_E\overline{A}.$$

Exercice 68

Montrer que, dans un espace (E,τ),

1. $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
2. A fermé $\Leftrightarrow \overline{A} = A$.

Solution

1. On va montrer en fait que $\overline{A}$ coïncide avec l'intersection de toutes les parties fermées renfermant A. Plus clairement, si $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est la famille de tous les fermés contenant A, alors

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \overline{A}.$$

Posons $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = F$. F est appelé **fermeture** de A.

Montrons que $F \subset \overline{A}$. Considérons un point x de F et supposons qu'il ne soit pas de $\overline{A}$. Il existe alors un voisinage ouvert V de x tel que $V \cap A = \phi$. Il en découle que $A \subset C_E V$. Ainsi, $C_E V$ est un fermé contenant A et ne contenant pas x. Ceci est en contradiction avec le fait que $x \in F$. Donc $F \subset \overline{A}$.

Inversement, montrons que $\overline{A} \subset F$. On procède par l'absurde. Supposons qu'il existe un point x de $\overline{A}$ n'appartenant pas à F. Il en résulte que x appartient à l'ouvert $C_E F$. Or, on sait que A et $C_E F$ sont disjoints, donc $x \notin \overline{A}$, ce qui est absurde.

Autre méthode

On a par définition:

$$\overline{A} = C_E\left\{x\in E / \exists\, \Omega\in\tau : A\cap\Omega = \phi\right\}$$
$$= C_E\left(\bigcup_{\Omega\in\tau,\ \Omega\cap A=\phi} \Omega\right) = \bigcap_{\Omega\in\tau,\ \Omega\cap A=\phi} C_E\Omega$$

En posant $C_E\boldsymbol{\Omega} = F$, on écrit encore:

$$\overline{A} = \bigcap_{A\subset F} F,$$

F balayant toute la famille des fermés de E, contenant A. Ainsi, $\overline{A}$ en est le plus petit d'entre eux.

2. C'est une conséquence immédiate de (1).

Exercice 69

Soient **A** et **B** deux parties d'un espace (E,τ). Montrer que:

1. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. i) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   ii) l'inclusion de (i) est généralement stricte.
4. $\overline{C_E A} = C_E \overset{o}{A}$.

5. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Solution

1. On a:

$$x \in \overline{A} \iff V \cap A \neq \phi, \ \forall\, V \in \mathcal{V}(x).$$

Comme $A \subset B$ il vient:

$$V \cap B \neq \phi, \ \forall\, V \in \mathcal{V}(x).$$

Donc, $x \in \overline{B}$.

2. On a d'une part:

$$\left.\begin{array}{l} A \subset \overline{A} \\ B \subset \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

D'autre part,

$$\left.\begin{array}{l} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

D'où l'égalité.

3. i) On a comme précédemment:

$$\left.\begin{array}{l} A \subset \overline{A} \\ B \subset \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

ii) Soient $(E,\tau) = (\mathbb{R}, |.|)$, $A = [2,4[\cup \{8\}$ et $B = [4,5[$.

On a:

$\overline{A} = [2,4] \cup \{8\}$, $\overline{B} = [4,5]$, $\overline{A \cap B} = \overline{\phi} = \phi$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \{4\}$.

Donc:

$$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Dans le même ordre d'idée, on a:

$$\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \text{ et } \overline{\mathbb{Q} \cap C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}} = \overline{\phi} = \phi.$$

4. On a:

$$x \in \overline{C_E A} \Leftrightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}(x) \quad V \cap C_E A \neq \phi$$

$$\Leftrightarrow \nexists\, V \in \mathcal{V}(x) \,/\, V \subset A$$

$$\Leftrightarrow x \notin \mathring{A} \Leftrightarrow x \in C_E \mathring{A}$$

5. On a par définition:

$$\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}.$$

Par ailleurs, on écrit:

$$x \in \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}(x) \quad V \cap \overline{A} \neq \phi$$

V étant considéré, sans risque de restriction de généralité, ouvert. Le sous-ensemble non vide $V \cap \overline{A}$ renferme au moins un élément y pour lequel V est un voisinage. Donc, $V \cap A \neq \phi$. D'où, $x \in \overline{A}$ et par suite,

$$\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}.$$

Exercice 70

On sait que dans un espace topologique (E,τ), l'adhérence vérifie (les axiomes de Kuratowski[16]):

(A_1) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$;

(A_2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(A_3) $A \subset \overline{A}$;

(A_4) $\overline{\phi} = \phi$.

Montrer que inversement si on se donne une application $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ vérifiant (A_1) (A_2) (A_3) (A_4), cela définit une topologie sur E. (Indication: on pourra considérer comme ouverts les parties de E vérifiant $\overline{C_E\Omega} = C_E\Omega$ et montrer que (A_1) (A_2) (A_3) (A_4) entraînent

16. Casimir (Kazimierz) Kuratowski est né le 2 février 1896 à Warsaw (Pologne) et mort le 18 juin 1980 à Warsaw. Son domaine de travail était la topologie et la théorie des ensembles. Il avait aussi une importante contribution dans la théorie des espaces métriques.

(O_1) (O_2) (O_3) de Hausdorff.)

Solution

Posons comme indiqué:

$$\sigma = \left\{\Omega \subset E \,/\, \overline{C_E\Omega} = C_E\Omega\right\}.$$

i) On a grâce à (A_3) et (A_4):

$$\overline{C_E\phi} = \overline{E} = E = C_E\phi.$$

$$\overline{C_E E} = \overline{\phi} = \phi = C_E E.$$

D'où (O_1).

ii) Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une sous-famille de σ. On a d'après (A_3):

$$C_E\left(\bigcup_{i\in I} \Omega_i\right) \subset \overline{C_E\left(\bigcup_{i\in I} \Omega_i\right)}.$$

Par ailleurs, signalons que selon (A_2), on a:

$$A \subset B \;\Rightarrow\; \overline{A} \subset \overline{B}.$$

Par suite:

$$\overline{\bigcap_{i\in I} C_E\Omega_i} \subset \overline{C_E\Omega_i},\ \forall\, i\in I.$$

D'où:

$$\overline{C_E\left(\bigcup_{i\in I} \Omega_i\right)} = \overline{\bigcap_{i\in I} C_E\Omega_i} \subset \bigcap_{i\in I} \overline{C_E\Omega_i} = \bigcap_{i\in I} C_E\Omega_i = C_E\left(\bigcup_{i\in I} \Omega_i\right).$$

Donc $\bigcup_{i\in I} \Omega_i \in \sigma$. D'où (O_2).

iii) Soient Ω_1 et Ω_2 deux éléments de σ. On a d'après (A_2):

$$\overline{C_E(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = \overline{C_E\Omega_1 \cup C_E\Omega_2} = \overline{C_E\Omega_1} \cup \overline{C_E\Omega_2}$$
$$= C_E\Omega_1 \cup C_E\Omega_2 = C_E(\Omega_1 \cap \Omega_2).$$

D'où (O_3).

Exercice 71

Montrer que si A et B sont deux sous-ensembles ouverts disjoints d'un espace (E,θ) alors il en est de même pour $\overline{\mathring{A}}$ et $\overline{\mathring{B}}$.

Solution

Soient A et B deux ouverts disjoints de (E,θ). On a:

$$A \cap B = \phi \;\Rightarrow\; A \subset C_E B \;\Rightarrow\; \overline{A} \subset \overline{C_E B} = C_E B$$

$$\Rightarrow\; \overset{\circ}{\overline{A}} \subset \widehat{C_E B}^{\circ} = C_E \overline{B}$$

$$\Rightarrow\; \overset{\circ}{\overline{A}} \cap \overline{B} = \phi \;\Rightarrow\; \overset{\circ}{\overline{A}} \cap \overset{\circ}{\overline{B}} = \phi.$$

Exercice 72

Soit A une partie non vide d'un espace (E,τ). Un point x de E est dit point d'**accumulation** de A, s'il est adhérent à $A\backslash\{x\}$.

Autrement dit, x est d'accumulation pour A, si tout voisinage de x rencontre A au moins en un point distinct de x.

On note A' l'ensemble des points d'accumulation de A et on l'appelle ensemble **dérivé** de A. On écrit :

$$x \in A' \;\Leftrightarrow\; \forall\, V \in \mathcal{V}(x)\; \left(V\backslash\{x\}\right) \cap A \neq \phi.$$

1. Soit $E = \{1,2,3,4,5\}$, $\tau = \left\{\phi, E, \{1,2\}, \{3,4,5\}\right\}$ et $A = \{1,2,3\}$. Déterminer A'.

2. i) Si $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie codénombrable que dire des ensembles dérivés $\mathbb{N}'$, $\mathbb{Q}'$ et $(C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q})'$?

ii) En déduire qu'il n'y a pas d'ordre entre un ensemble et son dérivé.

3. Décrire l'ensemble dérivé de toute partie d'un espace discret.

Solution

1. Chacun des voisinages des points $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_3 = 4$ et $x_4 = 5$ rencontre A en des points autres que ceux-ci. Ils sont des points d'accumulation de A. Le point $x_5 = 3$ ne l'est pas, car il possède le voisinage $\{3,4,5\}$ qui ne coupe A qu'en 3. D'où:

$$A' = \{1,2,4,5\}.$$

2. i) On a $\mathbb{N}' = \mathbb{Q}' = \phi$ et $(C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q})' = \mathbb{R}$.

En effet, tout x irrationnel ne peut adhérer ni à $\mathbb{N}$ ni à $\mathbb{Q}$, puisque

$C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ est un de ses voisinages ne les rencontrant pas. Si x est rationnel, l'ensemble $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} \cup \{x\}$ est un voisinage de x ne coupant $\mathbb{Q}$ qu'en x. (On peut prendre $C_{\mathbb{R}}\mathbb{N} \cup \{x\}$ si x était dans $\mathbb{N}$).

Concernant l' ensemble dérivé de $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$, on constate que

$$V \cap \left(C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}\setminus\{x\}\right) \neq \phi,\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ V \in \mathcal{V}(x).$$

le contraire conduirait à une contradiction avec V non dénombrable.

ii) On a bien $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ et $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} \subset (C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q})'$.

3. Il est vide, car les singletons dans un espace discret sont des voisinages de leurs points.

Exercice 73

Soit A un sous-ensemble d'un espace séparé E. Démontrer qu'un point x de E est un point d'accumulation de A si, et seulement si, tout voisinage de x rencontre A en une infinité de points.

Solution

Signalons tout d'abord que ce résultat est une généralisation de celui exposé dans l'exercice 21. Arrêtons-nous à la nécessité de la condition. On procède par l'absurde. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert V de x tel que:

$$V \cap A = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}.$$

Comme E est séparé, le sous-ensemble fini $\{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ est fermé. On distingue deux cas:

i) Si $x \notin \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$, alors $V \cap C_E\{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ est un voisinage de x ne rencontrant pas A.

ii) Si $x \in \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$, alors $V \cap C_E\left(\{y_1, y_2, \ldots, y_p\}\setminus\{x\}\right)$ est un voisinage de x ne rencontrant A qu'en x lui même. On conclut ainsi que x n'est pas d'accumulation. Absurde!

Exercice 74

1. Soit A un sous-ensemble d'un espace séparé E. Montrer que:

i) A' est fermé.

ii) $\overline{A} = A \cup A'$.

iii) $(A')' \subset A'$

2. Exhiber un contre-exemple où l'inclusion de (iii) est stricte.

Solution

1. i) Soit x un point de $C_E A'$. Il existe d'après l'exercice précédent, un voisinage ouvert V_x de x ne rencontrant A qu'en un nombre fini de points. Il en résulte que tous les points y de V_x ne peuvent être des points d'accumulation pour A. Autrement dit:

$$V_x \subset C_E A'.$$

On conclut donc que $C_E A'$ est un voisinage de tous ses points, c'est-à-dire un ouvert; par suite, A' est fermé.

ii) On a:

$$A \cup A' \subset \overline{A}.$$

Par ailleurs, si x est un point adhérent à A, chacun de ses voisinages rencontre A ou bien en x ou bien en des points autres que x. C'est-à-dire x est dans A ou dans A', donc dans $A \cup A'$. Ainsi:

$$\overline{A} \subset A \cup A'.$$

iii) Soit x un point de $(A')'$. Pour tout voisinage ouvert V de x, l'intersection $A' \cap V$ est infinie. Soit y un point de cette intersection. V étant un voisinage de y, l'intersection $A \cap V$ est, à son tour, infinie. Donc, x est dans A'.

2. Soit, dans $(\mathbb{R}, |.|)$, le sous-ensemble $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$.

On a:

$$A' = \{0\} \text{ et } (A')' = \phi.$$

Exercice 75

Montrer qu'un sous-ensemble A d'un espace E est fermé si, et seulement si, il contient tous ses points d'accumulation.

Solution

En effet, si A est fermé alors $A = \overline{A}$. Il résulte de l'exercice précédent que

$$A' \subset A.$$

Le même exercice stipule que si $A' \subset A$ alors

$A = \overline{A}$. Donc, A est fermé.

Exercice 76

On dit qu'un point x d'un sous-ensemble A d'un espace E est **isolé**, s'il existe un voisinage V de x ne rencontrant A qu'en x. Plus clairement:

$$x \text{ est isolé dans A} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, V \in \mathcal{V}(x) \,/\, V \cap A = \{x\}.$$

1. Soit $E = \{a,b,c,d,e\}$, $\tau = \{\phi, E, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ et $A = \{b,c,d\}$. Vérifier que A n'admet qu'un seul point isolé: $x = b$.

2. On considère dans $(\mathbb{R}, |.|)$, les sous-ensembles suivants:

$$A = \{-1,0,1\},\ B = [0,4] \cup \{6\},\ C = [0,4],\ D = \mathbb{N},\ E = \mathbb{Z},\ F = \mathbb{Q},$$
$$G = C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}.$$

Ont-ils des points isolés?

3. Montrer que toute partie infinie A d'un espace cofini E n'admet aucun point isolé et tous les points d'une partie finie B sont isolés.

4. Montrer que tous les points d'une partie d'un espace discret sont isolés.

Solution

1. C'est le seul point de A dont le voisinage $\{b\}$ ne rencontre A qu'en b.

2. i) Tout point de $A = \{-1,0,1\}$ est isolé. Il est facile de voir que d'une manière générale, tout point d'une partie finie de $\mathbb{R}$ est isolé.

ii) $B = [0,4] \cup \{6\}$ ne possède qu'un seul point isolé: $x_0 = 6$.

iii) $C = [0,4]$ n'a pas de point isolé.

iv) Tous les points de $D = \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{Z}$ sont isolés.

v) $F = \mathbb{Q}$ et $G = C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ n'ont pas de points isolés.

3. Si A en admettait un, celui-ci possèderait un voisinage ouvert dont le complémentaire (fini) contiendrait A, sauf ce point. Absurde!

De même, tout point a de B est isolé car $C_E(B\backslash\{a\})$ est un voisinage de a ne rencontrant B qu'en a.

4. Cela est dû, comme c'est déja signalé, au fait que tout singleton est voisinage du point qu'il renferme.

Exercice 77

Montrer qu'un ensemble A de E est fermé si, et seulement si, il coïncide avec la réunion de ses points d'accumulation et isolés.

Solution

C'est une autre lecture du résultat porté par l'exercice 75.

Exercice 78

Un sous-ensemble A d'un espace E est dit **parfait** s'il coïncide avec son ensemble dérivé A'.

1. Vérifier que:

i). tout ensemble parfait est fermé,

ii) en déduire que l'ensemble des points isolés d'un ensemble parfait A est vide,

iii) tout intervalle fermé dans $(\mathbb{R},|.|)$ est parfait,

iv) $\mathbb{Q}$ n'est pas parfait dans $(\mathbb{R},|.|)$,

v) la réunion de deux ensembles parfaits de E est parfaite.

2. Soit (I_n) une suite d'intervalles ouverts de $(\mathbb{R},|.|)$ tels que:

$$\overline{I_m} \cap \overline{I_n} = \phi, \quad \forall\ \underset{m \neq n}{(m,n) \in \mathbb{N}^2}.$$

Démontrer que $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right)$ est une partie parfaite.

Solution

1. i) A coïncide avec A', ce qui le rend fermé d'après l'exercice 75.

ii) Cet ensemble est celui qui complète A' à A. Il est vide car A' = A.

iii) Un intervalle de ce type coïncide avec son ensemble dérivé.

iv) $\mathbb{Q}$ ne peut pas être parfait (même s'il n'a pas de points isolés), car $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

v) C'est le cas. En effet si A et B sont deux parties parfaites de E, on a:

$$A' \cup B' = A \cup B.$$

Par ailleurs, si x est de AUB, on écrit, pour tout voisinage V de x:

$$(V\backslash\{x\}) \cap (A \cup B) \neq \phi \Leftrightarrow ((V\backslash\{x\}) \cap A) \cup ((V\backslash\{x\}) \cap B) \neq \phi$$
$$\Leftrightarrow ((V\backslash\{x\}) \cap A) \neq \phi \text{ ou } ((V\backslash\{x\}) \cap B) \neq \phi$$
$$\Leftrightarrow (x \in A' \text{ ou } x \in B') \Leftrightarrow x \in A' \cup B'$$

D'où

$$(A \cup B)' = A' \cup B' = A \cup B.$$

2. L'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un ouvert propre de $\mathbb{R}$. Il est évidemment non vide et ne peut atteindre $\mathbb{R}$ du fait de la contrainte imposée. On a à montrer:

$$\left(C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right)\right)' = C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right)$$

Si $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right)$ possédait un point isolé x, il jouïrait d'un voisinage V tel que:

$$V \cap C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) = \{x\}.$$

C'est-à-dire:

$$V \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (C_{\mathbb{R}} I_n)\right) = \{x\}.$$

Or, pour un indice n fixé, on a pour tout $m \neq n$:

$$\overline{I_m} \subset C_{\mathbb{R}} \overline{I_n} \subset C_{\mathbb{R}} I_n,$$

donc

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (C_{\mathbb{R}} I_n) = \phi.$$

Par suite:

$$V \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (C_{\mathbb{R}} I_n)\right) = \phi.$$

Ainsi, $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right)$ ne possède pas de points isolés. Comme il est fermé non vide, il coïncide avec son ensemble dérivé. Autrement dit, il est parfait.

2.6 Frontière et extérieur d'un ensemble

Exercice 79

Soit A un ensemble d'un espace E. On appelle **frontière** de A, le sous-ensemble de E, noté $\mathcal{F}_r(A)$, constitué des points adhérents à A et à son complémentaire $C_E A$.

Montrer que:

1. $\mathcal{F}_r(A)$ est un ensemble fermé,
2. $\mathcal{F}_r(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$,
3. A est ouvert $\Leftrightarrow$ $A \cap \mathcal{F}_r(A) = \phi$,
4. A fermé $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_r(A) \subset A$
5. A est ouvert et fermé $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_r(A) = \phi$.

Solution

1. On a par définition:

$$\mathcal{F}_r(A) = \overline{A} \cap \overline{C_E A}.$$

C'est une intersection de deux fermés, donc elle même fermée.

2. On a clairement:

$$\mathcal{F}_r(A) = \overline{A} \cap \overline{C_E A} = \overline{A} \cap C_E \overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

3. Si A est ouvert alors $A = \overset{\circ}{A}$. D'où:

$$A \cap \mathcal{F}_r(A) = \overset{\circ}{A} \cap (\overline{A} \cap C_E \overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{A} \cap C_E \overset{\circ}{A} = \phi.$$

Inversement si $A \cap \mathcal{F}_r(A) = \phi$ alors:

$$\phi = A \cap \mathcal{F}_r(A) = A \cap (\overline{A} \cap C_E \overset{\circ}{A}) = (A \cap \overline{A}) \cap C_E \overset{\circ}{A}$$
$$= A \cap C_E \overset{\circ}{A}.$$

Par suite:

$$A \subset C_E\left(C_E \overset{\circ}{A}\right),$$

c'est-à-dire $\overset{\circ}{A} \subset A$, donc $A = \overset{\circ}{A}$. A est alors ouvert.

4. Si A est fermé alors $\overline{A} = A$. Donc:

$$\mathscr{F}_r(A) = \overline{A} \cap \overline{C_E A} = A \cap \overline{C_E A} \subset A.$$

Inversement, si

$$\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \mathscr{F}_r(A) \subset A,$$

alors $\overline{A} \subset A$. Par conséquent $A = \overline{A}$ et donc, A est fermé.

5. Si A est ouvert et fermé, on a immédiatement:

$$\mathscr{F}_r(A) = \overline{A} \cap C_E \overset{\circ}{A} = A \cap C_{\mathbb{R}} A = \phi.$$

Inversement, si $\mathscr{F}_r(A) = \phi$, alors:

$$\mathscr{F}_r(A) = \overline{A} \cap C_E \overset{\circ}{A} = \phi.$$

D'où

$$\overline{A} \subset \overset{\circ}{A}.$$

Donc

$$A = \overline{A} = \overset{\circ}{A}.$$

Ainsi, A est fermé et ouvert.

Exercice 80

1. Soit $(E,\tau) = (\mathbb{R},|.|)$. Déterminer $\mathscr{F}_r([1,8[)$, $\mathscr{F}_r(\mathbb{N})$ et $\mathscr{F}_r(\mathbb{Q})$.

2. Que dire de la frontière de toute partie propre d'un espace grossier E? d'un espace discret ?

3. Soit E un espace muni de la topologie cofinie. Déterminer la frontière $\mathscr{F}_r(A)$ quand:

i) A est une partie fermée de E.

ii) A est une partie ouverte de E.

iii) A est une partie ni ouverte ni fermée de E.

Solution

1. C'est une question déja rencontrée au premier chapitre. On trouve aisément:

$$\mathscr{F}_r(A) = [1,8] \setminus]1,8[= \{1,8\},$$

$\mathscr{F}_r(\mathbb{N}) = \overline{\mathbb{N}} \setminus \overset{\circ}{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \setminus \phi = \mathbb{N}$ et $\mathscr{F}_r(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \phi = \mathbb{R}$.

2. Dans un espace grossier E, la frontière de toute partie non vide

coïncide A avec E:

$$\mathcal{F}_r(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = E \setminus \phi = E.$$

Si E est un espace discret, la frontière de toute partie A est vide:

$$\mathcal{F}_r(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = A \setminus A = \phi.$$

3. i) Les parties fermées de E sont d'intérieurs vides. On a:

$$\mathcal{F}_r(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = A \setminus \phi = A.$$

ii) Les parties ouvertes de E sont d'adhérences égales à E. Donc

$$\mathcal{F}_r(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = E \setminus A.$$

iii) Les parties ni ouvertes ni fermées de E sont d'intérieurs vides et d'adhérences égales à E. On a :

$$\mathcal{F}_r(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = E \setminus \phi = E.$$

Exercice 81

Soient A et B deux parties d'un espace topologique E.

1. i) Montrer que

$$\mathcal{F}_r(A \cup B) \subset \mathcal{F}_r(A) \cup \mathcal{F}_r(B).$$

ii) Indiquer deux parties A, B de $(\mathbb{R}, |.|)$ telles que:

$$\mathcal{F}_r(A \cup B) \neq \mathcal{F}_r(A) \cup \mathcal{F}_r(B).$$

2. On suppose qu'il n'existe aucun point de E à la fois adhérent à A et à B. Montrer alors que:

$$\mathcal{F}_r(A \cup B) = \mathcal{F}_r(A) \cup \mathcal{F}_r(B).$$

3. On suppose que A et B soient des parties ouvertes et denses dans E. Montrer alors que:

$$\mathcal{F}_r(A \cup B) = \mathcal{F}_r(A) \cap \mathcal{F}_r(B).$$

Solution

1. i) On a:

$$\mathcal{F}_r(A \cup B) = \overline{A \cup B} \cap \overline{C_E(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \cap \overline{C_E A \cap C_E B}$$

Comme

$$\overline{C_E A \cap C_E B} \subset \overline{C_E A} \cap \overline{C_E B},$$

il vient

$$\mathcal{F}_r(A \cup B) \subset (\overline{A} \cap \overline{C_E A} \cap \overline{C_E B}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C_E A} \cap \overline{C_E B})$$
$$\subset \mathcal{F}_r(A) \cup \mathcal{F}_r(B).$$

ii) Si $A = \mathbb{Q}$ et $B = C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$, on obtient:

$$\mathcal{F}_r(\mathbb{Q}) \cup \mathcal{F}_r(C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \neq \mathcal{F}_r(\mathbb{Q} \cup C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}) = \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$$

De même, si $A = [-1,2]$ et $B = [0,3]$, on obtient :

$$\mathcal{F}_r([-1,2]) \cup \mathcal{F}_r([0,3]) = \{-1,2\} \cup \{0,3\} = \{-1,0,2,3\},$$
$$\mathcal{F}_r([-1,2] \cup [0,3]) = \mathcal{F}_r([-1,3]) = \{-1,3\}.$$

2. Supposons $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$. Montrons que:

$$\overline{C_E A} \cap \overline{C_E B} = \overline{C_E A \cap C_E B}\ .$$

Il suffit d'avoir:

$$\overline{C_E A} \cap \overline{C_E B} \subset \overline{C_E A \cap C_E B}\ .$$

Soit $x \in \overline{C_E A} \cap \overline{C_E B}$. Si $x \notin \overline{C_E A \cap C_E B}$ alors:

$$\exists\, V \in \mathcal{V}(x) \,/\, V \cap (C_E A \cap C_E B) = V \cap C_E(A \cup B) = \phi.$$

D'où:

$$V \subset A \cup B.$$

Or V ne doit pas rencontrer, par hypothèse, A et B en même te[mps]
donc on a ou $V \subset A$ ou $V \subset B$. Cela empèche V de rencont[rer]
$C_E A$ et $C_E B$ à la fois et crée la contradiction recherchée.

Ainsi, on peut poser:

$$\mathcal{F}_r(A \cup B) = (\overline{A} \cap \overline{C_E A} \cap \overline{C_E B}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C_E A} \cap \overline{C_E B}).$$

De l'hypothèse $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$ on tire:

$$\overline{B} \subset C_E \overline{A} \subset C_E A \subset \overline{C_E A},$$
$$\overline{A} \subset C_E \overline{B} \subset C_E B \subset \overline{C_E B}.$$

D'où:

$$\mathcal{F}_r(A \cup B) = (\overline{A} \cap \overline{C_E A}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C_E B}) = \mathcal{F}_r(A) \cup \mathcal{F}_r(B).$$

3. Supposons que A et B soient ouvertes et satisfont à

$$\overline{A} = \overline{B} = E.$$

On a aussitôt:

$$\mathcal{F}_r(A\cup B) = \overline{A}\cup\overline{B} \cap \overline{C_E A\cap C_E B} = \overline{C_E A\cap C_E B}.$$

Comme $C_E A\cap C_E B$ est fermé, il vient:

$$\mathcal{F}_r(A\cup B) = C_E A\cap C_E B.$$

De même, on a:

$$\mathcal{F}_r(A) = \overline{A} \cap \overline{C_E A} = E\cap C_E A = C_E A,$$
$$\mathcal{F}_r(B) = \overline{B} \cap \overline{C_E B} = E\cap C_E B = C_E B.$$

D'où:

$$\mathcal{F}_r(A\cup B) = \mathcal{F}_r(A) \cap \mathcal{F}_r(B).$$

Exercice 82

Soit A un sous-ensemble d'un espace E. On dit qu'un point x de E est **extérieur** à A, s'il appartient à l'intérieur du complémentaire de A. Ceci se traduit par l'existence d'un voisinage de x ne rencontrant pas A.

On désigne les points extérieurs de A par $E_x(A)$.

Montrer que $E_x(A)$ est ouvert.

Solution

Il l'est par définition même:

$$E_x(A) = \overset{\circ}{\widehat{C_E A}} = C_E \overline{A}.$$

Exercice 83

On considère sur $\mathbb{R}$ la topologie σ définie dans l'exercice 49.

Déterminer $\overset{\circ}{\widehat{\{0,1\}}}$, $\overline{\{0,1\}}$, $\overset{\circ}{\mathbb{N}}$, $\overline{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}_r(\{1\})$, $E_x(\{1\})$, $\overset{\circ}{\mathbb{Q}}$, $\overline{[0,1[}$

$\overset{\circ}{\widehat{[0,1[}}$ et $\overline{\mathbb{Q}}$.

Solution

En se remémorant les définitions requises de chaque terme, on aura sans peine:

$$\overset{\circ}{\widehat{\{0,1\}}} = \overset{\circ}{\mathbb{N}} = \overset{\circ}{\widehat{[0,1[}} = \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \phi;\ \overline{\{0,1\}} = \overline{[0,1[} = [-1,1];\ \overline{\mathbb{N}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}_r(\{1\}) = \overline{\{1\}} \setminus \overset{o}{\widehat{\{1\}}} = [-1,1] \setminus \phi = [-1,1].$$

$$E_x(\{1\}) = \overset{o}{\widehat{C_E\{1\}}} = \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[.$$

Exercice 84

Soit A et B deux parties d'un espace topologique E. Montrer que:

1. $E_x(A) \subset C_E A$.
2. $E_x\left(C_E E_x(A)\right) = E_x(A)$.
3. $E_x(A \cup B) = E_x(A) \cap E_x(B)$.
4. $E_x(A) = \phi \iff \overline{A} = E$.
5. i) $\mathcal{F}_r(\overline{A}) \subset \mathcal{F}_r(A)$, $\mathcal{F}_r(\overset{o}{A}) \subset \mathcal{F}_r(A)$.

ii) Donner un exemple où toutes les frontières $\mathcal{F}_r(\overset{o}{A})$, $\mathcal{F}_r(A)$ et $\mathcal{F}_r(\overline{A})$ d'un sous-ensemble A sont distinctes.

6. $E = \overset{o}{A} \cup \mathcal{F}_r(A) \cup E_x(A)$.

Solution

On a clairement:

1. $E_x(A) = C_E \overline{A} \subset C_E A$.
2. $E_x\left(C_E E_x(A)\right) = E_x\left(C_E\left(C_E \overline{A}\right)\right) = E_x \overline{A} = C_E \overline{\overline{A}} = C_E \overline{A}$
$= E_x(A)$.
3. $E_x(A \cup B) = E \setminus \overline{(A \cup B)} = E \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) = (E \setminus \overline{A}) \cap (E \setminus \overline{B})$
$= E_x(A) \cap E_x(B)$.
4. $E_x(A) = C_E \overline{A} = \phi \iff \overline{A} = E$
5. i) On a :

$$\overline{\overset{o}{A}} \subset \overline{A},$$

$$\overline{C_E \mathring{A}} = C_E \mathring{A} = \overline{C_E A}\ .$$

Donc:

$$\overline{\mathring{A}} \cap \overline{C_E \mathring{A}} \subset \overline{A} \cap \overline{C_E A}.$$

D'où la première inclusion.

De même, on a:

$$\mathcal{F}_r(\overline{A}) = \overline{\overline{A}} \cap \overline{C_E \overline{A}} = \overline{A} \cap \overline{\overset{\circ}{\widehat{C_E A}}} \subset \overline{A} \cap \overline{C_E A}.$$

D'où la deuxième inclusion.

ii) Considérons dans $(\mathbb{R}, |.|)$ le sous-ensemble

$$A = [-2,1[\cup]1,3] \cup \{4,5\}.$$

On a:

$$\mathcal{F}_r(\mathring{A}) = [-2,3] \setminus (]-2,1[\cup]1,3[) = \{-2,1,3\}.$$

$$\mathcal{F}_r\ (A) = [-2,3] \cup \{4,5\} \setminus (]-2,1[\cup]1,3[) = \{-2,1,3,4,5\}.$$

$$\mathcal{F}_r\ (\overline{A}) = [-2,3] \cup \{4,5\} \setminus]-2,3[= \{-2,3,4,5\}.$$

6. $\mathring{A} \cup \mathcal{F}_r(A) \cup E_x(A) = \mathring{A} \cup (\overline{A} \setminus \mathring{A}) \cup C_E \overline{A} = E.$

2.7 Densité, séparabilité

Exercice 85

Soient A et B deux parties d'un espace topologique (E,τ). On dit que A est **dense** dans B, si tout point de B est adhérent à A.

Autrement dit,

$$A \text{ est dense dans } B \iff B \subset \overline{A}.$$

On dit que A est **partout dense** dans E si son adhérence coïncide avec E. On écrit:

$$A \text{ est partout dense dans } E \iff \overline{A} = E \iff C_E \overline{A} = E_x(A) = \phi.$$

1. Vérifier que:

i) si E est un espace grossier, toute partie A y est partout dense.

ii) si E est un espace discret, alors une partie A est dense dans toute partie B vérifiant $B \subset A$.

E n'admet pas de sous-ensemble propre partout dense.

2. Soient $(E,\tau) = (\mathbb{R},|.|)$, $A = [1,4[$ et $B =]1,2[$. Lequel de A ou de B est dense dans l'autre ?

3. Soit $E = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\phi,E,\{a\},\{a,b\}\}$, $A = \{d\}$ et $B = \{a,c\}$.
Vérifier que:
i) A n'est pas dense dans B.
ii) B est dense dans A.

4. Caractériser les parties partout denses dans un espace cofini.

Solution

1. i) C'est vrai, car $\overline{A} = E$.

ii) On a $A = \overline{A}$. Donc

$$B \subset A \quad \Rightarrow B \subset \overline{A}.$$

Par ailleurs, E n'admet pas de sous-ensemble partout dense, puisque

$$A = \overline{A} \neq E.$$

2. A est dense dans B car:

$$B =]1,2[\subset \overline{A} = [1,4].$$

3. i) A n'est pas dense dans B, car:

$$B \not\subset \overline{A} = \{c,d\}.$$

ii) Par contre, $A \subset \overline{B} = E$, ce qui signifie que B est dense dans A.

4. Ce sont les parties infinies (question 3 de l'exercice 80).

Exercice 86

Soient A,B et C trois parties non vides d'un espace E. Montrer que si A est dense dans B et B dense dans C, alors A est dense dans C.

Solution

Les hypothèses se traduisent par $B \subset \overline{A}$ et $C \subset \overline{B}$. La première inclusion implique $\overline{B} \subset \overline{A}$, ce qui donne grâce à la deuxième $C \subset \overline{A}$. Donc, A est dense dans C.

Exercice 87

Montrer que pour qu'un sous-ensemble A d'un espace (E,τ) soit partout dense il faut et il suffit que tout ouvert non vide de E le rencontre.

Solution

La condition est nécessaire.

Soient A un ensemble partout dense dans E et Ω un ouvert non vide de E. Comme $\overline{A} = E$ alors $\Omega \subset \overline{A}$. D'où $A \cap \Omega \neq \phi$.

La condition est suffisante.

Supposons que tout ouvert non vide de E rencontre A et considérons un point x de E. Il apparaît clairement que tout voisinage V de x coupe A. Donc, $x \in \overline{A}$. Par suite, $\overline{A} = E$.

Exercice 88

Soit Ω une partie d'un espace topologique E. Montrer que pour tout sous-ensemble A de E on a:

$$\Omega \text{ ouvert} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega \cap \overline{A} \subset \overline{\Omega \cap A}.$$

Solution

Soient Ω un ouvert de E, x un élément de $\Omega \cap \overline{A}$ et V un voisinage de x. Il ressort que $V \cap \Omega$ est un voisinage de x. Comme $x \in \overline{A}$ il vient

$$A \cap (V \cap \Omega) \neq \phi;$$

c'est-à-dire:

$$V \cap (A \cap \Omega) \neq \phi.$$

D'où $x \in \overline{A \cap \Omega}$.

Réciproquement, soit Ω une partie de E telle que :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad \Omega \cap \overline{A} \subset \overline{\Omega \cap A}.$$

En posant $A = C_E\Omega$, il vient:

$$\Omega \cap \overline{C_E\Omega} \subset \overline{\Omega \cap C_E\Omega} \Leftrightarrow \Omega \cap C_E(\overset{\circ}{\Omega}) \subset \phi \Leftrightarrow \Omega \subset \overset{\circ}{\Omega}.$$

Par suite, $\Omega = \overset{\circ}{\Omega}$. Donc, Ω est ouvert.

Exercice 89

1. Montrer que si A est une partie partout dense dans un espace E et Ω un ouvert de E, alors:

$$\overline{\Omega} = \overline{A \cap \Omega}.$$

2. Montrer que cette dernière égalité peut-être fausse si Ω n'est pas ouvert.

Solution

1. On a évidemment $\overline{A\cap\Omega} \subset \overline{\Omega}$. Montrons que:

$$\overline{\Omega} \subset \overline{A \cap \Omega}.$$

Soient x un élément de $\overline{\Omega}$ et U un voisinage ouvert de x. Comme $U\cap\Omega$ est ouvert et A partout dense dans E, il existe au moins un point de A appartenant à $U\cap\Omega$ (exercice 87). Ce point est à la fois dans $A\cap\Omega$ et dans U. Il s'en suit que x est adhérent à $A\cap\Omega$. D'où:

$$\overline{\Omega} \subset \overline{A \cap \Omega}.$$

2. En voici deux exemples.

i) En prenant dans $(\mathbb{R},|.|)$, $A = \mathbb{N}$ et $\Omega = C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$, il vient:

$$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \neq \overline{\mathbb{N} \cap C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}} = \phi.$$

ii) Soient $E = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\phi, E, \{a,b\}\}$, $A = \{a\}$ et $\Omega = \{c\}$. On constate que Ω n'est pas ouvert et que $\overline{A} = E$. D'une part, on a $\overline{\Omega} = \{c,d\}$. D'autre part,

$$\overline{A\cap\Omega} = \overline{\{c\}\cap\{a\}} = \phi.$$

D'où:

$$\overline{\Omega} \neq \overline{A\cap\Omega}.$$

Exercice 90

Démontrer que pour qu'une partie A d'un espace topologique (E,τ) coupe toute partie partout dense B il faut et il suffit que A soit d'intérieur non vide.

Solution

On raisonne par l'absurde. Si A était d'intérieur vide, son complémentaire serait partout dense. A rencontrerait alors son complémentaire. Absurde!

Inversement, si $\overset{\circ}{A}$ est non vide et B partout dense, alors $\overset{\circ}{A}$ coupe B (exercice 87) et, à fortiori:

$$A \cap B \neq \phi.$$

Exercice 91

Un espace topologique (E,τ) est dit séparable, s'il renferme un sous-ensemble dénombrable et partout dense.

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses:

1. $(\mathbb{R},|.|)$ est séparable.
2. Un espace discret est séparable.
3. $\mathbb{Z}$ muni de la topologie cofinie n'est pas séparable.
4. $\mathbb{R}$ muni de la topologie σ de l'exercice 49 est séparé mais non séparable.

Solution

1. Vraie, car il contient $\mathbb{Q}$ lequel est dénombrable et partout dense.
2. vraie si E est dénombrable, fausse si E ne l'est pas. Dans un tel espace, on a toujours $\overline{A} = A$.
3. Fausse. En effet, on a $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}$.
4. Fausse. $(\mathbb{R},\sigma)$ n'est pas séparé car tous ses ouverts se coupent.

Par contre, il est séparable, car on a vu que $\overline{\mathbb{N}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Exercice 92

Démontrer que si E est un espace séparable, la famille de tous les ouverts deux à deux disjoints de E est au plus dénombrable.

Solution

Soient $(\Omega_i)_{i \in I}$ la famille de tous les ouverts deux à deux disjoints de E et A un sous-ensemble dénombrable partout dense de E.

Supposons que cette famille ne soit pas dénombrable. Quel que soit i de I, $\Omega_i \cap A$ est non vide (exercice 87). Par suite, $\bigcup_{i\in I}(\Omega_i \cap A)$ n'est pas dénombrable du fait que les parties Ω_i, $(i\in I)$ sont deux à deux disjointes. Il en résulte que A n'est pas dénombrable. On conclut que E ne peut pas contenir un sous-ensemble dénombrable et partout dense. Ceci est contraire aux hypothèses.

2.8 Espaces de Baire

Exercice 93

Un espace topologique E est dit espace de **Baire**, s'il est séparé et si toute intersection dénombrable d'ouverts partout denses de E est partout dense dans E.

1. Montrer que, dans un espace de Baire E, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides de E est d'intérieur vide.
2. Montrer que tout espace discret E est de Baire.

Solution

1. Il suffit de passer aux complémentaires.
2. On sait que le seul ouvert dense dans E discret est E lui-même.

Ainsi, si $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'ouverts denses dans E, on a aussitôt:

$$\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n} = \overline{E} = E.$$

Donc, E est de Baire.

Exercice 94

On sait que $(\mathbb{R},|.|)$ est de Baire et pourtant:

i) les parties $\mathbb{R}\setminus\{x\}$, avec $x\in\mathbb{R}$, sont ouvertes partout denses et:

$$\bigcap_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{R}\setminus\{x\} = \phi.$$

ii) $\mathbb{Q}$ et $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont partout denses et

$$\mathbb{Q} \cap C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \phi.$$

Où sont les failles?

Solution

i) La famille n'est pas dénombrable.

ii) Les deux parties ne sont pas ouvertes

Exercice 95

1. Soit $(F_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une famille de fermés d'un espace de Baire E telle que:

$$\bigcup_{n\in \mathbb{N}} F_n = E. \qquad (*)$$

Montrer qu'il existe un indice n_0 tel que F_{n_0} soit d'intérieur non vide.

2. En déduire que $(\mathbb{Q},|.|)$ n'est pas de Baire.

Solution

1. En passant aux complémentaires dans (*), on obtient:

$$\bigcap_{n\in \mathbb{N}} C_E F_n = \phi.$$

L'espace E étant de Baire, les ouverts ne peuvent pas être tous partout denses. Ainsi, il existe un indice n_0 tel que $\overline{C_E F_{n_0}} \neq E$; c'est-à-dire:

$$C_E \overset{\circ}{\widehat{F_{n_0}}} \neq E .$$

D'où le résultat.

2. En effet, on a:

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in \mathbb{N}} \{x_n\}.$$

Comme les singletons sont fermés dans $(\mathbb{R},|.|)$ ils restent fermés dans le sous-espace $(\mathbb{Q},|.|)$. Or celui-ci n'est pas discret, donc tous les sous-ensembles $\{x_n\}$ sont d'intérieurs vides.

Exercice 96

Dans un espace topologique, un fermé d'intérieur vide est dit ensemble **rare**.

1. Vérifier que toute partie finie A de $(\mathbb{R},|.|)$ est rare.

2. Est-ce le cas pour une partie infinie?

3. A-t-on les mêmes résultats si on remplace $(\mathbb{R},|.|)$ par un espace cofini?

Solution

1. On a trivialement:

$$\overset{\circ}{A} = \phi.$$

2. Ce n'est pas toujours le cas. Ainsi, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont des parties rares, par contre $[0,1]$ ne l'est pas. En clair, on a:

$$\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \phi, \quad \widehat{[0,1]}^{\circ} =]0,1[.$$

3. On a le même verdict pour les parties finies d'un tel espace. Les parties infinies, elles, ne sont pas fermées. Elles ne sont donc pas rares.

Exercice 97

On dit qu'une partie A d'un espace E est **maigre**, si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides.

Autrement dit, on appelle ensemble maigre d'un espace E, toute partie incluse dans une réunion dénombrable d'ensembles rares.

Montrer que

1. tout singleton est maigre dans $(\mathbb{R},|.|)$.
2. c'est le cas de toute partie dénombrable en général.
3. i) si A et B sont maigres alors $A \cup B$ et $A \cap B$ le sont.
   ii) Est-il de même pour $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$?

Solution

1. Tout singleton, dans $(\mathbb{R},|.|)$, étant fermé d'intérieur vide, il est alors maigre.

2. Soit A une telle partie. Elle s'écrit sous la forme $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{a_i\}$, Λ étant dénombrable. On déduit de (1) qu'elle est maigre.

