SUPPLÉMENT POUR MON LIVRE « *TOPOLOGIE GÉNÉRALE ET ESPACES NORMÉS* »

Nawfal EL HAGE HASSAN

15 août 2011

Table des matières

INTRODUCTION

Ce document est constitué d'une série de suppléments pour mon livre *Topoloie Générale et Espaces Normés*. Je donne dans ce document certaines démonstrations que j'ai omises dans mon livre et je donne aussi 223 exercices avec leurs solutions. Également, pour rappeler le lecteur certaines notions que j'ai utilisées dans mon livre, j'ai ajouté quelques appendices surtout un sur la théorie des ensembles et un autre sur le corps des nombres réels.
J'accueillerai avec plaisir et gratitude toutes remarques et suggestions envoyées à l'adresse électronique suivante : nawfal.elhage-hassan@univ-orleans.fr

Chapitre 1

ESPACES TOPOLOGIQUES

Proposition. Soient f et g deux applications continues d'un espace topologique X dans $\mathbb{R}$, alors on a :

1. L'application $f+g : x \longmapsto f(x)+g(x)$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.
2. L'application $fg : x \longmapsto f(x)g(x)$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.
3. Si g ne s'annule pas, l'application $\dfrac{f}{g} : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. 1. Soit $x_0 \in X$. Montrons que $f+g$ est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, alors il existe un voisinage V_1 de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V_1$, on ait $|f(x)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. De même, comme g est continue en x_0, alors il existe un voisinage V_2 de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V_2$, on ait $|g(x)-g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $V = V_1 \cap V_2$, alors V est un voisinage de x_0 dans X et pour tout $x \in V$, on a :

$$|f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)| \leq |f(x)-f(x_0)| + |g(x)-g(x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Donc $f+g$ est continue en x_0. Par conséquent, $f+g$ est continue.
2. Soit $x_0 \in X$. Montrons que fg est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$. Soit :

$$\eta = \inf\left(1, \frac{\varepsilon}{|g(x_0)|+1+|f(x_0)|}\right)\,.$$

Alors $\eta > 0$ et on a $\eta\big(|g(x_0)|+\eta\big) + |f(x_0)|\eta \leq \varepsilon$. Comme f et g sont continues en x_0, alors il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V$, on ait $|f(x)-f(x_0)| < \eta$ et $|g(x)-g(x_0)| < \eta$. Donc pour tout $x \in V$, on a :

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)| &= |f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)| \\
&\leq |f(x)-f(x_0)|\,|g(x)| + |f(x_0)|\,|g(x)-g(x_0)| \\
&\leq |f(x)-f(x_0)|\,\big(|g(x_0)|+\eta\big) + |f(x_0)|\,|g(x)-g(x_0)| \\
&< \eta\big(|g(x_0)|+\eta\big) + |f(x_0)|\eta \leq \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Donc fg est continue en x_0. Par conséquent, fg est continue.
3. D'après 2, il suffit de montrer que l'application $\dfrac{1}{g} : x \longmapsto \dfrac{1}{g(x)}$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.

Soient $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$. Soit $\eta = \inf\left(\frac{\varepsilon\,|g(x_0)|^2}{2}, \frac{|g(x_0)|}{2}\right)$, alors $\eta > 0$. Comme g est continue en x_0, alors il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V$, on ait $|g(x) - g(x_0)| < \eta$. Alors pour tout $x \in V$, on a $\frac{|g(x_0)|}{2} < |g(x)|$ et

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| = \frac{|g(x) - g(x_0)|}{|g(x)|\,|g(x_0)|} \leq \frac{2|g(x) - g(x_0)|}{|g(x_0)|^2} < \frac{2\eta}{|g(x_0)|^2} \leq \varepsilon\,.$$

Donc l'application $\frac{1}{g}$ est continue en x_0. Par conséquent, $\frac{1}{g}$ est continue. ∎

Proposition. Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f est une application fermée.

(ii) Pour tout sous-ensemble B de Y et pour tout ouvert U dans X tel que $f^{-1}(B) \subset U$, il existe un ouvert V dans Y tel que $B \subset V$ et $f^{-1}(V) \subset U$.

(iii) Pour tout point $y \in Y$ et pour tout ouvert U dans X tel que $f^{-1}\big(\{y\}\big) \subset U$, il existe un voisinage V de y dans Y tel que $f^{-1}(V) \subset U$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient B un sous-ensemble de Y et U un ouvert de X tels que $f^{-1}(B) \subset U$. Soit $F = X \setminus U$, alors F est fermé dans X et on a $f(F) \cap B = \emptyset$. Comme f est une application fermée, alors $f(F)$ est un fermé de Y. Donc $V = Y \setminus f(F)$ est un ouvert de Y contenant B et on a $f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}\big(f(F)\big) \subset X \setminus F = U$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soient F un fermé de X et $A = f(F)$. Alors $X \setminus F$ est un ouvert de X et on a $f^{-1}(Y \setminus A) \subset X \setminus F$. Donc il existe un ouvert V de Y tel que $Y \setminus A \subset V$ et $f^{-1}(V) \subset X \setminus F$. Par conséquent, on a $V = Y \setminus A$, d'où A est un fermé de Y. Donc f est une application fermée.
L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons que pour tout point $y \in Y$ et pour tout ouvert U dans X tel que $f^{-1}\big(\{y\}\big) \subset U$, il existe un voisinage V de y dans Y tel que $f^{-1}(V) \subset U$. Soient B un sous-ensemble de Y et U un ouvert dans X tels que $f^{-1}(B) \subset U$. Pour tout $y \in B$, il existe un voisinage ouvert V_y de y dans Y tel que $f^{-1}(V_y) \subset U$. Soit $V = \bigcup_{y \in B} V_y$, alors V est un ouvert de Y tel que $B \subset V$ et $f^{-1}(V) = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(V_y) \subset U$. ∎

Proposition. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue surjective. On munit $X/\mathcal{R}_f$ de la topologie quotient. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) L'application $\widetilde{f} : X/\mathcal{R}_f \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme.

(ii) L'image par f de tout ouvert de X saturé pour $\mathcal{R}_f$ est un ouvert de Y.

(iii) L'image par f de tout fermé de X saturé pour $\mathcal{R}_f$ est un fermé de Y.

(iv) Pour toute partie U de Y, U est ouvert dans Y si et seulement si $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

(v) Pour toute partie F de Y, F est fermé dans Y si et seulement si $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit U un ouvert de X saturé pour $\mathcal{R}_f$, d'où on a $U = q^{-1}(q(U))$. Par conséquent, $q(U)$ est un ouvert de $X/\mathcal{R}_f$. Comme $\widetilde{f}$ est un homéomorphisme et $f(U) = \widetilde{f}(q(U))$, on en déduit que $f(U)$ est un ouvert de Y.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Notons d'abord que $\widetilde{f}$ est bijective car f est surjective. Puisque f est continue, alors $\widetilde{f}$ est continue. Il reste à montrer que $\widetilde{f}$ est ouverte. Soit W un ouvert de $X/\mathcal{R}_f$, alors $q^{-1}(W)$ est un ouvert de X saturé pour $\mathcal{R}_f$. Par conséquent, $f\big(q^{-1}(W)\big)$ est un ouvert de Y. Or on a $f\big(q^{-1}(W)\big) = \widetilde{f}\big(q(q^{-1}(W))\big) = \widetilde{f}(W)$, donc $\widetilde{f}(W)$ est un ouvert de Y.
Les équivalences (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) et (iv) $\Longleftrightarrow$ (v) s'obtiennent par passage aux complémentaires.
Preuve de (i) $\Longrightarrow$ (iv). Soit U une partie de Y, on a $f^{-1}(U) = q^{-1}\big(\widetilde{f}^{-1}(U)\big)$. Puisque $\widetilde{f}$ est un homéomorphisme de $X/\mathcal{R}_f$ sur Y, U est un ouvert de Y si et seulement si $\widetilde{f}^{-1}(U)$ est un ouvert de $X/\mathcal{R}_f$ si et seulement si $q^{-1}\big(\widetilde{f}^{-1}(U)\big) = f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.
Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (i). L'application $\widetilde{f}$ est continue et bijective. Il reste à montrer que $\widetilde{f}$ est ouverte. Soit W un ouvert de $X/\mathcal{R}_f$, on a $f^{-1}\big(\widetilde{f}(W)\big) = q^{-1}\big(\widetilde{f}^{-1}\big(\widetilde{f}(W)\big)\big) = q^{-1}(W)$, donc $f^{-1}\big(\widetilde{f}(W)\big)$ est un ouvert de X, d'où $\widetilde{f}(W)$ est un ouvert de Y. ■

Proposition. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans un espace topologique X et $\ell \in X$.

1. Si ℓ est une limite de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$.
2. Si X est séparé et si $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente dans X, alors sa limite est unique et c'est la seule valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.
3. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, alors toute sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$ converge également vers ℓ.
4. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite ℓ si et seulement si les sous-suites $(x_{2n})_{n\geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers ℓ
5. Si ℓ est une valeur d'adhérence d'une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$.
6. Si ℓ est une limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$. Réciproquement, si ℓ admet une base dénombrable de voisinages et si ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$, alors ℓ est une limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$.

Démonstration. 1. Il résulte immédiatement de la définition 1.7.1 que si ℓ est une limite de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$.
2. Ceci résulte de la proposition 1.6.3 et de la remarque 1.7.2. Mais donnons une preuve directe. On suppose ici que X est séparé et que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite $\ell \in X$. D'après 1, ℓ est aussi une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$. Donc il suffit de montrer que ℓ est la seule valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$. Soit ℓ' une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$. Si $\ell \neq \ell'$, comme X est séparé, il existe un voisinage V de ℓ dans X et un voisinage W de ℓ' dans X tels que $V \cap W = \emptyset$. Puisque ℓ est une limite de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n \in V$. Comme ℓ' est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$, il existe $n \geq N$ tel que $x_n \in W$. D'où on a $V \cap W \neq \emptyset$, ce qui est impossible. Donc on a $\ell' = \ell$.
3. Ceci résulte de la proposition 1.6.5, mais on va donner une preuve directe en n'utilisant que les définitions. Soit $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$, alors pour tout $k \geq 0$, on a $n_k \geq k$. Soit V un voisinage de ℓ dans X, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n \in V$. Alors pour tout $k \geq N$, on a $n_k \geq n_N \geq N$, d'où $x_{n_k} \in V$. Donc la sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ converge vers ℓ.
4. Ceci résulte de la proposition 1.6.4 et de la remarque 1.7.2. Mais donnons une preuve directe. Il résulte de 3 que si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite ℓ, alors les sous-suites $(x_{2n})_{n\geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers ℓ.
Réciproquement, supposons que les sous-suites $(x_{2n})_{n\geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers ℓ. Soit V un voisinage de ℓ dans X. Alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on ait $x_{2n} \in V$, et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, on ait $x_{2n+1} \in V$. Soit $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$, alors

$N \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \geq N$, on a $x_n \in V$. Donc $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.
5. Supposons que ℓ est une valeur d'adhérence d'une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$. Soient V un voisinage de ℓ dans X et $N \in \mathbb{N}$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq N$ et $x_{n_k} \in V$. Or on a $n_k \geq k$, d'où $n_k \geq N$ et $x_{n_k} \in V$. Donc ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$.
6. Il résulte de 1 et 5 que si ℓ est une limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$. Réciproquement, supposons que ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$ et que ℓ admet une base dénombrable de voisinages dans X. Soit $\big(V_n\big)_{n\geq 0}$ une telle base. Pour tout $n \geq 0$, on pose $U_n = \bigcap\limits_{k=0}^{n} V_k$, alors $\big(U_n\big)_{n\geq 0}$ est une base dénombrable de voisinages de ℓ dans X telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $U_{n+1} \subset U_n$. On construit par récurrence une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que pour tout $k \geq 0$, on ait $x_{n_k} \in U_k$. Soit $n_0 = \inf\big\{n \geq 0\ ;\ x_n \in U_0\big\}$. Soit $k \geq 1$ et supposons n_{k-1} construit, on pose alors $n_k = \inf\big\{n > n_{k-1}\ ;\ x_n \in U_k\big\}$. Alors $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $k \geq 0$, on ait $x_{n_k} \in U_k$. Montrons que $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ converge vers ℓ. Soit V un voisinage de ℓ dans X, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $U_{k_0} \subset V$. Alors pour tout $k \geq k_0$, on a $U_k \subset U_{k_0} \subset V$, d'où $x_{n_k} \in U_k \subset V$. Donc $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ converge vers ℓ. ■

Théorème (**Urysohn**). Soient X un espace topologique et Y un sous-ensemble de X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Pour toute fonction continue $f : Y \longrightarrow [-1,\, 1]$, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [-1,\, 1]$ prolongeant f.

(ii) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et pour toute fonction continue $f : Y \longrightarrow [a,\, b]$, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [a,\, b]$ prolongeant f.