3. i) On a:

$$A \text{ maigre} \Leftrightarrow \exists\,(F_i)_{i\in I} / A \subset \bigcup_{i\in I} F_i,$$

$$B \text{ maigre} \Leftrightarrow \exists\,(K_j)_{j\in J} / B \subset \bigcup_{j\in J} K_j.$$

où $(F_i)_{i\in I}$ et $(K_j)_{j\in J}$ sont deux familles dénombrables de fermés d'intérieurs vides. Il vient immédiatement:

$$A \cap B \subset \left(\bigcup_{i,\in I} F_i\right),$$

$$A \cup B \subset \left(\bigcup_{i,\in I} F_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J} K_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} \left(F_i \cup K_j\right).$$

La famille $\bigcup_{(i,j)\in I\times J} \left(F_i \cup K_j\right)$ étant dénombrable, son intérieur est alors vide. On conclut que $A\cap B$ et $A\cup B$ sont maigres.

ii) $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ n'est pas maigre, quoique son intérieur est vide.

En effet, s'il l'était, $\mathbb{R}$ le serait de même, puisqu'on a:

$$\mathbb{R} = C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}.$$

Comme $\mathbb{R}$ n'est pas maigre, $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ ne peut pas l'être.

2.9 Comparaison des topologies

Exercice 98

Soient τ_1 et τ_2 deux topologies définies sur un même espace E. On dit que τ_1 est **plus fine** τ_2 que (ou que τ_2 est **moins fine** que τ_1) si $\tau_2 \subset \tau_1$.

Autrement dit, τ_1 est plus fine que τ_2 si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est satisfaite:

i) Tout ouvert par rapport à τ_2 est ouvert par rapport à τ_1.

ii) Tout fermé par rapport à τ_2 est fermé par rapport à τ_1.

iii) Quel que soit x de E, tout voisinage de x par rapport à τ_2 est un voisinage de x par rapport à τ_1.

Si τ_1 est plus fine que τ_2 et τ_2 plus fine que τ_1 on dit que les deux espaces (E,τ_1) et (E,τ_2) ont les mêmes ouverts et les mêmes fermés. On dira, dans ce cas, que les deux topologies τ_1 et τ_2 sont **équivalentes.**

1. Vérifier que la topologie grossière est la moins fine des topologies possibles sur un ensemble E. En revanche, la discrète est la plus fine de toutes.

2. Soient $E = \mathbb{N}$, τ_1 la topologie cofinie et $\tau_2 = \left\{\phi, \mathbb{N}, (A_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$, avec $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Vérifier que τ_1 est plus fine que τ_2 et que celle-ci n'est pas plus fine que τ_1.

3. Comparer sur $\mathbb{R}$ la topologie σ donnée dans l'exercice 49 et la topologie usuelle.

4. On considère $E = \mathbb{R}$ et le munit des trois topologies:

τ_1 l'usuelle, τ_2 la cofinie et τ_3 la codénombrable.

Montrer que:

i) τ_1 et τ_3 sont plus fines que τ_2.

ii) τ_1 n'est pas plus fine que τ_3.

iii) τ_3 n'est pas, elle aussi, plus fine que τ_1.

Solution

1. Il suffit de se rappeler les définitions de ces deux topologies.

2. En effet, tout ouvert de τ_2 (abstraction faite de ϕ et $\mathbb{N}$ communs à τ_1 et τ_2) admet un complémentaire fini. C'est donc un élément de τ_1. Donc, τ_1 est plus fine que τ_2.

Par contre, si l'on prend:

$$\Omega = \{3,4\} \cup \{8,9,\ldots\}$$

on voit que $\Omega \in \tau_1$ et $\Omega \notin \tau_2$. Donc, τ_2 n'est pas plus fine que τ_1.

3. Tout ouvert de σ, autre que ϕ et $\mathbb{R}$, est réunion d'intervalles ouverts, donc appartient à la topologie usuelle. Celle-ci est alors plus fine que σ. Par contre, σ est moins fine que l'usuelle car elle ne contient pas, par exemple, l'ouvert $]-1,1[$ de l'usuelle.

4. i) Il est facile de voir que τ_1 et τ_3 sont plus fines que τ_2 pour la même raison que la question précédente.

ii) Par contre, τ_1 n'est pas plus fine que τ_3 car $]-1,1[$ appartient à τ_1, mais pas à τ_3.

iii) De même, τ_3 n'est pas plus fine que τ_1 car $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ appartient à τ_3, mais pas à τ_1.

Exercice 99

1. Montrer qe si $(\sigma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille de topologies définies sur un ensemble E, alors son intersection $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\sigma_\lambda$ constitue une topologie sur E, laquelle est moins fine que chacune des topologies σ_λ.

2. Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, qu'une réunion de topologies peut ne pas être une topologie.

Solution

1. Il est évident que $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\sigma_\lambda$ renferme E et ϕ. De plus, chacune des topologies σ_λ étant stable pa rapport à la réunion et à l'intersection finie, il en résulte qu'il est de même pour $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\sigma_\lambda$. Celle-ci est donc une topologie.

Enfin, on constate trivialement que $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\sigma_\lambda$ est moins fine que chacune des σ_λ. D'où le résultat.

2. Il suffit pour étayer cette affirmation, de considérer $\mathbb{R}$ muni des topologies τ_1 et τ_3 de l'exercice précédent. Ainsi, si l'on prend $A = C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ et $B =]-1,1[$ il vient:

$$C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} \cap \left]-1,1\right[= A \cap B \notin \tau_1 \cup \tau_3 .$$

Cependant, si deux topologies σ_1 et σ_2 sont comparables, leur réunion forme une topologie.

Exercice 100

Soit $\mathcal{B}$ une famille non vide de parties d'un ensemble E. Montrer qu'il existe sur E une topologie contenant $\mathcal{B}$.

Solution

La famille des topologies contenant $\mathcal{B}$ n'est pas vide, car elle renferme au moins la topologie discrète. Par conséquent, l'intersection de toutes ces topologies donne une topologie résolvant notre problème.

Cette topologie s'appelle topologie **engendrée** par $\mathcal{B}$.

Exercice 101

Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur un même ensemble E. Montrer que si τ_1 est plus fine que τ_2, alors:

1. L'adhérence d'une partie A dans (E,τ_2) contient l'adhérence de A dans (E,τ_1).

2. L'intérieur d'une partie A dans (E,τ_2) est contenu l'intérieur de A dans (E,τ_1).

Solution

1. Notons $\overline{A_1}$ l'adhérence de A, $\mathcal{V}_1(x)$ la famille des voisinages d'un point x dans (E,τ_2) et $\overline{A_2}$ et $\mathcal{V}_2(x)$ celles dans (E,τ_1). On a:

$$x \in \overline{A_1} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, V \in \mathcal{V}_1(x) \quad V \cap A \neq \phi.$$

Comme tout voisinage V par rapport à τ_2 l'est par rapport à τ_1, on aura:

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_2(x) \quad V \cap A \neq \phi,$$

c-à-d $x \in \overline{A_2}$. Donc:

$$\overline{A_1} \subset \overline{A_2}\,.$$

2. De même, si $x \in \overset{o}{A}_2$ alors $A \in \mathcal{V}_2(x)$. Or $\mathcal{V}_2(x) \subset \mathcal{V}_1(x)$, donc $A \in \mathcal{V}_1(x)$, par suite $x \in \overset{o}{A}_1$.

2.10 Systèmes fondamentaux de voisinages

Exercice 102

Soit x un point d'un espace E. On dit qu'une sous-famille $\mathcal{W}(x)$ de voisinages de x est un **système fondamental** de voisinages de x, si elle satisfait à la condition suivante:

Pour tout voisinage V de $\mathcal{V}(x)$, il existe un voisinage W de $\mathcal{W}(x)$ de sorte que $W \subset V$.

1. Montrer que tout point d'un espace E admet un système fondamental de voisinages ouverts.

2. Montrer que la famille $\mathcal{W}(x) = \left\{\left(\left]x-\dfrac{1}{k}\,,\,x+\dfrac{1}{k}\right[\right)_{k\in\mathbb{N}^*}\right\}$ forme un système dénombrable de voisinages de x dans $(\mathbb{R},|.|)$.

3. On muinit $\overline{\mathbb{R}}$ de sa topologie usuelle et on y considère les familles:

$$\mathcal{W}(+\infty) = \left\{\left(\left]k,+\infty\right]\right)_{k\in\mathbb{N}}\right\},$$

$$\mathcal{W}(-\infty) = \left\{\left(\left[-\infty,\,k\right[\right)_{k\in\mathbb{N}}\right\},$$

$$\mathcal{W}(x) = \left\{\left(\left]x-\frac{1}{k}\,,\,x+\frac{1}{k}\right[\right)_{k\in\mathbb{N}^*}\right\} \text{ (pour } x\in\mathbb{R}).$$

Montrer que ces familles constituent des systèmes fondamentaux de voisinages de $+\infty$, $-\infty$ et x respectivement.

4. Soient E un espace discret et x un point de E. Montrer que la famille $\mathcal{W}(x) = \{\{x\}\}$ est un système fondamental de voisinages de x.

Solution

1. En effet, tout voisinage d'un point x contient, par définition, un ouvert, lequel constitue un voisinage de x.

2. Notons de prime abord que $\mathcal{W}(x)$ est, par construction, dénombrable. Par ailleurs, on sait que:

$$V \text{ est voisinage de } x \text{ dans } (\mathbb{R},|.|) \Leftrightarrow \exists\, r>0 \,/\,]x\text{-}r,\, x+r[\, \subset V$$

Le lemme d'Archimède assure l'existence d'un entiet naturel k tel que $k > \frac{1}{r}$. Ainsi, le voisinage V contient un voisinage de la forme

$$\left]x-\frac{1}{k}\;,\; x+\frac{1}{k}\right[.$$

3. Nous venons de voir que c'est le cas pour $\mathcal{W}(x)$. Soit V un voisinage de $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On écrit par définition:

$$\exists\, a>0 \,/\,]a, +\infty] \subset V.$$

Or

$$\forall\, a>0 \;\exists\, k\in \mathbb{N}^* / \,k>a,$$

donc

$$]k,+\infty[\, \subset V.$$

Le cas de $-\infty$ se traite de même.

4. Dans cet espace, le singleton $\{x\}$ est voisinage de x. Comme il est contenu dans tout autre voisinage, la famille $\mathcal{W}(x)$ est alors un système fondamental de voisinages de x.

Exercice 103

1. Montrer que tout espace discret est régulier.

2. Montrer que $(\mathbb{R},|.|)$ est régulier.

3. Montrer qu'un espace E muni de la topologie cofinie n'est pas régulier.

Solution

On sait qu'un espace topologique est dit **régulier**, s'il est séparé et si tout voisinage V d'un point quelconque x de E contient un voisinage fermé W de x.

1. Il est séparé et $\{x\}$ est un voisinage fermé de x, contenu dans tout autre voisinage de x.

2. Il suffit de rappeler que, pour tout réel x, on a:

$$\left[x-\frac{1}{2k}, x+\frac{1}{2k}\right] \subset \left]x-\frac{1}{k}, x+\frac{1}{k}\right[, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

3. Il est d'abord non séparé. De plus, l'unique voisinage fermé de chaque point x de E est E lui-même. Il est, par conséquent, impossible qu'un voisinage quelconque V de x contienne E.

Exercice 104

Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:

1. Tout voisinage V d'un point quelconque x de E contient un voisinage fermé W de x.

2. Pour toute partie fermée A de E et pour tout x de $C_E A$ il existe deux ouverts disjoints Ω_A et Ω_x tels que $x \in \Omega_x$ et $A \subset \Omega_A$.

Solution

$1 \Rightarrow 2$

Comme x appartient à l'ouvert $C_E A$, il existe un voisinage fermé W de x tel que $W \subset C_E A$ (et ce, conformément à (1)). D'où $A \subset C_E W$. En prenant $\overset{o}{W} = \Omega_x$ et $C_E W = \Omega_A$ la propriété (2) se trouve satisfaite.

$2 \Rightarrow 1$

Sans restreindre de généralité, il nous suffit de montrer cette implication dans le cas d'un voisinage ouvert V de x. appliquons la condition (2) aux deux ensembles fermés $\{x\}$ et $C_E V$. Si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints tels que $x \in \Omega_1$ et $C_E V \subset \Omega_2$ on aura :

$$x \in \Omega_1 \subset C_E \Omega_2 \subset V.$$

Comme $C_E \Omega_2$ est fermé on obtient :

$$\overline{\Omega_1} \subset C_E\Omega_2 \subset V.$$

Par suite, la condition (1) est vérifiée en prenant $\Omega_1 = W$.

Exercice 105

On dit qu'un espace topologique E est **normal**, s'il est séparé e vérifie la condition :

Quels que soient A et B fermés disjoints de E, il existe deu ouverts disjoints Ω_A et Ω_B de sorte que $A \subset \Omega_A$ et $B \subset \Omega_B$.

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses.

1. Tout espace discret est normal.
2. Un espace muni de la topologie cofinie n'est pas normal.
3. $\mathbb{R}$ muni de la topologie σ de l'exercice 49 est régulier et normal

Solution

Elles sont toutes vraies.

1. Toute partie étant ouverte (et fermée) dans cet espace séparé, il suffit de prendre $\Omega_A = A$ et $\Omega_B = B$.

2. Il n'est pas séparé. Bien plus, si un tel couple d'ouverts existait, l'un serait inclus dans le complémentaire fini de l'autre. Absurde.

3. Fausse. Il n'est pas séparé. De plus, aucun de ses points (mis à part 0) ne possède de voisinage fermé.

Il n'est pas normal, non plus, puisque ses ouverts sont concourants

Exercice 106

Soit (E,τ) un espace topologique. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

i) E est normal.

ii) Pour tout fermé F et tout ouvert Ω tel que $F \subset \Omega$, il existe un ouvert O tel que:

$$F \subset O \subset \overline{O} \subset \Omega.$$

Solution

i) $\Rightarrow$ ii)

Supposons E normal. Soient F un fermé et Ω un ouvert de E tels que $F \subset \Omega$. On a:

$$F \cap C_E\Omega = \phi.$$

F et $C_E\Omega$ étant deux fermés disjoints de l'espace normal E, il existe deux ouverts disjoints O et W tels que $F \subset O$ et $C_E\Omega \subset W$. Il en résulte que $O \subset C_E W$. Comme $C_E W$ est fermé, on a aussi $\overline{O} \subset C_E W$. Ainsi, on peut avoir:

$$F \subset O \subset \overline{O} \subset C_E W \subset \Omega.$$

ii) $\Rightarrow$ i)

Soient F et G deux fermés disjoints de E. On a:

$$F \subset C_E G.$$

Comme $C_E G$ est ouvert, il existe par hypothèse, un ouvert Ω tel que:

$$F \subset \Omega \subset \overline{\Omega} \subset C_E G.$$

Le complémentaire $O = C_E \overline{\Omega}$ est ouvert, contient G et ne rencontre pas Ω. On conclut donc que E est normal.

2.11 Bases

Exercice 107

Une famille $\mathfrak{B}$ d'ouverts d'un espace (E,τ) est dite **base** de la topologie τ de E, si chacun des ouverts de τ s'écrit sous la forme d'une réunion d'éléments de $\mathfrak{B}$.

1. Montrer que:

   i) $\sigma = \left\{ \left( ]a,b[\right)_{a,b \in \mathbb{R}} \right\}$ est une base de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

   ii) $\sigma = \left\{ \{x\}_{x \in E} \right\}$ est une base de tout espace discret E.

2. Soit $E = \{1,2,3,4\}$. On le munit de la topologie suivante:

$$\tau = \left\{ \phi, E, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\} \right\}.$$

Montrer que $\sigma = \left\{ \{1\}, \{2\}, \{4\}, E \right\}$ est une base de τ.

Solution

1. i) Il suffit, conformément à l'exercice 7 du premier chapitre et à

l'associativité de la réunion, de montrer que tout intervalle ouvert I est réunion d'éléments de σ. Nous distinguons quatre cas:

$$I =]a,b[\in \sigma,$$

$$I =]-\infty,b[= \bigcup_{a<b}]a,b[,$$

$$I =]a,+\infty[= \bigcup_{b>a}]a,b[,$$

$$I =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R} = \bigcup_{a,b\in \mathbb{R}}]a,b[.$$

σ est bien une base comme annoncé.

ii) Dans un tel espace les singletons sont ouverts.

2. Il est évident que tout ouvert de τ est réunion d'éléments de σ.

Exercice 108

Démontrer que toute base σ d'un espace E jouït des deux propriétés suivantes:

1. Tout point x de E appartient, au moins, à un élément Ω de σ.
2. Si x est un point appartenant à l'intersection de deux éléments Ω_1 et Ω_2 de σ, il existe un élément Ω_3 de σ de sorte que:

$$x\in \Omega_3 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2 .$$

Solution

En effet, la condition (1) signifie clairement que l'ensemble de référence E doit, en tant qu'ouvert, constituer une réunion d'éléments de σ. La seconde résulte du fait que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ étant ouvert, il est alors réunion d'éléments de la base σ. D'où l'existence de Ω_3 décrit.

Exercice 109

Soit σ une famille de parties d'un ensemble quelconque E. Démontrer que si σ satisfait aux conditions (1) et (2) de l'exercice précédent, la famille de toutes les parties de E pouvant se mettre sous forme de réunions d'éléments de σ constitue une topologie sur E.

Solution

Soit $\mathcal{V}$ la famille des parties de E s'écrivant sous la forme de réunions d'éléments de σ. Montrons qu'elle satisfait aux trois axiomes O_1, O_2 et O_3 de Hausdorff.

Nous remarquons que l'ensemble vide peut s'écrire sous forme de réunion d'une famille vide d'éléments de σ. Il appartient donc à $\mathcal{V}$.

De même, E appartient à σ en vertu de la propriété (1). D'où O_1.

D'autre part, l'opération de réunion étant associative, il apparaît clairement que $\mathcal{V}$ est stable par réunion; ce qui achève O_2.

Enfin, si A et B sont deux éléments de $\mathcal{V}$, on a $\bigcup_{\alpha} V_\alpha = A$ et $\bigcup_{\beta} W_\beta = B$ où V_α et W_β sont deux éléments de σ, pour tout α et β. Par suite:

$$A \cap B = \left(\bigcup_{\alpha} V_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_{\beta} W_\beta\right) = \bigcup_{\alpha,\beta} (V_\alpha \cap W_\beta).$$

D'après la propriété (2), les parties $V_\alpha \cap W_\beta$ appartiennent à σ.

Donc $A \cap B \in \mathcal{V}$. Conclusion: $\mathcal{V}$ est une topologie sur E.

Exercice 110

Soient (E,τ) un espace topologique et σ une sous-famille de τ. Démontrer que σ est une base de τ si, et seulement si, elle satisfait à la condition suivante:

Pour tout ouvert Ω et tout point x de Ω, il existe un ensemble K_x de σ tel que $x \in K_x \subset \Omega$.

Solution

La condition est nécessaire.

Si σ est une base de τ, alors tout élément Ω de τ peut être représenté comme une réunion d'ensembles de σ. Par conséquent, pour tout x de Ω il existe un ensemble K_x de σ de sorte que:

$$x \in K_x \subset \Omega.$$

La condition est suffisante.

Si la condition posée est satisfaite, tout ensemble ouvert Ω peut être mis sous la forme $\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} K_x$, ce qui signifie que σ est une base de τ.

Exercice 111

Soient σ_1 une base d'une topologie τ et σ_2 une sous-famille de τ.

Démontrer que si tout ensemble de σ_1 s'écrit sous forme d'une réunion d'éléments de σ_2, alors σ_2 constitue une base pour τ.

Solution

Soit Ω un ouvert de τ. Comme σ_1 est une base de τ, Ω s'écrit:

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i, \ \Omega_i \in \sigma_i \ \forall i \in I.$$

Or chaque Ω_i est une réunion d'ensembles $(K_{i,j})$ de σ_2, donc :

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J} K_{i,j} \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} K_{i,j}, \quad K_{i,j} \in \sigma_2.$$

Exercice 112

Soit σ une famille d'ouverts d'un espace (E,τ). Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes:

1. σ est une base de τ.
2. quel que soit x de E, la famille:

$$\mathcal{W}(x) = \left\{ \Omega \in \sigma \,/\, x \in \Omega \right\}$$

constitue un système fondamental de voisinages de x.

Solution

1 $\Rightarrow$ 2

Soit V un voisinage de x. Il existe un ouvert U tel que:

$$x \in U \subset V.$$

Comme σ est une base de τ, il existe un élément Ω de sorte que:

$$x \in \Omega \subset U.$$

Il s'en suit que $\Omega \in \mathcal{W}(x)$. Cette dernière est alors un système fondamental de voisinages de x.

$2 \Rightarrow 1$

Soit V un voisinage d'un point quelconque x de E. En vertu de (2), il existe un élément Ω de $\mathcal{W}(x)$ vérifiant:

$$x \in \Omega \subset V.$$

Il en découle, grâce à l'exercice 111, que σ forme une base pour τ.

Exercice 113

1. Montrer que tout espace (E,τ) jouïssant d'une base dénombrable est séparable.
2. Que dire de la réciproque?

Solution

1. Soit σ une base dénombrable de τ. Choisissons, pour tout ouvert Ω de σ, un élément x_Ω de Ω. L'ensemble A des éléments x_Ω $(\Omega \in \sigma)$ est dénombrable (comme σ). Il est aussi partout dense dans E car σ est une base de τ.

2. Elle est fausse. En voici un contre-exemple. On considère $\mathbb{R}$ muni de la topologie cofinie. Il est clair que cet espace est séparable. Toutefois, il ne possède pas de base dénombrable.

2.12 Topologie induite, sous-espaces

Exercice 114

Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique (E,τ). On appelle **trace** d'un ouvert Ω de τ sur A, le sous-ensemble U de E défini par $U = A \cap \Omega$. On note τ_A la famille des traces des ouverts de E sur A.

Montrer que τ_A est une topologie sur A.

Solution

En regardant de près τ_A, on constate que celle-ci renferme ϕ, car $\phi = A \cap \phi$ avec $\phi \in \tau$. De même, τ_A contient A car $A = A \cap E$, $E \in \tau$. On conclut que τ_A vérifie le premier axiome O_1 des trois définissant une topologie.

τ_A satisfait aussi aux deux autres O_2 et O_3. En effet, soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une sous-famille de τ_A. on a:

$$\Omega_i \in \tau_A \Rightarrow \exists V_i \in \tau \,/\, \Omega_i = V_i \cap A, i \in I.$$

D'où:

$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i = \bigcup_{i \in I} (V_i \cap A) = \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) \cap A.$$

Comme $\bigcup_{i \in I} V_i \in \tau$ il s'en suit que $\bigcup_{i \in I} \Omega_i \in \tau_A$, ce qui signifie que O_2 est vérifié.

Enfin, si Ω_1 et Ω_2 sont deux éléments de τ_A, alors $\Omega_1 = V_1 \cap A$ et $\Omega_2 = V_2 \cap A$, où V_1, $V_2 \in \tau$. D'où:

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = (V_1 \cap A) \cap (V_2 \cap A) = (V_1 \cap V_2) \cap A.$$

Comme $V_1 \cap V_2 \in \tau$ on obtient $\Omega_1 \cap \Omega_2 \in \tau_A$.

Conclusion: τ_A est une topologie sur A.

Remarque: τ_A est dite topologie **induite** sur A (par τ).

Le couple (A, τ_A) s'appelle **sous-espace topologique** de E.

Exercice 115

1. Soit $(E, \tau) = (\mathbb{R}, |.|)$ et $A = [0,1]$.

i) Montrer que $\Omega_1 = [0,1[$ et $\Omega_2 =]0,1[$ sont deux ouverts de A.

ii) Montrer que la topologie $\tau_{\mathbb{N}} = |.|_{\mathbb{N}}$ induite sur $\mathbb{N}$ est $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

2. Montrer que tout sous-espace d'un espace discret est discret et tout sous-espace d'un espace grossier est grossier.

Solution

1. i) On a clairement :

$$\Omega_1 = [0,1[\,=\,]-1,1[\cap [0,1],$$
$$\Omega_2 =]0,1[\,=\,]0,1[\cap [0,1].$$

(Remarquer que Ω_1 est ouvert dans A, mais ne l'est pas dans $(\mathbb{R},|.|)$).

ii). Pour tout n de $\mathbb{N}$ l'ensemble

$$\Omega = \{n\} =]n-1,n+1[\cap \mathbb{N}$$

est ouvert dans $\mathbb{N}$. Il en résulte que $\tau_{\mathbb{N}} = |.|_{\mathbb{N}} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Autrement dit, $(\mathbb{N},|.|_{\mathbb{N}})$ est l'espace discret $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

On peut voir de même que $(\mathbb{Z},|.|_{\mathbb{Z}})$ coïncide avec $(\mathbb{Z},\mathcal{P}(\mathbb{Z}))$. Il est discret.

2. C'est une conséquence immédiate de la définition da la topologie trace.

Exercice 116

Soit $E = \{a,b,c,d,e\}$. On le munit de la topologie:

$$\sigma = \{E,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}.$$

1. On pose $A = \{a,b,c\}$. Donner A'.
2. Montrer que l'ensemble $D = \{a,c\}$ est partout dense dans E, tandis que $F = \{b,d\}$ ne jouït pas de cette propriété.
3. On pose $G = \{b,c,d\}$. Déterminer $\overset{\circ}{G}$, $\mathcal{F}_r(G)$ et $E_x(G)$.
4. Quelle est la topologie induite sur G par σ?

Solution

1. Il est aisé de constater que a et c possèdent chacun un voisinage ne rencontrant A qu'en eux respectivement. Les autres points ne jouïssent pas de cette aubaine. D'où:

$$A' = \{b,d,e\}.$$

2. C'est vrai, car $\overline{D} = E$ et $\overline{F} = \{b,c,d,e\} \neq E$.
3. On a:

$$\overset{\circ}{G} = \{c,d\},$$

$$\mathcal{F}_r(G) = \overline{G} \setminus \overset{\circ}{G} = \{b,c,d,e\} \setminus \{c,d\} = \{b,e\},$$

$$E_x(G) = \widehat{\overset{\circ}{C_E G}} = \widehat{\overset{\circ}{\{a,e\}}} = \{a\}.$$

4. Notons cette topologie τ_G. On a:

$$\tau_G = \Big\{\phi, \{c,d\}, G\Big\}.$$

Exercice 117

Montrer que si (A, τ_A) est un sous-espace de (B, τ_B) et si celui-ci est un sous-espace de (E, τ) alors (A, τ_A) constitue un sous-espace de E.

Solution

En effet, si Ω est un ouvert de τ_A, il existe, par définition, un ouvert Ω' de τ_B de sorte que $\Omega = \Omega' \cap A$. De même, il existe un ouvert Ω'' de τ de sorte que $\Omega' = \Omega'' \cap B$. Il en découle que:

$$\Omega = (\Omega'' \cap B) \cap A = \Omega'' \cap (B \cap A) = \Omega'' \cap A.$$

Exercice 118

Soient A et B deux parties d'un espace (E, τ) et C une partie de $A \cup B$.

1. Montrer que:

$$C \in \tau_{A \cup B} \;\Rightarrow\; (C \cap A \in \tau_A \wedge C \cap B \in \tau_B).$$

2. Que dire de l'implication inverse?

Solution

1. On a:

$$C \in \tau_{A \cup B} \;\Rightarrow\; \exists\, \Omega \in \tau \,/\, C = \Omega \cap (A \cup B) = (\Omega \cap A) \cup (\Omega \cap B).$$

D'où:

$$C \cap A = \Big[(\Omega \cap A) \cup (\Omega \cap B)\Big] \cap A = A \cap \Omega,$$

donc, $C \cap A \in \tau_A$.

Le même cheminement mène à $C \cap B \in \tau_B$.

2. Elle est fausse. Voici un contre-exemple. Si

$$E = \{1,2,3,4,5,6,7\},$$

$$\tau = \{\phi, E, \{3,4,5\}, \{1,3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,7\}\},$$

$$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{4,5,6,7\} \text{ et } C = \{2,3,4,5,6,7\},$$

alors:

$$C \cap B = B \in \tau_B \text{ et } C \cap A = \{2,3,4,5,6,7\} \cap \{1,2,3,4\} = \{2,3,4\} \in \tau_A$$

Comme $A \cup B = E$, alors $\tau_{A \cup B} = \tau$. Enfin, $C \notin \tau$.

Exercice 119

1. Montrer que tout fermé d'un sous-espace (A, τ_A) est une trace sur A d'un fermé de (E, τ).

2. Montrer que tout voisinage d'un point x de (A, τ_A) est une trace sur A d'un voisinage de x dans (E, τ).

3. i) si un sous-ensemble B de A est ouvert (resp. fermé) dans (E, τ), alors il l'est aussi dans (A, τ_A).

ii) Vérifier à l'aide d'un contre-exemple que la réciproque est fausse.

iii) A quelle condition celle-ci devient-elle vraie?

Solution

1. Soit F un fermé de A. $C_A F$ appartient à τ_A. D'où:

$$\exists\, \Omega \in \tau \,/\, C_A F = \Omega \cap A.$$

Par suite:

$$F = C_A(\Omega \cap A) = C_A \Omega = C_E \Omega \cap A.$$

Comme $C_E \Omega$ est fermé dans (E, τ), F est sa trace dans (A, τ_A).

2. On fait de même. Soit V un voisinage dans (A, τ_A) d'un point x de A. On écrit par définition:

$$\exists\, \Omega \in \tau_A \,/\, x \in \Omega \subset V.$$

Or

$$\exists\, O \in \tau \,/\, \Omega = O \cap A,$$

donc, en prenant $W = O \cup V$, il vient $W \in \mathcal{V}(x)$ et $W \cap A = V$.

3. i) C'est immédiat, puisque $B = B \cap A$.

ii) On considère dans $(\mathbb{R}, |.|)$ le sous-espace $A = [0,2[$. On constate que

$$B = [0,1[=]-1,1[\cap [0,2[$$
$$C = [1,2[= [1,3] \cap [0,2[$$

sont respectivement ouvert et fermé dans A mais ne le sont pas dans $\mathbb{R}$.

iii) La condition pour que tout ouvert (resp. fermé) dans A, soit ouvert (resp. fermé) dans E, est que A lui-même le soit.

En effet, si A est ouvert (resp. fermé) dans E et si B est un ouvert (resp. fermé) dans A alors:

$$\exists\, O \in \tau / \ B = O \cap A,$$

donc, B est ouvert dans E.

Exercice 120

Soient (E,τ) un espace topologique, (A,τ_A) un sous-espace de E et B un sous-ensemble de A. On note $\overline{B_A}$ (resp. $\overset{o}{B}_A$) l'adhérence de B par rapport à τ_A (resp. l'intérieur de B par rapport à τ_A).

Démontrer que:

1. $\overline{B_A} = \overline{B} \cap A$.
2. $\overline{B_A} = \overline{B} \iff$ A fermé dans (E,τ).
3. i) $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} \subset \overset{o}{B}_A$.

   ii) Donner un exemple où l'égalité n'est pas atteinte.

Solution

1. Si $x \in \overline{B_A}$ alors $x \in A$. De plus $x \in \overline{B}$, car tout voisinage V de x dans τ rencontre B puisque $V \cap A$ est un voisinage de x dans τ_A et que $x \in \overline{B_A}$. D'où:

$$\overline{B_A} \subset \overline{B} \cap A.$$

Inversement, si $x \in \overline{B} \cap A$, tout voisinage $V \cap A$ de x dans τ_A rencontre B; car V rencontre B et que $B \subset A$. D'où $x \in \overline{B_A}$.

2. A étant fermé dans τ_A, on voit que $\overline{A} = \overline{A} \cap A = A$. Donc, A est fermé dans (E,τ).

Inversement, on a $\overline{B} \subset \overline{A} = A$; donc, $\overline{B_A} = \overline{B} \cap A = \overline{B}$.

3. i) $\overset{o}{B} \cap A$ est ouvert dans τ_A et est contenu dans B. Donc:

$$\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} \subset \overset{o}{B}_A .$$

ii) L'inclusion est généralement stricte. On le voit bien sur cet exemple:

On prend $(E,\tau) = (\mathbb{R}, |.|)$, $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{N}$. On sait que $(\mathbb{Z}, |.|_{\mathbb{Z}})$ est discret, donc, $\overset{o}{\mathbb{N}}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{N}$. Cependant, $\overset{o}{\mathbb{N}} = \phi$. D'où:

$$\overset{o}{\mathbb{N}} \cap \mathbb{Z} = \phi \neq \overset{o}{\mathbb{N}}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{N}.$$

Exercice 121

Soient (A,τ_A) un sous-espace de (E,τ) et $\mathcal{W}(x)$ un système fondamental de voisinages dans (E,τ) d'un point x de A.

Démontrer que la famille

$$\mathcal{W}_A(x) = \{V \cap A, V \in \mathcal{W}(x)\}$$

constitue un système fondamental de voisinages de x dans (A,τ_A).

Solution

Soit W un voisinage de x dans A. Il existe alors un voisinage W' de x dans E tel que $W = W' \cap A$. Par suite, il existe un voisinage V appartenant à $\mathcal{W}(x)$ de sorte que $V \subset W'$. D'où :

$$V \cap A \subset W' \cap A \subset W.$$

Exercice 122

Si (A,τ_A) est un sous-espace d'un espace (E,τ) jouissant d'une base d'ouverts σ, montrer alors que la famille $\sigma_A = \{\Omega \cap A, \Omega \in \sigma\}$ est une base de σ_A.

Solution

Soit W un ouvert de A. Il existe par définition un ouvert O de E tel que $W = O \cap A$. Or $O = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, avec $\Omega_i \in \sigma$, donc:

$$W = \left(\bigcup_{i \in I} \Omega_i\right) \cap A = \bigcup_{i \in I} (\Omega_i \cap A).$$

Exercice 123

Soient (A, τ_A) un sous-espace d'un espace (E, τ) et B une partie non vide de A. Comparer la frontière de B dans (A, τ_A) à sa frontière dans (E, τ). Peuvent-elles coïncider?

Solution

Notons $\mathcal{F}_{r_A}(B)$ et $\overline{B_A}$ la frontière et l'adhérence de B dans le sous-espace (A, τ_A). On a:

$$\mathcal{F}_{r_A}(B) = \overline{B_A} \cap \overline{(C_A B)}_A = (\overline{B} \cap A) \cap \left(\overline{(C_A B)} \cap A\right)$$
$$= \overline{B} \cap \overline{C_A B} \cap A = \overline{B} \cap \overline{C_E B \cap A} \cap A.$$

D'où:

$$\mathcal{F}_{r_A}(B) \subset \overline{B} \cap \overline{C_E B} \cap A = \mathcal{F}_r(B) \cap A \subset \mathcal{F}_r(B).$$

L'égalité peut avoir lieu. Il suffit pour le voir de considérer :
$E = \{a,b,c\}$, $\tau = \{\phi, E, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$, $A = \{a,c\}$ et $B = \{a\}$.
On a:

$$\tau_A = \{\phi, A, \{a\}\} \text{ et } \mathcal{F}_{r_A}(B) = \{a,c\} \setminus \{a\} = \{c\} = \mathcal{F}_r(B).$$

On peut aussi prendre A et B deux sous-ensembles d'un espace discret E tels que $B \subset A$. On a immédiatement:

$$\mathcal{F}_r(B) = B \setminus \overset{\circ}{B} = \phi = \mathcal{F}_{r_A}(B).$$

Exercice 124

Montrer que tout sous-espace fermé F d'un espace normal E est normal.

Solution

F est séparé car E l'est. D'autre part, si A et B sont deux sous-ensembles fermés disjoints de F, ils le restent dans E, puisque F est fermé. Comme E est normal, on peut affirmer l'existence de deux ouverts disjoints V et W de E tels que:

$$A \subset V \text{ et } B \subset W.$$

D'où:

$$A \subset V \cap F \text{ et } B \subset W \cap F.$$

$V \cap F$ et $W \cap F$ étant deux ouverts disjoints de F, on en conclut que F est normal.

Exercice 125

Une propriété (P) d'un espace (E,τ) est dite **héréditaire**, si chacun de ses sous-espaces l'admet.

Montrer que " être séparé " est une propriété héréditaire.

Solution

Soient A un sous-espace de (E,τ) et x,y deux points distincts de A. Comme E est séparé, il existe deux voisinages V de x et W de y tels que $V \cap W = \phi$. Il en découle que $V \cap A$ et $W \cap A$ sont deux voisinages disjoints (dans A) de x et y respectivement. Ainsi, A est séparé

Exercice 126

Montrer que:

1. tout sous-espace d'un espace régulier est régulier.
2. la propriété de séparabilité n'est, en général, pas héréditaire.
3. elle reste héréditaire si le sous-ensemble considéré est ouvert.
4. tout sous-espace fermé d'un espace normal E est normal.

Solution

1. Nous conservons les notations de l'exercice précédent. Soient B un fermé de A et x un point de A n'appartenant pas à B. Il existe alors un fermé F de E de sorte que $B = F \cap A$. Comme $x \notin B$, $x \notin F$.

Par conséquent, il existe deux ouverts disjoints Ω_1 et Ω_2 de E vérifiant $F \subset \Omega_1$ et $x \in \Omega_2$. Il s'en suit que $\Omega_1 \cap A$ et $\Omega_2 \cap A$ sont deux ouverts disjoints de A satisfaisant à :

$$x \in (\Omega_2 \cap A) \text{ et } B \subset (\Omega_1 \cap A).$$

L'exercice précédent permet de conclure.

2. Il suffit d'exhiber un contre-exemple. En voici un!

Soit E un ensemble non dénombrable muni de la topologie τ constituée de l'ensemble vide et de toute partie contenant un élément fixé a de E. Il évident que (E,τ) est séparable (puisqu'il renferme l'ensemble partout dense $\{a\}$). D'autre part, on considère $A = C_E\{a\}$. Il en résulte que $\tau_A = \mathcal{P}(A)$. Le sous-espace A est alors discret non dénombrable. Donc, il n'est pas séparable.

3. Soit B un ensemble dénombrable et partout dense dans E. L'ensemble $A \cap B$ est partout dense dans A, car si Ω est un ouvert non vide de A, il l'est aussi dans E. On obtient alors:

$$\Omega \cap (A \cap B) = \Omega \cap B \neq \phi.$$

4. Soit A un tel sous-espace. Si F et G sont deux fermés disjoints de A ils restent fermés dans E, puisque A l'est. Il existe donc deux ouverts disjoints U et V dans E tels que $F \subset U$ et $G \subset V$. Il en résulte que $U_1 = U \cap A$ et $V_1 = V \cap A$ sont deux ouverts disjoints de A, l'un contenant F et l'autre G. Ainsi, le sous-espace A est normal.

Exercice 127

Soit Ω un ouvert non vide d'un espace de Baire (E,τ). Montrer que le sous-espace (Ω,τ_Ω) est de Baire.

Solution

Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts partout denses dans (Ω,τ_Ω). Montrons que tout ouvert non vide O de τ_Ω rencontre $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$.

On a:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists G_n \in \tau \,/\, O_n = G_n \cap \Omega.$$

Comme

$$\Omega = \overline{O_n} \cap \Omega = \overline{G_n \cap \Omega} \cap \Omega$$

on déduit:

$$\overline{\Omega} = \overline{G_n \cap \Omega} \subset \overline{G_n}\,.$$

Par ailleurs, considérons la suite d'ouverts $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, définie par:

$$A_n = G_n \cup \widehat{C_E\Omega}^{\,o}\ ,\ n\in\mathbb{N}.$$

Chaque élément vérifie:

$$\overline{A_n} = \overline{G_n \cup \widehat{C_E\Omega}^{\,o}} = \overline{G_n} \cup \overline{\widehat{C_E\Omega}^{\,o}} = \overline{G_n} \cup C_E\overline{\Omega} = E.$$

Ainsi, les ouverts A_n sont partout denses dans l'espace de Baire E. Il en résulte que leur intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ l'est de même.

Soit O un ouvert non vide de τ_Ω. Il existe un ouvert non vide V dans τ tel que $O = V\cap\Omega$. On a:

$$O \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n\right) = (V\cap\Omega) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) = (V\cap\Omega) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Comme $V\cap\Omega$ est un ouvert de τ, il vient:

$$(V\cap\Omega) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \neq \phi.$$

Par suite,

$$O \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n\right) \neq \phi.$$

2.13 Topologie produit

Exercice 128

Soient (E_1,τ_2), ..., (E_n,τ_n) n espaces topologiques non vides et $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$. On appelle **ouvert élémentaire** de E, tout sous-ensemble Ω de E ayant la forme:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n, \ \ \Omega_i \in \tau_i, \ 1 \le i \le n.$$

Montrer que la famille de toutes les réunions d'ouverts élémentaires constitue une topologie sur E.

Solution

Notons τ cette famille et vérifions qu'elle satisfait aux trois axiomes O_1, O_2 et O_3 de Hausdorff.

Premièrement, on a:

$$E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \in \tau,$$

$$\phi = \phi \times \phi \times \ldots \times \phi \in \tau.$$

E et ϕ sont alors deux ouverts élémentaires. Ils sont donc des éléments de τ. D'où O_1.

Deuxièmement, si $(\Omega_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de τ, alors:

$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{i \in J} (\Omega^1_{i,j} \times \ldots \times \Omega^n_{i,j}) \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (\Omega^1_{i,j} \times \ldots \times \Omega^n_{i,j}).$$

D'où O_2.

Enfin, si Ω_1 et Ω_2 sont de τ, alors $\Omega_1 = \bigcup_{i \in I} V_i$ et $\Omega_2 = \bigcup_{j \in J} W_j$, V_i et W_j étant des ouverts élémentaires pour tout $i \in I$ et $j \in J$. D'où:

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) \cap \left(\bigcup_{i \in I} W_j \right) = \bigcup_{i(i,j) \in I \times J} \left(V_i \cap W_j \right).$$

Vérifions que pour tout i,j fixés, $V_i \cap W_j$ est un ouvert élémentaire. V_i et W_j étant des ouverts élémentaires, donc:

$$V_i = R^i_1 \times \ldots \times R^i_n \ \text{ et } W_j = S^j_1 \times \ldots \times S^j_n,$$

où $R^i_k \in \tau_k$ et $S^j_k \in \tau_k$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$. Il s'en suit que:

$$V_i \cap W_j = (R^i_1 \cap S^j_1) \times \ldots \times (R^i_n \cap S^j_n).$$

Comme les ensembles $R^i_k \cap S^j_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, sont des parties ouvertes dans E_k, $(1 \le k \le n)$, il s'en trouve que O_3 est satisfait.

Conclusion: τ est une topologie sur E. Elle est appelée **topologie** produit. Le couple (E,τ) s'appelle **espace produit**.

Exercice 129

1. Montrer que la famille des ouverts élémentaires constitue une base pour la topologie produit.

2. Montrer que si $\left((E_i,\tau_i)\right)_{1\le i\le p}$ est une famille d'espaces grossiers l'espace produit (E,τ) associé est, lui aussi, grossier.

Solution

Elle l'est puisque cette famille a permis, par construction de τ, de générer les éléments de celle-ci.

2. En effet, si l'on suppose que $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_p$ est un ouvert élémentaire de E (autre que E), il existe alors un indice i_0 de sorte que $E_{i_0} \neq \Omega_{i_0}$. Or $\tau_{i_0} = \left\{E_{i_0}, \phi\right\}$, donc $\Omega_{i_0} = \phi$. Par suite, $\Omega = \phi$. Ceci signifie que la famille des ouverts élémentaires coïncide avec $\{E,\phi\}$. Il en découle que la base de la topologie produit τ ne contient que E et ϕ. Autrement dit, (E,τ) est grossier.

Exercice 130

Soient $\left((E_i,\tau_i)\right)_{1\le i\le p}$ une famille d'espaces topologiques, (E,τ) l'espace produit associé et $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ un point de E.

Montrer que les ensembles de la forme $V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_p$ où $V_i \in \mathcal{V}(x_i)$ dans E_i constituent un système fondamental de voisinages du point x de E.

Solution

Si V_i est voisinage de x_i dans E_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ alors il existe un ouvert Ω_i de E_i tel que $x_i \in \Omega_i \subset V_i$. D'où:

$$x \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_p \subset V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_p.$$

Or $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_p \in \tau$ donc $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_p \in \mathcal{V}(x)$ dans E.

Soit V un voisinage de x dans (E,τ). Il existe alors un ouvert Ω de E de sorte que $x \in \Omega \subset V$. Comme Ω est, par définition, une réunion d'ouverts élémentaires, on peut affirmer qu'il existe un ouvert élémentaire noté $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_p$ satisfaisant à:

$$x \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_p \subset \Omega \subset V.$$

Pour achever l'exercice, il suffit de remarquer que chaque Ω_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ est un voisinage de x_i dans E_i.

Exercice 131

Montrer que si $A = \prod_{i=1}^{p} A_i$ est une partie d'un espace produit $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$, alors:

1. $\overline{A} = \prod_{i=1}^{p} \overline{A}_i$.
2. $\overset{o}{A} = \prod_{i=1}^{p} \overset{o}{A}_i$
3. En déduire que pour qu'un sous-ensemble $A = \prod_{i=1}^{p} A_i$ d'un espace $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ soit fermé il faut et il suffit que chaque A_i le soit dans E_i, $1 \le i \le p$.

Solution

1. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ un point de $\overline{A}$. Pour tout V_i de $\mathcal{V}(x_i)$, on obtient:

$$\phi \neq (V_1 \times \ldots \times V_p) \cap A = (V_1 \cap A_1) \times \ldots \times (V_p \cap A_p).$$

D'où :

$$V_i \cap A_i \neq \phi, \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, p.$$

Donc $x_i \in \overline{A}_i$; par suite $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \prod_{i=1}^{p} \overline{A}_i$.

Inversement, si $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \prod_{i=1}^{p} \overline{A}_i$, alors:

$$\forall\, V_i \in \mathcal{V}(x_i)\ V_i \cap A_i \neq \phi;\ i = 1, 2, \ldots, p.$$

Par conséquent, $(V_1 \times V_1 \times \ldots \times V_p) \cap A \neq \phi$. D'où $x \in \overline{\prod_{i=1}^{p} A_i}$.

2. $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \overset{o}{A} \iff A \in \mathcal{V}((x_1, x_2, \ldots, x_p))$

$$\iff A_i \in \mathcal{V}(x_i); \quad i = 1, \ldots, p$$

$$\iff x_i \in \overset{o}{A_i}\ ; \quad i = 1, \ldots, p$$

$$\iff (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \prod_{i=1}^{p} \overset{o}{A_i}$$

3. En effet, on a:

$$\prod_{i=1}^{p} A_i \text{ fermé} \iff \prod_{i=1}^{p} A_i = \overline{\prod_{i=1}^{p} A_i} \iff \prod_{i=1}^{p} A_i = \prod_{i=1}^{p} \overline{A_i}$$

$$\iff A_i = \overline{A_i}\ , \ \forall\, i = 1, \ldots, p \iff A_i \text{ fermé.}$$

Exercice 132

Démontrer qu'un espace produit $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ est séparé si, et seulement si, chaque E_i l'est.

Solution

La condition est nécessaire.

Supposons que E soit séparé. Si x_{i_0} et y_{i_0} sont deux éléments distincts de E_{i_0}, alors pour tout $x' = (x_1, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_n)$ de $\prod_{i=1, i\neq i_0}^{n} E_i$, il existe un voisinage Ω pour $(x_1, \ldots, x_{i_0}, \ldots, x_n)$ et un autre Ω' pour $(x_1, \ldots, y_{i_0}, \ldots, x_n)$ tel que $\Omega \cap \Omega' = \phi$. Comme Ω et Ω' peuvent être de la forme $\Omega = V_1 \times V_2$ et $\Omega' = V_1' \times V_2'$, avec $V_1 \in \mathcal{V}(x_{i_0})$, $V_2 \in \mathcal{V}(x')$, $V_1' \in \mathcal{V}(y_{i_0})$ et $V_2' \in \mathcal{V}(x')$ on obtient:

$$\Omega \cap \Omega' = \phi \Rightarrow (V_1 \cap V'_1) \times (V_2 \cap V'_2) = \phi \Rightarrow V_1 \cap V'_1 = \phi.$$

Donc, E_{i_0} est séparé.

La condition est suffisante.

Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont deux éléments distincts de E, il existe un indice i_0 de $\{1, 2, \dots, n\}$ tel que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Or E_{i_0} est supposé séparé, on peut donc trouver deux voisinages disjoints V pour x_{i_0} et W pour y_{i_0}. En posant:

$$\Omega_x = E_1 \times \dots \times E_{i_0-1} \times V \times E_{i_0+1} \times \dots \times E_n,$$
$$\Omega_y = E_1 \times \dots \times E_{i_0-1} \times W \times E_{i_0+1} \times \dots \times E_n,$$

on obtient:

$$\Omega_x \in \mathcal{V}(x),\ \Omega_y \in \mathcal{V}(y) \text{ et } \Omega_x \cap \Omega_y = \phi.$$

E est donc séparé.

Exercice 133

Démontrer qu'un espace topologique E est séparé si, et seulement si, la diagonale de $E \times E$ est fermée.

Solution

Notons $\Delta = \{(x,x) \in E^2\}$ la diagonale de E^2. Supposons maintenant que E soit séparé et montrons que $C_{E^2}\Delta$ est ouvert dans E^2. Considérons pour cela un point (x,y) de $C_{E^2}\Delta$. On a $x \neq y$. Il existe donc un voisinage V_x de x et un autre W_y de y tels que $V_x \cap W_y = \phi$. Par suite, $V_x \times W_y \subset C_{E^2}\Delta$. On en déduit que $C_{E^2}\Delta$ est voisinage de chacun de ses points. Il est donc ouvert et Δ fermée.

Réciproquement, supposons que Δ soit fermée et considérons deux éléments distincts x et y de E. Il s'en suit que $(x,y) \in C_{E^2}\Delta$. Comme $C_{E^2}\Delta$ est ouvert, $C_{E^2}\Delta \in \mathcal{V}(x,y)$. Par conséquent, il existe deux voisinages ouverts V de x et W de y tels que:

$$V \times W \subset C_{E^2}\Delta.$$

D'où

$$V \cap W = \phi.$$

Conclusion: E est séparé.

Exercice 134

Soient E, F deux espaces topologiques, $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que:

$$\mathcal{F}_r(A\times B) = \left(\mathcal{F}_r(A)\times\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\times\mathcal{F}_r(B)\right).$$

Solution

On a par définition:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_r(A\times B) &= \overline{A\times B}\cap\overline{C_{E\times F}(A\times B)}\\
&= \overline{A}\times\overline{B}\cap\overline{C_E A\times C_F B\cup C_E A\times B\cup A\times C_F B}\\
&= \overline{A}\times\overline{B}\cap\left(\overline{C_E A\times C_F B}\cup\overline{C_E A\times B}\cup\overline{A\times C_F B}\right)\\
&= \overline{A}\times\overline{B}\cap\left(\overline{C_E A}\times\overline{C_F B}\cup\overline{C_E A}\times\overline{B}\cup\overline{A}\times\overline{C_F B}\right)\\
&= \left(\left(\overline{A}\times\overline{B}\right)\cap\left(\overline{C_E A}\times\overline{C_F B}\right)\right)\cup\left(\left(\overline{A}\times\overline{B}\right)\cap\left(\overline{C_E A}\times\overline{B}\right)\right)\\
&\qquad\cup\left(\left(\overline{A}\times\overline{B}\right)\cap\left(\overline{A}\times\overline{C_F B}\right)\right)\\
&= \left(\left(\overline{A}\cap\overline{C_E A}\right)\times\left(\overline{B}\cap\overline{C_F B}\right)\right)\cup\left(\left(\overline{A}\cap\overline{C_E A}\right)\times\overline{B}\right)\\
&\qquad\cup\left(\overline{A}\times\left(\overline{B}\cap\overline{C_F B}\right)\right)\\
&= \mathcal{F}_r(A)\times\mathcal{F}_r(B)\cup\left(\mathcal{F}_r(A)\times\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\times\mathcal{F}_r(B)\right)\\
&= \left(\mathcal{F}_r(A)\times\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\times\mathcal{F}_r(B)\right).
\end{aligned}$$

Exercice 135

Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, $\prod_{i\in I} E_i = E$ et τ la topologie produit de E. Pour tout indice i de I on considère une partie A_i de E_i et on désigne par τ_1 la topologie induite sur $\prod_{i\in I} A_i$ et par τ_2 la topologie produit sur $\prod_{i\in I} A_i$. Démontrer que $\tau_1 = \tau_2$.

Solution

Il suffit d'identifier les bases d'ouverts. On a immédiatement:

$$O\in\tau_1 \Leftrightarrow \exists \prod_{i\in I}\Omega_i\in\tau \,/\, O=\prod_{i\in I}\Omega_i\cap\prod_{i\in I}A_i=\prod_{i\in I}(\Omega_i\cap A_i)\in\tau_2$$

2.14 Convergence, valeurs d'adhérence

Exercice 136

On dit qu'une suite (x_n) d'un espace topologique E **converge** vers une **limite** a de E, si elle satisfait à la condition suivante:

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(a)\ \exists\, n_0(V) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ x_n \in V.$$

Autrement dit, un point a de E est limite d'une suite (x_n) si, pour tout voisinage V de a, l'ensemble des indices n pour lesquels $x_n \notin V$ est fini. C'est-à-dire V contient tous les éléments de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.

Montrer que:

1. toute suite constante est convergente (vers la constante la définissant) dans tout espace topologique.
2. dans un espace grossier, toute suite est convergente vers tout point.
3. dans un espace discret, une suite est convergente si, et seulement si, elle est stationnaire. (On rappelle qu'une suite (x_n) est **stationnaire**, si elle est constante à partir d'un certain rang.)
4. la suite réelle de terme général $x_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0 dans $(\mathbb{R}, |.|)$ et diverge dans l'espace discret $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

Solution

1. En effet, si a est cette valeur, tous ses voisinages renferment toute la suite.
2. Le seul voisinage possible étant l'espace tout entier, celui-ci renferme toute la suite.
3. La condition est, bien entendu, suffisante. Assurons-nous qu'elle est nécessaire. Supposons que (x_n) soit une suite convergente vers un point a dans un espace discret E. On a par définition:

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(a)\ \exists\, n_0(V) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ x_n \in V.$$

Pour $V = \{a\}$ on affirme que:

$$\exists\, p_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq p_0 \ \Rightarrow\ x_n \in \{a\}.$$

Il en découle que la suite (x_n) est constante à partir du rang p_0. Elle est donc stationnaire.

4. Il suffit de prendre $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ dans le premier cas. Dans le second, on remarque que la suite n'étant pas stationnaire, elle diverge d'après la question (3).

Exercice 137

Montrer que si (E,τ) est séparé, toute suite convergente y admet une seule limite.

Solution

Procédons par l'absurde. Soit (x_n) une suite jouïssant de deux limites distinctes a et b dans un espace séparé E. Pour tous voisinages V de a et W de b, on peut trouver un rang m_0 à partir duquel les termes de la suite appartiennent à la fois à V et à W. Il en découle que V et W ne peuvent pas être disjoints. Ceci est absurde, car E est supposé séparé. Donc, $a = b$.

Exercice 138

Soit (x_n) une suite d'un espace (E,τ). On dit qu'un point a de E est une valeur d'adhérence de (x_n), si pour tout voisinage V de a il existe une infinité d'indices n pour lesquels $x_n \in V$.

Montrer que:

1. la suite (x_n) définie dans $(\mathbb{R},|.|)$ par $x_n = \dfrac{1}{n}$ admet une seule valeur d'adhérence: sa limite $a = 0$.
2. dans $(\mathbb{R},|.|)$, la suite $\left((-1)^n\right)_n$ possède deux valeurs d'adhérence $a = 1$ et $b = -1$.
3. toute valeur d'adhérence d'une suite en est un point d'adhérence mais toutefois, l'inverse est faux.

Solution

1. Le point 0 étant la limite de la suite il est une valeur d'adhérence

Aucun autre réel a ne peut-être valeur d'adhérence, car on peut trouver aisément un réel $\varepsilon > 0$ tel que le voisinage $\left]a-\varepsilon, a+\varepsilon\right[$ de a ne contient au plus qu'un nombre fini d'éléments de la suite (x_n).

2. En effet, tout voisinage V de 1 (resp. -1) contient une infinité d'éléments de la suite, de valeur commune égale à 1(resp. -1). Aucun autre réel ne jouït de cette propriété.

3. Il suffit de se rappeler les définitions de convergence et de valeur d'adhérence.

Pour l'inverse, il suffit de voir que les points $\frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ de la suite considérée dans (1) sont des points d'adhérence, mais ne sont pas des valeurs d'adhérence.

Exercice 139

1. Soit (x_n) une suite de points d'un espace topologique E. Posons

$$A_n = \left\{x_k \in E \,/\, k \geq n\right\}$$

et notons A l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n).

Montrer que:

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}.$$

2. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est fermé.

Solution

1. Soient $a \in A$ et $V \in \mathcal{V}(a)$. Il existe alors une infinité d'indices $k \in \mathbb{N}$ de sorte que $x_k \in V$. Par suite:

$$V \cap A_n \neq \phi \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, V \in \mathcal{V}(a).$$

D'où :

$$a \in \overline{A_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, si a est adhérent à tous les ensembles A_n et si V est un voisinage de a, alors il existe une infinité d'indices k pour lesquels $x_k \in V$. Il s'en suit que $a \in A$.

Conclusion:
$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}.$$

2. C'est une intersection de fermés, donc lui-même fermé.

Exercice 140

1. Démontrer que dans un espace séparé, toute suite convergente n'y admet qu'une seule valeur d'adhérence: sa limite.

2. Une suite n'admettant qu'une valeur d'adhérence dans un espace séparé est-elle toujours convergente?

Solution

1. Soit a la limite d'une suite $(x_n)_n$ d'un espace séparé E. Supposons que cette suite possède une autre valeur d'adhérence b, distincte de a. Il existe alors deux voisinages U de a et V de b tels que $U \cap V = \phi$. Or, il existe un rang n_0 permettant d'avoir:
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; x_n \in U.$$
Il en résulte que V ne peut pas contenir une infinité d'éléments x_n. Donc, b ne peut pas être une valeur d'adhérence comme annoncée. D'où le résultat.

2. Non. Elle peut diverger comme on le constate sur ce contre-exemple:

Dans $(\mathbb{R}, |.|)$ les trois suites divergentes $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ définies par :
$$\begin{cases} x_{2p} = 2p \\ x_{2p+1} = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y_{2p} = 2 \\ y_{2p+1} = e^{2p+1}+1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} z_{3p} = p \\ z_{3p+1} = p^2+1 \\ z_{3p+2} = 3+e^{-p} \end{cases}$$
ont chacune une seule valeur d'adhérence: a = 0, b = 2 et c = 3 respectivement.

Exercice 141

Démontrer que pour qu'un point a soit une valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_n$ dans un espace E, il faut et il suffit qu'on ait:
$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \;\; \forall m \in \mathbb{N} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \, / \, \left(n \geq m \wedge x_n \in V\right).$$

Solution

La condition est nécessaire.

Elle est en effet évidente, car si a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ alors on écrit:

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(a)\ \ \text{card}\left\{n \in \mathbb{N} \,/\, x_n \in V\right\} = +\infty.$$

Par conséquent:

$$\forall\, m \in \mathbb{N}\ \ \exists\, n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq m\ \wedge\ x_n \in V.$$

La condition est suffisante.

Procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe un voisinage V de a tel que:

$$\text{card}\left\{n \in \mathbb{N} \,/\, x_n \in V\right\} = p < +\infty.$$

Cela entraîne l'existence d'un indice $m = p+1$, par exemple, de sorte que $x_n \notin V$ pour tout $n \geq m$. Absurde!

Exercice 142

Soit E un espace topologique satisfaisant le premier axiome de dénombrabilité; autrement dit, tout point x jouït d'un système fondamental dénombrable de voisinages. Montrer que x admet (un autre) système fondamental dénombrable de voisinages $(V_n)_n$ vérifant :

$$V_{n+1} \subset V_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Solution

Soit x un point d'un tel espace. Il possède par hypothèses, un système fondamental dénombrable de voisinages que l'on note(W_n)

La famille $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $V_n = \bigcap_{i=1}^{n} W_i$ résoud notre problème.

Exercice 143

Démontrer que si A est un sous-ensemble d'un espace E satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité, alors:

1. Un point x de E est d'accumulation pour A si, et seulement si, il existe une suite de points de $A \setminus \{x\}$ convergeant vers x.

2. Un point x de E est adhérent à A, si et seulement si, il existe une suite de points de A convergeant vers x.

Solution

1. Soient x un point d'accumulation de A et (V_n) une suite de ses voisinages vérifiant:

$$V_{n+1} \subset V_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

L'ensemble $V_n \cap \left(A \setminus \{x\}\right)$ n'est pas vide. On y choisit un élément x_n. On construit ainsi une suite (x_n) convergeant vers x. En effet, si U est un voisinage de x, il existe un indice p tel que $V_p \subset U$. D'où

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; n \geq p \;\Rightarrow\; x_n \in V_p \subset U.$$

La réciproque est évidente.

2. Si x est un point de A, il y est adhérent. Par conséquent, la suite constante $x_n = x$ convient. Par contre, si x est un point adhérent à A sans y appartenir, alors il en est d'accumulation. En vertu du résultat (1), il existe une suite de points de A convergeant vers x.

La réciproque est comme précédemment, évidente.

Exercice 144

Soit $(x_n)_n$ une suite d'un espace E. On appelle **suite extraite** de $(x_n)_n$, toute sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ où $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Démontrer que:

1. i) toute suite extraite d'une suite convergente est convergente (vers la même limite).

ii) que dire:

a) de la réciproque?

b) d'une suite admettant une sous-suite divergente?

2. i) la limite de toute suite extraite d'une suite $(x_n)_n$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$.

ii) que dire de la réciproque?

Solution

1. i) En effet, si $(x_n)_n$ est une suite convergente vers a, on écrit:

$$\forall\; V \in \mathcal{V}(a)\; \exists\; n_0(V) \in \mathbb{N} : \;\forall\, n \in \mathbb{N},\; n \geq n_0 \;\Rightarrow\; x_n \in V.$$

Soit $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ une de ses sous-suites. On sait que (simple récurrence):

$$\varphi(n) \geq n, \;\forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Donc:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n \geq n_0 \ \Rightarrow\ x_{\varphi(n)} \in V.$$

C'est la convergence souhaitée.

ii) a) Elle est fausse. Une suite divergente peut admettre des sous-suites convergentes. On le voit clairement en considérant la suite divergente $(x_n)_n = \left((-1)^n\right)_n$ dans $\left(\mathbb{R}, |.|\right)$. Celle-ci admet deux sous-suites convergentes de termes généraux $x_{2n} = 1$ et $x_{2n+1} = -1$.

b) Elle est divergente de même grâce à (i).

2. i) C'est le cas, puisque tout voisinage de cette limite rencontre la suite en une infinité d'éléments.

ii) Elle est, elle aussi, fausse en général. Cependant, elle est vraie dans les espaces satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité.

Exercice 145

Soit $(z_n) = \left((z_n^1, \ldots, z_n^p)\right)$ une suite d'un espace produit $\prod_{i=1}^{p} E_i = E$.

Démontrer que pour que (z_n) soit convergente vers un point $z = (z^1, \ldots, z^p)$, il faut et il suffit que toute suite composante $(z_n^i)_n$, $i = 1, 2, \ldots, p$, soit convergente vers z^i dans E_i, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Solution

La condition est nécessaire.

Soit $(z_n) = (z_n^1, \ldots, z_n^p)$ une suite convergente vers $(z^1, \ldots, z^p)$ dans E. Soit V_i un voisinage de z^i dans E_i, $i = 1, 2, \ldots, p$. Le sous-ensemble $E_1 \times \ldots \times E_{i-1} \times V_i \times E_{i+1} \times \ldots \times E_p = W$ de E est un voisinage de z. Il en résulte qu'il existe un rang n_0 de sorte que:

$$n \geq n_0 \ \Rightarrow\ z_n \in W.$$

D'où:

$$n \geq n_0 \ \Rightarrow\ z_n^i \in V_i.$$

C'est-à-dire, la suite $(z_n^i)_n$ converge vers z^i, $i = 1, 2, \ldots, p$.

La condition est suffisante.

Supposons que pour tout i = 1, 2,..., p, la suite $(z_n^i)_n$ converge vers z^i dans E_i. Posons $(z_n^1,\dots,z_n^p) = (z_n)$ et $(z^1,\dots,z^p) = z$ puis considérons un voisinage W de z dans E. On sait que W contient un voisinage élémentaire $V_1\times\dots\times V_p$ de z de sorte que V_i soit un voisinage de z^i dans E_i, i = 1, 2, ..., p. Ainsi, pour tout i = 1, 2, ..., p et tout V_i de $\mathcal{V}(z^i)$, il existe un entier naturel n_0^i tel que:

$$n \geq n_0^i \quad \Rightarrow \quad z_n^i \in V_i .$$

En prenant $\underset{1\leq i\leq p}{\text{Max}}\, n_0^i = n_0$ il vient:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad z_n \in V_1\times\dots\times V_p .$$

Cela entraîne:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad z_n \in W .$$

C.Q.F.D

Exercice 146

1. Montrer que si $a = (a^1, a^2, \dots, a^p)$ est une valeur d'adhérence d'une suite vectorielle (z_n) d'un espace produit $\prod_{i=1}^{p} E_i = E$, alors a^i constitue une valeur d'adhérence pour la suite composante (z_n^i), i = 1, 2, ..., p.
2. Montrer que la réciproque est généralement fausse.

Solution

1. Pour tout i = 1, 2, ..., p, on considère un voisinage V_i de a^i. La partie $E_1\times\dots\times E_{i-1}\times V_i\times E_{i+1}\times\dots\times E_p = W$ est alors un voisinage de a dans E. Par conséquent:

$$\text{card}\left\{n\in\mathbb{N} \,/\, z_n\in W\right\} = +\infty.$$

D'où:

$$\text{card}\left\{n\in\mathbb{N} \,/\, z_n^i\in V_i\right\} = +\infty.$$

Il en résulte que a^i est une valeur d'adhérence de (z^i_n), $i = 1, 2, ..., p$.

2. Examinons le contre-exemple suivant:

On munit $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$ de la topologie usuelle et on définit dans $\mathbb{R}^2$ la suite $(z_n) = (x_n, y_n)$ comme suit:

$$\begin{cases} x_{2n} = n \\ x_{2n+1} = \dfrac{1}{n} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y_{2n} = \dfrac{1}{n} \\ y_{2n+1} = n\,. \end{cases}$$

Il est clair que 0 est une valeur d'adhérence pour (x_n) et (y_n), alors que $(0,0)$ n'en est pas une pour (z_n).

2.15 Quelques problèmes de plus

Exercice 147

Pour tout a de $\mathbb{R}$, on pose $E_a =]a, +\infty[$ et on considère la famille

$$T = \left\{\phi, \mathbb{R}, (E_a)_{a \in \mathbb{R}}\right\}.$$

1. Montrer que T est une topologie non séparée sur $\mathbb{R}$. Comparer-la à la topologie usuelle.

2. Les deux parties $A =]-1,1[$ et $B =]-\infty, 6[$ sont-elles ouvertes? fermées?

3. Déterminer $\mathcal{V}(5)$, $\mathcal{F}_r(\{5\})$, $\overset{\circ}{\mathbb{N}}$ et $\overline{\mathbb{N}}$.

Solution

1. On a juste à s'enquérir de la stabilité de T par rapport à la réunion et l'intersection.

Soit $(E_a)_{a \in L \subset \mathbb{R}}$ une sous-famille de T. On a:

$$\bigcup_{a\in L} E_a = \begin{cases}]\mathrm{Inf}\, L,+\infty[& \text{si} \quad \mathrm{Inf}\, L > -\infty \\ \mathbb{R} & \text{si} \quad \mathrm{Inf}\, L = -\infty. \end{cases}$$

Donc, $\bigcup_{a\in L} E_a \in T$.

Si E_a et E_b sont deux éléments de T alors:

$$E_a \cap E_b =]\mathrm{Max}\,(a,b),\, \infty[\in T.$$

On conclut que T est une topologie sur $\mathbb{R}$.

Cette topologie n'est pas séparée, car ses ouverts se coupent.

2. $A =]-1,1[$ a un intérieur vide et un complémentaire $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ non ouvert. Donc, elle n'est ni ouverte ni fermée.

$B =]-\infty,6[$ n' est, comme A, ni ouverte ni fermée. En clair, on a

$$\overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\widehat{]-\infty,6[}} = \phi,\ C_{\mathbb{R}}B = [6,+\infty[\notin T.$$

3. On a:

$$\mathcal{V}(5) = \left\{V \subset \mathbb{R} \,/\,]5-\varepsilon,+\infty[\subset V,\ \varepsilon > 0\right\}.$$

$$\mathcal{F}_r(\{5\}) = \mathcal{F}_r(\{5\}) = \overline{\{5\}} \setminus \overset{\circ}{\widehat{\{5\}}} = \overline{\{5\}} \setminus \phi =]-\infty,5].$$

$$\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \phi,\ \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}.$$

Exercice 148

On considère dans $\mathbb{R}^2$ la famille

$$\sigma = \left\{\mathbb{R}^2,\ \phi\ ,\ (B_r)_{r>0}\right\},\ \text{avec:}$$

$$B_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 < r^2\right\}.$$

1. Représenter dans un même repère orthonormé B_{r_1} et B_{r_2} ($r_1 > r_2 > 0$) et comparer-les.

2. Montrer que σ est une topologie non séparée.

3. Déterminer $\overline{\mathbb{N}^2}$, $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{N}^2}}$, $\overline{\mathbb{Q}^2}$, $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{Q}^2}}$, $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}^2_+}}$, $\overline{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}$ et $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}}$.

En déduire que $(\mathbb{R}^2,\sigma)$ est séparable.

4. Pour tout a de $\mathbb{R}$ on pose

$$\Delta_a = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = ax + (1-a)\right\}.$$

Montrer que $\mathbb{R}^2 = \overline{\Delta_a}$.

5. La droite d'équation $y = -x$ est-elle partout dense?

6. Si l'on suppose que $r\in\mathbb{Q}^*_+$, σ demeure-t-elle une topologie sur $\mathbb{R}^2$?

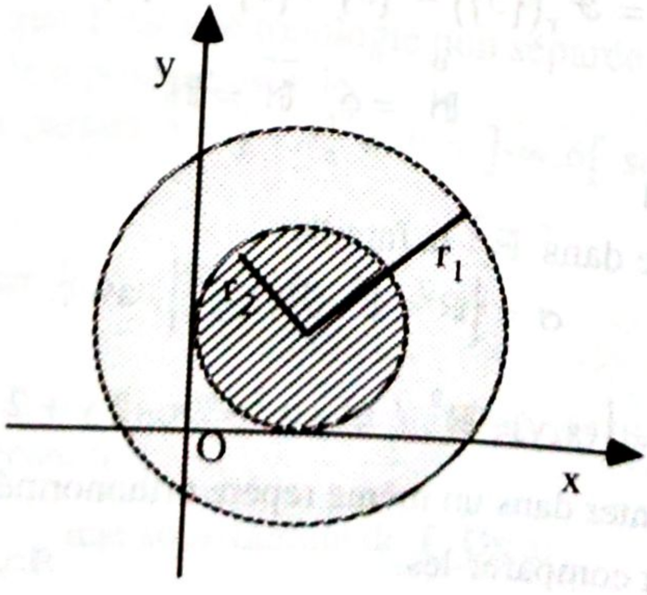
7. Vérifier que $\mathcal{B} = \left\{(B_r)_{r\in\mathbb{Q}^*_+}\right\}$ constitue une base dénombrable de σ.

Solution

1. On a:

$$B_r = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 < r^2\right\}.$$

C'est le disque ouvert de centre (1,1) et de rayon r. D'où le schéma:



Il est clair que $B_{r_2} \subset B_{r_1}$.

2. σ contient ϕ et $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs, si B_{r_1} et B_{r_2} $(r_1 > r_2 > 0)$ sont deux de ses éléments alors:

$$B_{r_2} \cap B_{r_1} = B_{r_2} \in \sigma.$$

Testons enfin la stabilité de σ par rapport à la réunion. Soit $(B_r)_{r\in L\subset\mathbb{R}}$ une sous-famille de σ. On a:

$$\bigcup_{r\in L} B_r = \begin{cases} B_{\sup L} & \text{si} \quad \sup L < \infty, \\ \mathbb{R}^2 & \text{si} \quad \sup L = \infty. \end{cases}$$

Ainsi, σ est une topologie sur $\mathbb{R}^2$.

Cette topologie n'est pas séparée car ses ouverts se coupent tous au moins en (1,1).

3. On remarque que tous les ouverts non vides de σ coupent $\mathbb{N}^2$; par conséquent:

$$\overline{\mathbb{N}^2} = \overline{\mathbb{Q}^2} = \overline{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}^2,$$

De même, on constate que $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}^2$ ne contiennent aucun ouvert non vide. Donc:

$$\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{N}^2}} = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{Q}^2}} = \phi.$$

Le plus grand ouvert contenu dans $\mathbb{R}_+^2$ et $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ est B_1. D'où:

$$\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}_+^2}} = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}} = B_1.$$

$(\mathbb{R}^2, \tau)$ est séparable puisqu'il contient $\mathbb{N}^2$ lequel est partout dense.

4. Δ_a étant une droite passant par le point (1,1), elle coupe tous les ouverts non vides de σ. Donc, $\mathbb{R}^2 = \overline{\Delta_a}$.

5. Non. Il y a des ouverts qui ne la rencontrent pas. C'est le cas de B_1, entre autres.

6. Oui, car $\mathbb{Q}_+^*$ est dense dans $\mathbb{R}_+^*$.

7. On sait que tout réel positif r est limite d'une suite rationnelle

positive croissante (r_n). Donc:

$$B_r = B_{\sup r_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{r_n}.$$

Ainsi, $\mathcal{B} = \left\{(B_r)_{r\in\mathbb{Q}_+^*}\right\}$ constitue une base dénombrable de σ.

Exercice 149

Soit donnée dans $\mathbb{R}^2$ la famille $\tau = \left\{\phi, \mathbb{R}^2, (C_r)_{r\geq 0}\right\}$ telle que $C_r = A_r \cap B_r$, avec:

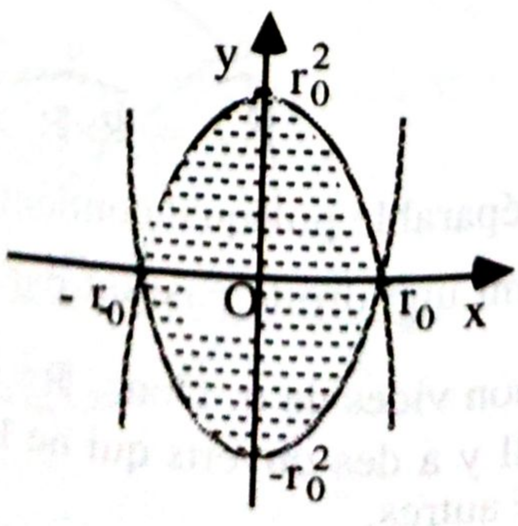
$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \; y > x^2 - r^2\right\},$$

$$B_r = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \; y < -x^2 + r^2\right\}.$$

1. Représenter C_{r_0}, $r_0 > 0$, dans un repère orthonormé.
2. Représenter $C_{r_1} \cup C_{r_2}$ et $C_{r_1} \cap C_{r_2}$ dans un même repère orthonormé, pour $r_2 > r_1 > 0$.
3. Montrer que τ est une topologie. Est-elle séparée ?
4. Montrer que toute droite passant par l'origine est partout dense dans $\mathbb{R}^2$.

Solution

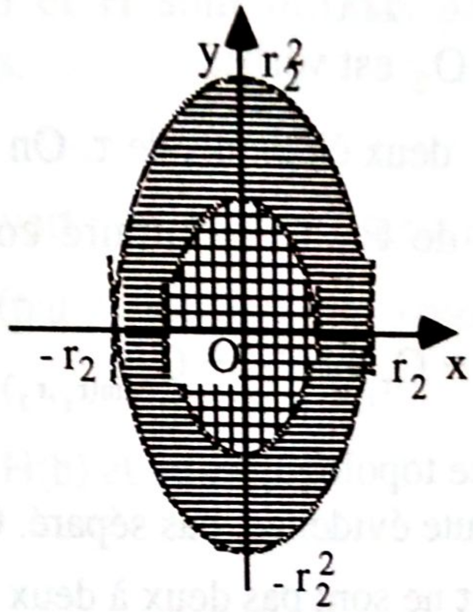
1. La partie C_{r_0} est représentée par la partie hachurée de la figure ci-contre.



2. Si $r_2 > r_1 > 0$, on voit que:

$$C_{r_1} \cap C_{r_2} = C_{r_1} \text{ et } C_{r_1} \cup C_{r_2} = C_{r_2}.$$

Le premier ensemble est représenté par la partie hachurée deux fois dans la figure ci-après. Le second, plus grand, est celui hachuré horizontalement une fois.



Naturellement, les lignes de contour n'appartiennent pas aux trois ensembles représentés ici.

3. Vérifions que τ est une topologie sur $\mathbb{R}^2$.

a) $\mathbb{R}^2$ et ϕ appartiennent à τ par construction.

b) Soit $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une sous-famille de τ. S'il existe un indice λ_0 de Λ tel que $\Omega_{\lambda_0} = \mathbb{R}^2$, on a immédiatement:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda = \mathbb{R}^2 \in \tau.$$

De même, si :

$$\Omega_\lambda = \phi, \quad \forall \ \lambda \in \Lambda$$

alors:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda = \phi \in \tau.$$

Enfin, si les deux possibilités citées sont exclues, on obtient:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda\subset\mathbb{R}_+^*} C_\lambda = \begin{cases} C_{\operatorname{Sup}\Lambda} & \text{si} \quad \operatorname{Sup}\Lambda < +\infty, \\ \mathbb{R}^2 & \text{si} \quad \operatorname{Sup}\Lambda = +\infty. \end{cases}$$

D'où:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda \in \tau.$$

On conclut que l'axiome O_2 est vérifié.

c) Soient Ω_1 et Ω_2 deux éléments de τ. On suppose qu'ils sont non vides et différents de $\mathbb{R}^2$ (le contraire conduirait à des cas triviaux). On a:

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = C_{r_1} \cap C_{r_2} = C_{\operatorname{Min}(r_1,r_2)} \in \tau.$$

$(\mathbb{R}^2,\tau)$ est donc un espace topologique.

Cet espace n'est de toute évidence, pas séparé. Cela s'explique par le fait que les ouverts de τ ne sont pas deux à deux disjoints.

4. Nous remarquons que l'origine $(0,0)$ du plan $\mathbb{R}^2$ appartient à tous les ouverts non vides de τ. Par conséquent, tout ouvert C_r de τ rencontre toutes les droites passant par le point $(0,0)$. Celles-ci sont alors partout denses dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 150

Soient (E,θ) un espace topologique infini et θ^* la topologie cofinie sur E. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

1. $\theta^* \subset \theta$.

2. Pour tout point p de E, le singleton $\{p\}$ est fermé dans (E,θ).

3. Pour tout a et b distincts de E, il existe G et H de θ de sorte que:

$$(a\in G \text{ et } b\notin G) \text{ et } (a\notin H \text{ et } b\in H).$$

Solution

1. $\Rightarrow$ 2.

L'ensemble $C_E\{p\}$ est ouvert dans θ^*. Il est aussi ouvert dans θ.

ar $\theta^* \subset \theta$. Donc, le singleton $\{p\}$ est fermé dans (E,θ).

$2 \Rightarrow 3.$

$\{a\}$ et $\{b\}$ sont fermés dans (E,θ). Posons:

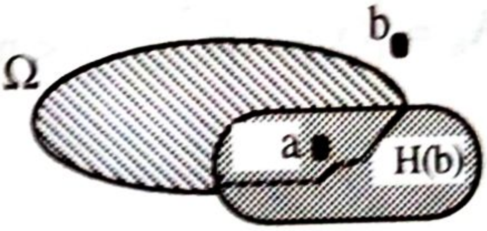
$$G = E \setminus \{b\} \text{ et } H = E \setminus \{a\}.$$

Il est clair que G et H sont ouverts dans (E,θ) et vérifient les conditions requises.

$3 \Rightarrow 1.$

Soient Ω un ouvert non vide de θ^* et a un point de Ω. Pour tout b $\in C_E\Omega$, il existe (par hypothèses) un ouvert H(b) de θ de sorte que:

$$a \in H(b) \text{ et } b \notin H(b).$$



D'où

$$C_E\Omega \subset \bigcup_{b \in C_E\Omega} C_E H(b)$$

C'est-à-dire:

$$C_E\Omega \subset C_E\left(\bigcap_{b \in C_E\Omega} H(b)\right)$$

Donc:

$$\bigcap_{b \in C_E\Omega} H(b) \subset \Omega.$$

L'ensemble $V = \bigcap_{b \in C_E\Omega} H(b)$ est un ouvert de θ, comme intersection finie (du fait que $C_E\Omega$ est fini) d'éléments de θ. Et, comme il contient a, on conclut que Ω est voisinage de a relativement à θ. C'est donc un ouvert de θ. D'où $\theta^* \subset \theta$.

Exercice 151

Soit T la famille constituée de $\mathbb{R}^2$, ϕ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tels que:

$$A_n = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \;/\; |x|+|y| < n\right\}.$$

1. Donner une représentation géométrique de A_{n_1} et A_{n_2} ($n_1 < n_2$) dans un même repère orthonormé, puis montrer que T est une topologie sur $\mathbb{R}^2$.

2. $(\mathbb{R}^2, T)$ est-il séparé?

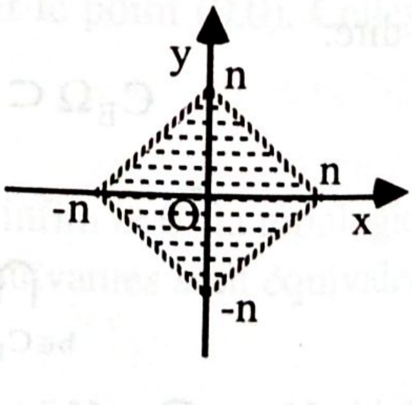
3. On pose $A = \{0\}\times\mathbb{R}$. Déterminer $A \cap A_n$, pour $n\in\mathbb{N}^*$. En déduire que $\mathbb{R}^2 = \overline{A}$.

Solution

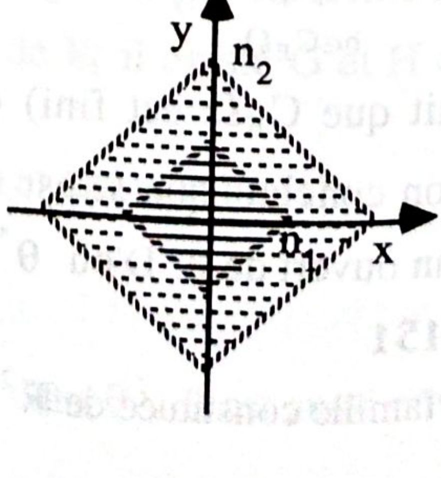
1. On a:

$$A_n = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \; x+y < n,\; x \geq 0,\; y \geq 0\right\} \cup$$
$$\cup \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \; x-y < n,\; x \geq 0,\; y \leq 0\right\}$$
$$\cup \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \; -x+y < n,\; x \leq 0,\; y \geq 0\right\}$$
$$\cup \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \; -x-y < n,\; x \leq 0,\; y \leq 0\right\}.$$

D'où sa représentation graphique:



On a immédiatement:



2. ϕ et $\mathbb{R}^2$ sont donnés dans T. Par ailleurs, si $(A_n)_{n\in L\subset\mathbb{N}}$ est une sous-famille de T, on a:

$$\bigcup_{n\in L} A_n = \begin{cases} A_{\sup L} & \text{si } \sup L < \infty, \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } \sup L = +\infty. \end{cases}$$

Donc, $\bigcup_{n\in L} A_n \in T$.

Enfin, si B_n et B_m $(m \leq n)$ sont deux éléments de T, on a:

$$B_n \cap B_m = B_m \in T.$$

$(\mathbb{R}^2,T)$ ne peut pas être séparé, car ses ouverts se rencontrent.

3. On a:

$$A \cap A_n = \{0\} \times]-n,n[.$$

D'où, $\overline{A} = \mathbb{R}^2$.

Exercice 152

Déterminer l'ensemble dérivé A' du sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ formé des points $\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^{m+n}$, $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Solution

Posons $u_{mn} = \left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^{m+n}$. On sait qu'un réel a est un point d'accumulation de A s'il existe une suite $(m_k,n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de couples d'entiers non nuls telle que la suite extraite $\left(u_{m_k n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers a. Il s'en suit que les couples (m_k,n_k) sont deux à deux distincts et que la suite $(m_k+n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (car il n'existe qu'un ensemble fini de couples (m,n) d'entiers naturels tels que la somme m+n soit majorée par un réel donné). D'après la forme de u_{mn}, on est amené à distinguer deux cas suivant la position de $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ par rapport à 1. Sans modifier A on peut supposer $n \geq m$. On considère donc A comme la réunion des ensembles $A_1 = \{u_{mn}\}_{n\geq m\geq 2}$ (points tels que

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \leq 1$) et $A_2 = \{u_{1n}\}$ (points tels que $\frac{1}{m}+\frac{1}{n} > 1$). Il est immédiat que:

$$A' = A_1' \cup A_2' .$$

Déterminons A_1'. Pour tout point u_{mn} de A_1 autre que u_{22} on a:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Donc:

$$u_{mn} \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{m+n};$$

ce qui montre que toute suite de points de A_1, distincts deux à deux, converge vers 0. Ainsi:

$$A_1' = \{0\}.$$

Pour déterminer A_2', on remarque que les points de A_2 peuvent être rangés en une suite de terme général:

$$u_{1n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+n}.$$

Cette suite converge vers e. D'autre part, cette suite est strictement décroissante, car la fonction $f : x \to \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+x}$ vérifie, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0;$$

ce qui montre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc e est le seul point d'accumulation de A_2. Finalement, on trouve:

$$A' = \{0,e\}.$$

Exercice 153

Soit ω un élément n'appartenant pas à $\mathbb{R}$. On pose $\mathbb{S} = \mathbb{R} \cup \{\omega\}$ et on note σ la famille de tous les ouverts de $\mathbb{R}$ par rapport à la topologie usuelle et des complémentaires (par rapport à $\mathbb{S}$) de tous les fermés bornés de $(\mathbb{R},|.|)$.

1. Montrer que $(\mathfrak{S},\sigma)$ est un espace topologique.

2. Déterminer les ensembles dérivés de $A =]1,+\infty[$ et $B =]a,b[$, où $a,b \in \mathbb{R}$.

3. Déterminer toutes les parties de $\mathfrak{S}$ admettant ω comme point d'accumulation.

Solution

1. Notons $\tau = |.|$ la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

ϕ appartient à τ, donc il est dans σ. De même, $\mathfrak{S} = C_{\mathfrak{S}}\phi$ appartient à σ, car ϕ est un fermé borné de $(\mathbb{R},|.|)$. Ceci achève le premier axiome de Hausdorff.