(iii) Deux sous-ensembles complètement séparés dans Y sont aussi complètement séparés dans X.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $f : Y \longrightarrow [a,\, b]$ une fonction continue. Soit $\varphi : [a,\, b] \longrightarrow [-1,\, 1]$ un homéomorphisme, voir exemple 1.4.1. Alors $\varphi \circ f$ est une fonction continue de Y dans $[-1,\, 1]$. Par hypothèse, il existe une fonction continue $\widetilde{f} : X \longrightarrow [-1,\, 1]$ prolongeant $\varphi \circ f$. Alors $g = \varphi^{-1} \circ \widetilde{f}$ est une fonction continue de X dans $[a,\, b]$ prolongeant f.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soient A et B deux sous-ensembles de Y complètement séparés dans Y. Soit $f : Y \longrightarrow [0,\, 1]$ une fonction continue telle que $f_{|_A} = 0$ et $f_{|_B} = 1$. Par hypothèse, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [0,\, 1]$ prolongeant f. Alors on a aussi $g_{|_A} = 0$ et $g_{|_B} = 1$. Donc A et B sont complètement séparés dans X.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Montrons d'abord que si $M > 0$ et si $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $|f(x)| \leq M$, pour tout $x \in Y$, alors il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(a) $|g(x)| \leq \frac{1}{3}M$, pour tout $x \in X$.

(b) $|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}M$, pour tout $x \in Y$.

En effet, soient $A = f^{-1}\big(\big[-M,\, \frac{-1}{3}M\big]\big)$ et $B = f^{-1}\big(\big[\frac{1}{3}M,\, M\big]\big)$. Alors A et B sont complètement séparés dans Y par f. Par hypothèse, A et B sont complètement séparés dans X, donc il existe une fonction continue $h : X \longrightarrow [0,\, 1]$ telle que $h_{|_A} = 0$ et $h_{|_B} = 1$. Pour tout $x \in X$, soit $g(x) = \frac{2}{3}M\big(h(x) - \frac{1}{2}\big)$. Alors g est une fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés (a) et (b).
Soit $f : Y \longrightarrow [-1,\, 1]$ une fonction continue. On va construire par récurrence sur n une suite $\big(g_n\big)_{n\geq 1}$ de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ telle que :

(α) $|g_n(x)| \leq \frac{1}{3}\big(\frac{2}{3}\big)^{n-1}$, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in X$.

(β) $\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in Y$.

En effet, comme on a $|f(x)| \leq 1$, pour tout $x \in Y$, alors on obtient g_1 par ce qui précède. Ensuite, supposons que l'on a construit des fonctions continues $g_1, \ldots, g_n$ de X dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$|g_i(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}, \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ et pour tout } x \in X,$$

$$\left|f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^i, \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ et pour tout } x \in Y.$$

Alors $f - \sum_{i=1}^{n} g_{i|_Y}$ est une fonction continue de Y dans $\mathbb{R}$ telle que $\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} g_{i|_Y}(x)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$, pour tout $x \in Y$. On applique de nouveau le raisonnement précédent à $f - \sum_{i=1}^{n} g_{i|_Y}$, on obtient une fonction continue $g_{n+1} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$|g_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \text{ pour tout } x \in X,$$

$$\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n+1} g_i(x)\right| \leq \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \text{ pour tout } x \in Y.$$

Ainsi de suite, on construit la suite $\left(g_n\right)_{n\geq 1}$. Puisque la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ est convergente, on déduit de la propriété (α) que pour tout $x \in X$, la série $\sum_{n\geq 1} g_n(x)$ est convergente. On pose $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$, pour tout $x \in X$. Alors g est une fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ telle que $|g(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |g_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1$, pour tout $x \in X$. Comme on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, on déduit de la propriété (β) que pour tout $x \in Y$, on a $g(x) = f(x)$. Donc g est une fonction continue de X dans $[-1,\, 1]$ prolongeant f. ■

Théorème (**Tietze**). Soit X un espace topologique séparé. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) X est un espace normal.

(ii) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, pour tout ensemble fermé A dans X et pour toute fonction continue $f : A \longrightarrow [a,\, b]$, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [a,\, b]$ prolongeant f.

(iii) Pour tout ensemble fermé A dans X et pour toute fonction continue $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ prolongeant f.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, A un sous-ensemble fermé de X et $f : A \longrightarrow [a,\, b]$ une fonction continue. Pour montrer qu'il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [a,\, b]$ prolongeant f, d'après le théorème précédent, il suffit de montrer que deux sous-ensembles de A complètement séparés dans A sont aussi complètement séparés dans X. Soient C et D deux sous-ensembles de A complètement séparés dans A. Donc il existe une fonction continue $h : A \longrightarrow [0,\, 1]$ telle que $h_{|_C} = 0$ et $h_{|_D} = 1$. Soient $F = h^{-1}\left(\left[0,\, \frac{1}{3}\right]\right)$

et $G = h^{-1}\big([\frac{2}{3},\, 1]\big)$. Alors F et G sont des sous-ensembles fermés disjoints dans A tels que $C \subset F$ et $D \subset G$, d'où F et G sont des sous-ensembles fermés disjoints dans X. Comme X est normal, d'après le théorème 1.10.2, F et G sont complètement séparés dans X. Par conséquent, C et D sont complètement séparés dans X.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Si X n'est pas un espace normal, alors il existe des sous-ensembles fermés disjoints E et F dans X tels que pour tous ouverts U et V dans X tels que $E \subset U$ et $F \subset V$, on ait $U \cap V \neq \emptyset$. Alors $E \cup F$ est un fermé de X et l'application $f : E \cup F \longrightarrow [0,\, 1]$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in E$, et $f(x) = 1$ si $x \in F$ est continue, mais on ne peut pas prolonger f par continuité à l'espace X tout entier, ce qui contredit l'hypothèse. Donc X est bien un espace normal.
Pour montrer l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i), on fait exactement le même raisonnement comme ci-dessus.
Preuve de (i) $\Longrightarrow$ (iii). Soient A un sous-ensemble fermé de X et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,\, 1[$ un homéomorphisme, voir exemple 1.4.1. Alors $\varphi \circ f : A \longrightarrow]-1,\, 1[$ est une fonction continue. Comme X est normal, d'après la propriété (ii), il existe une fonction continue $h : X \longrightarrow [-1,\, 1]$ telle que pour tout $x \in A$, on ait $h(x) = (\varphi \circ f)(x)$. Soit $B = h^{-1}\big(\{-1, 1\}\big)$, alors B est un fermé de X tel que $B \cap A = \emptyset$. Soit $\psi : X \longrightarrow [0,\, 1]$ une fonction continue telle que $\psi_{|_A} = 1$ et $\psi_{|_B} = 0$. Pour tout $x \in X$, on pose $\widetilde{f}(x) = h(x)\psi(x)$, alors $\widetilde{f}$ est une fonction continue de X dans $]-1,\, 1[$ prolongeant $\varphi \circ f$. Soit $g = \varphi^{-1} \circ \widetilde{f}$, alors g est une fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ prolongeant f. ■

Supplément d'exercices

Exercice 1.36. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour tout $i \in I$, soit A_i un sous-espace topologique de X_i. Montrer que la topologie induite sur $A = \prod_{i\in I} A_i$ par la topologie produit sur $X = \prod_{i\in I} X_i$ coïncide avec la topologie produit des topologies des sous-espaces A_i.
Solution. Pour montrer que la topologie induite sur A par celle de X coïncide avec la topologie produit des topologies des sous-espaces A_i, d'après la proposition 1.4.7, il suffit de montrer que si A est muni de la topologie induite par celle de X, alors pour tout espace topologique E, une application $g : E \longrightarrow A$ est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $p_i \circ g$ est continue de E dans A_i, où p_i est la projection canonique de A sur A_i. Notons également p_i la projection canonique de A sur A_i. Alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "p_i\circ g"'] & A \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "p_i"] & X \arrow[d, "p_i"] \\
 & A_i \arrow[r, "\imath"] & X_i
\end{tikzcd}$$

Où $\imath$ désigne l'injection canonique. Supposons d'abord que pour tout $i \in I$, l'application $p_i \circ g$ est continue de E dans A_i. Alors pour tout $i \in I$, $p_i \circ \imath \circ g = \imath \circ p_i \circ g$ est continue de E dans X_i. On en déduit que $\imath \circ g$ est continue de E dans X. Il résulte de la proposition 1.4.6 que g est continue de E dans A.
Réciproquement, supposons que g est continue de E dans A muni de la topologie induite par celle de X. Alors $\imath \circ g$ est continue de E dans X, d'où pour tout $i \in I$, $\imath \circ p_i \circ g = p_i \circ \imath \circ g$ est continue de E dans X_i. Il résulte de la proposition 1.4.6 que pour tout $i \in I$, $p_i \circ g$ est continue de E dans A_i.

Exercice 1.37. Soient $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, Z un espace topologique, A une partie de Z et $a \in \overline{A}$.

1. Soient X un ensemble et pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X \longrightarrow Y_i$ une application. On munit X de la topologie initiale associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$. Soit $g : A \longrightarrow X$ une application. Montrer qu'un point $\ell \in X$ est une limite de g en a si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i(\ell)$ est une limite de $f_i \circ g$ en a.
2. On munit $\prod\limits_{i\in I} Y_i$ de la topologie produit. En déduire qu'une application $g : A \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} Y_i$ admet $(\ell_i)_{i\in I}$ comme limite en a si et seulement si pour tout $i \in I$, ℓ_i est une limite de $p_i \circ g$ en a, où $p_i : \prod\limits_{i\in I} Y_i \longrightarrow Y_i$ est la projection canonique.

Solution. 1. Supposons d'abord que $\ell \in X$ est une limite de g en a. Puisque les f_i sont continues en ℓ, d'après le corollaire 1.6.2, pour tout $i \in I$, $f_i(\ell)$ est une limite de $f_i \circ g$ en a.
Réciproquement, supposons que pour tout $i \in I$, $f_i(\ell)$ est une limite de $f_i \circ g$ en a. Soit U un ouvert de X contenant ℓ. D'après le lemme 1.4.1, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que pour tout $i \in J$, il existe un ouvert U_i de Y_i contenant $f_i(\ell)$ tels que $\bigcap\limits_{i\in J} f_i^{-1}(U_i) \subset U$. Or pour tout $i \in J$, il existe un voisinage W_i de a dans X tel que $(f_i \circ g)(W_i \cap A) \subset U_i$, d'où $g(W_i \cap A) \subset f_i^{-1}(U_i)$. Soit $W = \bigcap\limits_{i\in J} W_i$, alors W est un voisinage de a dans X et on a $g(W \cap A) \subset U$. Donc ℓ est une limite de g en a.
2. Ceci résulte immédiatement de 1.

Exercice 1.38. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence ouverte sur un espace topologique X. Montrer que si X admet une base dénombrable d'ouverts, alors il en est de même pour l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$.
Solution. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts de X. Puisque l'application quotient $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ est ouverte, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q(V_n)$ est un ouvert de $X/\mathcal{R}$. Montrons que $(q(V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une base d'ouverts de $X/\mathcal{R}$. Soit U un ouvert non vide de $X/\mathcal{R}$, alors $q^{-1}(U)$ est un ouvert non vide de X, donc il existe un sous-ensemble J de $\mathbb{N}$ tel que $q^{-1}(U) = \bigcup\limits_{n\in J} V_n$. Puisque q est surjective, alors on a $U = q(q^{-1}(U)) = \bigcup\limits_{n\in J} q(V_n)$. Par conséquent, $(q(V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une base dénombrable d'ouverts de $X/\mathcal{R}$.

Exercice 1.39. Soient X un espace topologique et Γ un sous-groupe du groupe des homéomorphismes de X. Soit $\mathcal{R}_\Gamma$ la relation d'équivalence sur X définie par :

$$x\,\mathcal{R}_\Gamma\,y \iff \text{il existe } \sigma \in \Gamma \text{ tel que } y = \sigma(x)\,.$$

On note l'espace topologique quotient X/Γ.

1. Montrer que $\mathcal{R}_\Gamma$ est une relation d'équivalence ouverte sur X.
2. Montrer que $\mathcal{R}_\Gamma$ n'est pas en général une relation d'équivalence fermée sur X.
3. Montrer que si Γ un sous-groupe fini, alors $\mathcal{R}_\Gamma$ est une relation d'équivalence ouverte et fermée sur X.

Solution. 1. Soient $q : X \longrightarrow X/\Gamma$ l'application quotient et U un ouvert de X. On a $q^{-1}(q(U)) = \bigcup\limits_{\sigma\in\Gamma} \sigma(U)$. Or pour tout $\sigma \in \Gamma$, $\sigma(U)$ est ouvert dans X, donc $q^{-1}(q(U))$ est ouvert dans X. Par conséquent, $q(U)$ est un ouvert de X/Γ, donc q est une application ouverte.
2. Si $X = \mathbb{R}$ et $\Gamma = \mathbb{Q}$, le groupe $\mathbb{Q}$ agit par translation sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ et $q^{-1}\big(\{q(x)\}\big)$ est dense mais n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$. Donc $\mathcal{R}_\Gamma$ n'est pas une

relation d'équivalence fermée dans $\mathbb{R}$.
3. Il reste à montrer que q est aussi une application fermée. Soit F un fermé de X. On a $q^{-1}(q(F)) = \underset{\sigma\in\Gamma}{\cup}\sigma(F)$. Or pour tout $\sigma \in \Gamma$, $\sigma(F)$ est fermé dans X, et c'est une réunion finie, donc $q^{-1}(q(U))$ est fermé dans X. Par conséquent, $q(U)$ est un fermé de X/Γ, donc q est une application fermée.

Exercice 1.40. Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un espace topologique X et $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) La relation $\mathcal{R}$ est ouverte.

(ii) L'intérieur de toute partie de X saturée pour $\mathcal{R}$ est saturé pour $\mathcal{R}$.