Examinons la stabilité de σ par rapport à la réunion. Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une sous-famille de σ. Nous distinguons trois cas.

i) Si $(\Omega_i)_{i\in I}$ est incluse dans τ, alors, celle-ci étant une topologie, on a immédiatement $\bigcup_{i\in I} \Omega_i \in \tau$, donc $\bigcup_{i\in I} \Omega_i \in \sigma$.

ii) Si tous les éléments de $(\Omega_i)_{i\in I}$ n'appartiennent pas à τ, alors pour tout indice i il existe un fermé borné F_i de $(\mathbb{R},|.|)$ de telle sorte que $\Omega_i = C_{\mathfrak{S}}F_i$. Donc:

$$\bigcup_{i\in I} \Omega_i = \bigcup_{i\in I} C_{\mathfrak{S}}F_i = C_{\mathfrak{S}}\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right).$$

Comme $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé borné de $(\mathbb{R},|.|)$ on déduit que $\bigcup_{i\in I} \Omega_i$ est dans σ.

iii) Si $(\Omega_i)_{i\in I}$ est composée d'une sous-famille $(\Omega_i)_{i\in I_1}$ d'éléments de τ et d'une autre $(\Omega_i)_{i\in I_2}$ d'éléments n'appartenant pas à τ, on écrit, en conservant les notations précédentes:

$$\bigcup_{i\in I}\Omega_i=\left(\bigcup_{i\in I_1}\Omega_i\right)\cup\left(\bigcup_{i\in I_2}\Omega_i\right)=\left(\bigcup_{i\in I_1}\Omega_i\right)\cup C_{\mathbb{S}}\left(\bigcap_{i\in I_2}F_i\right)$$

$$=C_{\mathbb{S}}\left(\left(\bigcap_{i\in I_1}C_{\mathbb{S}}\Omega_i\right)\cap\left(\bigcap_{i\in I_2}F_i\right)\right)=C_{\mathbb{S}}\left(\left(\bigcap_{i\in I_1}C_{\mathbb{R}}\Omega_i\right)\cap\left(\bigcap_{i\in I_2}F_i\right)\right).$$

Comme $\left(\bigcap_{i\in I_1}C_{\mathbb{R}}\Omega_i\right)\cap\left(\bigcap_{i\in I_2}F_i\right)$ est un fermé borné de $(\mathbb{R},|.|)$ on déduit que $\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ est dans σ. Celle-ci satisfait alors au deuxième axiome de Hausdorff.

Terminons par regarder le troisième axiome. Soit Ω_1 et Ω_2 deux éléments de σ. On distingue comme précédemment trois cas.

i) Si Ω_1 et Ω_2 sont dans τ alors $\Omega_1\cap\Omega_2$ reste dans τ.

ii) Si Ω_1 et Ω_2 ne sont pas dans τ alors, il existe deux fermés bornés F_1 et F_2 de $(\mathbb{R},|.|)$ tels que $\Omega_1=C_{\mathbb{S}}F_1$ et $\Omega_2=C_{\mathbb{S}}F_2$. Donc:

$$\Omega_1\cap\Omega_2=C_{\mathbb{S}}F_1\cap C_{\mathbb{S}}F_2=C_{\mathbb{S}}\left(F_1\cup F_2\right).$$

Comme $F_1\cup F_2$ est un fermé borné de $(\mathbb{R},|.|)$ on déduit que $\Omega_1\cap\Omega_1$ est dans σ.

iii) Si Ω_1 est dans τ et Ω_2 ne l'est pas, alors il existe un fermé borné F_1 de $(\mathbb{R},|.|)$ tel que $\Omega_2=C_{\mathbb{S}}F_2$. Donc:

$$\Omega_1\cap\Omega_2=\Omega_1\cap C_{\mathbb{S}}F_2=\Omega_1\cap C_{\mathbb{R}}F_2\in\tau.$$

Conclusion: σ est une topologie sur $\mathbb{S}$.

2. A' contient bien entendu $[1,+\infty[$. Les autres points de $\mathbb{R}$ ne peuvent pas y être, puisqu'ils jouïssent (relativement à τ) de voisinages ne rencontrant pas A. La famille de voisinages de ω est composée de $\mathbb{S}$ et de toute partie V de $\mathbb{S}$ renfermant un complémen-

...aire d'un fermé borné de $(\mathbb{R},|.|)$. Donc $\omega \in A'$. D'où:

$$A' = [1,+\infty[\cup \{\omega\}.$$

Pour les mêmes raisons, on obtient:

$$B' = [a,b].$$

3. Si A est une partie bornée de $\mathbb{R}$, $\overline{A}$ est fermée bornée. Il en ressort que $\Omega = C_{\mathbb{S}}\overline{A}$ est un voisinage ouvert de ω, ne rencontrant pas A. Donc, ω ne peut pas être un point d'accumulation pour A.

C'est le cas aussi de toute partie B de $\mathbb{S}$ telle que $B = A \cup \{\omega\}$, où A est une partie bornée de $\mathbb{R}$. En effet, on a:

$$C_{\mathbb{S}}\overline{A} \cap B = \{\omega\}.$$

Les parties de $\mathbb{S}$ admettant ω comme point d'accumulation sont les parties non bornées de $\mathbb{R}$ et les parties de $\mathbb{S}$, composées de parties non bornées de $\mathbb{R}$, auxquelles on adjoint le point ω. En effet, si A est une telle partie et $\Omega = C_{\mathbb{S}}F$ (F fermé borné de $(\mathbb{R},|.|)$) un voisinage ouvert de ω, on a:

$$\Omega \cap A = C_{\mathbb{S}}F \cap \left(A \backslash \{\omega\}\right) \neq \phi.$$

Le contraire conduirait à l'absurdité:

$$A \backslash \{\omega\} \subset F.$$

Exercice 154

Soient E un espace muni de la topologie codénombrable σ, x et a deux éléments distincts de E; on pose $C_E\{x\} = U_x$.

1. Montrer que U_x est un voisinage de a et que:

$$\bigcap_{x \neq a} U_x = \{a\}.$$

2. En déduire qu'une intersection quelconque d'ouverts de E n'est pas nécessairement ouverte et qu'une intersection quelconque de voisinages d'un point de (E,θ) n'est pas, en général, un voisinage de ce point.

3. Si b est un élément de E, montrer alors que la famille de parties de E contenant b et admettant des complémentaires finis, constitue un système fondamental de voisinages de b.

Solution

1. U_x est un ouvert de E, contenant a. Donc, c'est un voisinage ouvert de a. Par ailleurs, on sait que a appartient à tous ses voisinages, d'où:

$$\{a\} \subset \bigcap_{x \neq a} U_x.$$

Inversement, si $\bigcap_{x \neq a} U_x$ contenait un autre point b autre que a, a serait dans U_b qui ne contient pas b, ce qui est absurde. Donc,

$$\bigcap_{x \neq a} U_x \subset \{a\}.$$

2. C'est une conséquence immédiate de (1). On voit ici que l'intersection d'ouverts (U_x), de surcroit voisinages de a, est un fermé $\{a\}$, lequel n'est pas voisinage de a.

3. Soient $\mathcal{W}(b)$ une telle famille et V un voisinage quelconque de b. Il existe, par définition, un ouvert Ω, de complémentaire $C_E\Omega$ dénombrable, tel que $b \in \Omega \subset V$. Il en ressort que pour tout $a \in C_E\Omega$, $U_a \in \mathcal{W}(b)$ et

$$U_a \subset \Omega \subset V.$$

D'où le résultat.

Exercice 155

On munit l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ de la topologie

$$\sigma = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a, f, g\}, \{a, b, f, g\}, \{a, b, e, f, g\}, E\}.$$

1. Définir sur E une topologie non discrète τ plus fine que σ et une autre θ , non grossière, moins fine que σ.

2. Déterminer un système fondamental de voisinages de f. On le note $\mathcal{W}(f)$.

3. L'espace (E,σ) est-il séparé? séparable?

4. On pose $A=\{a, e, f\}$. Déterminer la topologie induite σ_A sur A, $E_x(A)$ et $\mathcal{F}_r(A)$.

Solution

1. Il suffit que τ ait un nombre d'éléments compris entre 7 et 256.

Ainsi

$$\tau=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a, f, g\}, \{a, b, f, g\}, \{a, b, e, f, g\}, E\}$$

en est une.

Par contre, θ décrite doit avoir un nombre d'éléments compris entre 2 et 7. C'est le cas de $\theta = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, E\}$, par exemple.

2. $\mathcal{W}(f)$ doit contenir le plus petit ouvert contenant f. D'où:

$$\mathcal{W}(f) = \{\{a, f, g\}\}.$$

3. Il n'est pas séparé, car les points a et c, entre autres, ne possèdent pas de voisinages disjoints.

Par ailleurs, on remarque que $\overline{\{a, b, f, g\}} = E$. Donc, (E,σ) est séparable.

4. On a:

$$\Omega\in \sigma_A \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ O\in \sigma / \ \Omega = O\cap A$$

Donc:

$$\sigma_A = \{\phi, \{a\}, \{a, f\}, A\}.$$

De même, on a:

$$E_x(A) = \overset{\circ}{\widehat{C_E A}} = \overset{\circ}{\widehat{\{b,c,d,g,h\}}} = \phi,$$

$$\mathcal{F}_r(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \{a,c,d,e,f,g,h\}\setminus\{a\} = \{c,d,e,f,g,h\}.$$

Exercice 156

On munit $\mathbb{R}$ de la topologie

$$\sigma = \{\phi, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}, C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}\cup\mathbb{N}, C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}\cup\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$$

et on pose $A = \{2, \sqrt{2}\}$

1. Déterminer la famille de voisinages $\mathcal{V}(A)$ de A, son ensemble

dérivé A', sa frontière $\mathcal{F}_r(A)$ et son extérieur $E_x(A)$.

2. Vérifier que A est partout dense dans $(\mathbb{R},\sigma)$; en déduire que $(\mathbb{R},\sigma)$ est séparable.

3. Comparer la topologie induite $\sigma_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$ et la topologie grossière $\tau_{\mathbb{Z}}$.

Solution

1. On a:

$$\mathcal{V}(A) = \left\{V \subset \mathbb{R} \ / \ C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} \cup \mathbb{N} \subset V\right\},$$

$$A' = \mathbb{R} \backslash A,$$

$$\mathcal{F}_r(A) = \mathbb{R},$$

$$E_x(A) = \phi.$$

2. On a $\overline{A} = \mathbb{R}$. Comme A est fini, $(\mathbb{R},\sigma)$ est séparable.

3. $\sigma_{\mathbb{Z}} = \left\{\phi, \mathbb{N}, \mathbb{Z}\right\}$. Elle est plus fine que la grossière $\tau_{\mathbb{Z}}$.

Exercice 157

Soit a un réel. On pose:

$$\Omega_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = a\,(x-2) + 2\right\},$$

$$\Omega_\infty = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = 2\right\}.$$

1. Représenter Ω_a et Ω_∞ sur un repère orthonormé.
2. Montrer que:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}} \Omega_a .$$

3. Soit σ la famille constituée de ϕ et de toutes les réunions d'éléments de la famille $(\Omega_a)_{a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}}$. A quelle condition σ est-elle une topologie sur $\mathbb{R}^2$?

On suppose dans toute la suite que cette condition est présente.

4. Avec quel sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ faut-il renforcer la famille

$(\Omega_a)_{a\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}}$ pour obtenir une base de la topologie σ?

5. Déterminer la nature topologique des parties

$$B=\{(0,0)\},\ C=\{(2,2)\} \text{ et } D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y\neq x\}.$$

6. Déterminer $\mathcal{V}(B)$, $\overset{\circ}{B}$, $\overline{B}$, B', $\mathcal{F}_r(B)$, $E_x(B)$, $\mathcal{V}(C)$, $\overset{\circ}{C}$, $\overline{C}$, C', $\overset{\circ}{D}$, $\overline{D}$ et D'.

7. Montrer que l'espace $(\mathbb{R}^2,\sigma)$ est séparable, mais non séparé.

8. Comparer la topologie σ et la topologie cofinie τ sur $\mathbb{R}^2$.

9. Représenter sur un repère orthonormé la partie

$$\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2<1,\ y\geq 0\}.$$

10. Déterminer, puis représenter sur le même repère, $\overline{\Delta}$.

11. En déduire que Δ n'est pas partout dense.

12. Donner une autre raison de ce résultat.

13. Vérifier que $O=\left\{(x,x)\in\mathbb{R}^2\ /\ 0\leq x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ est un élément de la topologie induite σ_Δ

14. Montrer que le sous-espace (Δ,σ_Δ) n'est pas séparé.

15. Caractériser les suites $(W_n)_n=((u_n,v_n))_n$ convergentes dans $(\mathbb{R}^2,\sigma)$ vers:

i) le point $(\alpha,\beta)=(2,2)$,

ii) le point $(\alpha,\alpha)\neq(2,2)$,

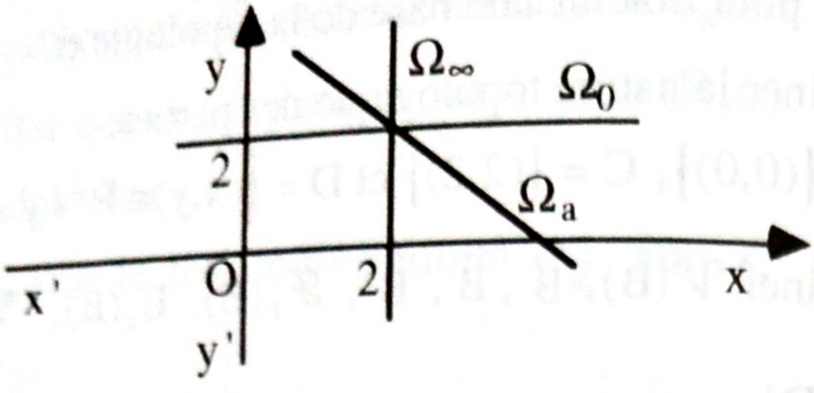
iii) le point $(2,\beta)$, $\beta\neq 2$,

iv) le point (α,β), $\alpha\neq\beta\neq 2$.

16. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(W_n)=((n,n))_n$

Solution

1. Observons de prime abord que Ω_a est une droite de pente a et passant par le point (2,2). Ω_∞ est la droite passant par le même point et parallèle à l'axe des ordonnées y'Oy.



2. On a par construction:

$$\bigcup_{a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}} \Omega_a \subset \mathbb{R}^2 .$$

Soit (x,y) un point de $\mathbb{R}^2$. Si x = 2 le point (2,y) est dans Ω_∞ ; si $x \neq 2$, le point (x,y) appartient à la droite $\Omega_{\frac{y-2}{x-2}}$. Donc:

$$\mathbb{R}^2 \subset \bigcup_{a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}} \Omega_a .$$

3. La famille σ est stable par rapport à l'union, renferme ϕ et contient $\mathbb{R}^2$ comme on vient de le voir. Pour que le couple $(\mathbb{R}^2, \sigma)$ soit un espace topologique il reste à σ d'être stable par rapport à l'intersection finie. Comme l'intersection de deux quelconques de ses éléments est ou bien un de ses éléments ou bien réduite au singleton $\{(2,2)\}$, on déduit l'exigence de l'appartenance de ce singleton à σ pour qu'elle devienne une topologie sur $\mathbb{R}^2$.

4. La famille $(\Omega_a)_{a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}}$ constitue une base de la topologie σ si elle génère tous ses ouverts. C'est, par construction, le cas de tout ouvert sauf $\{(2,2)\}$. Ainsi, l'ouvert convoité est :

$$A = \{(2,2)\}.$$

5. B n'est ni ouverte ni fermée, car elle et son complémentaire n'appartiennent pas à σ.

C est ouverte d'après ce qui précède.

D est fermée car son complémentaire coïncide avec l'ouvert Ω_1

6. En se reportant à chaque définition requise il vient:

$$\mathcal{V}(B) = \left\{ V \subset \mathbb{R}^2 \,/\, \Omega_1 \subset V \right\},$$

$$\overset{\circ}{B} = \phi,$$

$$\overline{B} = \Omega_1 \setminus \{(2,2)\},$$

$$B' = \Omega_1 \setminus \{(0,0), (2,2)\},$$

$$\mathcal{F}_r(B) = \overline{B} \setminus \overset{\circ}{B} = \overline{B} = \Omega_1 \setminus \{(2,2)\},$$

$$E_x(B) = \overset{\circ}{\widehat{C_{\mathbb{R}^2} B}} = C_{\mathbb{R}^2} \overline{B} = C_{\mathbb{R}^2} \Omega_1 \cup \{(2,2)\},$$

$$\mathcal{V}(C) = \left\{ V \subset \mathbb{R}^2 : (2,2) \in V \right\},$$

$$\overset{\circ}{C} = \{(2,2)\},$$

$$\overline{C} = \mathbb{R}^2,$$

$$C' = \mathbb{R}^2 \setminus \{(2,2)\},$$

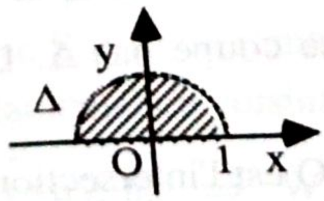
$$\overset{\circ}{D} = \phi,$$

$$\overline{D} = D = D'.$$

7. Tous les ouverts de $(\mathbb{R}^2,\sigma)$ se rencontrent en (2,2), donc il n'est pas séparé. Par ailleurs, $(\mathbb{R}^2,\sigma)$ est séparable car il renferme la partie dénombrable et partout dense C.

8. Les topologies σ et τ ne sont pas comparables: aucune n'est plus fine que l'autre.

9. C'est le demi disque supérieur ouvert. Voici sa représentation:

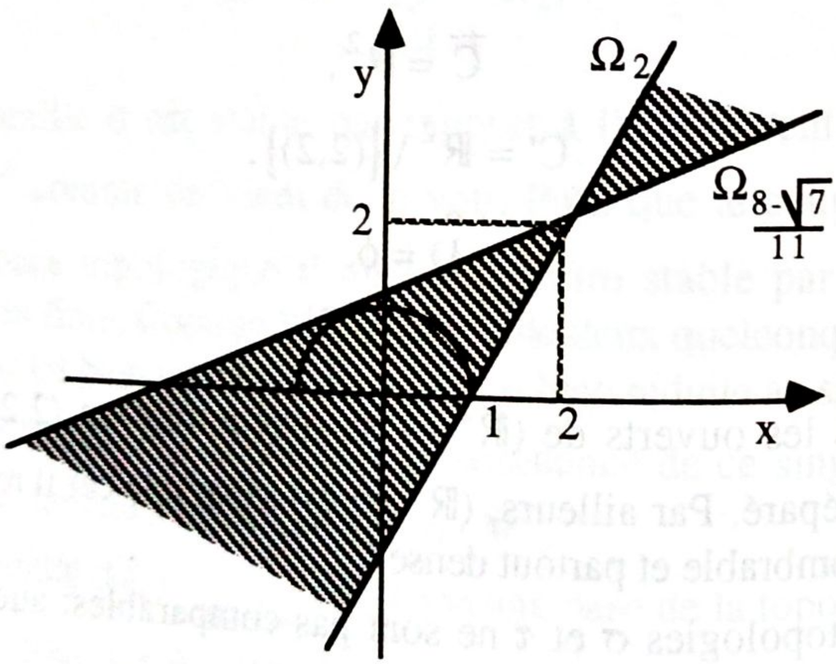


10. L'adhérence $\overline{\Delta}$ est constituée, par définition, des points du

plan appartenant à tout ouvert passant par (2,2) et rencontrant Δ. C'est l'ensemble des points compris strictement entre les droites Ω_2 et $\Omega_{\frac{8-\sqrt{7}}{11}}$. Il est utile de remarquer que $\Omega_{\frac{8-\sqrt{7}}{11}}$ est la droite passant par (2,2) et tangeant à Δ au point $\left(-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$, représentant la solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{y-2}{x-2} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \\ y = \sqrt{1-x^2}. \end{cases}$$

Ainsi, $\overline{\Delta}$ est représentée par la partie hachurée de la figure ci-après.

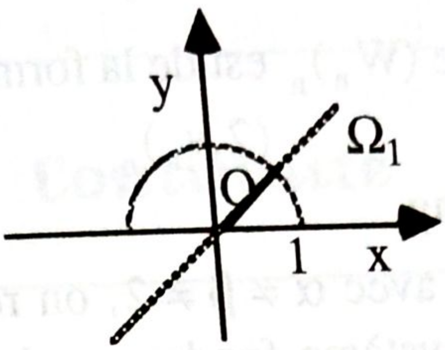


11. Δ n'est pas dense dans $\mathbb{R}^2$ car $\overline{\Delta} \neq \mathbb{R}^2$.

12. L'ouvert $\{(2,2)\}$ ne coupe pas Δ. Donc, Δ ne peut pas être dense dans $\mathbb{R}^2$.

13. Le sous-ensemble O est l'intersection de Δ avec l'ouvert Ω_1. Par conséquent, il appartient à la topologie induite σ_Δ. Voici sa

représentation:



14. Si l'on considère les deux points (x,x) et (x',x') avec $0 < x < x' < 0{,}5$, on constate que tous leurs voisinages contiennent l'ouvert O. Ils ne peuvent pas jouïr de deux voisinages disjoints. Le sous-espace (Δ,σ_Δ) n'est donc pas séparé.

15. On sait qu'une suite $(W_n)_n$ converge dans $(\mathbb{R}^2,\sigma)$ vers une limite L, si elle vérifie:

$$\forall\ V\in \mathcal{V}(L)\ \exists\ n_0(V)\in \mathbb{N}\ /\ \forall\ n\in \mathbb{N} : n \geq n_0 \ \Rightarrow\ W_n \in V.$$

i) Si $L = (2,2)$, on remarque que le singleton $\{(2,2)\}$ est un de ses voisinages. On écrit donc:

$$\exists\ n_0\in \mathbb{N}\ \forall\ n\in \mathbb{N} : n \geq n_0 \ \Rightarrow\ W_n = (u_n,v_n)\in \{(2,2\}.$$

On en déduit que la suite $(W_n)_n$ est stationnaire.

ii) Si $L = (\alpha,\alpha)$, avec $\alpha \neq 2$, on remarque que la famille $\{\Omega_1\}$ constitue un système fondamental de voisinages de L. On écrit donc:

$$\exists\ n_0\in \mathbb{N}\ \ \forall\ n\in \mathbb{N}\ /\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ W_n = (u_n,v_n)\in \Omega_1.$$

C'est-à-dire:

$$\exists\ n_0\in \mathbb{N}\ \ \forall\ n\in \mathbb{N}\ /\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ W_n = (u_n,u_n).$$

On conclut que la suite $(W_n)_n$ est de la forme $(u_n,u_n)_n,\ n\ \geq n_0$.

iii) Si $L = (2,\beta)$, avec $\beta \neq 2$, on remarque que la famille $\{\Omega_\infty\}$ constitue un système fondamental de voisinages de L. On écrit donc:

$$\exists\ n_0\in \mathbb{N}\ /\ \forall\ n\in \mathbb{N} : n \geq n_0 \ \Rightarrow\ W_n = (u_n,v_n)\in \Omega_\infty,$$

c'est-à-dire:

$$\exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 \ \Rightarrow\ W_n = (2, v_n)$$

Il s'en suit que la suite $(W_n)_n$ est de la forme

$$(2, v_n)_n$$

à partir d'un certain rang.

iv) Si $(\alpha, \beta) = L$ avec $\alpha \neq \beta \neq 2$, on remarque que la famille $\left\{\Omega_{\frac{b-2}{a-2}}\right\}$ constitue un système fondamental de voisinages de L. On écrit donc:

$$\exists\ n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\ n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 \ \Rightarrow\ W_n = (u_n, v_n) \in \Omega_{\frac{\beta-2}{\alpha-2}},$$

c'est-à-dire

$$\exists\ n_0 \in \mathbb{N}\quad \forall\ n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 \ \Rightarrow\ v_n = \frac{\beta-2}{\alpha-2}(u_n - 2) + 2.$$

On déduit que la suite $(W_n)_n$ est de la forme

$$\left(u_n, \frac{\beta-2}{\alpha-2}(u_n - 2) + 2\right)_n$$

à partir d'un certain rang.

16. Un point (a,b) de $\mathbb{R}^2$ est une valeur d'adhérence de la suite $(W_n)_n = \big((n,n)\big)_n$ si tous ses voisinages rencontrent la suite en une infinité de points. On déduit de ce qui précède que l'ensemble des valeurs d'adhérence cherché est:

$$A = \big\{(a,a),\ a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\big\}.$$

3

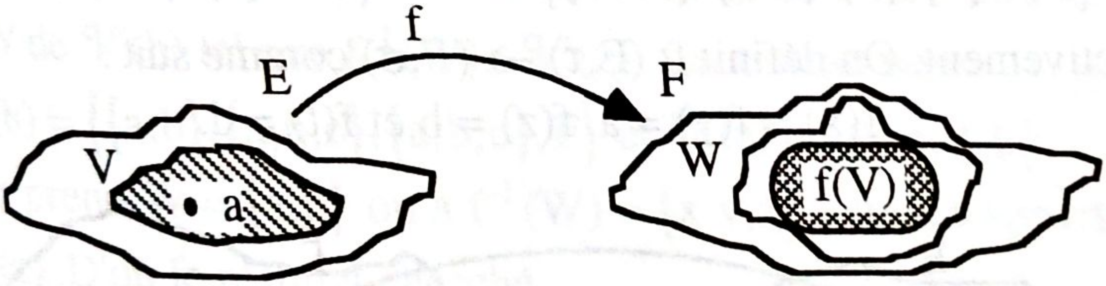
Continuité

3.1 Généralités

Exercice 158

Une fonction $f: (E,\tau) \to (F,\sigma)$ est dite continue en un point a de E si:

$$\forall\, W \in \mathcal{V}(f(a))\ \exists\, W \in \mathcal{V}(a) \,/\, f(V) \subset W.$$



Elle est dite continue sur E si elle l'est en tout point a de E.

1. On munit $E = \{a,b,c\}$ et $F = \{1,2\}$ des topologies $\tau = \{\phi, E, \{a\}\}$ et $\sigma = \{\phi, F, \{2\}\}$ respectivement et on considère la fonction $f: (E,\tau) \to (F,\sigma)$ définie par

$$f(a) = f(c) = 2,\ f(b) = 1.$$

Etudier la continuité de f sur E.

2. Montrer qu'une fonction $f: (E,\tau) \to (F,\sigma)$ est continue en un point $a \in E$, si l'image réciproque de tout voisinage de f(a) est un voisinage de a.

Solution

1. On a:

$$\mathcal{V}(a) = \{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},E\},\ \mathcal{V}(b) = \mathcal{V}(c) = \{E\},$$

$$\mathcal{V}(f(a)) = \mathcal{V}(f(c)) = \mathcal{V}(2) = \{\{2\},F\} \text{ et } \mathcal{V}(f(b)) = \mathcal{V}(1) = \{F\}.$$

Il ressort immédiatement que f est continue en a et b. Par contre, elle ne l'est pas en c, puisque pour le voisinage $W = \{2\}$ de f(c) on ne peut pas trouver de voisinage de c dont l'image par f soit contenue dans W. c n'a que E comme voisinage et $f(E) = F$ n'est pas inclus dans W.

2.On déduit de la condition portée dans la définition rappelée que:

$$V \subset f^{-1}(W).$$

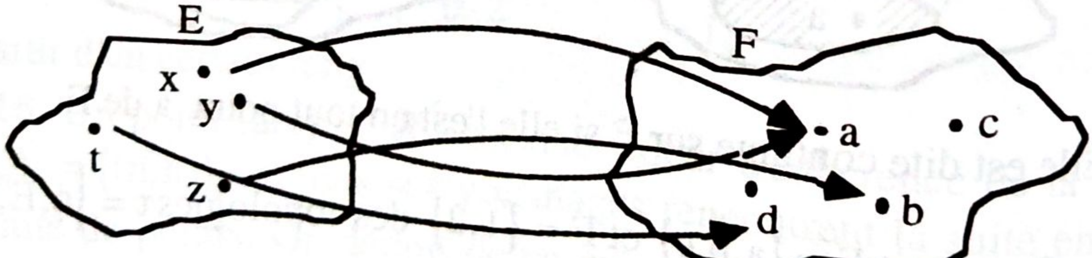
On a alors:

$$f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(a).$$

Exercice 159

1 Soient $E = \{x,y,z,t\}$ et $F = \{a,b,c,d\}$ munis des topologies $\tau = \{\phi,E,\{x\},\{y\},\{x,y\},\{y,z,t\}\}$ et $\sigma = \{\phi,F,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ respectivement. On définit $f: (E,\tau) \to (F,\sigma)$ comme suit :

$$f(x) = f(y) = a,\ f(z) = b \text{ et } f(t) = d.$$



Montrer que f est continue en t, mais ne l'est pas en z.

2. Soit l'identité $id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R},|.|) \to (\mathbb{R},|.|)$ donnée par $id_{\mathbb{R}}(x) = x$. Montrer qu'elle est continue en tout point x de $\mathbb{R}$.

3. i) Soit l'application identité $id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R},|.|) \to (\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Montrer qu'elle n' est continue en aucun point x de $\mathbb{R}$.

ii) Que dire si l'on interchange les topologies du départ et d'arrivée?

4. On pose $\sigma = \{\phi,\mathbb{R},(]a,+\infty[)_{a\in\mathbb{R}}\}$ et on définit la fonction:

$$f : (\mathbb{R},\sigma) \to \left(\mathbb{R},|.|\right)$$

$$x \to f(x) = x^2.$$

Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

5. Montrer que la fonction, dite de Dirichlet[17],

$$f: \left(\mathbb{R},|.|\right) \to \left(\mathbb{R},|.|\right)$$

$$x \to f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x\in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ si } x\notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$. On dit qu'elle est partout discontinue.

Solution

1. On a:

$$\mathcal{V}\left(f(t)\right) = \mathcal{V}(d) = \left\{ F\right\} \text{ et } f^{-1}(F) = E \in \mathcal{V}(t).$$

Donc, f est continue en t. D'autre part, il nous suffit de trouver un élément W de $\mathcal{V}(b)$ tel que $f^{-1}(W)\notin \mathcal{V}(z)$. On a clairement:

$$\mathcal{V}(b) = \left\{\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},F\right\} \text{ et } \mathcal{V}(z) = \left\{\{y,z,t\},E\right\}.$$

Or si l'on prend $W = \{a,b\}$ on a $f^{-1}(W) = \{x,y,z\}$ lequel n'appartient pas à $\mathcal{V}(z)$. D'où le résultat cherché.

2. C'est évident car,

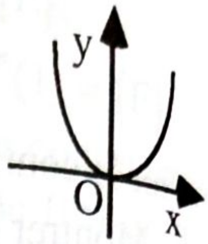
$$\mathcal{V}\left(id_{\mathbb{R}}(x)\right) = \mathcal{V}(x) \text{ et } (id_{\mathbb{R}})^{-1}(V) = V,\ \forall\ V\in \mathcal{V}\left(id_{\mathbb{R}}(x)\right).$$

3. i) En effet, il suffit de voir que pour $W = \{x\}\in \mathcal{V}\left(id_{\mathbb{R}}(x)\right)$,

$$(id_{\mathbb{R}})^{-1}(W) = \{x\}\notin \mathcal{V}(x).$$

ii) On peut voir facilement que la même fonction identité devient continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Bien plus, toute fonction définie de $\left(E,\mathcal{P}(E)\right)$ dans n'importe quel espace (F,σ) est continue.

17. Peter Gustav Lejeune-Dirichlet est né le 13 février 1805 à Duren (Allemagne) et mort le 5 mai 1859 à Göttingen. Il enseigna à l'université de Berlin pendant 27 ans. Parmi ses élèves on retiendra les noms de Kronecker et Riemann. On lui doit toute une classe d'équations aux dérivées partielles qui porte le nom de problème de Dirichlet. Il a aussi de nombreuses contributions en arithmétique



4. Donnons la représentation graphique de f.

A regarder ce graphe, tout porte à " croire " que f est continue sur $\mathbb{R}$. En fait, il n'en est rien. f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$. On peut facilement le voir en remarquant que l'image réciproque de tout voisinage borné de $f(x_0)$ dans $(\mathbb{R},|.|)$ ne peut contenir un intervalle ouvert de la forme $]a,+\infty[$; ce qui l'empèche d'être un voisinage de x_0.

5. Soit x_0 un point de $\mathbb{R}$. On distingue deux cas.

i) $x_0 \in \mathbb{Q}$

On a $f(x_0) = 0$. Pour tout réel ε pris dans $]0,1]$, $f^{-1}\left(]-\varepsilon,\varepsilon[\right) = \mathbb{Q}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc, f n'est pas continue sur $\mathbb{Q}$.

ii) $x_0 \notin \mathbb{Q}$

On a $f(x_0) = 1$. Pour tout réel ε de $]0,1]$, $f^{-1}\left(]1-\varepsilon,1+\varepsilon[\right) = C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc, f n'est pas continue sur $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

Conclusion: f est discontinue sur $\mathbb{R}$.

Remarque: Il apparaît clairement de ce qui précède que la notion de continuité est " intimement " liée aux topologies des ensembles de départ et d'arrivée. Tout changement de l'une ou l'autre des deux topologies peut rendre la fonction continue ou non.

Exercice 160

Si un ensemble E est muni de deux topologies τ et σ, alors pour que l'application identité $id_E : (E,\tau) \to (E,\sigma)$ soit continue, il faut et il suffit que τ soit plus fine que σ.

Solution

La condition est nécessaire.

Si Ω est un ouvert de σ, la continuité de l'identité le rend ouvert dans τ. Celle-ci est alors plus fine que σ.

La condition est suffisante.

Soit Ω un ouvert de σ. Comme τ est plus fine que σ, il reste ouvert dans τ. Par ailleurs, on a:

$$id_E^{-1}(\Omega) = id_E(\Omega) = \Omega,$$

Ainsi, l'image réciproque $id_E^{-1}(\Omega)$ de tout ouvert Ω de σ est ouverte dans τ. Donc, l'application id_E est continue.

Exercice 161

Montrer qu'une fonction $f: (E,\tau) \to (F,\sigma)$ est continue en un point x_0 de E, si l'image réciproque de tout W de $\mathcal{W}(f(x_0))$ est un voisinage de x_0.

Solution

En effet, si $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ il existe par définition, $W \in \mathcal{W}(f(x_0))$ tel que $W \subset V$. D'où

$$f^{-1}(W) \subset f^{-1}(V).$$

Il en résulte que si $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0, $f^{-1}(V)$ en est un aussi.

Exercice 162

1. Soient E, F et G trois espaces topologiques. Montrer que si les fonctions $f: E \to F$ et $g: F \to G$ sont continues en x_0 de E et $f(x_0)$ de F respectivement, leur composée $g \circ f: E \to G$ est continue en x_0.

2. Donner un exemple où la composée $g \circ f$ est continue sans que f ou g le soit.

Solution

1. Si W est un voisinage de $(g \circ f)(x_0)$ dans G, alors $g^{-1}(W)$ est, du fait de la continuité de g, un voisinage de $f(x_0)$ dans F. De même,

f étant continue en x_0, $f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right)$ est un voisinage de x_0. Comme

$$f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right) = (g\circ f)^{-1}(W),$$

le résultat est atteint.

2. Reconduisons l'énoncé de la question 1 de l'exercice 159 auquel nous subordonnons la fonction $g: (F,\sigma) \to (E,\tau)$ définie par:

$$g(a) = y,\ g(b) = z,\ g(c) = x \text{ et } g(d) = t.$$

Vérifier que g n'est pas continue en $d = f(t)$. On a:

$$\mathcal{V}\left(g(f(t))\right) = \mathcal{V}\left(g(d)\right) = \mathcal{V}(t) = \left\{\{y,z,t\},E\right\},$$

et

$$g^{-1}\left(\{y,z,t\}\right) = \{a,b,d\} \notin \mathcal{V}(d).$$

Pourtant, $g\circ f$ est continue en t. En effet, on a:

$$(g\circ f(t) = g(f(t)) = g(d) = t\,,\ \ \mathcal{V}(t) = \left\{\{y,\ z,t\},\ E\right\}.$$

D'où :

$$(g\circ f)^{-1}\left(\{y,z,t\}\right) = f^{-1}\left(g^{-1}\left(\{y,z,t\}\right)\right) = f^{-1}\left(\{a,b,d\}\right) = E \in \mathcal{V}(t).$$

$g\circ f$ est donc continue en t comme annoncée.

Exercice 163

Soit $f: (E,\tau) \to (F,\sigma)$. Démontrer que les sept assertions suivantes sont équivalentes:

1. f est continue sur E.
2. $\forall\, A \subset E,\ \ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
3. L'image réciproque de tout fermé de F est fermée dans E.
4. L'image réciproque de tout ouvert de F est ouverte dans E.
5. L'image réciproque de tout élément d'une base de σ est ouverte dans E.
6. $\forall\, B \subset F,\ \ f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}$.
7. $\forall\, A \subset F,\ \ \overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$.

Solution

$1 \Rightarrow 2$

Soit $x_0 \in \overline{A}$ et $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$. La continuité de f en x_0 implique

que $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0)$. On en déduit que $f^{-1}(V) \cap A \neq \phi$. Par suite, $V \cap f(A) \neq \phi$. D'où $f(x_0) \in \overline{f(A)}$. On conclut que:

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

$2 \Rightarrow 3$

Soit B un fermé de E. Montrons que $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$. Il suffit bien entendu, d'avoir $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$. D'après (2) on a:

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B} = B.$$

Si l'on prend l'image réciproque des deux membres de cette inclusion, on obtient $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$. C'est ce que nous cherchons.

$3 \Rightarrow 4$

Si A est un ouvert de F, alors $C_F A$ est fermé. Il ressort, conséquemment à (3), que $f^{-1}(C_F A)$ est fermé dans E. Or:

$$f^{-1}(C_F A) = C_E f^{-1}(A),$$

donc, $f^{-1}(A)$ est ouvert dans E.

$4 \Rightarrow 5$

Evident. ((5) est un cas particulier de (4).)

$5 \Rightarrow 6$

Soit $B \subset F$. $\overset{o}{B}$ est un ouvert de F. Il s'écrit $\overset{o}{B} = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ où $(\Omega_i)_{i \in I}$ représente une sous-famille d'une base de σ. D'où:

$$f^{-1}(\overset{o}{B}) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} \Omega_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\Omega_i).$$

D'après (5), $f^{-1}(\Omega_j)$ est ouvert pour tout $i \in I$. Il en résulte que $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(\Omega_i)$ est ouvert. Mais:

$$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(\Omega_i) = f^{-1}(\overset{o}{B}) \subset f^{-1}(B)$$

donc:

$$\bigcup_{i\in I} f^{-1}(\Omega_i) = f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}.$$

$6 \Rightarrow 7$

Soit $A \subset F$. Posons dans (6) $B = C_F A$. Il vient:

$$f^{-1}(\overset{\circ}{\widehat{C_F A}}) = f^{-1}(C_F \overline{A}) = C_E f^{-1}(\overline{A}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(C_F A)}}$$

Comme $\overset{\circ}{\widehat{C_E f^{-1}(A)}} = C_E \overline{f^{-1}(A)}$ on aura :

$$C_E f^{-1}(\overline{A}) \subset C_E \overline{f^{-1}(A)},$$

par suite :

$$\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A}).$$

$7 \Rightarrow 1$

Soit $a \in E$ et Ω un voisinage ouvert de $f(a)$ dans F. (Ω peut être pris ouvert, sans risque de restriction de généralité, grâce à l'exercice 161). $C_F\Omega$ est alors fermé. D'après l'assertion (7), on obtient:

$$\overline{f^{-1}(C_F\Omega)} \subset f^{-1}(C_F\Omega).$$

Par conséquent, $f^{-1}(C_F\Omega)$ est un fermé de E. Or:

$$C_E f^{-1}(\Omega) = f^{-1}(C_F\Omega),$$

donc $f^{-1}(\Omega)$ est ouvert dans E; et comme $a \in f^{-1}(\Omega)$ on en déduit que $f^{-1}(\Omega)$ est un voisinage de a. La preuve est achevée.

Exercice 164

Soit (E,τ) un espace topologique. On dit qu'une fonction $f: (E,\tau) \to (\mathbb{R},|\,|)$ est **localement constante** si, pour tout point x de E, il existe un voisinage V de x tel que f soit constante sur V.

Montrer que toute fonction localement constante est continue.

Solution

Soit a un point de E et Ω un voisinage de $f(a) = a$. Il existe par hypothèses un voisinage V de a tel que $f(V) = \{a\}$. D'où $V \subset f^{-1}(\Omega)$.

Donc, $f^{-1}(\Omega)$ est un voisinage de a. f est ainsi continue en a, donc sur E.

Exercice 165

Soit (A,τ_A) un sous-espace de (E,τ). Montrer que l'injection canonique $i: A \to E$, donnée par $i(x) = x$, est continue sur A.

Solution

En effet, si Ω est un ouvert de E, alors $i^{-1}(\Omega) = \Omega \cap A$ est un ouvert de A. L'application i est donc continue.

Exercice 166

Montrer que la topologie trace d'un sous-ensemble A de (E,τ) est la topologie la moins fine rendant l'injection canonique i continue.

Solution

Les images réciproques, relativement à i, des ouverts de E reconstituent les éléments de la topologie trace (induite).

Exercice 167

Soient E et F deux espaces topologiques et A une partie non vide de E. Montrer que si une fonction $f: E \to F$ est continue sur E, sa restriction f/A à A est continue sur A.

Solution

En effet, il est facile de voir que $f/A = f \circ i$, i étant l'injection cano

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "f / A = f \circ i"'] & E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

-nique précitée. Ainsi, f/A, composée de deux fonctions continues (f et i) est, elle-même, continue.

Exercice 168

Montrer que si $f: (E,\tau) \to (F,\sigma)$ est injective continue et F séparé, alors E est séparé.

Solution

Soient x et y deux éléments distincts de E. Comme f est injective on obtient $f(x) \neq f(y)$ dans F séparé. Il existe donc deux voisinages ouverts disjoints V et W de f(x) et f(y) respectivement. Or f est continue, il en résulte que $f^{-1}(V)$ et $f^{-1}(W)$ sont deux voisinages disjoints de x et y respectivement. E est alors séparé.

3.2 Homéomorphisme

Exercice 169

Une fonction $f: (E,\tau) \to (F,\sigma)$ est un homéomorphisme, si elle est bijective **bicontinue**, c'est-à-dire continue ainsi que son inverse. Il en découle que l'inverse d'un homéomorphisme est un homéomorphisme.

Deux espaces E et F sont **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme les reliant.

Montrer que

1. si $(E,\tau) = (F,\sigma) = (\mathbb{R},|.|)$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ la fonction $f: x \to ax+b$ est un homéomorphisme.

2. $(\mathbb{R},|.|)$ et $(]-1,1[,|.|)$, ainsi que $(\mathbb{R},|.|)$ et $\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,|.|\right)$ sont homéomorphes.

3. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont homéomorphes.

4. chacune des fonctions suivantes est un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}$ sur $[-1,1]$:

$$x \to \begin{cases} \dfrac{x}{1+|x|} & \text{si } x \in \mathbb{R}, \\ +1 & \text{si } x = +\infty, \\ -1 & \text{si } x = -\infty. \end{cases} \quad ; \quad x \to \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\,\text{Arctg}\, x & \text{si } x \in \mathbb{R}, \\ +1 & \text{si } x = +\infty, \\ -1 & \text{si } x = -\infty. \end{cases}$$

5. tout intervalle ouvert $]a,b[$ est homéomorphe à $]0,1[$.

6. pour que deux espaces discrets soient homéomorphes, il faut et il suffit qu'ils aient un même cardinal.

Solution

1. Elle est bijective bicontinue.

2. Pour le premier couple, la fonction $x \to \dfrac{x}{1+|x|}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. On peut aussi prendre la fonction (tangente hyperbolique) $x \to \text{th}\, x$.

Pour le second, il suffit de considérer la fonction $x \to \text{Arctg}\, x$.

3. Ils le sont, grâce, par exemple, à l'application $x \to e^x$.

4. Elles sont bijectives bicontinues.

5. La fonction f: $]0,1[\to]a,b[$ définie par $f(x) = (b-a)x + a$ justifie cette propriété.

6. En effet, toute bijection d'un espace discret sur un espace discret est un homéomorphisme.

Exercice 170

1. Vérifier qu'une bijection même continue, n'est pas nécessairement un homéomorphisme.

2. Montrer que deux topologies τ et σ sur un même ensemble E sont identiques si, et seulement si, l'identité $id_E : (E,\tau) \to (E,\sigma)$ est un homémorhpisme.