(iii) L'adhérence de toute partie de X saturée pour $\mathcal{R}$ est saturé pour $\mathcal{R}$.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit A une partie de X saturée pour $\mathcal{R}$, *i.e.* $A = q^{-1}(q(A))$. Puisque l'application q est ouverte, par la proposition 1.3.3, on a $q(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{q(A)}}$. Comme q est aussi continue, on a $q^{-1}\big(\overset{\circ}{\overbrace{q(A)}}\big) \subset \overset{\circ}{\overbrace{q^{-1}(q(A))}}$. Par conséquent, on a :

$$\overset{\circ}{A} \subset q^{-1}\big(q(\overset{\circ}{A})\big) \subset q^{-1}\big(\overset{\circ}{\overbrace{q(A)}}\big) \subset \overset{\circ}{\overbrace{q^{-1}(q(A))}} = \overset{\circ}{A}\ .$$

D'où on a $\overset{\circ}{A} = q^{-1}\big(q(\overset{\circ}{A})\big)$, donc $\overset{\circ}{A}$ est saturé pour $\mathcal{R}$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit U un ouvert de X. Posons $A = q^{-1}(q(U))$, alors A est saturé pour $\mathcal{R}$, donc $\overset{\circ}{A}$ est saturé pour $\mathcal{R}$. Autrement dit, on a $\overset{\circ}{A} = q^{-1}\big(q(\overset{\circ}{A})\big)$. Par conséquent, $q(\overset{\circ}{A})$ est un ouvert de $X/\mathcal{R}$. Puisque q est surjective, on a $q(A) = q(U)$. Or on a $U \subset q^{-1}(q(U)) = A$, d'où $U \subset \overset{\circ}{A}$ et donc on a $q(U) \subset q(\overset{\circ}{A})$. Comme $q(\overset{\circ}{A})$ est un ouvert de $X/\mathcal{R}$ contenu dans $q(A) = q(U)$, alors on a $q(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{q(U)}}$. Par conséquent, on a $q(U) = \overset{\circ}{\overbrace{q(U)}}$. Autrement dit, $q(U)$ est ouvert dans $X/\mathcal{R}$. Donc l'application quotient q est ouverte.
L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) résulte du fait qu'une partie A de X est saturée pour $\mathcal{R}$ si et seulement si son complémentaire $X \setminus A$ est saturé pour $\mathcal{R}$ et de la relation $\overline{X \setminus A} = X \setminus \overset{\circ}{A}$.

Exercice 1.41. Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un espace topologique X et $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $\mathcal{R}$ est fermée.

(ii) Pour tout $x \in X$ et pour tout ouvert U de X contenant la classe de x, $q^{-1}\big(\{q(x)\}\big)$, il existe un ouvert V de X saturé pour $\mathcal{R}$ tel que $q^{-1}\big(\{q(x)\}\big) \subset V \subset U$.

En déduire que si $\mathcal{R}$ est fermée, alors pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage V de la classe de x dans X, $q(V)$ est un voisinage de $q(x)$ dans $X/\mathcal{R}$.
Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $x \in X$ et U un ouvert de X contenant $q^{-1}\big(\{q(x)\}\big)$. Soit $F = X \setminus U$, alors F est un fermé de X. Comme on a $q^{-1}\big(\{q(x)\}\big) \cap F = \emptyset$, alors on a $q(x) \notin q(F)$. Soit $W = (X/\mathcal{R}) \setminus q(F)$. Comme $\mathcal{R}$ est fermée, alors W est un ouvert de $X/\mathcal{R}$ et on a $q^{-1}(W) \cap q^{-1}(q(F)) = \emptyset$. Or on a $F \subset q^{-1}(q(F))$, d'où $V = q^{-1}(W)$ est un ouvert de X saturé pour $\mathcal{R}$ tel que $q^{-1}\big(\{q(x)\}\big) \subset V \subset U$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit F un fermé de X. Soit $U = X \setminus F$, alors U est un ouvert de X. Si pour tout $x \in U$, on a $q^{-1}\big(\{q(x)\}\big) \cap F \neq \emptyset$, alors on a $q(F) = X/\mathcal{R}$ et donc $q(F)$ est fermé

dans $X/\mathcal{R}$. Supposons maintenant que l'ensemble $V = \{x \in U \; ; \; q^{-1}(\{q(x)\}) \cap F = \emptyset\}$ est non vide. Par hypothèse, pour tout $x \in V$, il existe un ouvert W_x de X saturé pour $\mathcal{R}$ tel que $q^{-1}(\{q(x)\}) \subset W_x \subset U$. Puisque W_x est saturé pour $\mathcal{R}$, alors pour tout $y \in W_x$, on a aussi $q^{-1}(\{q(y)\}) \subset W_x$, d'où $W_x \subset V$. Par conséquent, on a $V = \underset{x\in V}{\cup} W_x$, donc V est un ouvert de X saturé pour $\mathcal{R}$. Comme on a $q^{-1}(q(F)) = X \setminus V$, alors $q^{-1}(q(F))$ est fermé dans X, d'où $q(F)$ est fermé dans $X/\mathcal{R}$. Par conséquent, l'application quotient q est fermé.
Supposons maintenant que $\mathcal{R}$ est fermée. Alors pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage V de la classe de x dans X, il existe un ouvert U de X saturé pour $\mathcal{R}$ tel que $q^{-1}(\{q(x)\}) \subset U \subset V$. Par conséquent, $q(U)$ est un ouvert de $X/\mathcal{R}$ contenant $q(x)$ et contenu dans $q(V)$. Donc $q(V)$ est un voisinage de $q(x)$ dans $X/\mathcal{R}$.

Exercice 1.42. Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue.

1. Soient A et B des parties de X telles que $\overline{A} = \overline{B}$. Montrer que l'on a $\overline{f(A)} = \overline{f(B)}$.
2. Soit A une partie de X. Montrer que si A est dense dans X et $f(X)$ est dense dans Y, alors $f(A)$ est dense dans Y. En particulier, si A est dense dans X et f est surjective, alors $f(A)$ est dense dans Y.

Solution. 1. Puisque f est continue, il résulte du théorème 1.3.1 que l'on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ et $f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)}$. Si $\overline{A} = \overline{B}$, alors on a $f(A) \subset f(\overline{A}) = f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)}$ et $f(B) \subset f(\overline{B}) = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, donc $\overline{f(A)} = \overline{f(B)}$.
2. Par hypothèse, on a $\overline{A} = X$ et $\overline{f(X)} = Y$. D'après 1, on a $\overline{f(A)} = \overline{f(X)}$, d'où $\overline{f(A)} = Y$, *i.e.* $f(A)$ est dense dans Y.

Exercice 1.43. Soient $\mathcal{T}_{sci} = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{]a, +\infty[\; ; \; a \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{T}_{scs} = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{]-\infty, a[\; ; \; a \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\mathcal{T}_{sci}$ et $\mathcal{T}_{scs}$ sont des topologies sur $\mathbb{R}$.
Solution. Par définition, on a $\mathbb{R}, \emptyset \in \mathcal{T}_{sci}$. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $]a, +\infty[\cap]b, +\infty[=]\max(a,b), +\infty[\in \mathcal{T}_{sci}$. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}$. Si $\inf_{i\in I} a_i = -\infty$, on a $\underset{i\in I}{\cup}]a_i, +\infty[= \mathbb{R} \in \mathcal{T}_{sci}$. Si $\inf_{i\in I} a_i = a \in \mathbb{R}$, on a $\underset{i\in I}{\cup}]a_i, +\infty[=]a, +\infty[\in \mathcal{T}_{sci}$. Donc $\mathcal{T}_{sci}$ est bien une topologie sur $\mathbb{R}$. On fait le même raisonnement pour montrer que $\mathcal{T}_{scs}$ est aussi une topologie sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.0.1. Soient X un espace topologique et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est **semi-continue inférieurement** (*resp.* **semi-continue supérieurement**) si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]t, +\infty[)$ (*resp.* $f^{-1}(]-\infty, t[)$) est un ouvert de X.

Remarque 1.0.1. Soient X un espace topologique et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Soit $g = -f$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g^{-1}(]-\infty, t[) = f^{-1}(]-t, +\infty[)$ et $g^{-1}(]t, +\infty[) = f^{-1}(]-\infty, -t[)$. On en déduit que f est semi-continue inférieurement si et seulement si $-f$ est semi-continue supérieurement.

Exemple 1.0.1. Soient A un sous-ensemble d'un espace topologique X et $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbf{1}_A{}^{-1}(]t, +\infty[) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad t \geq 1\,, \\ A & \text{si} \quad 0 \leq t < 1\,, \\ X & \text{si} \quad t < 0\,. \end{cases}$$

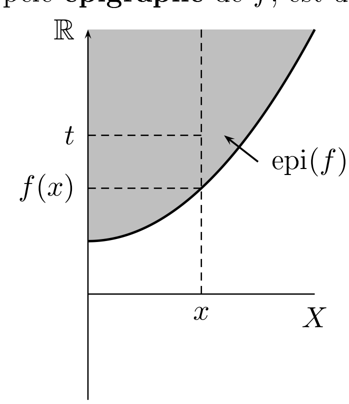
$$\mathbf{1}_A{}^{-1}\big(]-\infty,\, t[\big) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad t \leq 0\,, \\ X \setminus A & \text{si} \quad 0 < t \leq 1\,, \\ X & \text{si} \quad 1 < t\,. \end{cases}$$

Par conséquent, on a :

1. La fonction $\mathbf{1}_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement si et seulement si A est ouvert dans X.
2. La fonction $\mathbf{1}_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement si et seulement si A est fermé dans X.
3. La fonction $\mathbf{1}_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue si et seulement si A est à la fois ouvert et fermé dans X.

Exercice 1.44. Soient X un espace topologique et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

1. Montrer que f est semi-continue inférieurement (*resp.* semi-continue supérieurement) si, pour tout $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x dans X tel que pour tout $y \in V$, on ait $f(y) > f(x) - \varepsilon$ (*resp.* $f(y) < f(x) + \varepsilon$).
2. Montrer que si f est continue de X dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, alors f est semi-continue inférieurement et supérieurement. Montrer qu'inversement si f est à la fois semi-continue inférieurement et supérieurement, alors f est continue.
3. Montrer que f est semi-continue inférieurement (*resp.* semi-continue supérieurement) si et seulement si elle est continue de X dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie $\mathcal{T}_{sci}$ (*resp.* $\mathcal{T}_{scs}$).
4. Montrer que f est semi-continue inférieurement si et seulement si l'ensemble $\text{epi}(f) = \big\{(x,t) \in X \times \mathbb{R}\,;\; f(x) \leq t\big\}$, appelé **épigraphe** de f, est une partie fermée de $X \times \mathbb{R}$.



Solution. 1. Supposons d'abord que f est semi-continue inférieurement. Soient $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, alors $V = f^{-1}\big(]f(x) - \varepsilon,\, +\infty[\big)$ est un ouvert de X contenant x et pour tout $y \in V$, on a $f(y) > f(x) - \varepsilon$.
Réciproquement, supposons que pour tout $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x dans X tel que pour tout $y \in V$, on ait $f(y) > f(x) - \varepsilon$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $x \in f^{-1}\big(]a,\, +\infty[\big)$, alors $f(x) > a$. Soit $\varepsilon = f(x) - a > 0$, il existe un voisinage V de x dans X tel que pour tout $y \in V$, on ait $f(y) > f(x) - \varepsilon = a$, d'où $V \subset f^{-1}(]a,\, +\infty[)$. Ainsi, $f^{-1}\big(]a,\, +\infty[\big)$ est voisinage de chacun de ses points, donc $f^{-1}\big(]a,\, +\infty[\big)$ est un ouvert de X, voir proposition 1.1.2. Par conséquent, f est semi-continue inférieurement.
Pour montrer la deuxième partie de la propriété, on utilise ce que l'on vient de démontrer et la

remarque 1.0.1.
2. Ceci n'est autre que la traduction de l'exercice 1.34.
3. Ceci résulte immédiatement de la définition de la topologie $\mathcal{T}_{sci}$ (*resp.* $\mathcal{T}_{scs}$).
4. Supposons d'abord que epi(f) est fermé dans $X \times \mathbb{R}$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $x \in f^{-1}\big(]a, +\infty[\big)$. Alors on a $a < f(x)$, d'où $(x, a) \notin$ epi(f). Comme $(X \times \mathbb{R}) \setminus$ epi(f) est ouvert dans $X \times \mathbb{R}$, alors il existe un voisinage ouvert V_x de x dans X et il existe $\varepsilon > 0$ tels que $V \times]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset (X \times \mathbb{R}) \setminus \mathrm{epi}(f)$. Donc pour tout $y \in V_x$, on a $a < f(y)$. Autrement dit, on a $V_x \subset f^{-1}\big(]a, +\infty[\big)$. On en déduit que $f^{-1}\big(]a, +\infty[\big)$ est un ouvert de X. Donc f est semi-continue inférieurement.
Réciproquement, supposons que f est semi-continue inférieurement. Soit Y l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la topologie $\mathcal{T}_{sci}$. Alors les applications

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{R} & \longrightarrow & Y \times Y \\ (x,t) & \longmapsto & (f(x), -t) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} Y \times Y & \longrightarrow & Y \\ (s,t) & \longmapsto & s+t \end{array}$$

sont continues. Par conséquent, l'application $g : (x,t) \longmapsto f(x) - t$ est semi-continue inférieurement de $X \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, d'où epi$(f) = g^{-1}\big(]-\infty, 0]\big)$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$.

Exercice 1.45. Soient X un espace topologique et I une partie de $\mathbb{R}$. On dit qu'une application $f : I \longrightarrow X$ est **continue à gauche** (*resp.* **continue à droite**) en un point $t \in I$ si pour tout voisinage V de $f(t)$ dans X, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $s \in]t-\varepsilon, t] \cap I$, on ait $f(s) \in V$ (*resp.* $s \in [t, t+\varepsilon[\cap I$, on ait $f(s) \in V$).

1. Montrer que si f est continue en $t \in I$, I est muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$, alors elle est continue à gauche et à droite en t. Montrer qu'inversement, si f est continue à la fois à gauche et à droite en t, alors elle est continue en t.
2. Montrer que f est continue à gauche (*resp.* à droite) en $t \in I$ si et seulement si elle est continue en t lorsque I est muni de la topologie induite par $\mathcal{T}_l$ (*resp.* $\mathcal{T}_r$) décrite dans l'exercice 1.16.

Solution 1. Supposons que f est continue en t. Soit V un voisinage de $f(t)$ dans X, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $s \in]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\cap I$, on ait $f(s) \in V$. Par conséquent, f est continue à gauche et à droite en t.
Réciproquement supposons que f est continue à gauche et à droite en t. Soit V un voisinage de $f(t)$ dans X, alors il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tels que pour tout $s \in]t-\varepsilon_1, t] \cap I$, on ait $f(s) \in V$, et pour tout $s \in [t, t+\varepsilon_2[\cap I$, on ait $f(s) \in V$. Soit $\varepsilon = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, alors $\varepsilon > 0$ et pour tout $s \in]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\cap I$, on a $f(s) \in V$. Donc f est continue en t.
2. Puisque les ensembles $]t-\varepsilon, t] \cap I$ (*resp.* $[t, t+\varepsilon[\cap I$), avec $\varepsilon > 0$, forment un système fondamental de voisinages de t dans I lorsque I est muni de la topologie induite par $\mathcal{T}_l$ (*resp.* $\mathcal{T}_r$), alors on en déduit que f est continue à gauche (*resp.* à droite) en $t \in I$ si et seulement si f est continue en t lorsque I est muni de la topologie induite par $\mathcal{T}_l$ (*resp.* $\mathcal{T}_r$).

Exercice 1.46. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0\,, \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1\,, \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1\,. \end{cases}$$

Montrer que f est une application continue fermée, mais f n'est pas une application ouverte.
Solution. On a $\mathbb{R} =]-\infty, 0] \cup [0, 1] \cup [0, +\infty[$ est la réunion de trois fermés, et la restriction de f à chacun de ces fermés est continue, donc f est continue, voir proposition 1.4.4. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$, on a $f(F) = \big(F \cap [0, 1]\big) \cup A$, où $A \in \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}\big\}$, donc f est une application fermée.

On a $f\big(]0,\,1[\big) = \{0\}$ qui n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$, donc f n'est pas une application ouverte.

Exercice 1.47. Soient $X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ xy = 1\big\} \cup \big\{(0,0)\big\}$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^2$ et considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$$

Montrer que π_1 est une application continue bijective, mais π_1 n'est pas un homéomorphisme.

Solution. Il est clair que π_1 est bijective. Puisque π_1 est la restriction sur X de la projection canonique $(x,y) \mapsto x$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors π_1 est continue. L'application inverse π_1^{-1} est définie par : $\pi_1^{-1}(x) = \big(x, \frac{1}{x}\big)$ si $x \neq 0$ et $\pi_1^{-1}(0) = (0,0)$. L'application π_1^{-1} n'est pas continue car la suite de terme général $x_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$, mais la suite $\big(\pi_1^{-1}(x_n)\big)_{\geq 1}$ n'est pas convergente dans X.

Exercice 1.48. Soient $X = [0,\,1] \cup [2,\,3]$ et $Y = [0,\,2]$ munis de la topologie induite par $\mathbb{R}$. Soit $f : X \longrightarrow Y$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,\,1]\,, \\ \\ x-1 & \text{si} \quad x \in [2,\,3]\,. \end{cases}$$

Montrer que f est une application continue surjective fermée, mais f n'est pas une application ouverte.

Solution. L'espace X est la réunion de deux fermés et la restriction de f à chacun de ces fermés est continue, donc f est continue, voir proposition 1.4.4. Par ailleurs, il est clair que f est surjective. L'intervalle $[0,1]$ est ouvert dans X, mais son image par f n'est pas ouverte dans Y, donc f n'est pas une application ouverte. Soit F un fermé de X. Puisque X est fermé dans $\mathbb{R}$, alors F est fermé dans $\mathbb{R}$ et on a $f(F) = \big(F \cap [0,1]\big) \cup \big[\big(F \cap [2,3]\big) - 1\big]$. Comme $F \cap [0,1]$ et $\big(F \cap [2,3]\big) - 1$ sont fermés dans $\mathbb{R}$, alors $f(F)$ est fermé dans $\mathbb{R}$. Or on a $f(F) \subset Y$, donc $f(F)$ est fermé dans Y. Par conséquent, f est une application fermée.

Exercice 1.49. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application fermée. Soit U un ouvert dans X. Montrer que l'ensemble $B = \big\{y \in Y\ ;\ f^{-1}\big(\{y\}\big) \subset U\big\}$ est un ouvert de Y.

Solution. Soit $y \in B$, alors on a $f^{-1}(\{y\}) \subset U$. D'après la proposition 1.3.6, il existe un voisinage V de y dans Y tel que $f^{-1}(V) \subset U$, d'où on a $y \in V \subset B$. Par conséquent, B est voisinage de chacun de ses points, donc B est un ouvert de Y, voir proposition 1.1.2.

Exercice 1.50. Soient X un espace topologique régulier, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X et $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient.

1. Montrer que si $\mathcal{R}$ est fermée, alors $G(\mathcal{R}) = \big\{(x,y) \in X \times X\ ;\ x\,\mathcal{R}\,y\big\}$ est fermé dans $X \times X$.
2. En déduire que si $\mathcal{R}$ est ouverte et fermée, alors l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est séparé.

Solution. 1. Montrons que $(X \times X) \setminus G(\mathcal{R})$ est ouvert dans $X \times X$. Soit $(x,y) \in (X \times X) \setminus G(\mathcal{R})$, alors on a $q(x) \neq q(y)$. Puisque q est fermée, alors $q^{-1}\big(\{q(y)\}\big)$ est un fermé de X ne contenant pas x. Puisque X est régulier, il existe deux ouverts disjoints V et W dans X tels que $q^{-1}\big(\{q(y)\}\big) \subset V$ et $x \in W$. Puisque q est fermée, d'après l'exercice 1.37, il existe un ouvert U de X saturé pour $\mathcal{R}$ tel que $q^{-1}\big(\{q(y)\}\big) \subset U \subset V$. Alors on a $q(U) \cap q(W) = \emptyset$. Par conséquent, $U \times W$ est un ouvert $X \times X$ contenant (x,y) tel que $(U \times W) \cap G(\mathcal{R}) = \emptyset$. D'où on a $(x,y) \in U \times W \subset (X \times X) \setminus G(\mathcal{R})$. Donc $(X \times X) \setminus G(\mathcal{R})$ est un ouvert de $X \times X$.

2. Ceci résulte de 1 et de la proposition 1.5.6.

Exercice 1.51. Soient X un espace topologique, F une partie fermée de X et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence dans X obtenue en identifiant entre eux tous les éléments de F ; autrement dit, la relation d'équivalence dont les classes sont F et les ensembles $\{x\}$ pour $x \in X \setminus F$.

1. Montrer que si X est régulier, alors l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est séparé.
2. Montrer que si X est normal, alors l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est normal.

Solution. 1. Soient $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient et $U = X \setminus F$. Soient $x, y \in X$ tels que $q(x) \neq q(y)$. On distingue deux cas :
Premier cas : $x, y \in U$. Puisque X est séparé et U est un ouvert de X, il existe deux ouverts disjoints V et W dans X tels que $x \in V \subset U$ et $y \in W \subset U$. Alors V et W sont saturés pour $\mathcal{R}$ et donc $q(V)$ et $q(W)$ sont deux ouverts disjoints dans $X/\mathcal{R}$ contenant respectivement $q(x)$ et $q(y)$.
Deuxième cas : $x \in U$ et $y \in F$. Puisque X est régulier, il existe deux ouverts disjoints V et W dans X tels que $x \in V \subset U$ et $F \subset W$. Alors V et W sont saturés pour $\mathcal{R}$ et donc $q(V)$ et $q(W)$ sont deux ouverts disjoints dans $X/\mathcal{R}$ contenant respectivement $q(x)$ et $q(y)$.
Par conséquent, l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est séparé.
2. Soit G un fermé de X. Alors on a $q^{-1}(q(G)) = F \cup G$ si $G \cap F \neq \emptyset$ et $q^{-1}(q(G)) = G$ si $G \cap F = \emptyset$. Donc $q^{-1}(q(G))$ est fermé dans X. Par conséquent, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence fermée dans X. On déduit du corollaire 1.9.1 que $X/\mathcal{R}$ est un espace normal.

Exercice 1.52. Soient X et Y deux espaces réguliers. Montrer que l'espace topologique produit $X \times Y$ est régulier.
Solution. Puisque X et Y sont séparés, alors $X \times Y$ est séparé, voir proposition 1.5.3. Soient $(x, y) \in X \times Y$ et F une partie fermée de $X \times Y$ tels que $(x, y) \notin F$. Comme $(x, y) \in \big(X \times Y\big) \setminus F$ qui est ouvert dans $X \times Y$, alors il existe un ouvert U_x de X contenant x et un ouvert V_y de Y contenant y tels que $\big(U_x \times V_y\big) \cap F = \emptyset$. Comme X et Y sont réguliers, d'après la proposition 1.9.1, il existe un ouvert U de X et un ouvert V de Y tels que $x \in U \subset \overline{U} \subset U_x$ et $y \in V \subset \overline{V} \subset V_y$, d'où on a $\big(\overline{U} \times \overline{V}\big) \cap F = \emptyset$. Soit $W = \big(\big(X \setminus \overline{U}\big) \times Y\big) \cup \big(X \times \big(Y \setminus \overline{V}\big)\big)$. Alors W est un ouvert de $X \times Y$ tel que $F \subset W$ et $\big(U \times V\big) \cap W = \emptyset$. Par conséquent, $X \times Y$ est régulier.

Remarque 1.0.2. Le produit de deux espaces normaux n'est pas en général un espace normal. Par exemple, si $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie $\mathcal{T}_\ell$, voir exercice 1.16, alors X est un espace normal, mais $X \times X$ n'est pas normal, voir ([13], p. 80).

Chapitre 2

ESPACES MÉTRIQUES

Proposition. Soient $(X,\, d)$ un espace métrique et A, B deux parties non vides de X.

1. Si $A \subset B$, alors on a $\delta(A) \leq \delta(B)$
2. On a $\delta\big(\overline{A}\big) = \delta(A)$.
3. Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, on a $\delta(B(x,r)) \leq \delta(B'(x,r)) \leq 2r$.
4. On a $d(A,B) = d\big(\overline{A},B\big) = d\big(A,\overline{B}\big) = d\big(\overline{A},\overline{B}\big)$.
5. On a $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$. Donc si A et B sont bornées, alors $A \cup B$ est borné.

Démonstration. 1. On suppose $A \subset B$. Pour tout $x, y \in A$, on a $d(x,y) \leq \delta(B)$, d'où $\delta(A) \leq \delta(B)$.
2. D'après ce qui précède, on a $\delta(A) \leq \delta\big(\overline{A}\big)$. Réciproquement, soient $x, y \in \overline{A}$, d'après la proposition 2.2.3, il existe des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ dans A telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$. D'où on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$, voir remarque 2.2.1. Or pour tout $n \geq 0$, on a $d(x_n,y_n) \leq \delta(A)$, d'où $d(x,y) \leq \delta(A)$. Par conséquent, on a $\delta\big(\overline{A}\big) \leq \delta(A)$.
3. On a $\delta(B(x,r)) \leq \delta(B'(x,r))$. Soient $y, z \in B'(x,r)$, alors on a $d(y,z) \leq d(y,x)+d(x,z) \leq 2r$, d'où $\delta(B'(x,r)) \leq 2r$.
4. Puisque $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$, alors on a $d\big(\overline{A},\overline{B}\big) \leq d\big(\overline{A},B\big) \leq d(A,B)$ et $d\big(\overline{A},\overline{B}\big) \leq d\big(A,\overline{B}\big) \leq d(A,B)$. Soient $x \in \overline{A}$ et $y \in \overline{B}$, alors il existe des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ dans A et B respectivement telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = y$. D'où on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(a_n,b_n) = d(x,y)$. Or pour tout $n \geq 0$, on a $d(A,B) \leq d(a_n,b_n)$, d'où $d(A,B) \leq d(x,y)$. Donc on a $d(A,B) \leq d\big(\overline{A},\overline{B}\big)$. Par conséquent, on a $d(A,B) = d\big(\overline{A},B\big) = d\big(A,\overline{B}\big) = d\big(\overline{A},\overline{B}\big)$.
5. Soient $x, y \in A \cup B$. Si $x, y \in A$, alors on a $d(x,y) \leq \delta(A) \leq \delta(A)+\delta(B)+d(A,B)$. Si $x, y \in B$, alors on a $d(x,y) \leq \delta(B) \leq \delta(A)+\delta(B)+d(A,B)$. Supposons maintenant $x \in A$ et $y \in B$. Pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on a $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$. Par conséquent, on a $d(x,y) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$, d'où $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$. ∎

Proposition (**Tietze**). Soient A un fermé d'un espace métrique $(X,\, d)$ et $f : A \longrightarrow [a,\, b]$ une fonction continue. On suppose de plus que l'on a $1 \leq a$. Pour tout $x \in X$, on pose :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A\,, \\[2ex] \inf\limits_{y\in A} \dfrac{f(y)d(x,y)}{d(x,A)} & \text{si} \quad x \notin A\,. \end{cases}$$

Alors g est une fonction continue de X dans $[a,\, b]$ prolongeant f.