Solution

1. En effet, l'identité $id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R},|.|)$ est bijective continue, tandis que $(id_{\mathbb{R}})^{-1}$ n'est continue en aucun point.

2. Si τ et σ sont identiques, l'application id_E est bicontinue, puisque:

$$\forall\ \Omega \in \sigma \quad id_E^{\ -1}(\Omega) = \Omega \in \tau \text{ (continuité de } id_E),$$

$$\forall\ \Omega \in \tau \quad id_E(\Omega) = \Omega \in \sigma \text{ (continuité de } id_E^{\ -1}).$$

Inversement, si l'identité id_E est bicontinue alors tout ouvert Ω de σ est un ouvert de τ, car id_E est continue et $\Omega = id_E^{\ -1}(\Omega)$. De même tout ouvert Ω de τ est un ouvert de σ, car $id_E^{\ -1}$ est continue et $\Omega = id_E(\Omega)$. Ainsi, τ et σ ont les mêmes ouverts. Elles sont identiques.

Exercice 171

Une propriété sera dite **topologique** ou **invariant** topologique, si elle est conservée par tout homéomorphisme.

Montrer que les notions de séparation et de séparabilité sont deux invariants topologiques.

Solution

Soit $f: (E,\tau) \rightarrow (F,\sigma)$ un homéomorphisme. Supposons E séparé. Comme f^{-1} est injective continue, F est alors séparé (exercice 168).

Supposons maintenant que E est séparable. Il admet une partie dénombrable partout dense A. Il en résulte que f(A) est une partie dénombrable de F et vérifie:

$$F = f(E) = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset F.$$

Donc, $\overline{f(A)} = F$.

3.3 Fonctions ouvertes, fonctions fermées

Exercice 172

Vérifier sur des exemples que l'image (directe) d'un ouvert par une fonction continue n'est pas nécessairement ouverte, et que l'image d'un fermé par une fonction continue n'est pas, en général, fermée.

Solution

Si l'on considère la fonction continue $f: (\mathbb{R},|.|) \rightarrow (\mathbb{R},|.|)$ donnée par $f(x) = x^2$, on voit que l'ouvert $]-1,1[$ a pour image $[0,1[$, laquelle n'est pas ouverte.

Par ailleurs, si l'on prend $f: (\mathbb{R},|.|) \rightarrow (\mathbb{R},|.|)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ on a $f(\mathbb{R}) =]0,1]$. Ce n'est pas un fermé!

Exercice 173

Une fonction $f: E \rightarrow F$ est dite **ouverte** (resp. fermée) si elle transforme tout ouvert (resp. fermé) de E en un ouvert (resp. fermé) de F.

Montrer que:

1. l'injection canonique i: $(A,\tau_A) \to (E,\tau)$ est ouverte (resp. fermée) si A l'est,
2. les homéomorphismes sont ouverts et fermés,
3. si F est discret, toute fonction f: $E \to F$ est à la fois ouverte et fermée.

Solution

1. Soit O un ouvert de A. Il existe un ouvert Ω de E tel que $i(O) = \Omega \cap A$. comme A est ouvert, i(O) l'est aussi par la stabilité de τ par rapport à l'intersection. Il va de même pour les fermés.
2. Ils le sont par définition.
3. C'est le cas, car chacune des parties de F est, à la fois ouverte, et fermées.

Exercice 174

Vérifier sur des exemples qu'il existe des fonctions:
continues et non ouvertes,
continues et ouvertes,
continues et non fermées,
continues et fermées,
continues et non ouvertes ni fermées
ouvertes et non continues,
fermées et non continues,
ouvertes et fermées mais non continues.

Solution

Nous nous contentons de citer pêle-mêle les situations suivantes.

i) L'injection canonique i: $A \subset E \to E$ est:
continue non ouverte si A n'est pas ouvert,
continue et ouverte si A est ouvert,
continue non fermée si A n'est pas fermé,
continue et fermée si A est fermé.

ii) La fonction $(\mathbb{R},|.|) \to (\mathbb{R},|.|)$ définie par $f(x) = x^2$ est continue mais non ouverte comme cité si-dessus.

iii) L'application identité $id_{\mathbb{R}}: (\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R},|.|)$ est continue, mais elle n'est ni ouverte ni fermée. Si l'on interchange les topologies de départ et d'arriveé, alors la même application identité devi...

ouverte et fermée mais non continue.

iv) Soit f une fonction définie de $(\mathbb{R},\tau)$ dans $(\mathbb{R},\sigma)$ par:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ 1 & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$$

σ étant la topologie discrète et τ la topologie grossière.

f est à la fois ouverte et fermée, mais elle n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 175

Soit $f: (E,\tau) \to (F,\sigma)$. Montrer que:

1. f est ouverte $\Leftrightarrow \forall A \subset E \quad f(\overset{\circ}{A}) \subset \widehat{f(A)}^{\circ}$.
2. f est fermée $\Leftrightarrow \forall A \subset E \quad \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

Solution

1. Si f est ouverte, $f(\overset{\circ}{A})$ est alors un ouvert de F, inclus dans f(A), pour tout $A \subset E$. D'où:

$$f(\overset{\circ}{A}) \subset \widehat{f(A)}^{\circ}.$$

Inversement, si A est un ouvert de E, alors $\overset{\circ}{A} = A$; d'où:

Donc $$f(A) = f(\overset{\circ}{A}) \subset \widehat{f(A)}^{\circ}.$$

$$f(A) = \widehat{f(A)}^{\circ}.$$

f(A) est alors ouvert.

2. Supposons f fermée. Si A est une partie de E, $f(\overline{A})$ est fermée. Comme on a $f(A) \subset f(\overline{A})$, il s'en suit que $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

Inversement, si A est un fermé de E, alors $\overline{A} = A$; donc $f(A) = f(\overline{A})$. Comme $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ il vient $\overline{f(A)} \subset f(A)$. Donc,

$$\overline{f(A)} = f(A).$$

Par suite, f est fermée.

Exercice 176

Soit $f : (E,\tau) \to (F,\sigma)$. Montrer que:

1. f continue et fermée $\Leftrightarrow$ $\forall A \subset E,\ \overline{f(A)} = f(\overline{A})$.

2. f continue et ouverte $\Leftrightarrow$ $\forall B \subset F,\ f^{-1}(\mathring{B}) = \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}$.

Solution

1. Soit $A \subset E$. On a:

$$\left.\begin{array}{lll} f \text{ continue} & \Rightarrow & f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \\ f \text{ fermée} & \Rightarrow & \overline{f(A)} \subset f(\overline{A}) \end{array}\right| \Rightarrow f(\overline{A}) = \overline{f(A)}.$$

La réciproque est évidente.

2. f est ouverte $\Leftrightarrow$ $\forall A \subset E\ \ f(\mathring{A}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$.

La condition est nécessaire. En effet, si f est continue, la caractérisation rencontrée dans l'exercice 163 permet d'écrire:

$$(*) \qquad \forall B \subset F,\quad f^{-1}(\mathring{B}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}.$$

Maintenant, si f est continue et ouverte alors $f(\overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}})$ est ouvert dans F. D'où:

$$f(\overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f\left(f^{-1}(B)\right)}} \subset \mathring{B}.$$

On en déduit:

$$(**) \qquad \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}} \subset f^{-1}(\mathring{B}).$$

La conjonction des inclusions (*) et (**) donne l'égalité cherchée.

La condition est suffisante. Elle assure d'abord, grâce à l'exercice 163, la continuité de f. Implique-t-elle que f est ouverte? Si A est un ouvert de E alors:

$$f^{-1}(\overset{\circ}{\widehat{f(A)}}) = \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(f(A))}} \supset \mathring{A} = A.$$

Par suite, $f(A) \subset \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$. $f(A)$ est donc ouvert dans F.

Exercice 177

1. La famille des fonctions ouvertes (resp.fermées) est stable par composition.

2. Soient f: $(E,\tau) \to (F,\sigma)$ et g: $(F,\sigma) \to (G,\theta)$ deux fonctions.

i) Montrer que si $g_\circ f$ est ouverte (resp. fermée) et f est continue et surjective alors g est ouverte (resp. fermée).

ii) Montrer que si $g_\circ f$ est ouverte (resp. fermée) et g est continue et injective alors f est ouverte (resp. fermée).

Solution

1. Conséquence immédiate de la définition.

2.i) Soit Ω un ouvert (resp. fermé) de F. Comme f est surjective, on peut écrire $\Omega = f\left(f^{-1}(\Omega)\right)$. D'où:

$$g(\Omega) = g\left(f\left(f^{-1}(\Omega)\right)\right) = (g_\circ f)\left(f^{-1}(\Omega)\right).$$

La continuité de f assure que $f^{-1}(\Omega)$ est ouvert (resp. fermé). Donc, $g(\Omega)$ l'est de même du fait que $g_\circ f$ est ouverte (resp. fermée).

ii) L'injectivité de g permet d'avoir, pour tout ouvert (resp. fermé) Ω de E, $f(\Omega) = g^{-1}\left(g\left(f(\Omega)\right)\right)$; c-à-d: $f(\Omega) = g^{-1}\left((g_\circ f)(\Omega)\right)$. $(g_\circ f)(\Omega)$ est, par hypothèses, ouvert (resp. fermé), donc $f(\Omega)$ l'est de même, grâce à la continuité de g.

Exercice 178

Soient E un espace de Baire, F un espace quelconque et f: $E \to F$ une fonction surjective continue et ouverte. Montrer que F est de Baire.

Solution

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieurs vides de F. Conformément à la continuité de f, $G_n = f^{-1}(K_n)$ est fermé dans E, quel que soit l'indice n dans $\mathbb{N}$. De plus, f étant continue et ouverte, on a:

$$\overset{\circ}{G}_n = f^{-1}(\overset{\circ}{K}_n) = f^{-1}(\phi) = \phi.$$

Ainsi, on a trouvé dans l'espace de Baire E une suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés d'intérieurs vides. Donc, leur intersection est d'intérieur vide. D'où:

$$\phi = f(\phi) = f\left(\overset{o}{\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n}}\right) = f\left(\overset{o}{\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(K_n)}}\right) = f\left(\overset{o}{\overline{f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n\right)}}\right).$$

Comme f est continue et ouverte, on peut encore écrire:

$$\phi = f\left(\overset{o}{\overline{f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n\right)}}\right) = f\left(f^{-1}\overset{o}{\overline{\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n\right)}}\right).$$

Enfin, f étant surjective, on a:

$$\phi = f\left(f^{-1}\overset{o}{\overline{\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n\right)}}\right) = \overset{o}{\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n}} .$$

Donc, F est de Baire.

3.4 Continuité des fonctions vectorielles

Exercice 179

Soit $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ l'espace produit associé à une famille d'espaces topologiques $(E_i)_{1\le i\le p}$. Montrer que la projection $\pi_i : E \to E_i$:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \to \pi_i(x) = x_i$$

est continue.

Solution

Soient $x_0 = \left(x_0^1, \ldots, x_0^p\right)$ un élément de E et Ω_i un voisinage de $x_0^i = \pi_i(x_0)$ dans E_i. On a:

$$\pi_i^{-1}(\Omega_i) = E_1 \times \ldots \times E_{i-1} \times \Omega_i \times E_{i+1} \times \ldots \times E_p \in \mathcal{V}(x_0),$$

donc π_i est continue.

Exercice 180

Soient $\left\{E, (F_i)_{1\le i\le p}\right\}$ une famille finie d'espaces topologiques et f une fonction de E dans $\prod_{i=1}^{p} F_i$ telle que :

$$f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)\big), \quad x \in E.$$

1. Soit $\prod_{i=1}^{p} A_i$ une partie non vide de $\prod_{i=1}^{p} F_i$. Montrer que:

$$f^{-1}\left(\prod_{i=1}^{p} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{p} f_i^{-1}(A_i).$$

2. Montrer que pour que f soit continue sur E, il faut et il suffit que toutes ses composantes $(f_i)_{1 \le i \le p}$ le soit.

Solution

1. On a:

$$X \in f^{-1}\left(\prod_{i=1}^{p} A_i\right) \Leftrightarrow f(X) = (f_1 X), \ldots, f_p X) \in \prod_{i=1}^{p} A_i.$$

$$\Leftrightarrow X \in f_i^{-1}(A_i) \;\; \forall \;\; i = 1, 2, \ldots, p \;\Leftrightarrow\; X \in \bigcap_{i=1}^{p} f_i^{-1}(A_i).$$

2. Supposons que f soit continue sur E. Alors, pour tout i = 1, 2, ..., p, la fonction $f_i = \pi_i \circ f$ est une composée de deux fonctions continues. Elle est donc, elle-même, continue.
Inversement, supposons que toutes les composantes soient continues sur E et considérons un ouvert élémentaire $\Omega = \prod_{i=1}^{p} \Omega_i$ de $\prod_{i=1}^{p} F_i$.
Conformément à la première question, on a:

$$f^{-1}(\Omega) = f^{-1}\left(\prod_{i=1}^{p} \Omega_i\right) = \bigcap_{i=1}^{p} f_i^{-1}(\Omega_i).$$

On déduit que $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de E; f est alors continue.

Exercice 181

Soient E_1 et E_2 deux espaces et $a_2 \in E_2$ (resp. $a_1 \in E_1$). Montrer que l'application $x \to f(x) = (x, a_2)$ (resp. $x \to g(x) = (a_1, x)$) est un homéomorphisme de E_1 sur $E_1 \times \{a_2\}$ (resp. de E_2 sur $\{a_1\} \times E_2$).

Solution

Il est évident que f est bijective continue (ses composantes sont continues); son inverse $\pi_{E_1} = f^{-1}$ est aussi continu.

Le cas de g se traite de même.

Exercice 182

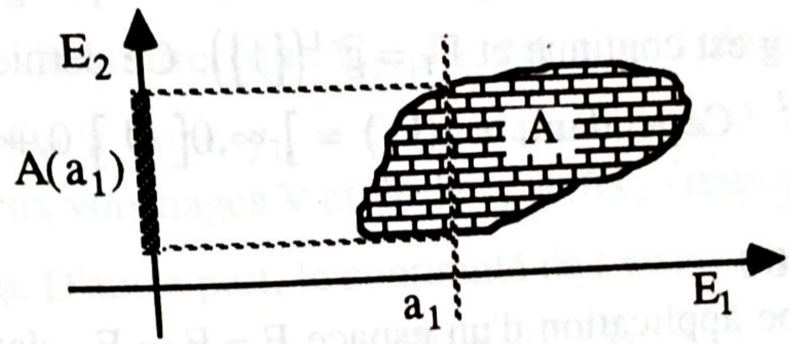
Montrer que si A est un sous-ensemble ouvert de $E_1 \times E_2$ et $a_1 \in E_1$ alors l'ensemble:

$$A(a_1) = \pi_2\Big(A \cap \big(\{a_1\} \times E_2\big)\Big)$$

est un ouvert de E_2.

Solution

On remarque que $A \cap \big(\{a_1\} \times E_2\big)$ est un ouvert de $\{a_1\} \times E_2$.



En notant f_0 la restriction de l'homoémorphisme f déjà défini, on a :

$$A(a_1) = f_0^{-1}\big(A \cap (a_1 \times E_2)\big).$$

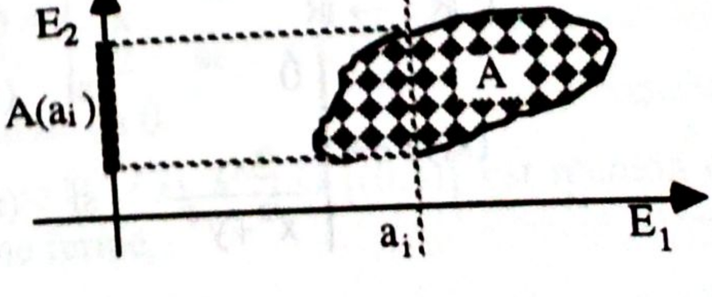
C'est un ouvert de E_2, puisque f_0 est continue.

Exercice 183

Montrer que l'application de projection est ouverte mais non fermée.

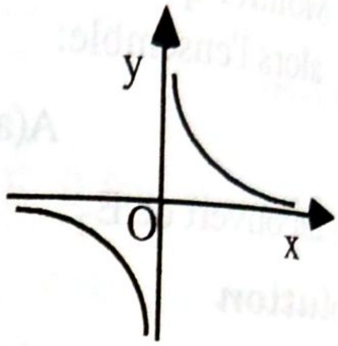
Solution

Nous considérons le cas $E = E_1 \times E_2$. Avec les mêmes notations que précédemment, on obtient $\pi_2(A) = \bigcup_{a_i \in E_1} A(a_i)$, pour tout ouvert A de E. C'est un ouvert!



Pour étayer la deuxième assertion, on conduit l'exemple suivant. On considère la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et on note

$\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy = 1\}$ son graphe .



Si l'on considère la fonction $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x,y) = xy$, on constate que g est continue et $\Gamma_f = g^{-1}(\{1\})$. Ce dernier est alors un fermé de $\mathbb{R}^2$. Cependant, $\pi_1(\Gamma_f) =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercice 184

1. Soit f une application d'un espace $E = E_1 \times E_2$ dans un espace F. Montrer que si f est continue en un point $(a_1, a_2) = a$ de E, alors les fonctions partielles $f_1 : E_1 \to F$ définie par $f_1(x) = (x, a_2)$ et $f_2 : E_2 \to F$ définie par $f_2(x) = (a_1, x)$ sont continues en a_1 et a_2 respectivement.
2. Que dire de la réciproque?

Solution

En effet, f_1 peut se mettre sous la forme $f_1 = f \circ g$, où g est l'homéomorphisme introduit dans l'exercice 181. Elle est donc continue. Le cas de f_2 se traite de même.

2. Elle est généralement fausse. Constatons-le sur ce cas.

Soit la fonction réelle:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \to \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

La continuité de $f_1 = f(.,y)$ en $x = 0$ et de $f_2 = f(x,.)$ en $y = 0$ est évidente. Toutefois, f est discontinue en (0,0), car:

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = 1 \neq 0.$$

Exercice 185

1. Montrer de deux manières que si f est une fonction continue d'un espace E dans un espace séparé F, son graphe Γ_f, est alors fermé dans E×F.

2. Montrer que la réciproque est fausse.

Solution

1. On peut démontrer que $C_{E \times F}\Gamma_f$ est ouvert dans E×F. Soit $(x_0,y_0) \notin \Gamma_f$. On a donc $y_0 \neq f(x_0)$ dans F séparé. Il existe par conséquent deux voisinages V et W de y_0 et $f(x_0)$ respectivement tels que $V \cap W = \phi$. D'autre part, la continuité de f en x_0 implique l'existence d'un voisinage U de x_0 vérifiant $f(U) \subset W$. Il en résulte que $f(U) \cap V = \phi$. D'où $\Gamma_f \cap (U \times V) = \phi$. Il en découle que U×V est un voisinage de (x_0,y_0), contenu dans $C_{E \times F}\Gamma_f$. Ce dernier est alors voisinage de tous ses points: C'est un ouvert!

Une autre preuve peut être conduite en ces termes: F étant séparé, la diagonale Δ de F^2 est alors fermée. Si l'on considère la fonction h: $E \times F \to F^2$ donnée par $h(x,y) = (f(x),y)$, on trouve $\Gamma_f = h^{-1}(\Delta)$. Comme h est continue et Δ fermée on déduit que Γ_f est fermé.

2. Il suffit de regarder ce contre-exemple. Soit la fonction réelle

$$g: (\mathbb{R},|.|) \to (\mathbb{R},|.|)$$

$$x \to g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0, \\ 2 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Il est clair que g est discontinue en 0.

D'autre part, $\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy = 1\} \cup \{(0,2)\}$ est réunion de deux fermés. Il est lui-même fermé.

3.5 Topologie quotient - Espace quotient

Exercice 186

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un espace (E,τ). On appelle topologie quotient sur l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$, la plus fine des topologies rendant continue la surjection canonique $s: (E,\tau) \to E/\mathcal{R}$ définie par $s(x) = \dot{x}$.

On désigne cette topologie par $\tau/\mathcal{R}$. Le couple $(E/\mathcal{R}, \tau/\mathcal{R})$ s'appelle espace topologique **quotient** ou espace quotient tout court.

Un sous-ensemble Ω de $E/\mathcal{R}$ sera dit ouvert si, et seulement si, $s^{-1}(\Omega)$ est ouvert dans (E,τ).

Montrer que pour qu'un ensemble F soit fermé dans $(E/\mathcal{R}, \tau/\mathcal{R})$ il faut et il suffit que $s^{-1}(F)$ le soit dans (E,τ).

Solution

Soit F un fermé de $E/\mathcal{R}$. s étant continue, on déduit que $s^{-1}(F)$ est fermé dans E.

Réciproquement, soit F un sous-ensemble de $E/\mathcal{R}$ tel que $s^{-1}(F)$ soit fermé dans E. $C_F s^{-1}(F)$ est alors un ouvert de E. Or:

$$C_E s^{-1}(F) = s^{-1}(E/\mathcal{R}) \setminus s^{-1}(F) = s^{-1}(C_{E/\mathcal{R}} F),$$

donc $s^{-1}(C_{E/\mathcal{R}} F)$ est ouvert dans E. La conséquence précitée permet d'affirmer que $C_{E/\mathcal{R}} F$ est un ouvert de $E/\mathcal{R}$, ce qui conduit à ce que F soit fermé.

Exercice 187

Montrer que si G est un espace topologique et $f: E/\mathcal{R} \to G$, alors pour que f soit continue il faut et il suffit que $f \circ s$ le soit.

Solution

Il est évident que si f est continue, la composée $f \circ s$ l'est de même.

Inversement, si Ω est un ouvert de G, l'ensemble

$$(f \circ s)^{-1}(\Omega) = s^{-1}(f^{-1}(\Omega))$$

est un ouvert de E. Donc, $f^{-1}(\Omega)$ est ouvert dans $E/\mathcal{R}$ (d'après l'exercice précédent). Il en découle que f est continue.

Exercice 188

1. Montrer que si $E/\mathcal{R}$ est séparé, l'ensemble

$$L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x\mathcal{R}y\right\}$$

est fermé.

2. Inversement, montrer que si L est fermé dans E^2 et si la surjection canonique s est ouverte, alors l'espace quotient $E/\mathcal{R}$ est séparé.

Solution

1. Désignons par Δ la diagonale de $E/\mathcal{R} \times E/\mathcal{R}$. Elle est fermée. D'autre part, il est facile de voir que l'application :

$$h : E \times E \to E/\mathcal{R} \times E/\mathcal{R}$$

$$(x,y) \to h(x,y) = \left(s(x), s(y)\right) = \left(\dot{x}, \dot{y}\right)$$

est continue. Il en découle que $L = h^{-1}(\Delta)$ est fermé.

2. Supposons que L soit fermé dans $E \times E$ et que s soit ouverte. Si $\dot{x} \neq \dot{y}$ dans $E/\mathcal{R}$ alors $(x,y) \notin L$. On déduit que (x,y) est un point de l'ouvert $C_{E^2} L$. Il existe un ouvert élémentaire $\Omega \times K$ vérifiant $(x,y) \in \Omega \times K \subset C_{E^2} L$. D'où $L \cap (\Omega \times K) = \phi$. Il s'en suit que tout point de Ω ne peut être équivalent à aucun point de K. On obtient:

$$s(\Omega) \cap s(K) = \phi.$$

Comme s est ouverte, les ensembles $s(\Omega)$ et $s(K)$ sont deux ouverts disjoints, contenant $\dot{x}$ et $\dot{y}$ respectivement. $E/\mathcal{R}$ est donc séparé.

Exercice 189

Montrer que si E est séparable, $E/\mathcal{R}$ l'est aussi.

Solution

La séparabilité confère à E la jouïssance d'un sous-ensemble dénombrable et partout dense que l'on notera A. Nous allons montrer que s(A) a ces mêmes propriétés dans $E/\mathcal{R}$. Il est évident que si A est dénombrable, à fortiori, s(A) l'est de même.

D'autre part, Si Ω est un ouvert non vide de $E/\mathcal{R}$, $s^{-1}(\Omega)$ en est un dans E. D'où :

$$A \cap s^{-1}(\Omega) \neq \phi.$$

Donc :

$$s(A) \cap \Omega \neq \phi.$$

3.6 Prolongement par continuité Continuité séquentielle

Exercice 190

Soient E et F deux espaces, F régulier. On considère une fonction continue f d'une partie A de E dans F, telle que, pour tout point $x_0 \in \overline{A}$, f(x) ait une limite dans F lorsque x tend vers x_0, en restant dans A. Montrer qu'il existe une et une seule fonction de $\overline{A}$ dans F qui prolonge f et qui est continue sur $\overline{A}$.

Solution

Notons $\tilde{f}$ cette fonction. Elle est définie pour tout $x_0 \in \overline{A}$ par:

$$\tilde{f}(x_0) = \lim_{x \to x_0,\ x \in A} f(x). \qquad (*)$$

Nous allons procéder par étape.

1. Unicité de $\tilde{f}$:

Supposons que $\tilde{\tilde{f}}$ soit un autre prologement continu de f à $\overline{A}$. Pour tout $x_0 \in \overline{A}$, on peut avoir:

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in A} \tilde{\tilde{f}}(x) = \lim_{x \to x_0,\ x \in A} f(x) = \tilde{f}(x_0).$$

(C'est dû au fait que f et $\tilde{\tilde{f}}$ coïncident sur A.)

Comme $\tilde{\tilde{f}}$ est continue en x_0, la relation précédente donne:

$$\tilde{\tilde{f}}(x_0) = \lim_{x \to x_0,\, x \in A} \tilde{\tilde{f}}(x) = \lim_{x \to x_0,\, x \in A} f(x) = \tilde{f}(x_0), \quad \forall\, x_0 \in \overline{A}.$$

D'où $\tilde{\tilde{f}} = \tilde{f}$.

2. Continuité de $\tilde{f}$:

Soient $x_0 \in \overline{A}$ et $W \in \mathcal{V}(\tilde{f}(x_0))$. Il suffit d'exhiber un voisinage V de x_0 dans E tel que:

$$x \in V \cap \overline{A} \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}(x) \in W.$$

L'espace F étant régulier, W contient alors un voisinage fermé W' de $\tilde{f}(x_0)$. D'après la relation (*) ci-dessus, il existe un voisinage V' de x_0 tel que $f(x) \in W'$ quel que soit x dans $V' \cap A$; l'ensemble fermé W' contient donc $f(V' \cap A)$, et par conséquent aussi son adhérence. Enfin, soit V un voisinage ouvert de x_0, contenu dans V'. Toutes ces considérations se résument dans les inclusions suivantes:

$$(**) \qquad \overline{f(V \cap A)} \cap \overline{f(V' \cap A)} \subset W' \subset W.$$

Il reste donc à montrer que $\tilde{f}(x')$ appartient à $\overline{f(V \cap A)}$ pour tout $x' \in V' \cap A$. Par définition de $\tilde{f}$, on a $\tilde{f}(x') = \lim_{x \to x',\, x \in A} f(x)$ pour tout $x' \in \overline{A}$. D'où

$$\tilde{f}(x') \in \overline{f(V \cap A)}.$$

C.Q.F.D

Exercice 191

Soient $f: E \to F$ et $a \in E$. On dit que f est **séquentiellement continue en a,** si elle transforme toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers a en une suite $\big(f(x_n)\big)_n$ convergeant vers f(a).

1. Montrer que toute fonction continue sur E l'est séquentiellement.
2. Montrer que la réciproque est généralement fausse.

Solution

1. Soient $a \in E$ et f une fonction de E dans F, continue en a. Soient $(x_n)_n$ une suite convergente vers a et V un voisinage de $f(a)$. Il ressort que $f^{-1}(V)$ est voisinage de a. Il en découle qu'il existe un entier naturel n_0 tel que:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n \in f^{-1}(V).$$

D'où:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \in V.$$

C'est-à-dire:

$$\lim_{x \to \infty} f(x_n) = f(a).$$

2. Regarder l'exercice suivant!.

Exercice 192

Soit E un ensemble non dénombrable, muni de la topologie codénombrable τ.

1. Montrer qu'une suite $(x_n)_n$ est convergente dans (E,τ) si, et seulement si, elle est stationnaire.

2. Soit $id_{\mathbb{R}}$ l'application identité de $(\mathbb{R},\tau)$ dans $(\mathbb{R},|.|)$. Montrer que pour toute suite $(x_n)_n$ de $\mathbb{R}$ on a:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} id_{\mathbb{R}}(x_n) = id_{\mathbb{R}}(x).$$

3. Vérifier que $id_{\mathbb{R}}$ est discontinue en tout point x de $\mathbb{R}$.

4. Que conclure?

Solution

1. $\Rightarrow$

Supposons que $(x_n)_n$ soit convergente et notons L sa limite. Posons:

$$V = \left\{ x_n \,/\, x_n \neq L \right\}.$$

Il est clair que V est dénombrable. Par conséquent, $C_E V$ est un voisinage ouvert de L. Donc, il existe un entier naturel n_0 tel que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n \in C_E V,$$

autrement dit:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n = L.$$

On en déduit que $(x_n)_n$ est stationnaire.

1. $\Leftarrow$

Evident.

2. La suite $(x_n)_n$ étant convergente dans $(\mathbb{R},\tau)$, elle est alors stationnaire. Ceci entraîne qu'elle est convergente dans $(\mathbb{R},|.|)$.

3. Il est clair que $id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R},\tau) \to (\mathbb{R},|.|)$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$. Il suffit, par exemple, de remarquer que l'intervalle $]x\text{-}r, x+r[$ est un voisinage de x dans $(\mathbb{R},|.|)$, alors qu'il ne l'est pas dans $(\mathbb{R},\tau)$.

4. Nous avons montré dans cet exercice (question 2) que l'application identité $id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R},\tau) \to (\mathbb{R},|.|)$ est séquentiellement continue sur $\mathbb{R}$, alors qu'elle n'est continue en aucun point (question 3).

Remarque: Il est important de signaler que, dans les espaces satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité (chaque point y jouït d'un système fondamental de voisinages), cette réciproque est vraie.

Exercice 193

1. Montrer que la fonction

$$f : (\mathbb{R},|.|) \to (\mathbb{R},|.|)$$
$$x \to f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

est discontinue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la fonction $f : (\mathbb{R},|.|) \to (\mathbb{R},|.|)$

$$x \to f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est continue qu'en un seul point que l'on déterminera.

3. On écrit les rationnels sous la forme $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, p et q premiers entre eux pour $p \neq 0$ (pour $p = 0$ on impose $q = 1$).

Montrer que la fonction réelle définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel.

Solution

1. C'est la fonction de Dirichlet que nous avons déja rencontrée. Il suffit de montrer qu'elle n'est pas continue séquentiellement.

Soit x_0 un point de $\mathbb{R}$. On distingue deux cas.

Si $x_0 \in \mathbb{Q}$, on a $f(x_0) = 0$. Par ailleurs, on sait qu'il est limite d'une suite irrationnelle (x_n). Comme $f(x_n) = 1$ pour tout n, la suite $(f(x_n))$ converge vers la limite 1, laquelle est différente de $f(x_0) = 0$. Donc, f n'est pas séquentiellement continue sur $\mathbb{Q}$.

Si $x_0 \notin \mathbb{Q}$, on a $f(x_0) = 1$. On sait de même que x_0 est limite d'une suite rationnelle (y_n). Comme $f(y_n) = 0$ pour tout n, la suite $(f(y_n))$ converge vers la limite 0, laquelle est différente de $f(x_0) = 1$. Donc, f n'est pas séquentiellement continue sur $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

Ainsi, f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

2. Le même raisonnement mené dans (1) permet d'affirmer que f est discontinue en tout point $x_0 \neq 0$.

Si (x_n) est une suite convergente vers 0, la suite $(f(x_n))$:

$$f(x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_n \in \mathbb{Q} \\ x_n & \text{si } x_n \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

converge vers $0 = f(0)$. Donc, f est séquentiellement continue en 0, donc continue d'après la remarque sus-citée.

3. Soit $x_0 \notin \mathbb{Q}$; on a $f(x_0) = 0$. Si (x_n) est une suite convergente

vers x_0 la suite $(f(x_n))$ donnée par:

$$f(x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{q_n} & \text{si } x_n = \dfrac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

converge vers $0 = f(x_0)$, car q_n tend vers $+\infty$ avec n (résultat déjà vu). Donc, f est séquentiellement continue sur $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

Si $x_0 = \dfrac{p_0}{q_0} \in \mathbb{Q}$; on a :

$$f(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_0 = 0, \\ \dfrac{1}{q_0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite irrationnelle de terme général $x_n = \dfrac{p_0}{q_0} + \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ converge vers x_0 ; par contre la suite image $(f(x_n))$ converge vers $0 \neq f(x_0)$. Donc, f n'est pas continue sur $\mathbb{Q}$.

3.7 Quelques problèmes de plus

Exercice 194

Soit la fonction f: $(\mathbb{R},\sigma) \to (\mathbb{R},|.|)$ donnée par:

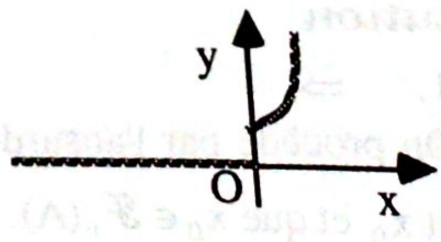
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

σ désigne la topologie cofinie sur $\mathbb{R}$.

1. Représenter le graphe de f sur un repère orthonormé.
2. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Solution

1. Le graphe de f a l'allure ci-contre.



2. Si $x_0 < 0$, alors $f(x_0) = 0$. Pour tout $\varepsilon \geq 1$ l'image réciproque $f^{-1}\left(\left]-\varepsilon,\varepsilon\right[\right) = \left]-\infty, \sqrt{\varepsilon-1}\right[$ du voisinage de 0 dans $(\mathbb{R},|.|)$ n'est pas un voisinage de x_0 relativement à σ. Il ne contient aucun ouvert de celle-ci. Donc, f n'est pas continue sur $\mathbb{R}_-^*$.

De même, Si $x_0 \geq 0$, alors $f(x_0) = x_0^2 + 1$. Pour tout $\varepsilon \leq x_0^2$ l'image réciproque

$$f^{-1}\left(\left]x_0^2 + 1 - \varepsilon,\ x_0^2 + 1 + \varepsilon\right[\right) = \left]\sqrt{x_0^2 - \varepsilon},\ \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}\right[$$

du voisinage de $x_0^2 + 1$ dans $(\mathbb{R},|.|)$ n'est pas un voisinage de x_0 relativement à σ. Donc, f n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$.

Conclusion: f est discontinue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 195

Soit A une partie non vide d'un espace E. On définit la fonction caractéristique, $f_A : A \to (\mathbb{R},|.|)$, de A par:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

1. Montrer que:

$$f_A \text{ est continue en } x \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \mathcal{F}_r(A).$$

2. Quand-est-ce que la relation:

" quel que soit $A \subset E$, f_A est continue sur E "

est -elle vraie?

3. On dit que E est **résolvable**, s'il admet une partie A vérifiant $\overline{A} = \overline{C_E A} = E$. Montrer, dans ce cas, que f_A est discontinue en tout point x de E, et que sa restriction f_A/A à A est continue sur le sous-espace A.

Solution

1. $\Rightarrow$

On procède par l'absurde. Supposons que f_A soit continue en un point x_0 et que $x_0 \in \mathcal{F}_r(A)$. Il en découle que tout voisinage V de x_0

rencontre, à la fois, A et $C_E A$. Si l'on suppose $f_A(x_0) = 0$ et l'on choisisse ε tel que $0 < \varepsilon \leq 1$, on établit que $f_A(V)$ n'est pas inclus dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Cela s'explique par l'existence d'éléments y de V satisfaisant à $f_A(y) = 1$. Ainsi, on est conduit à une contradiction avec la continuité de f_A en x_0. On conclut donc que:

$$x_0 \notin \mathcal{F}_r(A).$$

Le cas $f_A(x_0) = 1$ mène, par analogie, à la même conclusion.

$\Leftarrow$

Si x_0 n'appartient pas à $\mathcal{F}_r(A)$, il est alors ou dans $\overset{\circ}{A}$ ou dans $\widehat{\overset{\circ}{C_E A}}$. Supposons qu'il soit dans $\overset{\circ}{A}$. Il s'en suit que $f_A(x_0) = 1$ et:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad f_A^{-1}\left( ]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\right) = \begin{cases} A & \text{si} \quad \varepsilon \leq 1, \\ E & \text{si} \quad \varepsilon > 1. \end{cases}$$

A et E sont deux voisinages de x_0 ; on conclut que f_A est continue en x_0.

Avec un raisonnement analogue, on arrive à la même conclusion dans le cas $x_0 \in \widehat{\overset{\circ}{C_E A}}$.

2. Il faut que $\mathcal{F}_r(A)$ soit vide, ce qui revient à dire que A doit être, en même temps, ouvert et fermé.

3. On a:

$$\mathcal{F}_r(A) = \overline{A} \cap \overline{C_E A} = E \neq \phi.$$

D'après (i), f_A est discontinue en tout point de E.

Si l'on note $\mathcal{F}_{r_A}(A)$ la frontière de A par rapport à la topologie induite de A, on a immédiatement,

$$\mathcal{F}_{r_A}(A) = \phi.$$

En vertu du même résultat (1), on voit que f_A est continue sur le sous-espace A.

Exercice 196

Démontrer que l'adhérence de la suite $\left(e^{2i\pi n\alpha}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est le cercle de $\mathbb{C}$ des nombres complexes de module 1.

Solution

Soit $\mathcal{S}^1$ le cercle décrit. Considérons la fonction

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{S}^1$$

$$x \to \varphi(t) = e^{2i\pi t}.$$

Elle est continue et surjective. On déduit immédiatement que:

$$\varphi(\overline{A}) \subset \overline{\varphi(A)},\ \forall A \subset \mathbb{R}.$$

Maintenant, si $A = \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$, on a $\overline{A} = \mathbb{R}$, donc $\varphi(\overline{A}) = \mathcal{S}^1$, puisque φ est surjective. Par ailleurs, on a:

$$\varphi(A) = \left\{e^{2i\pi k\alpha},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Par suite

$$\mathcal{S}^1 = \varphi(\overline{A}) \subset \overline{\varphi(A)} = \overline{\left\{e^{2i\pi k\alpha},\ k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

L'adhérence de la suite $\left(e^{2i\pi n\alpha}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc le cercle $\mathcal{S}^1$ tout entier.

Exercice 197

On considère sur $\mathbb{R}$ la topologie σ jouïssant de la base:

$$\mathcal{B} = \left\{[a,b[\ ;\ a,\ b\in\mathbb{R}\right\}.$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{W}(a) = \left\{[a,b[\ ;\ b\in\mathbb{R}\right\}$ forme un système fondamental de voisinages du point a.

2. Déterminer la nature des deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, définies par $u_n = 1/n$ et $v_n = -1/n$.

3. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : (\mathbb{R},\sigma) \to (\mathbb{R},|.|)$ donnée par $f(x) = -x$.

Solution

1. Soit V un voisinage du point a. Il existe un ouvert Ω de σ tel que:

$$a \in \Omega \subset V.$$

r $\mathfrak{B}$ est une base de σ, Ω s'écrit donc:

$$\Omega = \bigcup_{\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha < \beta} \left[\alpha, \beta\right[.$$

Il en résulte qu'il existe α_0 et β_0 de $\mathbb{R}$ tels que:

$$\alpha_0 < \beta_0 \text{ et } a \in \left[\alpha_0, \beta_0\right[.$$

Si $\alpha_0 = a$, alors $\left[a, \beta_0\right[$ vérifie:

$$\left[a, \beta_0\right[\in \mathcal{W}(a) \text{ et } \left[a, \beta_0\right[\subset V.$$

Donc, $\mathcal{W}(a)$ est un système fondamental de voisinages de a.

Si $a \in \left]\alpha_0, \beta_0\right[$, on remarque que:

$$\left[\alpha_0, \beta_0\right[= \left[\alpha_0, a\right] \cup \left[a, \beta_0\right[.$$

On déduit comme précédemment que

$$\left[\alpha_0, \beta_0\right[\subset V.$$

Conclusion: $\mathcal{W}(a)$ constitue un système fondamental de voisinages de a.

2. La suite $(u_n)_n$ converge vers 0. En effet, si $V \in \mathcal{V}(0)$, on a:

$$V = \left[0, \beta\right[, \ \beta > 0.$$

Il est facile de voir qu'on peut trouver un rang n_0 à partir duquel tous les éléments de la suite appartiennent à V. Il suffit d'avoir un entier naturel vérifiant:

$$\frac{1}{n} < \beta.$$

L'entier $n_0 = \left[\frac{1}{\beta}\right] + 1$ résoud le problème ($\left[\frac{1}{\beta}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{1}{\beta}$).

La suite $(v_n)_n$ est divergente. Le seul point susceptible d'être la limite de $(v_n)_n$ est 0. Or, rien de tel n'est vrai. En effet, pour un β

fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, il n'existe aucun entier naturel n satisfaisant à:

$$-\frac{1}{n} \in \left[0,\beta\right[\in \mathcal{W}(0).$$

iii) La fonction f: $(\mathbb{R},\sigma) \to (\mathbb{R},|.|)$, définie par $f(x) = -x$, est continue en tout point de $\mathbb{R}$. En effet, si x_0 est un réel quelconque et $\left]x_0-r,x_0+r\right[$ $(r>0)$ un voisinage quelconque de x_0, on a:

$$f^{-1}\left(\left]x_0-r,x_0+r\right[\right) = \left]-x_0-r,-x_0+r\right[\in \mathcal{W}(f(\dot{x}));$$

car:

$$\left[-x_0,-x_0+r\right[\subset \left]-x_0-r,-x_0+r\right[.$$

Exercice 198

Soient f: $(E,\tau) \to (F,\sigma)$ et $A \subset E$. Montrer que si f est un homéomorphisme alors:

$$E = \overline{A} \Leftrightarrow F = \overline{f(A)}.$$

Solution

$\Rightarrow$)

On a:

$$F = f(E) = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset F$$

D'où $F = \overline{f(A)}$.

$\Leftarrow$)

On a:

$$E = f^{-1}(F) = f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right) \subset \overline{f^{-1}(f(A))} = \overline{A} \subset E.$$

D'où $E = \overline{A}$.

Exercice 199

Soit f une fonction continue de $(\mathbb{R},|.|)$ dans un espace topologique (E,τ).

1. Montrer que le sous-ensemble

$$G = \left\{T \in \mathbb{R} \,/\, \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)\right\}$$

est un sous-groupe additif de $(\mathbb{R},+)$.

2. Que peut-on dire de f lorsque E est séparé et G partout dense?

Solution

1. G est non vide puisqu'il contient 0. Par ailleurs, si T et T' sont deux éléments de G, on a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x+T-T') = f(x-T') = f(x-T'+T') = f(x).$$

Donc, $T-T' \in G$. Ainsi, (G,+) est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.

2. Pour tout T et T' de G on a:

$$f(T+T') = f(T) = f(T').$$

Donc, f est constante sur G.

Maintenant si G est dense dans $\mathbb{R}$ alors f(G) est dense dans $f(\mathbb{R})$. Or f(G) est un singleton et E est supposé séparé donc on déduit que $f(G) = f(\mathbb{R})$. f est alors constante.

Exercice 200

Soit $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de parties d'un espace E telle que:

$$\forall \lambda\in\Lambda \ \ A_\lambda \subset \overset{\circ}{A}_{\lambda+1} \ \text{ et } \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = E.$$

Montrer que si les restrictions f_{A_λ} d'une fonction $f: E \to F$ à toute partie A_λ est continue, alors f l'est de même.

Solution

Rappellons tout d'abord que:

$$f^{-1}(\Omega) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}_{A_\lambda}(\Omega), \ \Omega\in F.$$

Si Ω est un ouvert de F, $f^{-1}_{A_\lambda}(\Omega)$ est, par continuité de f_{A_λ}, un ouvert dans A_λ. Il existe donc, pour tout λ de Λ, un ouvert O_λ de E tel que:

$$f^{-1}_{A_\lambda}(\Omega) = A_\lambda \cap O_\lambda.$$

D'où:

$$f^{-1}(\Omega) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap O_\lambda) = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\right) = E \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\right) = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\right)$$

Comme $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ est un ouvert de E, f est alors continue.