Démonstration. Puisque A est fermé dans X, il résulte de la proposition 2.2.4 que pour tout $x \notin A$, on a $d(x,A) > 0$, donc g est bien définie, et par définition g prolonge f. Soit $x \in X \setminus A$. Pour tout $y \in A$, on a $d(x,A) \le d(x,y)$, d'où :

$$\inf_{z\in A} f(z) \le \frac{f(y)d(x,y)}{d(x,A)} \le \frac{d(x,y)}{d(x,A)} \sup_{z\in A} f(z)\,.$$

Comme on a $\displaystyle\inf_{y\in A} \frac{d(x,y)}{d(x,A)} = 1$, on en déduit que $\displaystyle\inf_{z\in A} f(z) \le g(x) \le \sup_{z\in A} f(z) \le b$. Par conséquent, on a $a \le \displaystyle\inf_{z\in A} f(z) = \inf_{x\in X} g(x)$ et $\displaystyle\sup_{x\in X} g(x) = \sup_{z\in A} f(z) \le b$.

Il reste à montrer la continuité de g. Puisque $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de X et la restriction de g à $\overset{\circ}{A}$ est continue, alors g est continue sur $\overset{\circ}{A}$. Puisque $X\setminus A$ est un ouvert de X, pour montrer que g est sur $X\setminus A$, il suffit de montrer que la restriction de g à $X\setminus A$ est continue, voir proposition 1.4.3. Pour tout $x \in X \setminus A$, on a $g(x) = \dfrac{1}{d(x,A)} \displaystyle\inf_{y\in A} f(y)d(x,y)$ et l'application $x \longmapsto d(x,A)$ est continue sur X, donc pour montrer que la restriction de g à $X \setminus A$ est continue, il suffit de montrer que la restriction de l'application $x \longmapsto h(x) = \displaystyle\inf_{y\in A} f(y)d(x,y)$ à $X \setminus A$ est continue. Pour tous $x, z \in X \setminus A$ et pour tout $y \in A$, on a $f(y)d(z,y) \le f(y)d(x,y) + f(y)d(x,z) \le f(y)d(x,y) + b\,d(x,z)$, d'où on a $h(z) \le h(x) + b\,d(x,z)$. De même, on a $h(x) \le h(z) + b\,d(x,z)$. Par conséquent, on a $|h(x) - h(z)| \le b\,d(x,z)$. Donc la restriction de h à $X \setminus A$ est continue. Il reste à montrer la continuité de g en tout point $x \in A\setminus \overset{\circ}{A}$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in A\cap B(x,\eta)$, on ait $|f(x)-f(z)| < \varepsilon$. Soient $B = A\cap B(x,\eta)$ et $C = A\setminus B$. Soit $z \in B\big(x, \frac{\eta}{2b}\big) \cap (X \setminus A)$. Pour tout $y \in C$, on a $d(z,y) \ge d(y,x) - d(x,z) \ge \eta - \frac{\eta}{2b} \ge \eta - \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2}$, d'où $\displaystyle\inf_{y\in C} f(y)d(z,y) \ge \frac{\eta}{2}$. D'autre part, on a $f(x)d(z,x) \le b\frac{\eta}{2b} = \frac{\eta}{2}$. Par conséquent, on a $\displaystyle\inf_{y\in A} f(y)d(z,y) = \inf_{y\in B} f(y)d(z,y)$. Comme $f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$ pour tout $y \in B$ et $\displaystyle\inf_{y\in B} d(z,y) = d(z,A)$, alors on a $(f(x) - \varepsilon)d(z,A) \le \displaystyle\inf_{y\in B} f(y)d(z,y) \le (f(x) + \varepsilon)d(z,A)$ d'où $f(x)-\varepsilon \le g(z) \le f(x)+\varepsilon$. Par conséquent, pour tout $z \in B\big(x, \frac{\eta}{2b}\big)\cap(X\setminus A)$, on a $|f(x)-g(z)| \le \varepsilon$. Or on a $A \cap B\big(x, \frac{\eta}{2b}\big) \subset A \cap B(x,\eta)$ et pour tout $z \in A \cap B\big(x, \frac{\eta}{2b}\big)$, on a $f(z) = g(z)$, donc pour tout $z \in B\big(x, \frac{\eta}{2b}\big)$, on a $|f(x) - g(z)| \le \varepsilon$. Donc g est continue en x. ■

Proposition. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Alors il existe deux constantes positives A et B telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|f(x)| \le A|x| + B$.

Démonstration. Comme f est uniformément continue, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - y| \le \eta$, on ait $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon$. En prenant $\varepsilon = 1$, on obtient $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - y| \le \eta$, on ait $|f(x) - f(y)| \le 1$. On a $|f(\eta)-f(0)| \le 1$ et $|f(2\eta)-f(\eta)| \le 1$, d'où $|f(\eta)| \le 1+|f(0)|$ et $|f(2\eta)| \le 1+|f(\eta)| \le 2+|f(0)|$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f(n\eta)| \le |f(0)| + n = |f(0)| + \frac{1}{\eta}(n\eta)$. Soit $x \ge 0$, alors il existe $n \ge 1$ tel que $n\eta \le x < (n+1)\eta$, n est la partie entière de $\frac{x}{\eta}$. Alors on a $|f(x) - f(n\eta)| \le 1$ car $|x - n\eta| \le \eta$. Par conséquent, on a :

$$|f(x)| \le 1 + |f(n\eta)| \le 1 + |f(0)| + \tfrac{1}{\eta}(n\eta) \le 1 + |f(0)| + \tfrac{1}{\eta}x\,.$$

Soient $A = \frac{1}{\eta}$ et $B = 1+|f(0)|$, alors pour tout $x \ge 0$, on a $|f(x)| \le A|x|+B$. Soit $g(x) = f(-x)$, alors g est uniformément continue, et on a $|g(0)| = |f(0)|$ et $|x-y| \le \eta \Longrightarrow |g(x)-g(y)| \le 1$. Par ce qui précède, on a alors $|g(x)| \le A|x| + B$ pour tout $x \ge 0$. D'où on a $|f(-x)| \le A|-x| + B$ pour tout $x \ge 0$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| \le A|x| + B$. ■

Proposition. Soit $\big((X_n,\, d_n)\big)_{n\geq 0}$ une suite d'espaces métriques. Considérons l'ensemble produit $X = \prod\limits_{n\geq 0} X_n$ des suites $(x_n)_{n\geq 0}$, où $x_n \in X_n$. Pour $x = (x_n)_{n\geq 0}$ et $y = (y_n)_{n\geq 0}$ dans X, on pose :

$$D_\infty(x,y) = \sup_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \min\big(1, d_n(x_n,y_n)\big)\,, \quad D_1(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \min\big(1, d_n(x_n,y_n)\big) \quad \text{et}$$

$$D(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}\,.$$

Alors D_∞, D_1 et D sont trois distances topologiquement équivalentes sur X, et la topologie associée à l'une de ces distances coïncide avec la topologie produit sur X.

Démonstration. D'après la proposition 2.3.5, pour tout $n \geq 0$, $\dfrac{1}{2^n}\min(d_n, 1)$ et $\dfrac{1}{2^n}\dfrac{d_n}{1+d_n}$ sont des distances sur X_n, et par conséquent, D_∞, D_1 et D sont des distances sur X.
Vérifions que les topologies associées aux distances D_∞ et D_1 coïncident avec la topologie produit sur X. Puisque, pour tout $n \geq 0$, les distances d_n et $\min(1, d_n)$ sont uniformément équivalentes sur X_n, et donc elles définissent la même topologie sur X_n, on peut supposer que $d_n \leq 1$, et donc D_∞ et D_1 sont définies par :

$$D_\infty(x,y) = \sup_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} d_n(x_n,y_n), \quad D_1(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n,y_n)\,.$$

Alors pour tout $n \geq 0$, les projections canoniques $p_n : (X,\, D_\infty) \longrightarrow (X_n,\, d_n)$ et $p_n : (X,\, D_1) \longrightarrow (X_n,\, d_n)$ sont lipschitziennes de rapport 2^n, donc continues. Par conséquent, les topologies associées aux distances D_∞ et D_1 sont toutes deux plus fines que la topologie produit sur X.
Réciproquement, soient $x = (x_n)_{n\geq 0} \in X$, $r > 0$ et $B_\infty(x,r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r dans $(X,\, D_\infty)$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^N} < r$. Alors on a $B_\infty(x,r) = \bigcap\limits_{n=0}^{N} p_n^{-1}\big(B_n(x_n, 2^n r)\big)$, où $B_n(x_n, 2^n r)$ est la boule ouverte de centre x_n et de rayon $2^n r$ dans $(X_n,\, d_n)$. Donc $B_\infty(x,r)$ est un ouvert de X pour la topologie produit. Par conséquent, la topologie associée à la distance D_∞ coïncide avec la topologie produit sur X.
De même, soit $B(x,r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r dans $(X,\, D_1)$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^N} < \dfrac{r}{2}$. Soit $y = (y_n)_{n\geq 0} \in X$ tel que pour tout $n \leq N$, on ait $d_n(x_n,y_n) < \dfrac{r}{4}$. Alors on a :

$$D_1(x,y) < \sum_{n=0}^{N} \frac{r}{4}\frac{1}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \;=\; \frac{r}{4}\Big(2 - \frac{1}{2^N}\Big) + \frac{1}{2^N} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \;=\; r\,.$$

Donc on a $x \in \bigcap\limits_{n=0}^{N} p_n^{-1}\big(B_n\big(x_n, \frac{r}{4}\big)\big) \subset B(x,r)$. Comme $\bigcap\limits_{n=0}^{N} p_n^{-1}\big(B_n\big(x_n, \frac{r}{4}\big)\big)$ est un ouvert de X pour la topologie produit, on en déduit que $B(x,r)$ est un voisinage de x pour la topologie produit. Par conséquent, la topologie associée à la distance D_1 est moins fine que la topologie produit, donc les deux topologies coïncident sur X.
Pour tout $x, y \in X$, on a $D(x,y) \leq D_1(x,y)$. Donc la topologie associée à la distance D est moins fine que la topologie produit sur X. Réciproquement, soient $x = (x_n)_{n\geq 0} \in X$, $r > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Soit $r' = \dfrac{1}{2^N}\dfrac{r}{1+r}$, alors $r' > 0$ et on a $B(x,r') \subset p_N^{-1}\big(B_N(x_N, r)\big)$, où $B(x,r')$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r dans $(X,\, D)$. Donc $p_N^{-1}\big(B_N(x_N,r)\big)$ est un voisinage de x

pour la topologie associée à la distance D. On en déduit que la topologie produit sur X est moins fine que la topologie associée à la distance D. Par conséquent, les deux topologies coïncident sur X. ■

Proposition. Soient $(X_i,\, d_i)$, $1 \leq i \leq p$, une famille finie d'espaces métriques. Alors l'espace métrique produit $X = X_1 \times \cdots \times X_p$ est complet si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $(X_i,\, d_i)$ est complet. En particulier, pour tout $p \geq 1$, les espaces métriques $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{C}^p$ sont complets.

Démonstration. On munit l'espace X de la distance D_∞. Supposons d'abord que $(X,\, D_\infty)$ est complet. Soit $a = (a_1, \ldots, a_p) \in X$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, l'application

$$\begin{array}{rcl} X_i & \longrightarrow & X \\ x_i & \longmapsto & (a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_p) \end{array}$$

est isométrique et son image est fermée dans X, donc complète. Par conséquent, $(X_i,\, d_i)$ est complet. Réciproquement, supposons que les espaces métriques $(X_i,\, d_i)$ sont complets. Soit $(x_n)_{n\geq 0} = \big((x_{1,n}, \ldots, x_{p,n})\big)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans (X, D_∞). Puisque pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et pour tout $n, m \geq 0$, on a $d_i(x_{i,n}, x_{i,m}) \leq D_\infty(x_n, x_m)$, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, la suite $(x_{i,n})_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $(X_i,\, d_i)$, donc il existe $x_i \in X_i$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{i,n} = x_i$. Alors $x = (x_1, \ldots, x_p) \in X$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x dans $(X,\, D_\infty)$. Par conséquent, (X, D_∞) est complet. ■

Théorème (Cantor). Soit $(X,\, d)$ un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) L'espace $(X,\, d)$ est complet.

(ii) L'intersection de toute suite décroissante $(F_n)_{n\geq 0}$ de parties fermées non vides de $(X,\, d)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$ contient un point et un seul.

(iii) Toute famille filtrante croissante de Cauchy dans $(X,\, d)$ est convergente.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ suite décroissante de parties fermées non vides de $(X,\, d)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$. Pour tout $n \geq 0$, soit $x_n \in F_n$. Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\delta(F_n) < \varepsilon$. Comme la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, pour tout $n, m \geq N$, on a $x_n, x_m \in F_N$. D'où on a $d(x_n, x_m) \leq \delta(F_N) < \varepsilon$. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $(X,\, d)$, donc il existe $x \in X$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Soit $p \in \mathbb{N}$, alors pour tout $n \geq p$, on a $x_n \in F_n \subset F_p$. Comme F_p est fermé, alors on a $x \in F_p$. Par conséquent, on a $x \in \bigcap\limits_{n\geq 0} F_n$. Soit $y \in \bigcap\limits_{n\geq 0} F_n$, alors pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq d(y, x_n) \leq \delta(F_n)$. Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d(y, x_n) = d(y, x)$, on en déduit que $d(y, x) = 0$, *i.e.* $y = x$, d'où $\bigcap\limits_{n\geq 0} F_n = \{x\}$.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans (X, d). Pour tout $n \geq 0$, soient $A_n = \{x_p \,;\, p \geq n\}$ et $F_n = \overline{A_n}$. Alors $(F_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de parties fermées non vides de X, et pour tout $n \geq 0$, on a $\delta(F_n) = \delta(A_n)$. Comme $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(A_n) = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$. Par conséquent, il existe $x \in X$ tel que $\bigcap\limits_{n\geq 0} F_n = \{x\}$. Or pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq d(x_n, x) \leq \delta(F_n)$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$. Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x. Par conséquent, $(X,\, d)$ est complet.

L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i) est triviale.

Preuve de (i) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille filtrante croissante de Cauchy dans $(X,\, d)$. Alors il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ dans Λ telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ et $d(x_\lambda, x_\mu) < \frac{1}{n+1}$ pour tout λ, $\mu \in \Lambda$ vérifiant $\lambda_n \leq \lambda$ et $\lambda_n \leq \mu$. En particulier, pour tout $m \geq n \geq 0$, on a $d(x_{\lambda_n}, x_{\lambda_m}) < \frac{1}{n+1}$. Donc la suite $(x_{\lambda_n})_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans (X, d). Par hypothèse, (X, d) est complet, donc $(x_{\lambda_n})_{n\geq 0}$ converge vers un élément $x \in X$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n_0+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(x_{\lambda_{n_0}}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors pour tout $\lambda \in \Lambda$ vérifiant $\lambda_{n_0} \leq \lambda$, on a $d(x_\lambda, x) \leq d(x_\lambda, x_{\lambda_{n_0}}) + d(x_{\lambda_{n_0}}, x) < \frac{1}{n_0+1} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Par conséquent, la famille filtrante croissante $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers x. ■

Théorème. Soient X un espace de Baire, (Y, d) un espace métrique, f une application de X dans Y et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications continues de X dans Y telle que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$ dans Y. Soit C l'ensemble des points de X en lesquels f est continue. Alors C est dense dans X.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, on pose :

$$F_{n,\varepsilon} = \left\{x \in X \; ; \; d(f_p(x), f_q(x)) \leq \varepsilon \text{ pour tout } p, q \geq n\right\}.$$

Comme l'application $x \longmapsto d(f_p(x), f_q(x))$ est continue de X dans $\mathbb{R}$, alors $F_{n,\varepsilon}$ est fermé dans X. De plus, pour tout $n \geq 0$, on a $F_{n,\varepsilon} \subset F_{n+1,\varepsilon}$. Soit $x \in X$. Comme la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est convergente, alors $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est de Cauchy, donc il existe $n \in N$ tel que pour tout $p, q \geq n$, on ait $d(f_p(x), f_q(x)) \leq \varepsilon$, d'où $x \in F_{n,\varepsilon}$. Par conséquent, on a $X = \bigcup\limits_{n\geq 0} F_{n,\varepsilon}$. Soit $U_\varepsilon = \bigcup\limits_{n\geq 0} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$. Comme X est un espace de Baire, il résulte de la proposition 2.8.1 que U_ε est dense dans X. On en déduit que $\bigcap\limits_{k\geq 1} U_{\frac{1}{k}}$ est dense dans X, car les $U_{\frac{1}{k}}$ sont des ouverts de X. Pour avoir le résultat, il suffit de montrer que $\bigcap\limits_{k\geq 1} U_{\frac{1}{k}} \subset C$. Autrement dit, pour tout point $x \in \bigcap\limits_{k\geq 1} U_{\frac{1}{k}}$, f est continue en x. Soient $x_0 \in \bigcap\limits_{k\geq 1} U_{\frac{1}{k}}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $k \geq 1$ tel que $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{3}$. Comme $x_0 \in U_{\frac{1}{k}}$, il existe $n \geq 0$ tel que $x_0 \in \overset{\circ}{F}_{n,\frac{1}{k}}$. Comme f_n est continue en x_0, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans X tel que $U \subset \overset{\circ}{F}_{n,\frac{1}{k}}$ et $d(f_n(x), f_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $x \in U$. Comme on a $U \subset \overset{\circ}{F}_{n,\frac{1}{k}}$, alors pour tout $p \geq n$ et pour tout $x \in U$, on a $d(f_p(x), f_n(x)) \leq \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{3}$. En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient $d(f(x), f_n(x)) \leq \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $x \in U$. En particulier, on a $d(f(x_0), f_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Par conséquent, pour tout $x \in U$, on a :

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Donc f est continue en x_0. ■

Supplément d'exercices

Exercice 2.34. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X.

1. On suppose que toute suite de Cauchy dans A converge dans X. Montrer que $\overline{A}$ est complet.
2. On suppose que $\overline{A}$ est complet. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans X. On suppose que la suite $\big(d(x_n, A)\big)_{n\geq 0}$ tend vers 0. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

Solution. 1. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\overline{A}$. Pour tout $n \geq 0$, il existe $a_n \in A$ tel que $d(a_n, x_n) < \frac{1}{n+1}$. D'où, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a :

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, a_m) < \frac{1}{n+1} + d(x_n, x_m) + \frac{1}{m+1}.$$

Par conséquent, $(a_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans A. Par hypothèse, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers un élément $x \in X$. Donc $x \in \overline{A}$ et on a $0 \leq d(x_n, x) \leq d(x_n, a_n) + d(a_n, x) < \frac{1}{n+1} + d(a_n, x)$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$. Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x, donc $\overline{A}$ est complet.
2. Pour tout $n \geq 0$, soit $a_n \in A$ tel que $d(x_n, a_n) < d(x_n, A) + \frac{1}{n+1}$, d'où on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, a_n) = 0$. Comme on a :

$$\begin{aligned} d(a_n, a_m) &\leq d(a_n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, a_m) \\ &< d(x_n, A) + \tfrac{1}{n+1} + d(x_n, x_m) + d(x_m, A) + \tfrac{1}{m+1}\,. \end{aligned}$$

On en déduit que $(a_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans A. Puisque $\overline{A}$ est complet, alors il existe $x \in \overline{A}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(a_n, x) = 0$. Or on a $0 \leq d(x_n, x) \leq d(x_n, a_n) + d(a_n, x)$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$. Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x.

Exercice 2.35. Soit $f : [-1,\, 1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et considérons l'équation différentielle sur $[-1,\, 1]$ suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = a \end{cases} \tag{2.1}$$

1. Soit $x : [-1,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que x est une solution de l'équation (2.1) si et seulement si pour tout $t \in [-1,\, 1]$, on ait $x(t) = a + \displaystyle\int_0^t f(s, x(s))ds$.
2. On suppose qu'il existe une constante $k \in [0,\, 1[$ telle que pour tous $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in [-1,\, 1]$, on ait $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k\,|x_1 - x_2|$. Montrer que l'équation (2.1) admet une unique solution.

Solution. 1. Si x vérifie l'équation (2.1), alors pour tout $t \in [-1,\, 1]$, on a :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s)\, ds = a + \int_0^t f(s, x(s))\, ds\,.$$

Réciproquement, si $x(t) = a + \displaystyle\int_0^t f(s, x(s))\, ds$ pour tout $t \in [-1,\, 1]$, alors x est de classe C^1 sur $[-1,\, 1]$, $x(0) = a$ et on a $x'(t) = f(t, x(t))$ pour tout $t \in [-1,\, 1]$. Donc x est une solution de l'équation (2.1).
2. Soit $E = C\big([-1,\, 1], \mathbb{R}\big)$ l'ensemble des applications continues de $[-1,\, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la distance de la convergence uniforme d_∞. D'après la proposition 2.6.8, $(E,\, d_\infty)$ est complet. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & (E,\, d_\infty) & \longrightarrow & (E,\, d_\infty) \\ & x & \longmapsto & \Phi(x) \end{array}$$

où $\Phi(x)(t) = a + \displaystyle\int_0^t f(s, x(s))\, ds$ pour tout $t \in [-1,\, 1]$. Soit $x \in E$, alors x est une solution l'équation (2.1) si et seulement si $\Phi(x) = x$. Pour tout $x, y \in E$ et pour tout $t \in [-1,\, 1]$, on a

$\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t) = \displaystyle\int_0^t \big[f(s, x(s)) - f(s, y(s))\big]\, ds$, d'où :

$$\begin{aligned}
\big|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\big| &\leq \int_0^{|t|} \big|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\big|\, ds \\
&\leq \int_0^{|t|} k\, |x(s) - y(s)|\, ds \\
&\leq \int_0^{|t|} k\, d_\infty(x, y)\, ds \\
&= k\, d_\infty(x, y)|t| \;\leq\; k\, d_\infty(x, y)\,.
\end{aligned}$$

Donc on a $d_\infty(\Phi(x), \Phi(y)) \leq k\, d_\infty(x, y)$. Autrement dit, Φ est contractante. D'après le théorème du point fixe, il existe alors un unique $x \in E$ tel que $\Phi(x) = x$. Donc l'équation (2.1) admet une unique solution.

Exercice 2.36. On considère l'espace $E = C\big([-1,\, 1], \mathbb{R}\big)$ des applications continues de $[-1,\, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la distance de la convergence uniforme d_∞.

1. Montrer que l'application Φ de E dans lui-même définie par :

$$\Phi(x)(t) = a + \int_0^t \cos(s^2) x(s) ds$$

   est contractante.

2. En déduire que l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\cos(t^2) \\ x(0) = a \end{cases}$$

   admet une unique solution sur $[-1,\, 1]$.

Solution. 1. Pour tout $x, y \in E$ et pour tout $t \in [-1,\, 1]$, on a :

$$\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t) = \int_0^t \big[\cos(s^2)x(s) - \cos(s^2)y(s)\big]\, ds\,,$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\big|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\big| &\leq \int_0^{|t|} \big|\cos(s^2)x(s) - \cos(s^2)y(s)\big|\, ds \\
&\leq \int_0^{|t|} \cos(s^2) d_\infty(x, y)\, ds \\
&\leq \int_0^{1} \cos(s^2) d_\infty(x, y)\, ds \\
&= d_\infty(x, y) \int_0^1 \cos(s^2)\, ds\,.
\end{aligned}$$

Soit $k = \displaystyle\int_0^1 \cos(s^2)\,ds$, alors on a $0 < k < 1$ et $d_\infty(\Phi(x), \Phi(y)) \le k\, d_\infty(x, y)$. Donc Φ est contractante.
2. Soit $x \in E$, alors x est une solution de l'équation différentielle si et seulement si $\Phi(x) = x$. Comme $(E,\, d_\infty)$ est complet et Φ est contractante, d'après le théorème du point fixe, il existe alors un unique $x \in E$ tel que $\Phi(x) = x$.

Exercice 2.37. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et considérons l'équation différentielle sur $[-1,\, 1]$ suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = a \end{cases} \tag{2.2}$$

1. On suppose qu'il existe $k \in]0,\, 1[$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}$, on ait $|f'(s)| \le k$. Montrer que l'équation (2.2) admet une unique solution.
2. Plus généralement, on suppose que f' est bornée sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, il existe $M > 0$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}$, on ait $|f'(s)| \le M$. Montrer que l'équation (2.2) admet une unique solution.