Exercice 201

Soient f et g deux fonctions définies de E dans F, F séparé.

1. Montrer que E et le graphe Γ_f de f sont homéomorphes.

2. On définit $L = \{x \in E \,/\, f(x) = g(x)\}$. Montrer que L est fermé.

3. On suppose que $f \equiv g$ sur toute partie partout dense A de E. Montrer alors que $f \equiv g$ sur E.

Solution

1. On considère l'application $h: E \to \Gamma_f$ définie par:

$$h(x) = (x, f(x)).$$

Il est clair que h est bijective. De plus, h est continue, car ses composantes id_E et f le sont. Comme on a:

$$h^{-1} = \pi_E/_{\Gamma_f},$$

il s'en suit que h^{-1} est continue et donc, h est un homéomorphisme.

2. Pour montrer que L est fermé, nous allons procéder de deux manières.

a) On considère l'application $\varphi: E \to F \times F$ définie par:

$$\varphi(x) = (f(x), g(x))$$

et on note Δ la diagonale de $F \times F$. Celle-ci est fermée, car F est séparé. Comme φ est continue et $L = \varphi^{-1}(\Delta)$, on déduit que L est fermé.

b) Montrons que $C_E L$ est ouvert.

Si $x \in C_E L$, alors $f(x) \neq g(x)$. Or F est séparé, donc f(x) et g(x) possèdent deux voisinages disjoints V et W respectivement. La continuité de f et g fait que $f^{-1}(V)$ et $g^{-1}(W)$ sont deux voisinages de x. Il en résulte que $f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)$ est un voisinage de x, inclus dans $C_E L$. $C_E L$ est alors voisinage de chacun de ses points. C'est un ouvert. Par suite, L est fermé.

3. Il suffit de poser $A = L$. Il s'en suit que A est fermé. Par conséquent, f et g coïncident sur $A = \overline{A} = E$.

Exercice 202

On dit qu'une fonction définie d'un espace E dans $(\mathbb{R},|.|)$ est semi-continue supérieurement, si l'image réciproque de tout intervalle de la forme $]-\infty,a[$ est ouverte dans E. De même, on dit que cette fonction est semi-continue inférieurement, si l'image réciproque de tout intervalle de la forme $]b,+\infty[$ est ouverte dans E.

1. Montrer qu'une fonction f: $(E,\tau) \to (\mathbb{R},|.|)$ est continue, si et seulement si, elle est semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement.

2. Si A est une partie non vide d'un espace (E,τ), sa fonction caractéristique est semi-continue supérieurement, si et seulement si, A est fermée; et elle est semi-continue inférieurement si et seulement si A est ouverte.

3. Soit $(f_n)_{1\leq n\leq p}$ une famille d'applications réelles semi-continues inférieurement sur un espace E. Montrer que l'application réelle f définie par $f(x) = \underset{1\leq i\leq p}{\text{Min}}\ f_i(x)$ est aussi semi-continue inférieurement.

Solution

1. $\Rightarrow$

Supposons que f soit continue sur $\mathbb{R}$. $f^{-1}(]-\infty,a[)$ est alors ouvert, pour tout réel a. f est donc semi-continue supérieurement. De même, $f^{-1}(]a,+\infty[)$ est ouvert. f est alors semi-continue inférieure-ment.

$\Leftarrow$

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On sait que:

$$\Omega = \bigcup_{i\in J} I_i ,$$

$(I_i)_{i\in J}$ étant une famille d'intervalles ouverts, donc:

$$f^{-1}(\Omega) = \bigcup_{i\in J} f^{-1}(I_i).$$

Nous distinguons les cas possibles suivants:

$\alpha)\ I_i = I_\alpha =]-\infty,\alpha[\quad \Rightarrow \quad f^{-1}(I_\alpha)$ est ouvert.

$$\beta)\ I_i = I_\beta =]\beta, +\infty[\quad \Rightarrow \quad f^{-1}(I_\beta) \text{ est ouvert.}$$

$$\gamma)\ I_i = I_{\delta,\gamma} =]\delta, \gamma[=]-\infty, \gamma[\cap]\delta, +\infty[\quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(I_{\delta,\gamma}) = f^{-1}\left(]-\infty, \gamma[\right) \cap f^{-1}\left(]\delta, +\infty[\right) \text{ est ouvert.}$$

On conclut finalement que f est continue.

2. Montrons d'abord la première affirmation.

Supposons que f soit semi-continue supérieurement. On a:

$$C_E A = f_A^{-1}\left(]-\infty, 1[\right).$$

C'est un ouvert. Donc, A est fermée.

Inversement, Si A est fermée, son complémentaire $C_E A$ est ouvert. D'où:

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\ f_A^{-1}\left(]-\infty, a[\right) = \begin{cases} \phi & \text{si} \quad a \le 0, \\ C_E A & \text{si} \quad 0 < a \le 1, \\ E & \text{si} \quad a > 1. \end{cases}$$

Dans tous les cas, $f_A^{-1}\left(]-\infty, a[\right)$ est ouvert. Donc, f_A est semi-continue supérieurement.

On suppose maintenant que f_A est semi-continue inférieurement. Comme précédemment, on a:

$$A = f_A^{-1}\left(]0, +\infty[\right).$$

C'est un ouvert.

Réciproquement, si A est ouverte et a un réel donné, on a:

$$f_A^{-1}\left(]a, +\infty[\right) = \begin{cases} \phi & \text{si} \quad a \ge 1, \\ A & \text{si} \quad 0 \le a < 1, \\ E & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$$

ϕ, A et E étant des ouverts, on affirme que $f_A^{-1}\left(]a, +\infty[\right)$ est ouvert quel que soit le réel a. f_A est alors semi-continue inférieurement.

3. f est semi-continue inférieurement car, pour tout réel a on a:

$$f^{-1}\left(]a, +\infty[\right) = \bigcap_{i=1}^{p} f_i^{-1}\left(]a, +\infty[\right).$$

Comme $f_i^{-1}\left(]a, +\infty[\right)$ est ouvert quel que soit i = 1, 2, ..., p, alors $f^{-1}\left(]a, +\infty[\right)$ l'est de même.

4

Compacité

4.1 Généralités

Exercice 203

Soient (E,τ) un espace topologique et $(A_l)_{l\in L}$ une sous-famille de $\mathcal{P}(E)$. On dit que $(A_l)_{l\in L}$ est un **recouvrement** de l'espace E, si elle vérifie:

$$E = \bigcup_{l\in L} A_l \,.$$

On dit que $(A_l)_{l\in L}$ est un recouvrement **ouvert** de l'espace E, si chacun des éléments A_l la composant est ouvert.

Un espace (E,τ) est dit espace de **Lindelöf**[18], si de tout recouvrement ouvert de E, on peut extraire un recouvrement au plus **dénombrable**.

1. Montrer que:
   i) $(\mathbb{R},|.|)$ est de Lindelöf et $(\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ne l'est pas.
   ii) tout espace fini est de Lindelöf.
   iii) tout espace discret dénombrable est de Lindelöf.
2. Soient E un ensemble non dénombrable et a un point de E. On

18. Ernst Leonard Lindelöf est né le 7 mars 1870 à Helsinki et y mort le 4 juin 1946. De père mathématicien, il a travaillé sur l'existence de solutions des équations différentielles, puis il a travaillé sur les fonctions analytiques, en s'intéressant à leur comportement aux voisinages de points singuliers.

pose $E\setminus\{a\} = F$. Montrer que la famille $\sigma = \mathcal{P}(F) \cup \{E\}$ constitue une topologie pour laquelle E est de Lindelöf.

Solution

1. i) $(\mathbb{R}, |.|)$ est de Lindelöf conséquemment à l'exercice 11.

$(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ n'est pas de Lindelöf, car du recouvrement ouvert $(\{x\})_{x \in \mathbb{R}}$ on ne peut extraire aucun sous-recouvrement dénombrable.

ii) C'est clair, car de tout recouvrement ouvert d'un tel espace on peut extraire un sous-recouvrement fini.

iii) Il suffit de remplacer dans (ii) le terme fini par dénombrable.

2. Pour cette topologie, tout recouvrement ouvert de E doit renfermer E, lequel est le seul ouvert contenant a. Il est donc évident qu'on peut en extraire un sous recouvrement dénombrable.

Exercice 204

1. Démontrer que tout espace satisfaisant au second axiome de dénombrabilité est de Lindelöf.

2. Que dire de la réciproque?

Solution

1. Soit $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = \sigma$ une base dénombrable d'un espace E. Soit $(O_l)_{l \in L}$ un recouvrement ouvert de E. Désignons par $N(\sigma)$ l'ensemble de tous les indices $\lambda \in \Lambda$ pour lesquels Ω_λ est inclus dans l'un des éléments du recouvrement. $N(\sigma)$ est au plus dénombrable. Choisissons, pour chaque $n \in N(\sigma)$, un ensemble O_{l_n} du recouvrement tel que $\Omega_n \subset O_{l_n}$. La famille $(O_{l_n})_{n \in \Lambda}$ obtenue par ce procédé constitue un recouvrement dénombrable pour E.

En effet, si y est un élément de E, il existe un ensemble O_l du recouvrement tel que $y \in O_l$. Il en résulte, d'après ce qui précède, qu'il existe un ensemble Ω_p de la base tel que $y \in \Omega_p \subset O_l$; donc:

$$y \in O_{l_p}.$$

2. Elle est généralement fausse. Il existe des espaces de Lindelöf lesquels n'admettent pas de base dénombrable.

Exercice 205

On appelle espace **compact**, tout espace (E,τ) séparé et vérifiant la condition suivante (connue sous l'appellation d'axiome de Borel-Lebesgue):

De tout recouvrement ouvert $(A_l)_{l\in L}$ de E, on peut en extraire un fini. E s'écrit alors $E = \bigcup_{l\in L\subset H} A_l$, H étant une partie finie de L.

1. i) Vérifier que tout espace compact est de Lindelöf.
   ii) Que dire de la réciproque?
2. Montrer que:
   i) $(\mathbb{R},|.|)$ n'est pas compact,
   ii) tout espace fini séparé est compact,
   iii) $(\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ n'est pas compact,
3. Soit E un espace topologique. On pose:
   i) E est discret,
   ii) E est fini,
   iii) E est compact.

Montrer que si E possède deux de ces propriétés, il en possède la troisième.

Solution

1. i) C'est vrai, puisque toute partie finie est dénombrable.
   ii) Elle est fausse comme on le constate (juste après!) à travers $(\mathbb{R},|.|)$.

2. i) $(\mathbb{R},|.|)$ n'est pas compact. Il est séparé mais ne vérifie pas l'axiome de Borel-Lebesgue. Il est clair que la famille des intervalles ouverts $(]-n,n[)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$, duquel on ne peut extraire aucun recouvrement fini.

   ii) Il vérifie trivialement la propriété de Borel-Lebesgue.

   iii) $(\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ n'est pas compact pour la même raison que pour $(\mathbb{R},|.|)$. En effet, la famille des singletons $(\{x\})_{x\in\mathbb{R}}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$ n'admettant aucun sous-recouvrement fini.

   On pourrait aussi objecter que $(\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ n'est pas compact car il n'est pas de Lindelöf.

3. En effet, si E est discret et fini il est compact d'après 2.ii).

S'il est discret et compact il doit être nécessairement fini puisque la famille des singletons, entre autres, forme un recouvrement ouvert.

Enfin, si E est fini et compact il serait fini et séparé, donc discret.

Exercice 206

On dit qu'un espace (E,τ) est compact, s'il est séparé et jouït de la propriété suivante:

De toute famille de fermés $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide. C'est-à-dire:

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \phi \quad\Rightarrow\quad \exists\, H \subset \Lambda / \bigcap_{\lambda\in H} B_\lambda = \phi,\ H \text{ fini.}$$

Montrer que cette définition est équivalente à celle de l'exercice précédent.

Solution

Il suffit de passer aux complémentaires.

Exercice 207

Soit A un sous-ensemble non vide d'un espace (E,τ). On dit que A est compact, si le sous-espace (A,τ_A) l'est.

Montrer qu'un sous-ensemble A d'un espace séparé E est compact si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée:

De toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$ de E satisfaisant à:

$$\bigcap_{i\in I} F_i \subset C_E A$$

on peut en extraire une sous-famille $(F_i)_{i\in J}$ (J finie) telle que:

$$\bigcap_{i\in J} F_i \subset C_E A\ .$$

Solution

Le passage aux complémentaires permet de réecrire la condition précitée comme suit:

$$A \subset \bigcup_{i\in I} C_E F_i \quad\Rightarrow\quad \exists\, J \subset I / A \subset \bigcup_{i\in J} C_E F_i\ , \quad (\text{J finie}).$$

La famille $(C_E F_i)_{i\in I}$ étant ouverte, la compacité de A découle alors de l'exercice 206. (Naturellement, A hérite de E la propriété de sépaation.)

La condition est évidemment nécessaire.

Exercice 208

1. Montrer que :

i) tout ensemble fini d'un espace séparé est compact,

ii) l'intervalle $[a,b]$ n'est pas compact dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

2. Soit $(x_n)_n$ une suite convergente vers un point x dans un espace séparé E. Montrer que le sous-ensemble $A = \{x\} \cup \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est compact.

Solution

1. i) Il est discret et fini, donc compact.

ii) Il n'est pas fini!

2. En effet, A est d'abord séparé. D'autre part, si $(\Omega_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de A, il existe un indice $i_0 \in I$ tel que $x \in \Omega_{i_0}$. Or, d'après la définition de la limite x, son voisinage Ω_{i_0} contient tous les éléments de la suite $(x_n)_n$ sauf, peut être, un nombre fini x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_p}. Ces points sont contenus chacun dans un ouvert Ω_{i_α}, $\alpha = 1, 2, ..., p$. Il en découle donc que

$$A \subset \bigcup_{\alpha=0}^{p} \Omega_{i_\alpha}.$$

Remarque: Il ressort de ses exemples qu'un espace non compact peut admettre des sous-ensembles compacts. Inversement, un espace compact peut admettre des sous-ensembles non compacts.

Exercice 209

Montrer que dans un espace séparé E, la famille des parties compactes est stable par réunion finie et par intersection quelconque.

Solution

Soit $(A_i)_{1\le i\le p}$ une famille finie de parties compactes de E. On pose $A = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$. A est séparé. De plus, si la famille $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est un recouvrement ouvert de A, elle l'est aussi pour chacun des ensembles A_i. Donc:

$$\forall\, i \in \{1, 2, ..., p\}\ \exists\, L_i \subset \Lambda \,/\, A_i \subset \bigcup_{\lambda \in L_i \subset \Lambda} \Omega_\lambda,\ (L_i \text{ fini}).$$

D'où:

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in (\bigcup_{i=1}^{p} L_i)} \Omega_\lambda\,;$$

ce qui achève la première partie.

Nous considérons, pour la seconde partie, une famille quelconque $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles compacts de E. Posons $\bigcap_{i\in I} A_i = A$. Si $(F_j)_{j\in J}$ est une famille de fermés de A telle que $\bigcap_{j\in J} F_j$ soit vide alors cette intersection reste vide dans chacun des compacts A_i. Il existe donc une partie finie J_0 de J telle que $\bigcap_{j\in J_0} F_j = \phi$. D'où le résultat.

Exercice 210

Montrer que toute partie compacte d'un espace séparé (E,τ) est fermée.

Solution

Soit A cette partie. Montrons qu'elle est fermée. Nous allons montrer que $C_E A$ est voisinage de chacun de ses points. Soit x un point de $C_E A$. E étant séparé, on peut alors trouver, pour chaque point y de A deux voisinages ouverts disjoints $V_x(y)$ et W_y de x et y respectivement. (On a désigné le voisinage de x par $V_x(y)$ pour signifier que ce voisinage dépend de y.) La famille $(W_y)_{y\in A}$ constitue un recouvrement ouvert pour le compact A. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $\left(W_{y_i}\right)_{1\leq i\%p}$. On a:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{p} W_{y_i}.$$

Posons:

$$\bigcup_{i=1}^{p} W_{y_i} = \Omega \text{ et } \bigcap_{i=1}^{p} V_x(y_i) = \Omega'.$$

On voit que Ω' est un ouvert ne rencontrant aucun des ensembles W_{y_i}. Par conséquent, Ω' ne rencontre pas A. On vient d'etablir que:

$$x \in \Omega' \subset C_E A.$$

Donc, $C_E A \in \mathcal{V}(x)$. C'est le résultat recherché.

Exercice 211

Montrer qu'un sous-ensemble A d'un espace compact E est compact si, et seulement si, il est fermé.

Solution

La condition est nécessaire d'après l'exercice précédent.

Inversement, soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de A. La famille $\left\{(O_i)_{i\in I}, C_E A\right\}$ forme un recouvrement ouvert de E. Comme E est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$\left\{(O_i)_{i\in J\subset I}, C_E A\right\}$$

pour E (J étant fini). Il en découle que $(O_i)_{i\in J}$ est un sous-recouvrement fini de A, et donc celui-ci est compact.

On peut naturellement mener la preuve autrement. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de A (fermé par hypothèses) telle que

$$\bigcap_{i\in I} F_j = \phi.$$

Il s'en suit que les F_i sont des fermés de E (compact). Donc:

$$\exists\, J \subset I, \text{ J fini } / \bigcap_{i\in J} F_j = \phi;$$

ce qui permet d'affirmer, une fois encore, que A est compact.

Exercice 212

Soient (E,τ) un espace topologique et K et A deux de ses parties telles que $K \subset A$.

Montrer que K est compacte dans E si, et seulement si, elle l'est dans le sous-espace (A,τ_A).

Solution

Supposons que K soit compacte dans E. Si $(V_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de K dans (A,τ_A), on a:

$$\exists\, W_i \in \tau \,/\, V_i = W_i \cap A,\ \ i\in I.$$

Il en ressort que $(W_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de K dans E. Comme K est compacte, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $(W_{i_j})_{1\leq j\leq p}$. Or K est incluse dans A, donc, la famille

$$(W_{i_j}\cap A)_{1\leq j\leq p} = (V_{i_j})_{1\leq j\leq p}$$

constitue un sous-recouvrement fini extrait de $(V_i)_{i\in I}$. Donc, K est compacte dans (A,τ_A).

Inversement, si K est compacte dans (A,τ_A) et $(\Omega_i)_{i\in I}$ est un de ses recouvrements ouverts dans E, on peut écrire:

$$K\subset A \ \Rightarrow\ K\subset \bigcup_{i\in I}(\Omega_i\cap A).$$

Il en résulte que la famille d'ouverts $(\Omega_i\cap A)_{i\in I}$ dans A recouvre la compacte K. Donc, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $(\Omega_{i_j}\cap A)_{1\leq j\leq r}$. On déduit que la famille $(\Omega_{i_j})_{1\leq j\leq r}$ constitue un sous-recouvrement fini extrait de $(\Omega_i)_{i\in I}$. On conclut donc que K est compacte dans E.

Exercice 213

Montrer que tout espace compact est régulier.

Solution

En effet, si A est un fermé d'un espace compact E, il est compact d'après la propriété précédente. Si l'on retourne à la preuve de l'exercice 210, on trouve que celle-ci assure l'existence de deux voisinages ouverts disjoints contenant, l'un A et l'autre le point x $\notin$ A. Cela permet de conclure que E est régulier.

Exercice 214

Montrer que tout espace compact est normal.

Solution

Soient F_1 et F_2 deux ensembles fermés disjoints d'un espace compact E. Pour tout $x \in F_1$ et $y \in F_2$, il existe deux ouverts disjoints $\Omega_x(y)$ et $G_y(x)$ tels que:

$$x \in \Omega_x(y) \text{ et } y \in G_y(x).$$

(Cette notation signifie que $\Omega_x(y)$ est un voisinage de x dépendant de y et $G_y(x)$ est un voisinage de y dépendant de x). F_2 étant compact (c'est un fermé d'un compact), on peut alors, pour tout x fixé dans F_1, recouvrir F_2 d'un nombre fini d'ouverts $G_{y_1}(x), \ldots, G_{y_{n(x)}}(x)$.

Posons:

$$G(x) = \bigcup_{j=1}^{n(x)} G_{y_i}(x) \text{ et } \Omega_x = \bigcap_{j=1}^{n(x)} \Omega_x(y_i).$$

$G(x)$ et Ω_x sont deux ouverts disjoints vérifiant :

$$x \in \Omega_x \text{ et } F_2 \subset G(x).$$

De même, la compacité de F_1 entraîne qu'on peut recouvrir celui-ci par un nombre fini d'ouverts $\Omega_{x_1}, \ldots, \Omega_{x_k}$. Il s'en suit que les deux ouverts $\bigcup_{j=1}^{k} \Omega_{x_j} = \Omega$ et $\bigcap_{j=1}^{k} G(x_j) = G$ sont disjoints contenant, l'un F_1 l'autre F_2.

Exercice 215

Soit E un espace séparé de Lindelöf.
Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:

i) E est compact.

ii) Toute suite infinie $(x_n)_n$ de E admet, au moins, une valeur d'adhérence.

Solution

i) $\Rightarrow$ ii)

Posons: $\overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}, \ldots\}} = F_n$.

un point x_j pour $j > p$. Ceci est impossible, car la définition de a stipule que pour l'entier p+1 il existe un indice i tel que

$$i \geq p+1 \text{ et } x_i \in \Omega_p.$$

C'est le résultat escompté.

Exercice 216

Démontrer que toute partie infinie d'un espace compact E admet au moins un point d'accumulation.

Solution

On utilise le raisonnement par l'absurde. Supposons que A soit un ensemble infini de E n'admettant aucun point d'accumulation. Il en résulte que, pour tout x de E, il existe un voisinage ouvert V_x de x ne rencontrant A qu'au plus en un nombre fini de points. La famille $(V_x)_{x\in E}$ forme un recouvrement ouvert de E. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $\left(V_{x_i}\right)_{1\leq i\leq r}$. On écrit alors:

$$\bigcup_{i=1}^{r} V_{x_i} = E.$$

D'où:

$$A = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{r} V_{x_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{r} \left(A \cap V_{x_i}\right).$$

Il s'en suit que A coïncide avec une réunion finie de parties finies. Elle est donc elle-même finie. Ceci contredit les hypothèses.

Remarque: Ce résultat est dû à Bolzano-Weierstrass

Exercice 217

Démontrer que la famille des sous-ensembles à la fois fermés et ouverts d'un espace compact E est dénombrable.

Solution

Soient $(\Omega_i)_{i\in I}$ une base d'ouverts de E et G un sous-ensemble fermé et ouvert de E. G étant ouvert, on peut écrire:

$$G = \bigcup_{i\in J\subset I} \Omega_i.$$

Comme il est aussi fermé, il est alors compact. Un nombre fini d'ouverts suffit pour le couvrir. On peut donc écrire:

$$G = \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}.$$

Ainsi, à tout ensemble fermé et ouvert G correspond un système fini d'entiers naturels $\sigma(G) = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$. Comme $\sigma(G) \neq \sigma(R)$ pour tout $G \neq R$, la famille des sous-ensembles fermés et ouverts est de cardinal au plus égal à celui des systèmes finis d'entiers naturels; elle est donc dénombrable.

4.2 Compacité et continuité

Exercice 218

1. Soient f une fonction de (E,τ) dans (F,σ) et $A \subset E$. Montrer que si:

i) A est compact,

ii) f est continue,

iii) F est séparé,

alors f(A) est compact dans F.

2. En déduire que la compacité est un invariant topologique.

3. Donner une nouvelle justification de la non compacité de $(\mathbb{R},|.|)$

Solution

1. Soient $(\Omega_k)_{k\in L}$ un recouvrement ouvert de f(A). Il existe une famille d'ouverts $(W_k)_{k\in L}$ de F telle que:

$$\forall\, k\in L \;\; \Omega_k = f(A) \cap W_k.$$

D'où:

$$\forall\, k\in L \;\; f^{-1}(\Omega_k) = A \cap f^{-1}(W_k).$$

f étant continue, $f^{-1}(W_k)$ devient ouvert dans E. Donc, l'ensembl[e] $V_k = A \cap f^{-1}(W_k)$ est un ouvert de A, pour tout indice $k\in L$. [La] famille $(V_k)_{k\in L}$ forme, de toute évidence, un recouvrement de A. [On] peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $(V_k)_{1\leq k\leq r}$. On écrit:

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{r} V_k \;\Rightarrow\; f(A) \subset \bigcup_{k=1}^{r} f(V_k) \subset \bigcup_{k=1}^{r} \Omega_k.$$

On a ainsi réussi à obtenir un recouvrement fini de f(A), extrait du recouvrement initial $(\Omega_k)_{k\in L}$. f(A) est alors compact dans F, séparé.

Remarque: ce résultat est dû à Weierstrass.

2. Il résulte de cette question que tout homéomorphisme conserve la compacité. Celle-ci est donc un invariant topologique.

3. $(\mathbb{R},|.|)$ est homéomorphe à tout intervalle ouvert $]a,b[$, lequel n'est pas compact. Donc $(\mathbb{R},|.|)$ ne peut pas l'être aussi.

4. $(\overline{\mathbb{R}},|.|)$ est homéomorphe à tout intervalle compact $[a,b]$. Il est lui aussi compact.

Exercice 219

Soient E et F deux espaces topologiques séparés. Une fonction continue f de E dans F est dite **propre** si l'image réciproque de tout compact K de F est compacte dans E.

Exhiber un exemple de fonction continue non propre.

Solution

On peut envisager l'identité $id_{\mathbb{R}}$ définie de l'espace discret $(\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ dans l'espace usuel $(\mathbb{R},|.|)$.

Exercice 220

Soient E et F deux espaces topologiques, f une fonction continue de E dans F et $A \subset E$.

1. Donner un exemple où on a $f(\overline{A}) \neq \overline{f(A)}$.

2. On suppose que F est séparé et que $A \subset B \subset E$ avec B compact. Montrer que:

$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)}.$$

Solution

1. En prenant $E =]0,+\infty[$, $F = \mathbb{R}$ munis de la topologie usuelle et $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alors:

$$f\left(\overline{[1,+\infty[}\right) = f([1,+\infty[) =]0,1] \neq \overline{f([1,+\infty[)} = [0,1].$$

2. On sait que (exercice 163):

$$f(A) \subset f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Maintenant, si $A \subset B$ alors $\overline{A}$ est fermé dans le compact B, donc compact. Par suite $f(\overline{A})$ est compact (exercice 218), donc fermé. Or $\overline{f(A)}$ est le plus petit fermé contenant $f(A)$, donc:

$$\overline{f(A)} \subset f(\overline{A}).$$

C'est la seconde inclusion recherchée.

Exercice 221

Montrer que toute fonction réelle définie continue sur un espace compact E est bornée et atteint ses bornes.

Preuve

D'après l'exercice 218, $f(E)$ est compact dans $(\mathbb{R},|.|)$. Il est donc fermé et borné. Posons:

$$M = \underset{x \in E}{\operatorname{Max}} f(x) \text{ et } m = \underset{x \in E}{\operatorname{Inf}} f(x).$$

En utilisant la propriété caractéristique de la borne supérieure, on obtient:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in E \,/\, f(x_0) \leq M < f(x_0) + \varepsilon.$$

D'où

$$M \in \left]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\right[.$$

On en déduit que M est un point d'adhérence pour $f(E)$. Comme celui-ci est fermé, il contient M. Autrement dit, il existe $x_1 \in E$ tel que $M = f(x_1)$.

De même, en utilisant la propriété caractéristique de la borne inférieure, on établit l'existence d'un point $x_2 \in E$ tel que $f(x_2) = m$, ce qui achève l'exercice.

Remarque: ce résultat est connu sous l'appelation de théorème de Weierstrass.

Exercice 222

Montrer que toute fonction continue d'un espace compact E dans un espace séparé F est fermée.

Solution

En effet, Si K est un ensemble fermé de E, il est alors compact. Il s'ensuit que $f(K)$ est compact dans F. Donc, $f(K)$ est fermé. Conclusion: f est une fonction fermée.

Exercice 223

Montrer que:

1. toute bijection continue f d'un espace compact E sur un espace séparé F est un homéomorphisme.

2. si f est une fonction réelle continue strictement positive sur un espace compact E, alors il existe un réel $\alpha > 0$ tel que:

$$f(x) \geq \alpha, \quad \forall\, x \in E.$$

Solution

1. Il suffit de montrer que f^{-1} est continue. Ceci est évident, puisque l'image réciproque d'un fermé $K \subset E$ est l'ensemble $f(K)$, lequel est fermé dans F, d'après l'exercice précédent.

2. La relation demandée découle du fait que $f(E)$ est fermé dans $\mathbb{R}$; et que dans $\mathbb{R}$, la borne inférieure d'un ensemble fermé d'éléments strictement positifs est, elle même, strictement positive.

Exercice 224

Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille finie d'espaces compacts. Démontrer que $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ est compact si, et seulement si, chaque E_i l'est.

Solution

La condition nécessaire est évidente. En effet, si l'espace produit E est compact, il en est de même pour chaque E_i (1,...,p) car la projection $\pi_i : E \to E_i$ est continue.

La condition suffisante nous l'établirons dans le cas d'un produit de deux espaces.

Soient E_1 et E_2 deux espaces compacts et σ un recouvrement ouvert de l'espace produit $E_1 \times E_2$. Il est clair que $E_1 \times E_2$ est séparé, du fait que E_1 et E_2 le sont.

Par ailleurs, pour chaque point $(x,y) \in E_1 \times E_2$, on désigne par $\Omega_{(x,y)}$ l'un des ouverts de σ contenant (x,y). Il existe alors deux ouverts $A^1_{(x,y)}$ de E_1 et $A^2_{(x,y)}$ de E_2, tels que:

$$(x,y)\in A^1_{(x,y)}\times A^2_{(x,y)} \subset \Omega_{(x,y)}.$$

Nous remarquons que pour tout x de E_1, la famille $\left(A^2_{(x,y)}\right)_{y\in E_2}$ constitue un recouvrement ouvert pour l'espace compact E_2. On peut donc en extraire un recouvrement fini $\left(A^2_{(x,y_i)}\right)_{\substack{y_i\in E_2\\ i=1,2,\dots,p}}$. Il s'en suit

que l'ensemble $\bigcap_{i=1}^{p} A^1_{(x,y_i)} = C_x$ est ouvert et contient x. Ainsi, la famille $(C_x)_{x\in E_1}$ est un recouvrement ouvert de l'espace compact E_1. Donc, la sous-famille finie $(C_{x_j})_{1\le j\le r}$ suffit pour recouvrir E_1. De ce qui précède, on déduit que la famille finie $\left(C_{x_j}\times A^2_{(x_j,y_i)}\right)_{1\le i\le p;\,1\le j\le r}$ est un recouvrement fini de $E_1\times E_2$. D'autre part, et par construction, on a :

$$C_{x_j}\times A^2_{(x_j,y_i)} \subset A^1_{(x_j,y_i)}\times A^2_{(x_j,y_i)} \subset \Omega_{(x_j,y_i)}.$$
$$\forall\, i = 1, 2, \dots, p \;;\; \forall\, j = 1, 2, \dots, r$$

On conclut que $\left(\Omega_{(x_j,y_i)}\right)_{1\le i\le p\,;\,1\le j\le r}$ est extrait de σ. Cela met fin à notre recherche.

Remarque: ce résultat est dû à Tychonoff[19].

4.3 Ensembles relativement compacts

Exercice 225

Un sous-ensemble A d'un espace séparé E est dit relativement compact, si son adhérence $\overline{A}$ est compacte.

Montrer que:

19. Andrey Nikolayevich Tichonoff est un mathématicien russe, né le 30 octobre 1906 à Gzhatska (Russie) et mort en 1993. Il a des contributions dans la topologie, l'analyse fonctionnelle et la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles et leurs applications à la physique.

1. toute partie non vide d'un espace compact est relativement compacte,

2. toute partie bornée de $(\mathbb{R},|.|)$ est relativement compacte,

3. toute partie compacte est relativement compacte,

4. toute partie d'un ensemble relativement compact l'est aussi, (la compacité relative est une notion héréditaire).

Solution

1. L'adhérence serait un fermé dans un compact.

2. Elle serait fermée et bornée (caractérisation d'un compact de $(\mathbb{R},|.|)$).

3. Evident, elle coincide avec son adhérence.

4. Son adhérence serait un fermé dans un compact.

Exercice 226

Montrer que dans un espace topologique, la famille des parties relativement compactes est stable par réunion finie et intersection (quelconque).

Solution

Si F_1 et F_2 sont deux parties relativement compactes alors

$$\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F_1} \cup \overline{F_2}$$

est compact.

De même, si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de parties relativement compactes alors la relation

$$\overline{\bigcap_{i \in I} F_1} \subset \overline{F_i}, \ \forall\, i \in I$$

permet de voir que $\overline{\bigcap_{i \in I} F_1}$ est un fermé dans chaque compact $\overline{F_i}$. Donc, elle même compacte.

4.4 Ensembles localement compacts

Exercice 227

On dit qu'un espace E est **localement compact**, s'il est séparé et si, chacun de ses points admet un voisinage compact.

Montrer que
1. tout espace compact est localement compact,
2. $(\mathbb{R},|.|)$ est localement compact,
3. tout espace discret E est localement compact.

Solution

1. Si V est un voisinage d'un point x d'un espace compact son adhérence $\overline{V}$ constiute un voisinage compact de x.

2. En effet, $(\mathbb{R},|.|)$ est séparé et chaque point x admet un voisinage compact: $[x-r, x+r]$ ($r > 0$), par exemple.

3. On sait que E est séparé et que chaque point x admet $\{x\}$ comme voisinage compact .

Exercice 228

Montrer que toute partie fermée d'un espace localement compact est localement compacte.

Solution

Soit A un sous-ensemble fermé d'un espace localement compact E. Tout point x de A admet un voisinage compact V. Il en résulte que $V \cap A$ est fermé dans V. Il est donc compact. De plus, $V \cap A$ est un voisinage de x dans A. Donc, ce dernier est localement compact.

Exercice 229

1. Montrer que pour qu'un sous-ensemble A d'un espace compact E soit localement compact au point x_0, il faut et il suffit qu'il soit localement fermé en ce point (c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que $V \cap A$ soit fermé).

2. Montrer que pour qu'un sous-ensemble A d'un espace compact E soit localement compact au point x_0, il faut et il suffit qu'il soit différence de deux ensembles fermés, ou encore, que l'ensemble $\overline{A} \setminus A$ soit fermé.

Solution

Admettons, en effet, que A soit localement compact au point p. Il existe donc un voisinage compact V de x_0 dans A. En désignant par I l'intérieur de V dans A, les ensembles I et $A \setminus \overline{I}$ sont disjoints. Il existe par conséquent un ensemble ouvert Ω dans E tel que

$$I \subset \Omega \text{ et } \overline{\Omega} \cap A \subset \overline{I}.$$

L'ensemble V étant compact, donc fermé, il vient

$$\overline{I} \subset V \subset A.$$

D'où

$$\overline{I} = \overline{\Omega} \cap A.$$

L'ensemble $\overline{\Omega}$ est donc le voisinage demandé de x_0.

Réciproquement, si V est un voisinage de x_0 tel que $V \cap A$ soit fermé, $V \cap A$ est un voisinage compact de x_0 dans A.

Exercice 230

1. Montrer que dans un espace localement compact E, tout point admet un système fondamental de voisinages compacts.
2. En déduire que tout espace localement compact est régulier.

Solution

1. On veut trouver, pour chaque point x de E et chaque voisinage W de x, un voisinage compact F tel que $F \subset W$. Sans restreindre de généralité, on peut prendre W ouvert (c'est loisible, puisque tout point admet un système fondamental de voisinages ouverts).

x admet, par hypothèses, un voisinage compact que l'on désigne par V. Posons:

$$V \cap C_E \Omega = K.$$

K est un fermé du compact V. Il est alors, lui même, compact. Comme $x \notin K$, il existe (voir l'exercice 210) deux ouverts U et W tels que:

$$\begin{cases} x \in U, & (1) \\ K \subset W, & (2) \\ U \cap W = \phi. & (3) \end{cases}$$

L'ouvert U peut être pris inclus dans V. La relation (3) implique que

$$U \subset C_E W.$$

D'où

$$U \subset V \cap C_E W.$$

Or $V \cap C_E W$ est fermé, donc:

$$\overline{U} \subset V \cap C_E W.$$

D'autre part, de (2) on déduit que:

$$C_E W \subset C_E K = C_E V \cup \Omega.$$

Finalement, on a:

$$\overline{U} \subset V \cap (C_E V \cup \Omega) = V \cap \Omega.$$

Il en découle que $\overline{U}$ est un voisinage fermé de x, inclus dans le compact V. Donc $\overline{U}$ est compact; et comme $\overline{U} \subset \Omega$, la première partie de l'exercice se trouve démontrée en prenant $F = \overline{U}$.

2. Conséquence immédiate de (1).

Exercice 231

Montrer que, dans un espace compact (E,τ), toute suite décroissante de fermés non vides, est d'intersection non vide.

Solution

Soit $(K_n)_n$ une suite telle que décrite. Supposons par l'absurde que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \phi$. Il en résulte aussitôt que:

$$C_E\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_E K_n = E.$$

Ainsi, la famille d'ouverts $(C_E K_n)_n$ recouvre le compact E. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $(C_E K_{n_i})_{1\leq i\leq p}$. C'est-à-dire :

$$\bigcup_{i=1}^{p} C_E K_{n_i} = E.$$

D'où:

$$\bigcap_{i=1}^{p} K_{n_i} = \phi.$$

Mais notre suite est décroissante, donc:

$$\bigcap_{i=1}^{p} K_{n_i} = K_{\max\limits_{1\leq i\leq p} n_i} \neq \phi.$$

C'est la contradiction recherchée.

Remarques:

1. On peut dire, plus directement, que si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \phi$, E étant compact, on peut extraire une sous-suite finie $(K_{n_i})_{i=1,2,\ldots,p}$ telle que

$$\bigcap_{i=1}^{p} K_{n_i} = K_{\max\limits_{1\leq i\leq p} n_i} \neq \phi.$$

Absurde.

2. Ce résultat est connu sous l'appellation de théorème de Cantor.

Exercice 232

1. Montrer que tout espace localement compact est de Baire.
2. En déduire que tout espace compact est de Baire.

Solution

1. Soit E un espace localement compact. Il est séparé. Par ailleurs, supposons que $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite d'ouverts partout denses de E et montrons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \Omega$ est partout dense. Pour cela, il suffit de montrer que tout ouvert $O \neq \phi$ de E rencontre Ω.

On a de prime abord:

$$O \cap \Omega_0 \neq \phi, \text{ (car } \overline{\Omega_0} = E).$$

Pour tout $x \in (O \cap \Omega_0)$ il existe un voisinage ouvert V_0 de x tel que

$$V_0 \subset O \cap \Omega_0.$$

D'après l'exercice 230, x admet un système fondamental de voisinages compacts. Il existe donc un compact $W_0 \in \mathcal{V}(x)$ tel que:

$$W_0 \subset V_0 \subset O \cap \Omega_0. \tag{1}$$

Pour la même raison précitée, on a:

$$\overset{\circ}{W}_0 \cap \Omega_1 \neq \phi.$$

Donc, pour tout $x \in \overset{\circ}{W}_0 \cap \Omega_1$, il existe un voisinage ouvert V_1 de x tel que:

$$V_1 \subset \overset{\circ}{W}_0 \cap \Omega_1 .$$

De même, x jouït d'un voisinage compact W_1 vérifiant:

$$W_1 \subset V_1 \subset \overset{\circ}{W}_0 \cap \Omega_1 .$$

Ainsi, on construit, de proche en proche, une suite décroissante de compacts (W_n) telle que:

$$W_n \subset \Omega_n , \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où :

$$\bigcap_{n\in \mathbb{N}} W_n \subset \bigcap_{n\in \mathbb{N}} \Omega_n = \Omega.$$

La relation (1) permet d'affirmer que

$$\bigcap_{n\in \mathbb{N}} W_n \subset O.$$

Il en résulte que

$$\bigcap_{n\in \mathbb{N}} W_n \subset O \cap \Omega.$$

Il suffit, pour achever la démonstration, d'avoir $\bigcap_{n\in \mathbb{N}} W_n \neq \phi$. C'est assuré par l'exercice 231 ci-dessus.

Exercice 233

On dit qu'un sous-ensemble d'un espace topologique est localement compact, si le sous-espace que constitue ce sous-ensemble, muni de la topologie induite, l'est.

Montrer que dans un espace localement compact, les ensembles suivants sont localement compacts:

1. les parties fermées,
2. les parties ouvertes,
3. les parties formées d'intersections d'ouverts et de fermés.

Solution

1. Si F est un ensemble fermé d'un espace localement compact E, alors pour tout x de F, il existe un voisinage compact V de x dans E. Cela entraîne, de toute évidence, que V∩F est un voisinage de x

dans F.

2. Si Ω est un ouvert de E, il est voisinage de chacun de ses points. Comme E est localement compact, Ω contient un voisinage compact de x. Ω est alors localement compact.

3. Enfin, il apparaît clairement que tout ensemble de la forme $\Omega \cap F$, où Ω est ouvert et F fermé dans un ensemble localement compact, est localement compact. En effet, il suffit de remarquer, par exemple, que $\Omega \cap F$ est fermé dans le sous-espace localement compact Ω et de conclure avec (1).

4.5 Compactification

Exercice 234

On appelle **compactifié** d'un espace E, tout espace compact $\widehat{E}$ dont un sous-ensemble partout dense est homéomorphe à E.

Le couple $(\widehat{E}, f)$, formé de l'espace compact $\widehat{E}$ et de l'homéomorphisme f de E sur un sous-ensemble partout dense de $\widehat{E}$, s'appelle **compactification** de E.

Soient (E,τ) un espace localement compact et α un point n'appartenant pas à E.

1. Démontrer qu'il existe un espace compact $\widehat{E}$ tel que E soit homéomorphe à $C_{\widehat{E}}\{\alpha\}$.

Le point α s'appelle **point à l'infini**. $\widehat{E}$ est dit **compactifié d'Alexandroff**[20] de E.

20. Aleksandr Sergeevich Alexsandroff, mathématicien Russe, est né le 7 mai 1896 à Bogorodsk (Russie) et mort le 16 novembre 1982 à Moscow. Il a travaillé sur divers domaines notamment, les fonctions d'une variable réelle, la topologie et la théorie de Galois. Les notions d'espace compact et d'espace localement compact sont dûes à lui et Urysohn.

2. Montrer que si $\widehat{E_1}$ et $\widehat{E_2}$ sont deux compactifiés de E, il existe un homéomorphisme liant $\widehat{E_1}$ et $\widehat{E_2}$ en échangeant leur point à l'infini.

Solution

1. Posons:

$$\hat{E} = E \cup \{\alpha\}.$$

Nous allons munir l'ensemble $\hat{E}$ d'une famille $\hat{\tau} \subset \mathcal{P}(\hat{E})$ telle que $\hat{\tau} = \tau \cup \tau'$, où τ' est la famille constituée de toute partie de $\hat{E}$ ayant un complémentaire compact dans E.

Notre problème consiste à montrer les points suivants:

i)) $(\hat{E}, \hat{\tau})$ est un espace topologique pour lequel (E,τ) est un sous-espace.

ii) $\hat{\tau}$ est séparée $\Leftrightarrow$ (E,τ) est localement compact.

iii) $(\hat{E}, \hat{\tau})$ est compact.

vi) $\overline{E} = \hat{E}$.

v) $\hat{E}$ est unique à un homéomorphisme près.

i) a) On a $\phi \in \tau$, donc $\phi \in \hat{\tau}$. De même, $\hat{E} \in \hat{\tau}$ car $\hat{E} = C_{\hat{E}}\phi$ et ϕ est un compact de E.

b) Montrons que $\hat{\tau}$ est stable par réunion. Soit $(\Omega_l)_{l \in L}$ une sous-famille de $\hat{\tau}$. Nous distinguons trois cas:

i) si $\Omega_l \in \tau$ pour tout $l \in L$ alors $\bigcup_{l \in L} \Omega_l \in \tau \subset \hat{\tau}$.

ii) si $\Omega_l \in \tau'$ pour tout $l \in L$ alors:

$$\bigcup_{l\in L} \Omega_l = \bigcup_{l\in L} \left(C_{\hat{E}} K_l\right) = C_{\hat{E}}\left(\bigcap_{l\in L} K_l\right) \in \hat{\tau};$$

K_l étant, pour chaque $l\in L$, un compact de E.

iii) Si la sous-famille $(\Omega_l)_{l\in L}$ est formée des éléments de τ et d'autres de τ', on pose $V = \bigcup\limits_{\Omega_l\in\tau} \Omega_l$ et $W = \bigcup\limits_{\Omega_{l'}\in\tau'} \Omega_{l'}$. Examinons $V\cup W$. On a $W = C_{\hat{E}} H$, H étant un compact de E. Donc:

$$\bigcup_{l\in L} \Omega_l = V\cup W = V\cup C_{\hat{E}} H = C_{\hat{E}}(C_{\hat{E}} V\cap H) = C_{\hat{E}}(C_E V\cap H).$$

Or $C_E V \cap H$ est fermé dans le compact H, il est donc compact. Il s'en suit que $\bigcup\limits_{l\in L} \Omega_l \in \hat{\tau}$.

Conclusion: $\hat{\tau}$ vérifie le second axiome O_2 de Hausdorff.

c) $\hat{\tau}$ est stable par intersection finie. En effet, soient A et B deux éléments de $\hat{\tau}$. On distingue, comme dans (b), trois éventualités:

i) $A, B\in\tau \Rightarrow A\cap B\in\tau\subset\hat{\tau}$.

ii) Si $A, B\in\tau'$ alors $A = C_{\hat{E}} S$ et $B = C_{\hat{E}} T$ où S et T sont deux compacts de E. Il vient:

$$A\cap B = C_{\hat{E}} S\cap C_{\hat{E}} T = C_{\hat{E}}(S\cup T)\in\tau\subset\hat{\tau},$$

car $S\cup T$ est compact dans E.

iii) Si $A\in\tau'$ et $B\in\tau$, il existe un compact K de E tel que $A = C_{\hat{E}} K$. D'où:

$$A \cap B = C_{\hat{E}} K \cap B = C_E K \cap B \in \tau \subset \hat{\tau}.$$

Ainsi, $\hat{\tau}$ satisfait aux trois axiomes définissant une topologie. $(\hat{E}, \hat{\tau})$ est un espace topologique admettant clairement (E,τ) comme sous-espace topologique.

2. Soit x un point de E. Il existe un voisinage W de x et un voisinage $C_{\hat{E}} K$ de α tel que $C_{\hat{E}} K \cap W = \phi$, K étant un compact de E. On a:

$$\phi = C_{\hat{E}} K \cap W = C_E K \cap W.$$

D'où $W \subset K$. Donc, K est un voisinage de x. Ainsi, tout point de E admet un voisinage compact. Si l'on ajoute que E est séparé du fait que $\hat{E}$ l'est, on en déduit que E est localement compact.

Inversement, il suffit de trouver deux voisinages disjoints pour α et un point quelconque x de E. E étant localement compact, x admet un voisinage compact K. $C_{\hat{E}} K$ est alors un voisinage de α, ne rencontrant pas K. On conclut donc que (E,τ) est séparé.

Arrêtons-nous un peu sur ce point pour remarquer que la condition " E localement compact " n'est exigée que pour assurer la séparation de $\hat{E}$, condition nécessaire pour sa compacité.

3. Montrons que $(\hat{E}, \hat{\tau})$ est compact.

$\hat{E}$ est séparé car E est localement compact. D'autre part, soit $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un recouvrement ouvert de $\hat{E}$. Il existe, par construction de $\hat{E}$, un indice $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $\Omega_{\lambda_0} = C_{\hat{E}} K$, où K est un compact de E. Ω_{λ_0} recouvre le point α. Il en résulte que la sous-famille $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda-\{\lambda_0\}}$ est un recouvrement ouvert du compact K. On peut alors en extraire un recouvrement fini $\left(\Omega_{\lambda_i}\right)_{1\le i\le r}$. Il s'en suit que la sous-famille $\left(\Omega_{\lambda_i}\right)_{0\leq i\leq r}$ est un recouvrement fini de $\hat{E}$. Donc, $\hat{E}$ est compact.

4. Soit Ω un ouvert non vide de $\hat{E}$. Deux possibilités se présentent:

i) $\Omega \subset E$, alors $\Omega \cap E \neq \phi$.

ii) $\Omega \not\subset E$, alors il existe un compact K de E tel que $\Omega = C_{\hat{E}} K$. D'où:

$$C_{\hat{E}} K \cap E = C_E K \cap E = C_E K \neq \phi.$$

Dans les deux cas (ils sont les seuls) on trouve que chaque ouvert de $\hat{E}$ rencontre E. Ceci entraîne que E est partout dense dans $\hat{E}$.

5. Supposons que E ne soit pas compact et que (Y,f) et (Z,g) soient deux compactifiés de E. Soient β et γ les deux points à l'infini de Y et Z respectivement.

L'application φ définie de Y dans Z par:

$$\begin{cases} \varphi(y) = (g \circ f^{-1})(y)\ ; & \beta \neq y, \\ \varphi(\beta) = \gamma, \end{cases}$$

résout notre problème. En effet, φ est bijective continue en tout point $y \neq \beta$. Considérons, en vue de montrer sa continuité en β, un voisinage V de γ dans Z. Le complémentaire de V est compact dans $Z - \{\gamma\}$. Désignons ce complémentaire par K. On déduit que

$$\varphi^{-1}(K) = (f \circ g^{-1})\ (K)$$

est compact dans $Y - \{\beta\}$ (image d'un compact par une fonction continue). Il s'en suit que $\varphi^{-1}(V)$ est un voisinage de β.

Conclusion:

φ est un homéomorphisme de Y sur Z, échangeant les points à l'infini.

Ouf !

Exercice 235

Montrer que $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$ et $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ constituent deux compactifiés de $(\mathbb{R},|.|)$.

Solution

On sait que $(\mathbb{R},|.|)$ n'est pas compact. Par contre, il est localement compact. Il admet donc des compactifiés.

1. La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$ en est un.
En effet, Il est évident que:

i) $\overline{\mathbb{R}}$ est séparé,

ii) $\mathbb{R}$ est partout dense dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Montrons que $\overline{\mathbb{R}}$ est compact. Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$. Il existe (Ω_{i_1}) et (Ω_{i_2}) tels que:

$$\Omega_{i_1} = [-\infty,a[\text{ et } \Omega_{i_2} =]b,+\infty]; \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

Il en résulte que la famille $(\Omega_i)_{i\in I-\{i_1,i_2\}}$ forme un recouvrement ouvert pour l'intervalle compact $[a,b]$. On peut donc en extraire un recouvrement fini $(\Omega_{i_j})_{3\leq j\leq p}$. La famille finie $(\Omega_{i_j})_{1\leq j\leq p}$ constitue un recouvrement fini de $\overline{\mathbb{R}}$. Celui-ci est donc compact.

2. $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en est un autre. L'étude est similaire à la précédente. Suivons-la pas à pas.

Tout d'abord, munissons $\widetilde{\mathbb{R}}$ de la topologie $\tilde{\tau} = \tau \cup \tau'$ où :

τ est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$,

τ' est la famille de toute partie de $\widetilde{\mathbb{R}}$ ayant pour complémentaire un intervalle fermé centré en zéro (de $\mathbb{R}$).

i) $\widetilde{\mathbb{R}}$ est séparé,

En éffet, si x et y sont deux points distincts de $\widetilde{\mathbb{R}}$, deux éventualités se présentent:

si x et y sont dans $\mathbb{R}$ ils jouïssent de deux voisinages disjoints car $\mathbb{R}$ est séparée.

si $x\in\mathbb{R}$ et $y = \infty$ alors pour tout voisinage $]x-r, x+r[$, $r > 0$, de x le sous-ensemble

$$]-\infty, -\mathrm{Max}\{|x-r|, |x+r|\}[\cup]\mathrm{Max}\{|x-r|, |x+r|\},+\infty[\cup \{\infty\}$$

est un voisinage de y ne rencontrant pas celui de x.

ii) $\mathbb{R}$ est partout dense dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, puisque tous les ouverts de $\widetilde{\mathbb{R}}$ rencontrent $\mathbb{R}$.

iii) Montrons que $\widetilde{\mathbb{R}}$ est compact. Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $\widetilde{\mathbb{R}}$. Il existe un élément Ω_{i_1} de la forme:

$$\Omega_{i_1} =]-\infty, -\mathrm{Max}\{|a|, |b|\}[\cup]\mathrm{Max}\{|a|, |b|\}, +\infty[\cup \{\infty\}, \quad a,b\in\mathbb{R}.$$

Il en résulte que la famille $(\Omega_i)_{i\in I-\{i_1\}}$ forme un recouvrement ouvert pour l'intervalle compact $[a,b]$. On peut donc en extraire un recouvrement fini $(\Omega_{i_j})_{2\leq j\leq p}$. La famille finie $(\Omega_{i_j})_{1\leq j\leq p}$ constitue un recouvrement fini de $\widetilde{\mathbb{R}}$. Celui-ci est donc compact.

4.6 Quelques problèmes de plus

Exercice 236

Soient E un espace séparé et $(K_n)_n$ une suite de parties compactes non vides de E.

i) Montrer que:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \phi.$$

En déduire que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est compacte .

ii) Montrer que si Ω est un ouvert contenant K, alors il existe un indice n_0 tel que:

$$K_n \subset \Omega,\ \forall\, n \geq n_0.$$

Solution

i) Supposons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ soit vide. On déduit:

$$C_E\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_E K_n = E.$$

Il en découle que la famille $\left(C_E K_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue un recouvrement ouvert de E. Naturellement, cette famille recouvre chaque partie compacte K_p $(p\in\mathbb{N})$ de E. Par conséquent, on peut en extraire un recouvrement fini $\left(C_E K_n\right)_{n\in I\subset\mathbb{N}}$ de K_p, I étant une partie finie de $\mathbb{N}$ ne contenant pas p. Ainsi:

$$K_p \subset \bigcup_{n\in I} C_E K_n.$$

D'où:

$$\bigcap_{n\in I} K_n \subset C_E K_p \tag{*}$$

Or:

$$\bigcap_{n\in I} K_n = K_{\mathrm{Max}\, I} = K_{m_0},$$

avec $m_0 = \mathrm{Max}\, I$; on est amené donc à distinguer les deux cas suivants:

a) $p \geq m_0$.

On déduit, en vertu de cette condition, que K_p est incluse dans K_{m_0}. Ceci est en contradiction avec la relation (*) ci-dessus.

b) $p < m_0$.

Cette condition conduit à l'inclusion de K_{m_0} dans K_p. C'est encore en contradiction avec (*). On affirme finalement que:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \phi.$$

Par ailleurs, $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est fermé dans chaque compact K_n. Il est par conséquent compact.

ii) Soit Ω un ouvert contenant $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Supposons que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ et $K_n \not\subset \Omega$. Il en découle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un élément x_n de K_n appartenant au fermé $C_E\Omega$. Comme la famille $(K_n)_n$ est décroissante, il s'en suit que la suite $(x_n)_n$ est incluse dans la partie compacte K_0. Elle admet alors une valeur d'adhérence appartenant à:

$$\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \subset \Omega. \qquad (**)$$

Or la suite $(x_n)_n$ est aussi incluse dans $C_E\Omega$, donc sa valeur d'adhérence appartient au fermé $C_E\Omega$. Ceci est en contradiction avec (**). D'où la conclusion voulue.

Exercice 237

Soit E un espace compact dont seuls E et ϕ sont à la fois ouverts et fermés. Δ désigne la diagonale de E^2.

1. Montrer que Δ est compacte.
3. Montrer que E est infini.
2. Montrer qu'il existe un sous-ensemble dénombrable A de E^2 tel que:

$$A\cap\Delta = \phi \text{ et } \overline{A}\cap\Delta \neq \phi.$$

Solution

1. La compacité de E entraîne celle de E^2 (exercice 224). Δ est alors un fermé d'un compact. Elle est par conséquent, elle même, compacte.

2. S'il était fini il serait discret et contredirait l'hypothèse faite sur E.

3. On peut affirmer que:

$$\overline{C_{E^2}\Delta} \cap \Delta \neq \phi,$$

sinon on aurait

$$\overline{C_{E^2}\Delta} \subset C_{E^2}\Delta$$

ce qui entraînerait que Δ est la fois ouverte et fermée.

Soit y un élément de $\overline{C_{E^2}\Delta} \cap \Delta$. Il existe une suite (x_n) dans l'ouvert $C_{E^2}\Delta$, laquelle converge vers y. L'ensemble

$$A = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$$

convient.

Exercice 238

Soit E un espace séparé. Montrer que si A et B sont deux parties compactes disjointes de E, il existe deux ouverts disjoints Ω_1 et Ω_2 vérifiant:

$$A \subset \Omega_1 \text{ et } B \subset \Omega_2.$$

Solution

Analogue à celle donnée dans l'exercice 214.

Exercice 239

Soient E un espace compact et f: E $\to$ E une application injective continue.

1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. Montrer que:

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

2. Montrer qu'il existe un fermé non vide A de E tel que f(A) = A.

Solution

1. Soit y un élément de $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$. Il existe un point x dans $\bigcap_{i\in I} A_i$ tel que y = f(x). Il en ressort que f(x) est dans chaque $f(A_i)$, $i \in I$. D'où:

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

Inversement, si y est dans $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$, il existe, dans chaque A_i, un élément x_i tel que:

$$y = f(x_i),\ i\in I.$$

Comme f est injective les éléments x_i coïncident. Notons z cet élément commun à tous les A_i. On écrit alors:

$$\exists\, z\in \bigcap_{i\in I} A_i / y = f(z).$$

Donc, $y\in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$. Par suite:

$$\bigcap_{i\in I} f(A_i) \subset f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$

2. Si f(E) = E, E résoud notre problème. Si f(E) ≠ E, on pose:

$$\begin{cases} B_0 = E, \\ B_{n+1} = f(B_n) = f\circ f\circ \dots \circ f = f^{n+1}(B_0),\ n\in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Le sous-ensemble $A = \bigcap_{n\in \mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in \mathbb{N}} f^n(E)$ convient. En effet, A étant l'intersection d'une suite décroissante de compacts non vides est lui-même un compact non vide (exercice 236). De plus, f étant injective, on a:

$$f(A) = f\left(\bigcap_{n\in \mathbb{N}} B_n\right) = \bigcap_{n\in \mathbb{N}} f(B_n) = A.$$

Exercice 240

1. Soient E et F deux espaces, F séparé, et f: E → F une fonction continue. Soit Γ_f le graphe de f.

Montrer que la restriction de la projection π_E à Γ_f est un homéomorphisme de Γ_f sur E.

2. Montrer que si E satisfait au premier axiome de dénombrabilité, F compact et Γ_f fermé dans E×F, alors f est continue sur E.

Solution

1. Cette restriction π_E/Γ_f est définie par:

$$(x,f(x)) \to x.$$

Elle est bijective continue. Sa réciproque est donnée par:

$$x \to (id_E(x),\ f(x)).$$

Elle est continue car id_E et f le sont. Ainsi, on tient notre homéomorphisme.

2. Soient x_0 un point de E et (x_n) une suite convergeant vers x_0. De la suite $(f(x_n))$, on peut, conformément à la compacité de F, extraire une sous-suite $\left(f\left(x_{n_k}\right)\right)$ convergeant vers un point y_0. Il en ressort que la suite $\left(x_{n_k}, f\left(x_{n_k}\right)\right)$ de Γ_f converge vers (x_0, y_0). Or Γ_f est fermé, donc il contient la limite (x_0, y_0). Autrement dit, on a $y_0 = f(x_0)$. Ainsi, f est séquentiellement continue, donc continue.

Exercice 241

1. Soit (E,τ) un espace localement compact. Montrer que l'intersection de deux sous-ensembles localement compacts est localement compacte.

2. Donner un exemple, dans $(\mathbb{R},|.|)$, d'une réunion de deux ensembles localement compacts laquelle n'est pas compacte.

Solution

1. Soit x un point commun à deux sous-ensembles localement compacts A et B. Il existe, conformément à la compacié locale de A et B, deux voisinages compacts V_A et V_B de x relativement à A et B respectivement. On écrit par définition:

$$\exists\, R \in \tau \,/\, x \in R \cap A \subset V_A \subset A,$$

$$\exists\, S \in \tau \,/\, x \in S \cap B \subset V_B \subset B.$$

Par ailleurs, x jouït, par hypothèses, d'un voisinage compact V dans E. Donc,

Il vient $$\exists\, \Omega \in \tau \,/\, x \in \Omega \subset V.$$

$$x \in \Omega \cap (R \cap S) \cap (A \cap B) \subset V \cap V_B \cap V_A \subset A \cap B.$$

On déduit que $V \cap V_B \cap V_A$ est un voisinage de x dans $A \cap B$. Comme il est compact (intersection de compacts) on conclut que $A \cap B$ est localement compact.

2. Il suffit de considérer deux intervalles ouverts. Ils sont localement compacts et leur réunion est un ouvert, donc non compacte.

Exercice 242

Soit K une partie compacte d'un espace localement compact E. Montrer que si Ω est un ouvert tel que $K \subset \Omega$, alors il existe un sous-ensemble ouvert et relativement compact Ω' tel que

$$K \subset \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega.$$

Solution

Ω est un voisinage de touit point x de K, car Ω est supposé ouvert contenant K. E étant localement compact, il existe alors un voisinage compact W_x de $x \in K$ tel que:

$$W_x \subset \Omega.$$

Il est clair que la famille $\left(\overset{\circ}{W}_x\right)_{x \in K}$ constitue un recouvrement ouvert du compact K. On peut alors en extraire un recouvrement fini $\left(\overset{\circ}{W}_{x_i}\right)_{1 \leq i \leq n}$. En posant:

$$\Omega' = \bigcup_{i=1}^{n} \overset{\circ}{W}_{x_i},$$

on trouve:

$$K \subset \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i} \subset \Omega.$$

Ω' convient, car $\overline{\Omega'}$ est fermé dans le compact $\bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}$, ce qui rend $\overline{\Omega'}$ compact et Ω' relativement compact et achève la preuve.

Exercice 243

Soit K une partie compacte d'un espace localement compact E. Soit F une partie fermée de E ne rencontrant pas K. Montrer l'existence de deux ouverts disjoints U et V tels que:

$$F \subset V \text{ et } K \subset U.$$

Solution

Pour tout $x \in F$ et $y \in K$, il existe deux ouverts disjoints $\Omega_x(y)$ et $G_y(x)$ tels que:

$$x \in \Omega_x(y) \text{ et } y \in G_y(x).$$

(Cette notation signifie que $\Omega_x(y)$ est un voisinage de x dépendant de y et $G_y(x)$ est un voisinage de y dépendant de x). K étant compact, on peut alors, pour tout x fixé dans F, recouvrir K d'un nombre fini d'ouverts $G_{y_1}(x), \ldots, G_{y_{n(x)}}(x)$. Posons:

$$G(x) = \bigcup_{j=1}^{n(x)} G_{y_i}(x) \text{ et } \Omega_x = \bigcap_{j=1}^{n(x)} \Omega_x(y_i).$$

$G(x)$ et Ω_x sont deux ouverts disjoints vérifiant :

$$x \in \Omega_x \text{ et } K \subset G(x).$$

Par ailleurs, F est localement compacte, puisque fermée dans E. On peut recouvrir celui-ci par un nombre fini d'ouverts $\Omega_{x_1}, \ldots, \Omega_{x_k}$. Il s'en suit que les deux ouverts

$$\bigcup_{j=1}^{k} \Omega_{x_j} = \Omega \text{ et } \bigcap_{j=1}^{k} G(x_j) = G$$

sont disjoints contenant, l'un K l'autre F.

5

Connexité

5.1 Espaces connexes

Exercice 244

1. On dit qu'un espace topologique (E,τ) **n'est pas connexe**, si l'on peut trouver deux sous-ensembles ouverts disjoints non vides tels que leur réunion coïncide avec E.

Aurement dit, un espace (E,τ) est **connexe** s'il n'admet aucune partition par deux ouverts non vides. Plus clairement, on a:

$$(*) \qquad \text{E n'est pas connexe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\ A,B\in \tau \text{ tels que:} \\ A\cup B = E, \\ A\cap B = \phi, \\ A \neq \phi \text{ et } B \neq \phi. \end{cases}$$

De façon équivalente, on écrit:

2. Un espace (E,τ) est **connexe**, si pour toute partition de E par deux ouverts Ω_1 et Ω_2 on a ou $\Omega_1 = \phi$ ou $\Omega_2 = \phi$.

Montrer que les définitions (1) et (2) sont équivalentes.

Solution

Il suffit de rappeler que si deux propositions mathématiques sont équivalentes leurs négations le sont de même.

Exercice 245

1 . Soient $E = \{1,2,3,4\}$ et $\tau = \{\phi, E, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$.

Vérifier que (E,τ) est connexe.

2. Montrer que tout espace discret E (non réduit à un seul élément) n'est pas connexe.

3. Montrer que tout espace grossier est connexe.

4. Montrer qu'un espace E muni de la topologie cofinie est connexe.

5. Soit a un élément d'un ensemble E. On considère la famille $\mathcal{F}$ formée de toutes les parties de E contenant a. On munit E de la topologie $\sigma = \mathcal{F} \cup \{\phi\}$. Montrer que (E,σ) est connexe.

Solution

1. C'est vrai, car aucun couple d'ouverts de E ne partitionne E.

2. En effet, pour tout a de E on a:

$$E = \{a\} \cup C_E\{a\},$$

$$\phi = \{a\} \cap C_E\{a\}.$$

($\{a\}$ et $C_E\{a\}$ étant tous deux ouverts dans E.)

3. Il n'a qu'un seul ouvert non vide: E lui-même.

4. En effet, s'il ne l'était pas, on trouverait deux ouverts non vides A et B de E de sorte que:

$$A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \phi.$$

Il en découlerait que $A \subset C_E B$. Or ceci est impossible puisque A est infini et $C_E B$ fini.

5. (E,σ) est connexe car tous ses ouverts non vides contiennent a.

Exercice 246

Soit (E,τ) un espace topologique. Montrer que les six assertions suivantes sont équivalentes:

1. E est connexe

2. E n'admet pas de partition par deux fermés non vides.

3. E et ϕ sont les seules parties de E, à la fois fermées et ouvertes.

4. Toute partie propre de E (distincte de E et de ϕ) admet une frontière non vide.

5. Il n'existe pas de fonction surjective continue de E dans un espace discret F ayant deux éléments.

6. Toute fonction continue de E dans F (F défini comme dans (5))

est constante.

Solution

$1 \Rightarrow 2$

Supposons que E admette une partition par deux fermés non vides A et B. On écrit alors:

$$A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \phi.$$

Par passage aux complémentaires, on obtient:

$$\begin{cases} \phi = C_E A \cap C_E B, \\ E = C_E A \cup C_E B. \end{cases}$$

Il s'en suit que E admet une partition par deux ouverts non vides $C_E A$ et $C_E B$. C'est absurde, car E est connexe. D'où (2).

$2 \Rightarrow 3$

Supposons que A soit une partie propre ouverte et fermée de E. Il en résulte que A et $C_E A$ sont deux fermés disjoints non vides de E, tels que $C_E A \cup A = E$. C'est en contradiction avec (2).

$3 \Rightarrow 4$

Supposons que A soit une partie de E vérifiant:

$$A \neq \phi,\ A \neq E \text{ et } \mathcal{F}_r A = \phi.$$

Cela entraîne que A est à la fois ouverte et fermée et mène à une contradiction avec (3).

$4 \Rightarrow 5$

Supposons qu'il existe une fonction continue surjective de E dans l'espace discret $F = \{a,b\}$. L'ensemble $\{a\}$ est alors ouvert et fermé dans F. Par conséquent, $f^{-1}(\{a\})$ est, lui aussi, ouvert et fermé dans E. En plus, $f^{-1}(\{a\}) \neq \phi$ et $f^{-1}(\{a\}) \neq E$ (puisque f est surjective). il en découle que la frontière de $f^{-1}(\{a\})$ est vide, ce qui est impossible.

$5 \Rightarrow 6$

Si l'on suppose que f soit une fonction continue non constante de E dans l'espace discret $F = \{a,b\}$, alors cela entraîne que f est surjective; ce qui mène à une contradiction avec (5).

$6 \Rightarrow 1$

Supposons que E ne soit pas connexe. Il existe alors deux ouverts non vides A et B de E tels que:

$$A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \phi.$$

On définit une fonction f de E dans $F = \{a,b\}$ par:

$$x \to f(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x \in A, \\ b & \text{si} \quad x \in B. \end{cases}$$

Il est clair que f est continue, non constante. C'est en contradiction avec (6).

Exercice 247

Montrer que tout espace fini séparé n'est pas connexe (sauf s'il est réduit à un seul élément).

Solution

Il suffit de remarquer en fait, qu'un tel espace est discret. Il est donc non connexe, comme on le sait déjà.

5.2 Ensembles connexes

Exercice 248

Soit A un sous-ensemble non vide d'un espace (E,τ). On dit que A est connexe, si le sous-espace (A,τ_A) l'est.

Autrement dit, A est connexe s'il n'existe pas un couple d'ouverts (resp. fermés) non vides Ω_1 et Ω_2 de E de sorte que:

$$\begin{cases} A \subset \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ A \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi, \\ \Omega_1 \cap A \neq \phi \text{ et } \Omega_2 \cap A \neq \phi. \end{cases}$$

Naturellement, si Ω_1 et Ω_2 étaient pris dans τ_A, on aurait traduit la connexité de A comme dans (1) de l'exercice 244. Plus précisément, A est connexe si, et seulement si, il n'existe pas deux ouverts (resp. fermés) O_1 et O_2 non vides de τ_A le partitionnant.

Montrer que si A est un ensemble connexe d'un espace E, et si V W sont deux ouverts de E vérifiant:

$$\begin{cases} A \subset V \cup W, \\ A \cap V \cap W = \phi, \end{cases}$$

alors A est nécessairement contenu exclusivement dans l'un des deux ouverts V et W; autrement dit, on a soit $V \cap A = \phi$ soit $W \cap A = \phi$.

Solution

En effet, si $A \not\subset V$ et $A \not\subset W$ alors $V \cap A \neq \phi$ et $W \cap A \neq \phi$. Cela entraîne, d'après la définition sus-citée, que A n'est pas connexe.

Exercice 249

Soit (E,τ) l'espace topologique défini par:

$$E = \{a,b,c,d\} \text{ et } \tau = \{\phi, E, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

1. Montrer que E est connexe.
2. Déterminer tous les sous-ensembles propres connexes de E.

Solution

1. Il est visible qu'aucun couple d'ouverts de E ne partitionne celui-ci. E est donc connexe.
2. Examinons toutes les parties non vides de E.

i) Tous les singletons de E sont connexes.

ii) $B_1 = \{a,b\}$ n'est pas connexe, car $\tau_{B_1} = \{\phi, B_1, \{a\}, \{b\}\}$

$B_2 = \{a,c\}$ n'est pas connexe, car $\tau_{B_2} = \{\phi, B_2, \{a\}, \{c\}\}$

$B_3 = \{a,d\}$ est connexe, car $\tau_{B_3} = \{\phi, B_1, \{a\}\}$

$B_4 = \{b,c\}$ est connexe, car $\tau_{B_4} = \{\phi, B_4\}$

$B_5 = \{b,d\}$ est connexe, car $\tau_{B_5} = \{\phi, B_5, \{b\}\}$

$B_6 = \{c,d\}$ est connexe, car $\tau_{B_6} = \{\phi, B_6, \{c\}\}$

iii) $C_1 = \{a,b,c\}$ n'est pas connexe, car $\tau_{C_1} = \{\phi, C_1, \{a\}, \{b,c\}\}$

$C_2 = \{a,b,d\}$ est connexe, car $\tau_{C_2} = \{\phi, C_2, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

$$C_3 = \{a,c,d\} \text{ est connexe, car } \tau_{C_3} = \{\phi, C_3, \{a\}, \{a,c\}\}$$

$$C_4 = \{b,c,d\} \text{ est connexe, car } \tau_{C_4} = \{\phi, C_4, \{b,c\}\}$$

Récapitulation: les sous-ensembles connexes non vides de E sont:

$$A_1 = \{a\},\ A_2 = \{b\},\ A_3 = \{c\},\ A_4 = \{d\},$$
$$B_3 = \{a,d\},\ B_4 = \{b,c\},\ B_5 = \{b,d\},\ B_6 = \{c,d\},$$
$$C_2 = \{a,b,d\},\ C_3 = \{a,c,d\},\ C_4 = \{b,c,d\}.$$

Exercice 250

Caractériser les parties connexes dans les espaces suivants:

i) E grossier,

ii) E discret,

iii) E muni de la topologie codénombrable.

Solution

i) L'espace E ne disposant que d'un seul ouvert non vide (lui - même) toutes ses parties sont connexes.

ii) Dans cet espace, toute partie étant ouverte et fermée, seuls ses singletons sont connexes.

iii) Les parties non dénombrables de E sont connexes. En effet, si A est une de ces parties et qu'elle n'est pas connexe, il existe deux ouverts B et C tels que:

$$\begin{cases} A \subset B \cup C, \\ A \cap B \cap C = \phi, \\ B \cap A \neq \phi \text{ et } C \cap A \neq \phi. \end{cases}$$

Il s'en suit que A est incluse dans le dénombrable $C_E(B \cap C)$. Absurde!

Par contre, les parties dénombrables, c-à-d. fermées, ne sont pas connexes. En effet, si F est fermée et p un de ses points, les sous-ensembles fermés $F \setminus \{p\}$ et $\{p\}$ partitionnent F.

Exercice 251

1. Montrer que dans tout espace topologique, l'ensemble vide et les singletons sont des ensembles connexes.

2. i) Montrer que les sous-espaces $(\mathbb{R}^*, |.|_{\mathbb{R}^*})$, $(\mathbb{Q}, |.|_{\mathbb{Q}})$, $(\mathbb{N}, |.|_{\mathbb{N}})$

et $(\mathbb{Z},|.|_{\mathbb{Z}})$ ne sont pas connexes.

ii) En déduire que la connexité n'est pas une propriété héréditaire.

3. Montrer que dans un espace muni de la topologie cofinie, tout ensemble infini est connexe et tout ensemble fini (non réduit à un seul élément) ne l'est pas.

Solution

1. C'est bien le cas, puisque ces types de sous-ensembles ne sont pas partitionnables par des couples d'ouverts non vides.

2. i) L'espace $(\mathbb{R}^*,|.|_{\mathbb{R}^*})$ n'est pas connexe, car $A =]0,+\infty[$ et $B =]-\infty,0[$ sont deux ouverts partitionnant $\mathbb{R}^*$.

L'espace $(\mathbb{Q},|.|_{\mathbb{Q}})$ n'est pas connexe, puisqu'on peut avoir:

$$\mathbb{Q} = \left(]-\infty,\sqrt{3}[\cap \mathbb{Q}\right) \cup \left(]\sqrt{3},+\infty[\cap \mathbb{Q}\right).$$

$(\mathbb{N},|.|_{\mathbb{N}})$ et $(\mathbb{Z},|.|_{\mathbb{Z}})$ ne sont pas connexes car ils sont discrets.

ii) On sait déjà (exercice 15) que $(\mathbb{R},|.|)$ est connexe alors qu'il renferme des sous-ensembles qui ne le sont pas.

3. En effet, nous remarquons au sujet de la première affirmation que si A était un tel ensemble et non connexe, alors il existerait deux ouverts non vides V et W de l'espace de référence E tels que:

$$\begin{cases} A \subset V \cup W, \\ A \cap V \cap W = \phi, \\ V \cap A \neq \phi \text{ et } W \cap A \neq \phi. \end{cases}$$

On déduit que $A \subset C_E(V \cap W)$. Comme $C_E(V \cap W)$ est fini et A infini, on aboutit à une contradiction.

Pour la deuxième assertion, on rappelle qu'un tel ensemble est fermé. Il devient alors facile de le partitionner par deux fermés non vides. (Prendre, par exemple, $F_1 = \{a\}$ et $F_2 = C_A\{a\}$, où A est l'ensemble considéré et $a \in A$.)

Exercice 252

1. Montrer que toute partie finie d'un espace séparé n'est pas

connexe (sauf si elle est réduite à un point).

2. Les ensembles suivants sont-ils connexes:

i) La frontière de tout intervalle de $(\mathbb{R},|.|)$?

ii) La frontière de tout ouvert (resp. fermé) propre dans un espace muni de la topologie cofinie?

Solution

1. Elle forme un sous-espace discret, donc non connexe.

2. i) Si l'intervalle considéré est borné sa frontière contient deux points. Celle-ci forme alors un sous-espace discret, donc non connexe.

Si l'intervalle est non borné sa frontière ne contient qu'au plus un point. Donc, elle est connexe.

ii) Non, car elle est finie.

Exercice 253

Montrer que si A est une partie connexe d'un espace E, toute autre partie B de E vérifiant

$$A \subset B \subset \overline{A}$$

est aussi connexe.

Solution

Soit B une partie de E vérifiant la condition citée. Supposons que B ne soit pas connexe. Il existe alors deux ouverts V et W de E tels que:

$$\begin{cases} B \subset V \cup W, & (1) \\ B \cap V \cap W = \phi, & (2) \\ V \cap B \neq \phi \text{ et } W \cap B \neq \phi. & (3) \end{cases}$$

la condition (3) entraîne que V et W rencontrent $\overline{A}$. Par conséquent, et du fait qu'ils soient ouverts, ils rencontrent A. On écrit donc:

$$V \cap A \neq \phi \text{ et } W \cap A \neq \phi. \qquad (4)$$

De plus, de (1) et (2) on tire trivialement

$$\begin{cases} A \subset V \cup W, & (5) \\ A \cap V \cap W = \phi. & (6) \end{cases}$$

Les relations (4), (5) et (6) impliquent que A n'est pas connexe. Absurde!

Exercice 254

1. Montrer que dans un espace topologique E, l'adhérence de toute partie connexe est connexe.
2. Que dire de la réciproque?
3. En déduire que si E admet une partie connexe partout dense A, alors E est lui-même connexe.
4. Montrer à l'aide de contre-exemples que l'intérieur d'un ensemble connexe n'est pas nécessairement connexe et qu'un ensemble non connexe peut avoir un intérieur connexe.

Solution

1. En effet, il suffit de poser $B = \overline{A}$ dans l'exercice précédent.

On peut aussi mener la preuve en ces termes. Soit f une fonction continue de $\overline{A}$ dans le discret $\{0,1\}$. Comme A est connexe et f continue sur A, on obtient soit $A \subset f^{-1}(\{0\})$, soit $A \subset f^{-1}(\{1\})$. Or $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ sont fermés, donc on déduit que ou $\overline{A} = f^{-1}(\{0\})$ ou $\overline{A} = f^{-1}(\{1\})$. C'est-à-dire f est constante sur $\overline{A}$. Celle-ci est alors connexe.

2. Elle est fausse. Il existe des ensembles ayant des adhérences connexes sans qu'eux-mêmes le soient. C'est le cas, par exemple, de $\mathbb{Q}$ dans $(\mathbb{R},|.|)$. On sait $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe alors que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ l'est.

3. Il suffit de remarquer que $\overline{A} = E$.

4. L'exemple suivant illustre la première affirmation.

Soient $E = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\phi, E, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ et $A = \{a,b,d\}$.

On voit que A est connexe; par contre $\overset{\circ}{A} = \{a,b\}$ ne l'est pas.

Si l'on considère maintenant, la partie $A = \mathbb{N} \cup]-3,-1[$ dans $(\mathbb{R},|.|)$, on voit que A n'est pas connexe et $\overset{\circ}{A} =]-3,-1[$ l'est.

Exercice 255

Soient A et B deux fermés disjoints d'un espace E. Montrer que

1. leurs frontières $\mathcal{F}_r A$ et $\mathcal{F}_r B$ sont disjointes,
2. $\mathcal{F}_r(A \cup B) = \mathcal{F}_r A \cup \mathcal{F}_r B$,

permet de retrouver la propriété (4) de l'exercice 246. Il suffit seulement de remplacer B par l'espace E dans la preuve précédente. On obtient:

$$A \cap E = A \neq \phi,\ C_E A \cap E \neq \phi \text{ et } \mathcal{F}_r A \cap E = \mathcal{F}_r A \neq \phi.$$

Signalons en dernier, que le résultat de cet exercice est connu sous l'appelation de **théorème de passage des douanes**.

Exercice 257

1. Vérifier à l'aide d'exemples simples que la réunion de deux ensembles connexes peut être non connexe.
2. Faîtes de même pour l'intersection.

Solution

1. On le voit facilement lorsque l'on considère la réunion de deux singletons dans un espace séparé.
2. Voici un exemple:

Soient $E = \{a,b,c,d\}, \tau = \{\phi, E, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$, $A = \{a,b,c\}$ et $B = \{b,c,d\}$. Il est immédiat que A et B sont connexes, mais $A \cap B = \{b,c\}$ ne l'est pas.

Exercice 258

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties connexes non vides d'un espace E, alors chacune des trois conditions suivantes entraîne la connexité de $\bigcup_{i\in I} A_i$:

C_1 : $\exists\ i_0 \in I \,/\, A_{i_0} \cap A_j \neq \phi,\ \forall\, j \in I.$

(Une partie rencontre chacun des autres ensembles.)

C_2 : $A_i \cap A_j \neq \phi,\ \forall\, i \in I,\ \forall\, j \in I.$

(Les ensembles $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux concourants.)

C_3 : $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \phi.$

Solution

Envisageons le cas C_1.

Supposons que $\bigcup_{i\in I} A_i = R \cup S$ où R et S sont ouverts et disjoints.

Il s'agit de prouver que, soit $R = \phi$, soit $S = \phi$. Conformément à l'exercice précédent, on peut poser $A_{i_0} \cap R = \phi$. D'où, $A_{i_0} \subset S$. Il en résulte que S est un voisinage ouvert de A_{i_0}. Les ensembles A_{i_0} et A_i n'étant pas disjoints, il vient $A_i \cap S \neq \phi$. On déduit, grâce à la connexité de A_i, que $A_i \cap R = \phi$ quel que soit i. Donc, $\bigcup_{i\in I} A_i \subset S$ par suite, $R = \phi$.

Traitons le cas C_2.

Supposons que $\bigcup_{i\in I} A_i$ ne soit pas connexe. Il existe alors, dans le sous-espace $\bigcup_{i\in I} A_i$, deux ouverts non vides Ω_1 et Ω_2 tels que:

$$\begin{cases} \Omega_1 \cup \Omega_2 = \bigcup_{i\in I} A_i, \\ \Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi. \end{cases}$$

Pour tout $i\in I$, les ensembles $A_i \cap \Omega_1$ et $A_i \cap \Omega_2$ sont ouverts dans A_i et partitionnent ce dernier. Comme A_i est connexe, on a nécessairement ou $A_i \cap \Omega_1 = \phi$ ou $A_i \cap \Omega_2 = \phi$. Soit I_1 (resp. I_2) l'ensemble des indices $i\in I$ pour lesquels $A_i \subset \Omega_1$ (resp. $A_i \subset \Omega_2$). On en déduit que Ω_1 (resp. Ω_2) coïncide avec $\bigcup_{i\in I_1} A_i$ (resp. $\bigcup_{i\in I_2} A_i$). Il devient ainsi possible de trouver deux ensembles connexes disjoints A_{i_0} et A_{j_0} de la famille considérée. Absurde!

Terminons par la condition C_3.

On munit l'ensemble $\{0,1\}$ de la topologie discrète. Si $f: \bigcup_{i\in I} A_i \to \{0,1\}$ est une fonction continue, ses restrictions f_{A_i} à chacun des connexes A_i sont continues. Elles sont alors constantes.

Par ailleurs, pour x_0 pris dans l'intersection non vide $\bigcap_{i\in I} A_i$, on peut écrire:

$$f(x) = f_{A_i}(x) = f_{A_i}(x_0) = f(x_0),\ \forall\, x \in A_i,\ \forall\, i \in I.$$

Donc, f est constante sur $\bigcup_{i\in I} A_i$. Ainsi, cet ensemble est connexe.

Remarque: il y a lieu d'insister sur le fait que les conditions précédentes sont des conditions seulement suffisantes. On peut le constater sur cet:

Exercice 259

1. Si A et B sont deux ensembles connexes disjoints d'un espace E tels que B (resp. A) rencontre $\overline{A}$ (resp. $\overline{B}$), montrer alors que $A \cup B$ est aussi connexe.

2. Le résultat subsiste-t-il encore lorsque l'on suppose seulement $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \phi$?

Solution

1. Posons $C = \overline{A} \cap B \neq \phi$. On a:

$$A \subset A\cup C \subset \overline{A}.$$

D'après l'exercice 253, $A\cup C$ devient connexe. Les deux ensembles connexes B et $A\cup C$ ont une intersection non vide, leur réunion est, de ce fait, connexe. On obtient donc:

$$(A\cup C) \cup B = A \cup (C\cup B) = A\cup B.$$

C'est un connexe!

Autre méthode.

Si $A\cup B$ était non connexe, il existerait deux ouverts V et W de E tels que:

$$(*)\qquad \begin{cases} A\cup B \subset V\cup W, \\ (A\cup B) \cap V\cap W = \phi, \\ (A\cup B) \cap V \neq \phi, \\ (A\cup B) \cap W \neq \phi. \end{cases}$$

D'où:

$$\begin{cases} A \subset V\cup W, \\ A \cap V\cap W = \phi. \end{cases}$$

Comme A est connexe, on affirme que ou $A \subset V$ ou $A \subset W$. Supposons que $A \subset V$. On déduit de (*) que $B \subset W$. Or $\overline{A} \cap B \neq \phi$, donc $W \cap A \neq \phi$. Absurde!

2. Non. Dans l'espace usuel $(\mathbb{R}, |.|)$, les intervalles $A =]-1,1[$ et $B =]1,2[$ sont connexes (c'est le contenu du pragraphe suivant!) alors que $A \cup B =]-1,1[\cup]1,2[$ est non connexe quoique

$$\overline{A} \cap \overline{B} = [-1,1] \cap [1,2] = \{1\} \neq \phi.$$

Exercice 260

Soient Ω un sous-ensemble connexe d'un espace connexe E et P et Q deux sous-ensembles disjoints tels que l'un d'eux soit ouvert et

$$C_E \Omega = P \cup Q.$$

1. Montrer que les sous-ensembles $\Omega \cup P$ et $\Omega \cup Q$ sont connexes.

2. En outre, si Ω est fermé, $\overline{P} \cap Q = \phi$ et $\overline{Q} \cap P = \phi$, montrer que $\Omega \cup P$ et $\Omega \cup Q$ sont fermés de même.

Solution

1. Posons, en effet, $\Omega \cup P = A \cup B$, où A et B sont deux ouverts disjoints. Il s'agit de prouver que, soit $A = \phi$ soit $B = \phi$. Supposons que Q soit ouvert. On peut, conformément à la connexité de Ω, poser $\Omega \cap A = \phi$. Il en résulte que $A \subset P$, puisque $A \subset \Omega \cup P$. Les ensembles P et Q étant disjoints, A est donc disjoint de Q et par conséquent de $B \cup Q$, puisque A et B sont disjoints. L'identité

$$E = \Omega \cup P \cup Q = A \cup B \cup Q$$

représente ainsi une décomposition de l'espace connexe en deux sous-ensembles ouverts et disjoints A et $B \cup Q$. L'un d'eux est donc vide, ce qui met fin à la question.