Solution. 1. Soit $E = C\big([-1,\, 1], \mathbb{R}\big)$ l'ensemble des applications continues de $[-1,\, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la distance de la convergence uniforme d_∞. D'après la proposition 2.6.8, $(E,\, d_\infty)$ est complet. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & (E,\, d_\infty) & \longrightarrow & (E,\, d_\infty) \\ & x & \longmapsto & \Phi(x) \end{array}$$

où $\Phi(x)(t) = a + \displaystyle\int_0^t f(x(s))\,ds$ pour tout $t \in [-1,\, 1]$. Soit $x \in E$, alors x est une solution de l'équation (2.2) si et seulement si $\Phi(x) = x$. Puisque pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $|f'(s)| \le k$, d'après la proposition 2.3.3, f est contractante de rapport k, *i.e.* pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $|f(a) - f(b)| \le k\,|a - b|$. Pour tout $x, y \in E$ et pour tout $t \in [-1,\, 1]$, on a :

$$\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t) = \int_0^t \big[f(x(s)) - f(y(s))\big]\,ds\,,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \big|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\big| &\le \int_0^{|t|} \big|f(x(s)) - f(y(s))\big|\,ds \\ &\le \int_0^{|t|} k\,|x(s) - y(s)|\,ds \\ &\le \int_0^{|t|} k\,d_\infty(x, y)\,ds \\ &\le k\,d_\infty(x, y)|t| \;\le\; k\,d_\infty(x, y)\,. \end{aligned}$$

Donc on a $d_\infty(\Phi(x), \Phi(y)) \le k\,d_\infty(x, y)$. Autrement dit, Φ est contractante. D'après le théorème du point fixe, il existe alors un unique $x \in E$ tel que $\Phi(x) = x$.
2. Comme ci-dessus, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $|f(a) - f(b)| \le M\,|a - b|$, et pour tout $x, y \in E$, on a $d_\infty(\Phi(x), \Phi(y)) \le M\,d_\infty(x, y)$. Donc Φ n'est pas forcément contractante. Considérons l'application $\Phi^2 = \Phi \circ \Phi$ de E dans E. Pour tout $x, y \in E$ et pour tout $t \in [-1,\, 1]$, on a :

$$\Phi^2(x)(t) - \Phi^2(y)(t) = \int_0^t \big[f(\Phi(x)(s)) - f(\Phi(y)(s))\big]\,ds\,,$$

d'où :

$$\begin{aligned}\left|\Phi^2(x)(t) - \Phi^2(y)(t)\right| &\leq \int_0^{|t|} \left|f(\Phi(x)(s)) - f(\Phi(y)(s))\right| ds \\ &\leq \int_0^{|t|} M \left|\Phi(x)(s) - \Phi(y)(s)\right| ds\,.\end{aligned}$$

Comme ci-dessus, on a aussi $\left|\Phi(x)(s) - \Phi(y)(s)\right| \leq M\, d_\infty(x,y)\,|s|$, donc on a :

$$\left|\Phi^2(x)(t) - \Phi^2(y)(t)\right| \leq M^2\, d_\infty(x,y) \int_0^{|t|} |s|\, ds\,,$$

d'où :

$$\left|\Phi^2(x)(t) - \Phi^2(y)(t)\right| \leq \frac{M^2}{2}\, t^2\, d_\infty(x,y)\,.$$

De même, on montre par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\left|\Phi^n(x)(t) - \Phi^n(y)(t)\right| \leq \frac{M^n}{n!}|t|^n\, d_\infty(x,y)\,.$$

Par conséquent, on a $d_\infty\big(\Phi^n(x), \Phi^n(y)\big) \leq \dfrac{M^n}{n!}\, d_\infty(x,y)$. Or on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M^n}{n!} = 0$, donc il existe $n \geq 1$ tel que Φ^n soit contractante. D'après le corollaire 2.6.2, il existe alors un unique $x \in E$ tel que $\Phi(x) = x$.

Exercice 2.38. Soit d la distance euclidienne sur $\mathbb{C}$. Pour tous z et w de $\mathbb{C}$, on pose :

$$d'(z,w) = \begin{cases} d(z,w) = |z-w| & \text{si } 0, z \text{ et } w \text{ sont alignés}\,, \\ \\ d(z,0) + d(0,w) = |z| + |w| & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Montrer que d' est une distance sur $\mathbb{C}$.
2. Déterminer les boules ouvertes de cette distance.
3. L'application $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ est-elle continue de $(\mathbb{C},\, d')$ dans $(\mathbb{C},\, d)$?
4. L'application $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ est-elle continue de $(\mathbb{C},\, d)$ dans $(\mathbb{C},\, d')$?
5. Montrer que l'espace $(\mathbb{C},\, d')$ est complet.

Solution. 1. Il est clair que pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a $d'(z,w) \geq 0$, $d'(z,w) = d'(w,z)$ et que $d'(z,w) = 0 \iff z = w$. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire, *i.e.* pour tous $a, b, c \in \mathbb{C}$, on a $d'(a,c) \leq d'(a,b) + d'(b,c)$. Notons d'abord que pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a $d(z,w) \leq d'(z,w)$. On distingue deux cas :

Premier cas : 0, a et c sont alignés, alors on a $d'(a,c) = d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) \leq d'(a,b) + d'(b,c)$.

Deuxième cas : 0, a et c ne sont pas alignés, alors ou bien 0, a et b ne sont pas alignés ou bien 0, b et c ne sont pas alignés. Donc on a $d'(a,c) = d(0,a) + d(0,c)$ et

$$d'(a,b) + d'(b,c) = \begin{cases} d(0,a) + d(0,b) + d(b,c) \geq d(0,a) + d(0,c) \\ \text{ou} \\ d(0,b) + d(0,c) + d(a,b) \geq d(0,a) + d(0,c) \\ \text{ou} \\ d(0,a) + d(0,b) + d(0,b) + d(0,c) \geq d(0,a) + d(0,c)\,.\end{cases}$$

Par conséquent, on a $d'(a,c) \leq d'(a,b) + d'(b,c)$. Donc d' est bien une distance sur $\mathbb{C}$.
2. Pour tout $w \in \mathbb{C}$, on a $d'(0,w) = d(0,w)$, donc pour tout $r > 0$, on a $B_{d'}(0,r) = B_d(0,r)$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$, on a $z = |z|e^{i\theta}$ avec $|z| = d(0,z) > 0$. Pour tout $r > 0$, soit $I_r = \left\{te^{i\theta}\ ;\ |z| - r < t < |z| + r\right\}$, c'est un segment. Alors on a :

$$B_{d'}(z,r) = \begin{cases} I_r & \text{si} \quad 0 < r \leq |z|\,, \\ \\ B_d(0, r - |z|) \cup I_r & \text{si} \quad r > |z|\,. \end{cases}$$

3. Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a $d(z,w) \leq d'(z,w)$, donc l'application identique $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ est lipschitzienne de $(\mathbb{C},\, d')$ dans $(\mathbb{C},\, d)$, donc elle est continue.
4. Pour tout $n \geq 1$, soit $z_n = 1 + \frac{i}{n}$. Alors on a $d(1, z_n) = \frac{1}{n}$, donc la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1 pour la distance d. Mais on a $d'(1, z_n) = d(0,1) + d(0, z_n) = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$, donc la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 1 pour la distance d'. On en déduit que l'application identique $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ n'est pas continue de $(\mathbb{C},\, d)$ dans $(\mathbb{C},\, d')$.
5. Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(\mathbb{C},\, d')$. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a $d(z_n, z_m) \leq d'(z_n, z_m)$, donc $(z_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{C},\, d)$. D'après la proposition 2.6.6, $(\mathbb{C},\, d)$ est complet, donc il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(z, z_n) = 0$. On distingue deux cas :
Premier cas : $z = 0$. Comme pour tout $n \geq 0$, on a $d'(0, z_n) = d(0, z_n)$, alors $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers $0 = z$ pour la distance d'.
Deuxième cas : $z \neq 0$. Soit $\varepsilon = \frac{|z|}{2}$, comme $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers z pour la distance d, alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on ait $\big|\,|z| - |z_n|\,\big| \leq |z - z_n| = d(z, z_n) < \frac{|z|}{2}$. D'où pour tout $n \geq N_1$, on a $\frac{|z|}{2} < |z_n|$. Comme $(z_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy pour d', il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq N_2$, on ait $d'(z_n, z_m) < \frac{|z|}{2}$. Donc, pour tout $n \geq N = \max(N_1, N_2)$, on a $\frac{|z|}{2} < |z_n|$ et pour tous $n, m \geq N$, on a $d'(z_n, z_m) < \frac{|z|}{2}$. Soient $n, m \geq N$. Si 0, z_n et z_m ne sont pas alignés, alors on a $|z_n| + |z_m| = d'(z_n, z_m)$, d'où $|z_n| < \frac{|z|}{2}$, ce qui est impossible. Donc, pour tous $n, m \geq N$, 0, z_n et z_m sont alignés. Comme la droite passant par 0 et z_N est fermée pour la distance d, on en déduit que pour tout $n \geq N$, 0, z_n et z sont alignés, donc on a $d'(z, z_n) = d(z, z_n)$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} d'(z, z_n) = 0$. Autrement dit, $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers z pour la distance d'. Par conséquent, $(\mathbb{C},\, d')$ est complet.

Exercice 2.39. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\alpha)$ existe $\iff$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n\alpha)$ existe.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\alpha)$ n'existe pas.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. En déduire que
   (i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\alpha)$ existe $\iff$ $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$, et que dans ce cas, on a $\sin(n\alpha) = 0$.
   (ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n\alpha)$ existe $\iff$ $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$, et que dans ce cas, on a $\cos(n\alpha) = 1$.

Solution. 1. On a :

$$\sin((n+1)\alpha) = \sin(n\alpha + \alpha) = \sin(n\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(n\alpha)$$

$$\cos((n+1)\alpha) = \cos(n\alpha + \alpha) = \cos(n\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(n\alpha)\,.$$

Puisque l'on a $\sin(\alpha) \neq 0$ car $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on en déduit les formules suivantes :

$$\cos(n\alpha) = \frac{\sin((n+1)\alpha) - \sin(n\alpha)\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \tag{2.3}$$

$$\sin(n\alpha) = \frac{\cos(n\alpha)\cos(\alpha) - \cos((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)} \tag{2.4}$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\alpha)$ existe $\iff \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n\alpha)$ existe.

2. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\alpha)$ existe, et soient $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\alpha)$ et $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n\alpha)$. Il résulte des équations (2.3) et (2.4) que l'on a $\ell_2 = \dfrac{\ell_1 - \ell_1\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ et $\ell_1 = \dfrac{\ell_2\cos(\alpha) - \ell_2}{\sin(\alpha)}$, d'où $\left[1 + \dfrac{(1-\cos(\alpha))^2}{(\sin(\alpha))^2}\right]\ell_2 = 0$, donc on a $\ell_1 = \ell_2 = 0$. Or on a $(\cos(n\alpha))^2 + (\sin(n\alpha))^2 = 1$, pour tout n, d'où $\ell_1^2 + \ell_2^2 = 1$, ce qui est impossible. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\alpha)$ n'existe pas.

3. Si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$, alors pour tout n, on a $\sin(n\alpha) = 0$. Si $\alpha = (2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, alors pour tout $n \geq 0$, on a $\cos(2n\alpha) = 1$ et $\cos((2n+1)\alpha) = -1$, donc la suite $(\cos(n\alpha))_{n\geq 0}$ ne converge pas. Si $\alpha = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, alors on a $\cos(n\alpha) = 1$ pour tout $n \geq 0$, donc la suite $(\cos(n\alpha))_{n\geq 0}$ converge vers 1.

Exercice 2.40. Soit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$. Pour $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on pose $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $d(A,B) = 0$ si $A = B$ et $d(A,B) = \frac{1}{n+1}$ si $A \neq B$, où n est le plus petit élément de $A\triangle B$.

1. Montrer que d est une distance ultramétrique sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\big(\mathcal{P}(\mathbb{N}), d\big)$. Montrer que la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ converge vers $A = \bigcap\limits_{n\geq 0}\big(\bigcup\limits_{k\geq n} A_k\big)$. En particulier, l'espace $\big(\mathcal{P}(\mathbb{N}), d\big)$ est complet.
3. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble $\big\{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\ A \subset B\big\}$ est fermé dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
4. Soit A une partie finie de $\mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble $\big\{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\ A \subset B\big\}$ est ouvert dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
5. Soit $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est dense dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
6. Montrer que l'application $A \longmapsto \mathbb{N} \setminus A$ est une isométrie de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
7. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on pose $A_1 = \big\{n \in \mathbb{N}\ ;\ 2n+1 \in A\big\}$ et $A_2 = \big\{n \in \mathbb{N}\ ;\ 2n \in A\big\}$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ & A & \longmapsto & (A_1, A_2) \end{array}$$

   est un homéomorphisme.
8. Montrer que les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ (A,B) & \longmapsto & A \cup B \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ (A,B) & \longmapsto & A \cap B \end{array}$$

   sont continues.
9. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Montrer que les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ B & \longmapsto & A \cap B \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ B & \longmapsto & A \cup B \end{array}$$

   sont continues.