2. Si Ω est fermé, on a:

$$\overline{\Omega \cup P} = \overline{\Omega} \cup \overline{P} = \Omega \cup \overline{P} = (\Omega \cup \overline{P}) \cap (\Omega \cup P \cup Q) = \Omega \cup P,$$

$$\overline{\Omega \cup Q} = \overline{\Omega} \cup \overline{Q} = \Omega \cup \overline{Q} = (\Omega \cup \overline{Q}) \cap (\Omega \cup Q \cup P) = \Omega \cup Q,$$

D'où le résultat.

Exercice 261

Soient F_1 et F_2 deux sous-ensembles fermés (ou ouverts) d'un espace E. Montrer que si $F_1 \cap F_2$ et $F_1 \cup F_2$ sont connexes, alors il en est de même pour F_1 et F_2.

Solution

Nous allons procéder par l'absurde. Supposons que F_1 ne soit pas connexe. Il existe alors deux fermés Ω_1 et Ω_2 de F_1 de sorte que:

$$F_1 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \text{ et } \Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi.$$

Remarquons que Ω_1 et Ω_2 sont en réalité deux fermés de E, car F_1 est fermé. Par ailleurs, on obtient:

$$F_1 \cap F_2 = (\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap F_2 = (\Omega_1 \cap F_2) \cup (\Omega_2 \cap F_2).$$

La connexité de $F_1 \cap F_2$ entraîne que l'un des deux sous-ensembles $\Omega_1 \cap F_2$ et $\Omega_2 \cap F_2$ est vide. Supposons $\Omega_1 \cap F_2 = \phi$ et $\Omega_2 \cap F_2 \neq \phi$. Dans ces conditions, on a:

$$\begin{cases} F_1 \cup F_2 = (\Omega_1 \cup \Omega_2) \cup F_2 = \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cup F_2), \\ \Omega_1 \cap (\Omega_2 \cup F_2) = (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup (\Omega_1 \cap F_2) = \phi. \end{cases}$$

On aboutit ainsi à la non connexité de $F_1 \cup F_2$, ce qui contredit les hypothèses. Donc, on conclut que F_1 est connexe.

Un raisonnement analogue mène à la connexité de F_2.

Remarque: On peut mener la preuve autrement. Reportons-nous à l'exercice 260 et posons:

$$E = F_1 \cup F_2, \; P = F_1 \setminus F_2, \; Q = F_2 \setminus F_1 \text{ et } \Omega = F_1 \cap F_2.$$

Les sous-ensembles $F_1 \setminus F_2$ et $F_2 \setminus F_1$ sont disjoints, donc les sous-ensembles $F_1 = (F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \setminus F_2)$ et $F_2 = (F_1 \cap F_2) \cup (F_2 \setminus F_1)$ sont connexes.

5.3 Connexité dans $(\mathbb{R},|.|)$

Exercice 262

Démontrer que $(\mathbb{R},|.|)$ est connexe.

Solution

Soit A une partie ouverte et fermée de $\mathbb{R}$. Supposons que A et $C_{\mathbb{R}}A$ ne sont pas vides. Soit $x\in C_{\mathbb{R}}A$. L'un des deux ensembles $A\cap[x,+\infty[$ et $A\cap[-\infty,x[$ n'est pas vide. Supposons, par exemple, que $B = A\cap[x,+\infty[\neq \phi$. B est naturellement fermé. De plus, il est minoré. Il admet donc un plus petit élément b. D'autre part, B s'écrit: $B = A\cap\,]x,+\infty[$. C'est donc un ouvert. On en déduit qu'il existe un intervalle $]b-\varepsilon,b+\varepsilon[$ $(\varepsilon > 0)$ contenu dans B. Ainsi, b ne peut pas être le plus petit élément de B. D'où la contradiction cherchée.

Le résultat ci-après est plus général et présente une caractérisation importante de la connexité dans $(\mathbb{R},|.|)$.

Exercice 263

Montrer que pour qu'une partie A de $(\mathbb{R},|.|)$ soit connexe, il faut et il suffit qu'elle soit un **intervalle**.

Solution

Soit A un ensemble connexe de $\mathbb{R}$. Montrons que c'est un intervalle. Supposons le contraire. Cela se traduit, à la lumière de la propriété caractéristique d'un intervalle (exercice 1), par l'existence de trois nombres a,b et c vérifiant:

$$a < c < b,\ a\in A,\ b\in A \text{ et } c\notin A.$$

Il en découle que les deux ensembles $A\cap\,]c,+\infty[$ et $A\cap\,]-\infty,c[$ sont des ouverts disjoints de A, formant une partition de A. Celui-ci est donc non connexe, ce qui n'est pas vrai.

Signalons, avant d'entamer la réciproque, que le terme intervalle n'est suivi d'aucun qualificatif. En fait, cet intervalle est quelconque (qu'il soit fermé, ouvert, ni fermé ni ouvert, borné ou non, ... etc). On voit ainsi que $\mathbb{R}$, lui-même, est concerné.

Supposons donc que A soit un intervalle et que $A = B\cup C$, où B et C sont deux ouverts disjoints non vides de A. Soient x et y deux points de B et C respectivement tels que $x < y$. L'ensemble borné $B\cap[x,y]$ admet une borne supérieure que l'on note z. Deux cas se présentent:

i) Si $z \in B$ on aura $z < y$. Il s'en suit qu'il existe $\delta > 0$ de sorte que l'intervalle $[z, z+\delta[$ soit inclus dans $B \cap [x,y]$. Ceci est en contradiction avec la définition de z.

ii) Si $z \in C$ il existe de même, un intervalle $]z-\delta, z]$ $(\delta > 0)$ contenu dans $C \cap [x,y]$. On aboutit, encore une fois, à une contradiction avec la définition de z. On en déduit que z n'appartient ni à B ni à C. Impossible, puisque l'ensemble fermé $[x,y]$ est inclus dans A. Conclusion: A est connexe.

5.4 Connexité et continuité

Exercice 264

1. Soient E et F deux espaces topologiques et f une fonction de E dans F. Montrer que si f est continue et E connexe, alors f(E) connexe.
2. En déduire que:
   i) tout espace quotient associé à un espace connexe est connexe.
   ii) la connexité est un invariant topologique.

Solution

1. Supposons que f(E) ne soit pas connexe. f(E) admet alors une partie propre Ω, ouverte et fermée. La continuité de f entraîne que $f^{-1}(\Omega)$ est ouvert et fermé dans E, avec $f^{-1}(\Omega) \neq E$ et $f^{-1}(\Omega) \neq \phi$. On arrive ainsi à une contradiction avec la connexité de E.

Remarque: ce résultat est connu sous l'appelation de théorème de Bolzano-Weierstrass.

2. i) C'est clair, puisque la surjection canonique $s: E \to E/\mathcal{R}$ est continue.

ii) La connexité est conservée par homéomorphisme: C'est donc un invariant topologique.

Exercice 265

1. Montrer que l'image de tout intervalle de $(\mathbb{R}, |.|)$ par une fonction réelle continue est un intervalle.
2. Soient $f: E \to (\mathbb{R}, |.|)$ et a,b deux éléments de f(E). Montrer que

si E est connexe et f continue, alors pour tout c de $[a,b]$, l'équation $f(x) = c$ admet une solution dans E.

Solution

1. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: (\mathbb{R},|.|) \to (\mathbb{R},|.|)$ continue, alors f(I) est connexe; et d'après l'exercice 263, f(I) est un intervalle.

2. f(E), dans ces conditions, est un intervalle. Donc, on a:

$$[a,b] \subset f(E).$$

Il s'en suit que $c \in f(E)$. Par conséquent, il existe un élément x de E vérifiant $f(x) = c$.

Remarquons, ici, que le résultat véhéculé par ce dernier point est plus connu sous l'appelation de théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 266

Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $E = \prod_{i\in I} E_i$ l'espace produit associé. Montrer que pour que E soit connexe, il faut et il suffit que chaque E_i le soit.

Solution

Si E est connexe $E_i = \pi_i(E)$ l'est aussi, comme image d'un connexe (E) par la projection continue (π_i).

Pour établir la réciproque, nous procédons comme suit:

Considérons une fonction continue $f: E \to F = \{a,b\}$, F discret Il suffit de montrer que f est constante. Pour ce faire, on considère deux éléments x et y de E et on montre que $f(x) = f(y)$. Nous distinguons deux étapes:

i) On suppose que x et y ne diffèrent que par leur jième composante. Il en découle que y appartient à l'ensemble:

$$V = \prod_{i<j} \{x_i\} \times E_j \times \prod_{i>j} \{x_i\},$$

lequel contient aussi le point x. Grâce à l'exercice 181, V est homéomorphe à E_j. Il est donc connexe. Ainsi, f est constante sur V, ce qui permet d'avoir $f(x) = f(y)$ et achève la première étape.

ii) On suppose maintenant que y est quelconque et $f(x) = a$, par exemple. f étant continue et $\{a\}$ ouvert, il vient alors que $f^{-1}(\{a\})$ est un ouvert contenant x dans E. Il s'en suit qu'il existe un ouvert élémentaire Ω dans E de sorte que:

$$x \in \Omega \subset f^{-1}\left(\{a\}\right).$$

Ecrivons:

$$\Omega = \prod_{j \in J} \Omega_j \times \prod_{i \notin J} E_i ,$$

où J est un ensemble fini d'indices et Ω_j un ouvert de E_j, $j \in J$. Etant donné que $x \in \Omega$, les composantes x_j, pour $j \in J$, appartiennent à Ω_j. Cela permet d'affirmer que l'élément:

$$z = \left((x_j)_{j \in J}, (y_i)_{i \notin J}\right)$$

appartient également à Ω. D'où $f(z) = a$. On remarque que le passage de z à y s'effectue par un amenagement d'un nombre fini de composantes (celles qui portent un indice de J). D'après l'étape précédente, f conserve une même valeur lors de chacun de ces changements. Donc:

$$a = f(y) = f(z) = f(x).$$

5.5 Connexité locale

Exercice 267

Soient E un espace topologique et $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur E par:

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow$ x et y appartiennent à un même ensemble connexe de E.

Il est immédiat que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence d'un point x s'appelle **composante** connexe de x. Les différentes classes d'équivalence s'appellent composantes connexes de E. On constate qu'une composante connexe d'un point x est constituée de la réunion de toutes les parties connexes de E, contenant x. De là, on pose cette définition:

Soit E un espace topologique. On dit qu'un sous-ensemble A de E est une composante connexe de E, si A est connexe et n'est inclus dans aucun autre sous-ensemble connexe de E.

Vérifier que:

1. tout espace connexe admet une seule composante connexe.

2. $(\mathbb{R}^*, |.|)$ admet deux composantes connexes.

3. les composantes connexes d'un ouvert non vide de $(\mathbb{R}, |.|)$ sont les intervalles maximaux qu'il contient.

4. les composantes connexes d'un espace discret sont réduites à ses singletons.

Solution

1. C'est l'espace lui-même.

2. Les deux composantes connexes sont

$$]0,+\infty[\text{ et }]-\infty,0[.$$

3. Un ouvert non vide de $(\mathbb{R}, |.|)$ est réunion d'intervalles ouverts. Ces intervalles étant connexes, les composantes connexes de cet ouvert sont les intervalles maximaux qu'il renferme.

4. Dans un tel espace, tout ensemble ayant plus d'un élément ne peut pas être connexe. Les composantes connexes d'un espace discret sont réduites à ses singletons. Donc, tout singleton dans un espace discret en est une composante connexe.

Exercice 268

1. Montrer que dans tout espace topologique, chaque ensemble connexe est contenu dans une composante connexe.

2. En déduire que tout point d'un espace topologique est contenu dans une composante connexe.

Solution

1. Soit A un ensemble connexe d'un espace E. Désignons par $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ la famille de toutes les parties connexes contenant A. on a $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \phi$. Il en résulte que l'ensemble $B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ est connexe et contient A. C'est la composante connexe recherchée. En effet, si C est un ensemble connexe contenant B, alors C contient A, et donc B = C. D'où le résultat.

2. En effet, il suffit de remarquer que tout singleton $\{x\}$ $(x\in E)$ est connexe, puis conclure avec le point (1).

Exercice 269

Montrer que, dans un espace E, toute composante connexe est fermée.

Solution

Soit A une composante connexe d'un espace E. D'après l'exercice 254, $\overline{A}$ est connexe. Il en résulte que $A = \overline{A}$.

Exercice 270

1. Montrer que si $(A_i)_{i\in I}$ est la famille de toutes les composantes connexes d'un espace E, alors:

i) $\forall\ i,j\in I\ (i \neq j)\quad A_i \cap A_j = \phi$,

ii) $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = E$.

2. En déduire que tout ensemble A d'un espace E est une réunion (finie ou non) de parties connexes non vides et deux à deux disjointes.

Solution

1. Signalons, tout d'abord, que le contenu de ce point signifie que, dans un espace E, la famille des composantes connexes forment une partition de cet espace.

i) Si $A_i \cap A_j$ était non vide il en résulterait que $A_i \cup A_j$ serait connexe et contiendrait A_i et A_j. C'est impossible, puisque A_i et A_j sont des composantes connexes.

ii) C'est une conséquence immédiate de l'exercice 268.

2. Ces parties ne sont autres que les composantes connexes du sous-espace A.

Exercice 271

On dit qu'un espace E est **localement connexe**, si la famille de voisinages connexes de tout point x de E constitue un système fondamental de voisinages pour x.

Autrement dit, on appelle espace localement connexe, tout espace dont chaque point admet un système fondamental de voisinages connexes.

Vérifier que

1. $(\mathbb{R},|.|)$ et $\overline{\mathbb{R}}$ sont localement connexes.

2. i) $\left(\mathbb{Q},|.|_{\mathbb{Q}}\right)$ et $\left(C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q},|.|_{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}}\right)$ ne sont pas localement connexes.

ii) la connexité locale n' est pas héréditaire.

3. tout espace discret est localement connexe.

Solution

1. C'est le cas, puisque tout voisinage de chaque point contient un intervalle ouvert connexe.

2. i) En fait, aucun voisinage de tout point p de $\left(\mathbb{Q},|.|_{\mathbb{Q}}\right)$ ou de $\left(C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q},|.|_{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}}\right)$ n'est connexe. Explicitons la situation pour $\left(\mathbb{Q},|.|_{\mathbb{Q}}\right)$. En effet, si V est un voisinage de p, il contient un ouvert de la forme $]p-r, p+r[\, \cap \mathbb{Q}$, avec $r\in \mathbb{R}_+^*$. Soient a et b deux points de V. Il existe conformément à la densité de $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, un irrationnel c tel que $a < c < b$. Ainsi, on peut écrire:

$$V \subset \left(]-\infty, c[\, \cap \mathbb{Q}\right) \cup \left(]c, +\infty[\, \cap \mathbb{Q}\right),$$
$$\left(]-\infty, c[\, \cap \mathbb{Q}\right) \cap V \cap \left(]c, +\infty[\, \cap \mathbb{Q}\right) = \phi,$$
$$\left(]-\infty, c[\, \cap \mathbb{Q}\right) \cap V \neq \phi,$$
$$V \cap \left(]c, +\infty[\, \cap \mathbb{Q}\right) \neq \phi.$$

Donc, V est non connexe.

ii) C'est une conséquence immédiate de (i).

3. Les singletons sont des voisinages connexes pour les points qu'ils renferment.

Exercice 272

Vérifier que, contrairement à ce que nous avons vu en compacité,

1. il existe des espaces connexes qui ne le sont pas localement,
2. une partie peut être localement connexe sans que son adhérence le soit.

Solution

1. Regardons de près le contre-exemple suivant:

L'ensemble $A = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) / 0 < x \leq 1\right\}$ est connexe dans $\mathbb{R}^2$.

C'est l'image du connexe $]0,1]$ par la fonction continue:

$$x \to \left(x, \sin\frac{1}{x}\right).$$

Il en résulte que $\overline{A}$ est connexe. Or $\overline{A} = A \cup B$, avec:

$$B = \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |y| \leq 1\right\},$$

il s'en suit qu'aucun point de B ne peut avoir un voisinage connexe dans le sous-espace $\overline{A}$. Ainsi, $\overline{A}$ qui est connexe, n'est pas localement connexe.

2. Si $A = \left\{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ alors $\left(A, |.|_A\right)$ est un sous-espace discret. $\overline{A} = A \cup \{0\}$ ne peut pas être localement connexe. Cela est dû au fait que le point 0 n'admet pas de voisinage connexe. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $V =]-\varepsilon, \varepsilon[\cap \overline{A}$ est infini. Il n'est donc pas connexe.

Exercice 273

Montrer que pour qu'un espace E soit localement connexe, il faut et il suffit, que toute composante connexe de tout ouvert soit ouverte.

Solution

Supposons que E soit localement connexe. Si A est un ensemble ouvert de E et C une composante connexe de A, alors pour tout x de C, il existe un voisinage connexe V de x tel que $V \subset A$. Donc, $V \subset C$. Il en résulte que C est un voisinage de tous ses points. Elle est alors ouverte.

Réciproquement, soient $x \in E$ et V un voisinage ouvert de x. La composante connexe de x dans V est ouverte et connexe. On conclut que E est localement connexe.

Exercice 274

1. Montrer que tout ouvert connexe Ω d'un sous-espace F de E est trace sur F d'un ouvert connexe G de E.

2. Soient A et B deux sous-ensembles fermés d'un espace E tels que $A \cup B = E$ et $A \cap B$ soient localement connexes. Montrer que A et B le sont de même.

Solution

1. En effet, Ω étant un ouvert du sous-espace F, il existe un ouvert O de E tel que $\Omega = O \cap F$. Il suffit de prendre comme G la composante connexe de O qui contient Ω.

2. L'ensemble $A \setminus B = C_E B$ étant ouvert, A est localement connexe en tout point de $A \setminus B$. Il s'agit donc de prouver que A est localement connexe en chaque point p de $A \cap B$.

Soit G un voisinage ouvert de p. Par hypothèses, la composante connexe C de l'ensemble $A \cap B \cap G$ qui contient p est ouverte dans cet ensemble. D'après la question (1) (en y prenant $G = E$ et $A = F \cap B \cap G$) il existe un ouvert connexe H tel que $H \subset G$ et $C = A \cap B \cap H$. La réunion et l'intersection des ensembles $A \cap H$ et $B \cap H$, fermés dans H, étant connexes puisque:

$$(A \cap H) \cup (B \cap H) = (A \cup B) \cap H = H,$$

$$(A \cap H) \cap (B \cap H) = A \cap B \cap H = C,$$

ces ensembles sont connexes (exercice 261). L'ensemble $A \cap H$ étant un voisinage connexe de p relatif à A et contenu dans G, A est localement connexe au point p.

Exercice 275

Soit A une partie d'un espace localement connexe E. Montrer que si la frontière $\mathcal{F}_r(A)$ de A est localement connexe, alors l'adhérence $\overline{A}$ l'est de même.

Solution

C'est une conséquence immédiate de la question (2) de l'exercice précédent. En effet, on a:

$$\overline{A} \cup \overline{C_E A} = E,$$

$$\overline{A} \cap \overline{C_E A} = \mathcal{F}_r(A).$$

Exercice 276

Montrer que si E est un espace localement connexe, toutes ses composantes connexes sont ouvertes.

Solution

En effet, si A est une composante connexe, chacun de ses points x admet un voisinage connexe $V \subset A$. On déduit que A est un voisinage de tous ses points.

Exercice 277

Montrer que tout ouvert non vide Ω de $(\mathbb{R},|.|)$ est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Solution

Les composantes connexes de Ω sont des intervalles ouverts (exercices 263 et 273). De plus, elles sont deux à deux disjointes (exercice 270). Montrons que leur réunion est dénombrable. Il est clair que chaque composante connexe I de Ω rencontre $\mathbb{Q}$. Si $x \in (I \cap \mathbb{Q})$, on trouve que I coïncide avec la composante connexe de x dans Ω. Il en découle que la famille des composantes de Ω est finie ou dénombrable.

5.6 Connexité par arcs

Exercice 278

On appelle **chemin** dans une partie A d'un espace E, toute application continue f définie de $I = [a,b] \subset (\mathbb{R},|.|)$ dans A.

Les points f(a) et f(b) s'appellent respectivement **origine** et **extrémité** du chemin f.

Pour des raisons de simplification et de commodité technique, on prend $I = [0,1]$. La généralité de l'exposé n'y perd rien.

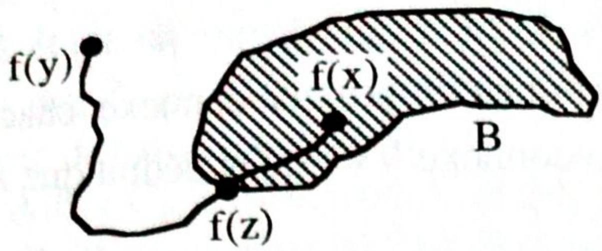
On dit qu'un chemin f coupe un ensemble B de E si :

$$\exists\, x \in I \,/\, f(x) \in B.$$

La connexité de f(I) permet d'observer que tout chemin coupant un ensemble B et son complémentaire $C_E B$, coupe nécessairement la frontière de cet ensemble $\mathcal{F}_r B$.

En effet, si f est un tel chemin on a: *f*

$$\exists\, x,y \in I \,/\, f(x) \in B \wedge f(y) \in C_E B.$$



D'où:

$$[x,y] \subset I \Rightarrow f([x,y]) \subset f(I).$$

Donc:

$$\exists\, z \in I \,/\, f(z) \in \mathscr{F}_r(B).$$

On dit qu'un ensemble A d'un espace E est connexe par arcs, si pour tout couple de points (M,N) de A, il existe un chemin f dans A, d'origine M et d'extrémité N.

Cette définition reste, bien évidemment, valable pour E lui-même.

Vérifier que:

1. $(\mathbb{R}, |.|)$ est connexe par arcs.
2. tout intervalle I de $(\mathbb{R}, |.|)$ est connexe par arcs.
3. $(\mathbb{Q}, |.|_{\mathbb{Q}})$ et $(C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}, |.|_{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}})$ ne sont pas connexes par arcs.

Solution

1. En effet, pour tout a,b de $\mathbb{R}$ la fonction f: $[0,1] \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = a + (b-a)\,x$ est un chemin dans $\mathbb{R}$, d'origine a et d'extrémité b.

2. Pour tout a et b de I, on a conformément à la caractérisation d'un intervalle (exercice 1):

$$t\,a + (1-t)\,b \in I, \ \forall\, t \in [0,1].$$

la fonction f: $[0,1] \to I$, définie par $f(x) = ta + (1-t)\,b$ constitue un chemin.

Remarque: cette propriété se généralise à tout ensemble convexe.

3. La justification est dans l'exercice suivant.

Exercice 279

1. Montrer que tout espace connexe par arcs est connexe.
2. Que dire de la réciproque?

Solution

1. Soit E un espace connexe par arcs. Supposons qu'il ne soit pas connexe. E admet alors un sous-ensemble propre ouvert et fermé Ω. Il s'en suit que $C_E\Omega$ possède les mêmes qualités. Choisissons un élément a dans Ω et un autre b dans $C_E\Omega$. Il existe, par hypothèse, un chemin f tel que $f(0) = b$ et $f(1) = a$. Posons:

$$f([0,1]) = F.$$

$F \cap \Omega$ et $F \cap C_E\Omega$ sont deux ouverts non vides de F. De plus, ils forment une partition pour F. Or F est connexe, d'où la contradiction cherchée. E est alors connexe.

2. La réciproque est généralement fausse. Il suffit, pour s'en convaincre, de réexaminer l'exemple cité dans l'exercice 272. On a vu que $\overline{A} = A \cup B$ est connexe. Mais il n'est pas possible de joindre un point de B à un autre de A par un chemin.

Ainsi, les espaces non connexes $\left(\mathbb{Q}, |.|_{\mathbb{Q}}\right)$ et $\left(C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}, |.|_{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}}\right)$ ne peuvent pas l'être par arcs.

Quelques problèmes de plus

Exercice 280

1. Soit E un espace topologique compact. Montrer que toute suite décroissante de sous-ensembles fermés et connexes de E admet une intersection connexe.

2. Donner un exemple dans $\mathbb{R}^2$ d'une suite décroissante de parties connexes dont l'intersection n'est pas connexe.

Solution

i) Notons $(K_n)_n$ une telle suite et posons $K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$. En vertu de l'exercice (2) du chapitre précédent, K n'est pas vide. De plus, si Ω est un ouvert contenant K, alors il existe un indice n_0 tel que

$$K_{n_0} \subset \Omega.$$

Supposons maintenant que K ne soit pas connexe. Il existe deux ouverts Ω_1 et Ω_2 de E satisfaisant à :

$$\begin{cases} K \subset (\Omega_1 \cup \Omega_2), \\ K \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi, \\ K \cap \Omega_1 \neq \phi, \\ K \cap \Omega_2 \neq \phi. \end{cases} \qquad (*)$$

En prenant $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, on peut trouver un entier naturel n_0 de sorte que $K_{n_0} \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$. La suite $(K_n)_n$ étant décroissante, on obtient:

$$K_p \subset (\Omega_1 \cup \Omega_2), \ \forall\, p \geq n_0.$$

La condition (*) permet d'affirmer qu'il existe un indice $p_0 \geq n_0$ tel que:

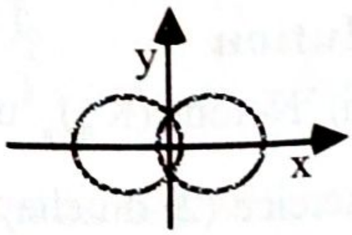
$$K_{p_0} \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi.$$

Il en découle que:

$$\begin{cases} K_{p_0} \subset (\Omega_1 \cup \Omega_2), \\ K_{p_0} \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi, \\ K_{p_0} \cap \Omega_1 \neq \phi, \\ K_{p_0} \cap \Omega_2 \neq \phi. \end{cases}$$

Ceci traduit la non connexité de K_{p_0}. Absurde, car c'est contraire aux hypothèses. Conclusion: K est connexe.

ii) Considérons dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa topologie usuelle, la suite $(A_n)_n$ où A_n est la réunion des deux disques ouverts centrés en (-1,0) et (0,1) et de même rayon $1+\dfrac{1}{n}$.

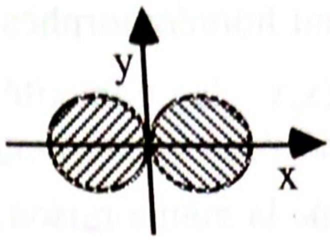


Il est clair que:

a) A_n est connexe (réunion de deux convexes concourants), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $n \leq m \Rightarrow A_m \subset A_n$.

Pourtant, on a bien:



$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = D_1\big((-1,0),\ 1\big) \cup D_2\big((0,1),\ 1\big)$$

où $D_1\big((-1,0),\ 1\big)$ et $D_2\big((0,1),\ 1\big)$ sont les deux disques ouverts de même rayon 1 et de centres (-1,0) et (0,1) respectivement, lequel n'est pas connexe.

Exercice 281

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet, au moins, un point fixe.

Solution

Observons d'abord que si f(0) = 0 ou f(1) = 1, le problème est résolu. Dans le cas contraire, nous considérons la fonction:

$$h : [0,1] \to (\mathbb{R}, |.|)$$
$$x \to h(x) = f(x) - x.$$

Il est clair que h est continue. De plus, $h(1) \neq 0$ et $h(0) \neq 0$. Il en découle que :

$$h(0) = f(0) > 0 \text{ et } h(1) = f(1) - 1 < 0.$$

(Car f(0) et f(1) sont supposés être dans $]0,1[$.)

Par ailleurs, $h([0,1])$ est un connexe de $(\mathbb{R}, |.|)$. C'est donc un intervalle. Il en résulte que 0 appartient à $h([0,1])$. Par suite, il existe un élément a de $]0,1[$ annulant h. D'où f(a) = a.

Exercice 282

1. Montrer que si un espace E est connexe, la diagonale Δ de E^2 l'est aussi et réciproquement.

2. Montrer que si f est une fonction continue d'un espace connexe E dans un espace F, le graphe de f est connexe et réciproquement.

Solution

1. E et Δ sont homéomorphes. Pour le voir on peut considérer la fonction $x \to (x,x)$. la connexité étant un invariant topologique, la question est achevée.

2. On invoque la même raison. En effet, E et Γ_f sont homéomorphes à l'aide de la fonction: $x \to (x,f(x))$.

Exercice 283

On munit l'ensemble $E = \{a,b,c,d\}$ de la topologie:

$$\tau = \{\phi, E, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}.$$

Montrer que E est connexe et localement connexe.

Solution

La sous-famille des ouverts de E, distincts de E et ϕ, est:

$$\sigma = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}.$$

On voit ainsi que E ne jouït d'aucune partition par deux ouverts. Donc, E est connexe.

Par ailleurs, soient $\mathcal{V}(a)$, $\mathcal{V}(b)$, $\mathcal{V}(c)$ et $\mathcal{V}(d)$ les familles de voisinages des points de E. On a immédiatement:

$$\mathcal{V}(a) = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, E\},$$

$$\mathcal{V}(b) = \{\{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, E\},$$

$$\mathcal{V}(c) = \{\{a,b,c\}, E\},$$

$$\mathcal{V}(d) = \{E\}.$$

Les familles $\mathcal{W}(a) = \{\{a\}\}$, $\mathcal{W}(b) = \{\{a,b\}\}$, $\mathcal{W}(c) = \{\{a,b,c\}\}$ et $\mathcal{W}(a) = \{E\}$ constituent clairement des systèmes fondamentaux de voisinages connexes des points a, b, c et d respectivement. E est donc localement connexe.

Exercice 284

Soit A un sous-ensemble d'un espace E. On désigne par C la composante connexe de A. Montrer que:

E est localement connexe $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_r(C) \subset \mathcal{F}_r(A)$.

Solution

$\Rightarrow$

Soit E un espace localement connexe. Supposons que x soit un point de $\mathcal{F}_r(C)$ n'appartenant pas à $\mathcal{F}_r(A)$, c'est-à-dire:

$$\begin{cases} x \in \overline{C} \cap \overline{C_E C}, & (*) \\ \quad\text{et} & \\ x \notin \overline{A} \cap \overline{C_E A}. & (**) \end{cases}$$

De (*) on déduit que $x \in \overline{C}$, donc $x \in \overline{A}$. Comme $x \notin \mathcal{F}_r(A)$, on conclut que $x \in \mathring{A}$ ($\overline{A} = \mathring{A} \cup \mathcal{F}_r(A)$). La connexité locale de E assure que x possède un voisinage connexe Ω vérifiant:

$$x \in \Omega \subset \mathring{A} \subset A.$$

D'après l'exercice 260, le sous-ensemble $C \cup \Omega$ est connexe. Or C est une composante connexe de A, il en résulte alors que $C \cup \Omega = C$. D'où

$$x \in \Omega \subset C,$$

ce qui entraîne que:

$$\Omega \cap C_E C = \phi.$$

Par conséquent, x n'appartient pas à $\overline{C_E C}$. Ceci est en contradiction avec (*). Conclusion:

$$\mathcal{F}_r(C) \subset \mathcal{F}_r(A).$$

$\Leftarrow$

En vertu de l'exercice 273, pour montrer que E est localement connexe, il nous suffit de montrer que toute composante connexe d'une partie ouverte est ouverte.

Soient Ω un ouvert de E et B une de ses composantes connexes. D'après les hypothèses, on a:

$$\begin{aligned} B \cap \mathcal{F}_r(B) \subset \Omega \cap \mathcal{F}_r(\Omega) &= \Omega \cap \overline{\Omega} \cap \overline{C_E \Omega} = \Omega \cap C_E \mathring{\Omega} \\ &= \Omega \cap C_E \Omega = \phi. \end{aligned}$$

D'où:

$$B \cap C_E \overset{\circ}{B} = B \cap \overline{B} \cap \overline{C_E B} = B \cap \mathcal{F}_r(B) = \phi.$$

Donc, $B \subset \overset{\circ}{B}$. B est alors ouverte.

Exercice 285

1. Montrer que la connexité locale est un invariant topologique.
2. En déduire que si E est localement connexe, l'espace quotient $E/\mathcal{R}$ l'est aussi.

Solution

1. Soit $f: E \to F$ un homéomorphisme. Supposons que E soit localement connexe. Soient p un point de F et V un de ses voisinages Comme f est continue, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de $f^{-1}(p)$. Or E est localement connexe, donc il existe un voisinage connexe W de $f^{-1}(p)$ tel que $W \subset f^{-1}(V)$. La continuité de f^{-1} en p assure que f(V) est un voisinage connexe de p, contenu dans V. D'où l'affirmation.
2. C'est une conséquence immédiate de la première question, puisque la surjection canonique $s: E \to E/\mathcal{R}$ est continue.

Exercice 286

Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ deux familles de composantes connexes d'un espace E, telles que $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} B_j$. Montrer que ces deux familles coïncident.

Solution

Signalons au départ qu'aucun élément des deux familles n'est vide. Soit x un point de $\bigcup_{i\in I} A_i$. Il existe un indice i_0 dans I tel que $x\in A_{i_0}$. Comme x est aussi dans $\bigcup_{j\in J} B_j$, il existe un indice j_0 dans J tel que $x\in B_{j_0}$. Ce point est alors dans $A_{i_0} \cap B_{j_0}$. Il en résulte que $A_{i_0} \cup B_{j_0}$ est connexe et contient les composantes connexes A_{i_0} et B_{j_0}. On déduit que:

$$A_{i_0} \cup B_{j_0} = A_{i_0} = B_{j_0}.$$

En éliminant les deux parties A_{i_0} et B_{j_0} et en itérant le procédé on conclut que les familles considérées sont identiques.

Exercice 287

Soient A une partie connexe d'un espace topologique connexe E et B une composante connexe de $C_E A$. Montrer que $C_E B$ est connexe.

Solution

Supposons, en effet, que

$$C_E B \subset R \cup S,$$

$$C_E B \cap R \cap S = \phi,$$

R et S étant deux ouverts de E. Il s'agit de montrer que, soit $C_E B \cap R = \phi$, soit $C_E B \cap S = \phi$. Comme

$$A \subset C_E B \subset R \cup S$$

la connexité de A entraîne, soit $A \cap R = \phi$ soit $A \cap S = \phi$. Optons pour $A \cap R = \phi$. D'où $A \cap (B \cup R) = \phi$, donc $B \cup R \subset C_E A$. L'ensemble $B \cup R$ étant connexe (à la lumière de l'exercice 260), et contient la composante connexe B, on affirme que $B = B \cup R$. D'où $R \subset B$ et donc $C_E B \cap R = \phi$.

Exercice 288

Montrer que la composante connexe de tout point p d'un espace E est incluse dans tout ensemble ouvert et fermé contenant p.

Solution

Soit Ω un ouvert et fermé contenant un point p de E. Soit A la composante connexe de p. Si A n'est pas contenue dans Ω, on serait devant la situation suivante:

$$A \cap \Omega \neq \phi,$$

$$A \cap C_E \Omega \neq \phi,$$

$$A \subset \Omega \cap C_E \Omega,$$

$$A \cap \Omega \cap C_E \Omega = \phi.$$

Cela contredit la connexité de A.

Exercice 289

Montrer que si un espace E n'est pas réunion de n ensembles connexes, il existe n+1 ensembles non vides, deux à deux disjoints $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ tels que:

$$E = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i .$$

Solution

Le problème est évident pour n = 1. Supposons qu'il reste vrai jusqu'à l'ordre n-1. On a donc $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, les A_i étant non vides et deux à deux disjoints (pour $i \leq n$). Par hypothèse, l'un des A_i, soit A_n, n'est pas connexe; il existe donc deux ensembles disjoints A_n^* et A_{n+1} tels que:

$$A_n = A_n^* \cup A_{n+1} ;$$

d'où le résultat.

Exercice 290

Soient E et F deux espaces topologiques, f une fonction ouverte surjective de E dans F. On suppose que F est connexe et que, pour pour tout y de F, $f^{-1}(\{y\})$ est connexe. Montrer alors que E est connexe.

Solution

Supposons par l'absurde que E ne soit pas connexe. Il existe deux ouverts disjoints A et B tels que $E = A \cup B$. f étant ouverte, les ensembles f(A) et f(B) sont ouverts dans F. Bien plus, ils sont disjoints. En effet, si un élément y leur était commun, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ serait non connexe, puisqu' on aurait alors:

$$f^{-1}(\{y\}) \subset A \cup B,$$
$$f^{-1}(\{y\}) \cap A \cap B = \phi,$$
$$f^{-1}(\{y\}) \cap A \neq \phi,$$
$$f^{-1}(\{y\}) \cap B \neq \phi.$$

Ainsi, on conclut que

$$f(E) = f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) = F$$

n'est pas connexe, ce qui est contraire aux hypothèses.

Exercice 291

On munit $\mathbb{R}^2$ de la topologie produit usuelle et on y considère les trois sous-ensembles:

$$A_n = \left\{\frac{1}{n}\right\} \times [-1,1], \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*,$$

$$B = \{0\} \times [-1,0[,$$

$$C = \{0\} \times]0,1].$$

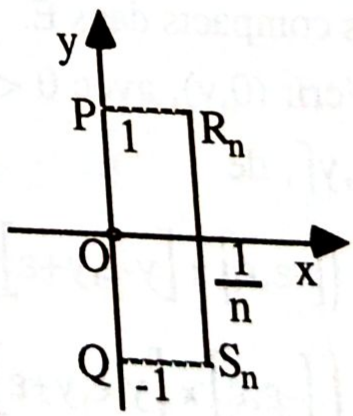
Soit le sous-espace E de $\mathbb{R}^2$ défini par:

$$E = B \cup C \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right).$$

1. Montrer que E est localement compact.
2. Montrer que les composantes connexes de E sont B, C et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Solution

1. Soit (x,y) un point de E.



S'il est dans A_n, il s'écrit $(x,y) = \left(\frac{1}{n}, y\right)$, avec $|y| \leq 1$. Il jouït, pour un ε convenable pris dans $\left]0, \frac{1}{n}\right[$, de

$$U_\varepsilon = \left(\left[\frac{1}{n}-\varepsilon, \frac{1}{n}+\varepsilon\right] \times \left[y-\varepsilon, y+\varepsilon\right]\right) \cap E$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{1}{n}-\varepsilon, \frac{1}{n}+\varepsilon\right] \times \left[y-\varepsilon, y+\varepsilon\right] & \text{si } y+\varepsilon < 1 \text{ et } y-\varepsilon > -1 \\ \left[\frac{1}{n}-\varepsilon, \frac{1}{n}+\varepsilon\right] \times \left[y-\varepsilon, 1\right] & \text{si } y+\varepsilon \geq 1 \\ \left[\frac{1}{n}-\varepsilon, \frac{1}{n}+\varepsilon\right] \times \left[-1, y+\varepsilon\right] & \text{si } y-\varepsilon \leq -1 \end{cases}$$

comme voisinage compact dans E.

S'il est dans B il s'écrit $(0,y)$, avec $-1 \leq y < 0$. Pour un ε convenable pris dans $]0,-y[$, l'ensemble

$$V_\varepsilon = \left(\left[-\varepsilon, \varepsilon\right] \times \left[y-\varepsilon, y+\varepsilon\right]\right) \cap E$$

$$= \begin{cases} \left[-\varepsilon, \varepsilon\right] \times \left[y-\varepsilon, y+\varepsilon\right] & \text{si } y-\varepsilon \geq -1 \\ \left[-\varepsilon, \varepsilon\right] \times \left[-1, y+\varepsilon\right] & \text{si } y-\varepsilon < -1 \end{cases}$$

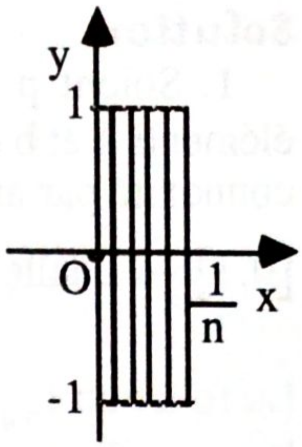
est un de ses voisinages compacts dans E.

S'il est dans C, il s'écrit $(0,y)$, avec $0 < y \leq 1$. Il jouït, pour un ε convenable pris dans $]0,y[$, de

$$W_\varepsilon = \left(\left[-\varepsilon, \varepsilon\right] \times \left[y-\varepsilon, y+\varepsilon\right]\right) \cap E$$

$$= \begin{cases} \left[-\varepsilon, \varepsilon\right] \times \left[y-\varepsilon, y+\varepsilon\right] & \text{si } y+\varepsilon < 1 \\ \left[-\varepsilon, \varepsilon\right] \times \left[y-\varepsilon, 1\right] & \text{si } y+\varepsilon \geq 1 \end{cases}$$

comme voisinage compact dans E. Ainsi, on conclut que tout point de E possède un voisinage compact. Donc, E est localement compact.



2. Les sous-ensembles envisagés sont connexes (produits de connexes) disjoints. Aucune réunion de deux d'entre eux n'est connexe. Chacun, ne pouvant être contenu dans aucun autre connexe, est une composante connexe.

Exercice 292

Laquelle des affirmations suivantes est correcte?

1. la connexité par arcs n'est pas héréditaire.
2. $\overline{A}$ connexe par arcs implique A connexe par arcs.

Solution

1. Correcte. L'espace usuel $(\mathbb{R},|.|)$ est connexe par arcs, alors que les sous-espaces $\left(\mathbb{Q},|.|_{\mathbb{Q}}\right)$ et $\left(C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q},|.|_{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}}\right)$ ne le sont pas, puisque non connexes. On peut aussi prendre $A =]-1,0[\cup]0,1[$ qui est non connexe par arcs (puisque non connexe) et $\overline{A} = [-1,1]$ lequel est connexe par arcs (puisque c'est un intervalle).

2. Fausse. Le sous-espace $\left(\mathbb{Q},|.|_{\mathbb{Q}}\right)$ n'est pas connexe par arcs et pourtant son adhérence $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, l'est.

Exercice 293

Soit g une fonction continue d'un espace connexe par arcs E dans un espace F.

1. Montrer que g(E) est connexe par arcs.
2. En déduire que:
   i) La connexité par arcs est une invariant topologique.
   ii) L'espace quotient $E/\mathcal{R}$ est connexe par arcs dès que E l'est.

Solution

1. Soient p et q deux points distincts de g(E). Il existe deux éléments a et b de E tels que $p = g(a)$ et $q = g(b)$. Conformément à la connexité par arcs de E, on peut trouver une fonction continue $f_{a,b}$: $[0,1] \to E$ telle que $a = f_{a,b}(1)$ et $b = f_{a,b}(0)$. Il en résulte que:

$$p = (g \circ f_{a,b})(1) \text{ et } q = (g \circ f_{a,b})(0).$$

La fonction $f_{p,q} = g \circ f_{a,b}$ constitue un chemin de g(E), liant p et q. Donc, g(E) est connexe par arcs.

2. i) C'est une conséquence directe de (1).

ii) Idem, car la surjection canonique $E \to E/\mathcal{R}$ est continue.

Exercice 294

Soit $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ l'espace produit associé à la famille d'espaces topologiques $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$. Montrer que pour que E soit connexe par arcs, il faut et il suffit que chaque E_i le soit.

Solution

La condition est nécessaire. En effet, si E est connexe par arcs, chaque E_i l'est de même grâce à la continuité de la projection

$$\pi_i : E \to E_i.$$

La condition est suffisante. Soient $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ et $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ deux points distincts de E. Il existe, pour tout indice i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, un chemin $f_i : [0,1] \to E_i$ tels que $p_i = f_i(0)$ et $q_i = f_i(1)$. Il en résulte que la fonction

$$f_{P,Q} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : [0,1] \to E,$$

dont toutes les composantes sont continues est continue et vérifie

$$f_{P,Q}(0) = (f_1(0), f_2(0), \ldots, f_n(0)) = (p_1, p_2, \ldots, p_n) = P$$

$$f_{P,Q}(1) = (f_1(1), f_2(1), \ldots, f_n(1)) = (q_1, q_2, \ldots, q_n) = Q.$$

C'est un chemin de E. Celui-ci est alors connexe par arcs.