Solution. 1. Il est clair que pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a $d(A,B) \geq 0$, $d(A,B) = d(B,A)$, et que $d(A,B) = 0 \iff A = B$. Il reste à montrer l'inégalité ultramétrique. Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Montrons d'abord que l'on a l'inclusion suivante :

$$A \triangle C \subset A \triangle B \cup B \triangle C \quad (*)$$

Soit $x \in A \triangle C$, alors $x \in A \cup C$ et $x \notin A \cap C$. On distingue deux cas :
Premier cas : $x \notin B$. Alors on a $x \in A \triangle B$ si $x \in A$, et on a $x \in B \triangle C$ si $x \in C$. Donc $x \in A \triangle B \cup B \triangle C$.
Deuxième cas : $x \in B$. Alors on a $x \in B \cap (A \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$. Comme $x \notin A \cap B \cap C$, alors ou bien $x \notin A \cap B$ ou bien $x \notin B \cap C$. Donc, ou bien on a $x \in A \triangle B$ ou bien on a $x \in B \triangle C$, d'où $x \in A \triangle B \cup B \triangle C$. Par conséquent, on a bien l'inclusion $(*)$.
Supposons maintenant $A \neq B \neq C$. Soient $n = \min(A \triangle C)$, $p = \min(A \triangle B)$ et $q = \min(B \triangle C)$. D'après l'inclusion $(*)$, on a $\min(p,q) \leq n$, d'où $\min(p+1, q+1) = \min(p,q)+1 \leq n+1$. Par conséquent, on a $\frac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{\min(p+1, q+1)} = \max\left(\frac{1}{p+1}, \frac{1}{q+1}\right)$, d'où $d(A,C) \leq \max\big(d(A,B), d(B,C)\big)$. Donc d est bien une distance ultramétrique sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\big(\mathcal{P}(\mathbb{N}), d\big)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p \geq N$ et $q \geq N$, on ait $d(A_p, A_q) < \varepsilon$. Montrons d'abord que pour tous $p \geq N$ et $q \geq N$, on a $d\big(A_p, \underset{k\geq q}{\cup} A_k\big) < \varepsilon$. On peut supposer $A_p \neq \underset{k\geq q}{\cup} A_k$. Soit $n \in A_p \triangle \big(\underset{k\geq q}{\cup} A_k\big) = \big[A_p \cup \big(\underset{k\geq q}{\cup} A_k\big)\big] \setminus \underset{k\geq q}{\cup}(A_p \cap A_k)$. Si $n \in A_p$, alors pour tout $k \geq q$, on a $n \in A_p \triangle A_k$, d'où $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < \min\big(A_p \triangle A_k\big) \leq n$. Si $n \in \underset{k\geq q}{\cup} A_k$, alors il existe $k \geq q$ tel que $n \in A_p \triangle A_k$, d'où $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < \min\big(A_p \triangle A_k\big) \leq n$. Par conséquent, on a $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < \min\big(A_p \triangle \big(\underset{k\geq q}{\cup} A_k\big)\big)$, d'où $d\big(A_p, \underset{k\geq q}{\cup} A_k\big) < \varepsilon$.
Soit $A = \underset{n\geq 0}{\cap}\big(\underset{k\geq n}{\cup} A_k\big)$. Montrons que la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ converge vers A. On a $A = \underset{q\geq N}{\cap}\big(\underset{k\geq q}{\cup} A_k\big)$. Soit $p \geq N$ et supposons que $A_p \neq A$. Soit $n \in A_p \triangle A$. On distingue deux cas :
Premier cas : $n \in A_p$. Alors il existe $q \geq N$ tel que $n \notin \underset{k\geq q}{\cup} A_k$, d'où $n \in A_p \triangle \big(\underset{k\geq q}{\cup} A_k\big)$. Donc on a $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < \min\big(A_p \triangle \big(\underset{k\geq q}{\cup} A_k\big)\big) \leq n$.
Deuxième cas : $n \in A$. Alors pour tout $q \geq N$, on a $n \in A_p \triangle \big(\underset{k\geq q}{\cup} A_k\big)$, d'où on a $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < \min\big(A_p \triangle \big(\underset{k\geq q}{\cup} A_k\big)\big) \leq n$.
Par conséquent, on a $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$, d'où $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < \min\big(A_p \triangle A\big)$. Donc on a $d(A_p, A) < \varepsilon$. Ainsi on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$, on ait $d(A_p, A) < \varepsilon$. Autrement dit, la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ converge vers A.
A titre d'exemple, on a : si $A_n = \{n\}$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \emptyset$. Si $A_n = \{0, 1, \ldots, n\}$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \mathbb{N}$.
3. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On note $F = \big\{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\ A \subset B\big\}$. Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ une suite dans F telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. D'après 2, on a $B = \underset{n\geq 0}{\cap}\big(\underset{k\geq n}{\cup} B_k\big)$. Comme pour tout $n \geq 0$, on a $A \subset B_n$, d'où $A \subset B$. Par conséquent, on a $B \in F$. Donc F est un fermé de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
4. Soit A une partie finie de $\mathbb{N}$; $A = \{n_1, \ldots, n_p\}$. Soit $U = \big\{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\ A \subset B\big\} = \underset{1\leq i\leq p}{\cap}\big\{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\ n_i \in B\big\}$. Puisque une intersection finie d'ouverts est un ouvert, alors on peut supposer que A est réduit à un seul élément, *i.e.* $A = \{p\}$. Pour montrer que U est un ouvert, on montre que son complémentaire $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus U = \big\{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\ p \notin B\big\}$ est fermé dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus U$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. D'après 2, on a $B = \underset{n\geq 0}{\cap}\big(\underset{k\geq n}{\cup} B_k\big)$. Or

pour tout $n \geq 0$, $p \notin B_n$, d'où $p \notin B$, donc on a $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus U$. Par conséquent, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus U$ est un fermé de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
5. Soient $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Soit $A_n = \{0, \dots, n\} \cap A$, alors A_n est fini et on a $d(A_n, A) < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$. On en déduit que $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est dense dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
6. Notons d'abord que l'application $A \longmapsto \mathbb{N} \setminus A$ est bijective de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a $(\mathbb{N} \setminus A)\triangle(\mathbb{N} \setminus B) = A\triangle B$. Par conséquent, l'application $A \longmapsto \mathbb{N} \setminus A$ est une isométrie de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
7. Soient $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tels que $A_1 = B_1$ et $A_2 = B_2$. Alors on a :

$$A = \big\{2n+1\ ;\ n \in A_1\big\} \cup \big\{2n\ ;\ n \in A_2\big\} = \big\{2n+1\ ;\ n \in B_1\big\} \cup \big\{2n\ ;\ n \in B_2\big\} = B\,.$$

Donc l'application f est injective. Soient $C, D \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et posons $A = \big\{2n+1\ ;\ n \in C\big\} \cup \big\{2n\ ;\ n \in D\big\}$, alors on a $A_1 = C$ et $A_2 = D$. Donc l'application f est surjective. Montrons maintenant la continuité de f. On munit l'espace $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ de la distance D_∞. Soient $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Alors on a $A_1\triangle B_1 = \big\{n\ ;\ 2n+1 \in A\triangle B\big\}$ et $A_2\triangle B_2 = \big\{n\ ;\ 2n \in A\triangle B\big\}$. On en déduit facilement que l'on a $d(A,B) \leq D_\infty\big((A_1, A_2), (B_1, B_2)\big) \leq 2\,d(A,B)$. Par conséquent, l'application f est un homéomorphisme de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
8. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Montrons que l'on a $d(A\cup B, C\cup D) \leq D_\infty\big((A,B),(C,D)\big)$. Notons d'abord que l'on peut supposer $A \cup B \neq C \cup D$. Autrement dit, $(A \cup B)\triangle(C \cup D) \neq \emptyset$. On vérifie facilement que l'on a toujours :

$$(A \cup B)\triangle(C \cup D) \subset (A\triangle C) \cup (B\triangle D)\,.$$

On distingue trois cas :
Premier cas : $A\triangle C \neq \emptyset$ et $B\triangle D \neq \emptyset$. Alors on a :

$$\min\big(\min(A\triangle C), \min(B\triangle D)\big) = \min\big((A\triangle C) \cup (B\triangle D)\big) \leq \min\big((A \cup B)\triangle(C \cup D)\big)\,,$$

d'où :

$$\min\big(\min(A\triangle C)+1, \min(B\triangle D)+1\big) \leq \min\big((A \cup B)\triangle(C \cup D)\big) + 1\,.$$

Par conséquent, on a $d(A \cup B, C \cup D) \leq \max\big(d(A,C), d(B,D)\big) = D_\infty\big((A,B),(C,D)\big)$.
Deuxième cas : $A\triangle C = \emptyset$. Autrement dit, on a $A = C$. Alors on a $\min(B\triangle D) \leq \min\big((A \cup B)\triangle(C \cup D)\big)$, d'où $\min(B\triangle D) + 1 \leq \min\big((A \cup B)\triangle(C \cup D)\big) + 1$. Par conséquent, on a $d(A \cup B, C \cup D) \leq d(B,D) = \max\big(d(A,C), d(B,D)\big) = D_\infty\big((A,B),(C,D)\big)$.
Troisième cas : $B\triangle D = \emptyset$. Autrement dit, on a $B = D$. Alors on a $\min(A\triangle C) \leq \min\big((A \cup B)\triangle(C \cup D)\big)$, d'où $\min(A\triangle C) + 1 \leq \min\big((A \cup B)\triangle(C \cup D)\big) + 1$. Par conséquent, on a $d(A \cup B, C \cup D) \leq d(A,C) = \max\big(d(A,C), d(B,D)\big) = D_\infty\big((A,B),(C,D)\big)$.
Donc l'application $(A,B) \longmapsto A \cup B$ est lipschitzienne, donc continue. L'application $(A,B) \longmapsto A\cap B$ est la composée des applications continues suivantes : $(A,B) \longmapsto (\mathbb{N}\setminus A, \mathbb{N}\setminus B)$, $(A,B) \longmapsto A \cup B$ et $C \longmapsto \mathbb{N} \setminus C$, donc l'application $(A,B) \longmapsto A \cap B$ est continue de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
9. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Comme l'application $B \longmapsto (A,B)$ est continue de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on déduit de 8 que les applications $B \longmapsto A \cap B$ et $B \longmapsto A \cup B$ sont continues de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 2.41. Limite inférieure, limite supérieure d'une suite réelle bornée. À toute suite réelle bornée $(x_n)_{n\geq 0}$, on associe les deux suites réelles $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$a_n = \inf\{x_p\ ;\ p \geq n\} \quad \text{et} \quad b_n = \sup\{x_p\ ;\ p \geq n\}\,.$$

La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée, donc elle converge vers un réel appelé **limite inférieure** de $(x_n)_{n\geq 0}$ et noté $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$ ou plus simplement $\liminf x_n$ ou $\underline{\lim}\, x_n$.
La suite $(b_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée, donc elle converge vers un réel appelé **limite supérieure** de $(x_n)_{n\geq 0}$ et noté $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$ ou plus simplement $\limsup x_n$ ou $\overline{\lim}\, x_n$.

1. Montrer que l'on a $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente si et seulement si on a $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$, et que dans ce cas, on a $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$.
3. Montrer que $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$ sont des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.
4. Montrer que pour toute valeur d'adhérence x de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, on a :
$$\liminf_{n\to+\infty} x_n \leq x \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n .$$
Autrement dit, $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$.
5. Montrer sur des exemples que la limite inférieure $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$ peut coïncider ou non avec la borne inférieure $\inf\limits_{n\geq 0} x_n$ ou avec le plus petit élément $\min\limits_{n\geq 0} x_n$ (lorsqu'il existe).
6. Montrer sur des exemples que la limite supérieure $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$ peut coïncider ou non avec la borne supérieure $\sup\limits_{n\geq 0} x_n$ ou avec le plus grand élément $\max\limits_{n\geq 0} x_n$ (lorsqu'il existe).

Solution. 1. Puisque $(a_n)_{n\geq 0}$ est croissante, $(b_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et que pour tout $n \geq 0$, on a $a_n \leq b_n$, alors pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leq b_m$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Autrement dit, on a $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$.
2. Supposons d'abord que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers un élément $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon$. Donc, pour tout $n \geq N$, on a $\ell - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq \ell + \varepsilon$, d'où $\ell - \varepsilon \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \ell + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc on a $\ell \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \ell$. Par conséquent, on a $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell = \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell = \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$. Autrement dit, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\ell - \varepsilon < a_n \leq b_n < \ell + \varepsilon$. On en déduit que pour tout $n \geq N$, on a $\ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon$. Donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.
3. Soient $a = \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $b = \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ et $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p = \max(N, k)$, alors on a $a - \varepsilon < a_p < a + \varepsilon$ et $b - \varepsilon < b_p < b + \varepsilon$. Comme on a $a_p = \inf\{x_n\ ;\ n \geq p\}$ et $b_p = \sup\{x_n\ ;\ n \geq p\}$, alors il existe $n \geq p$ et $m \geq p$ tels que $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ et $b - \varepsilon < x_m < b + \varepsilon$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq k$ tel que $|a - x_n| < \varepsilon$ et il existe $m \geq k$ tel que $|b - x_m| < \varepsilon$. Donc a et b sont des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.
4. Soit x une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, il

existe $n \geq k$ tel que $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, d'où on a $x - \varepsilon < b_k$ et $a_k < x + \varepsilon$. Par conséquent, on a $x - \varepsilon \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n$ et $\liminf_{n\to+\infty} x_n \leq x + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc on a $\liminf_{n\to+\infty} x_n \leq x \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n$.

5. Soient $x_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, soit $x_n = \frac{1}{n}$, alors on a $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \inf_{n\geq 0} x_n = \min_{n\geq 0} x_n = 0$. Soient $y_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, soit $y_n = 1$, alors on a $\liminf_{n\to+\infty} y_n = 1$ et $\inf_{n\geq 0} x_n = \min_{n\geq 0} x_n = 0$.

6. Soient $x_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, soit $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, alors on a $\limsup_{n\to+\infty} x_n = \sup_{n\geq 0} x_n = \max_{n\geq 0} x_n = 1$. Soient $y_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, soit $y_n = 0$, alors on a $\limsup_{n\to+\infty} y_n = 0$ et $\sup_{n\geq 0} x_n = \max_{n\geq 0} x_n = 1$.

Exercice 2.42. Propriétés algébriques des limites inférieures et limites supérieures. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles bornées. Montrer que

1. Pour tout $\lambda \geq 0$, on a :
$$\liminf_{n\to+\infty} \lambda x_n = \lambda \liminf_{n\to+\infty} x_n \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} \lambda x_n = \lambda \limsup_{n\to+\infty} x_n\,.$$
2. Pour tout $\lambda \leq 0$, on a :
$$\liminf_{n\to+\infty} \lambda x_n = \lambda \limsup_{n\to+\infty} x_n \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} \lambda x_n = \lambda \liminf_{n\to+\infty} x_n\,.$$
3. On a :
$$\liminf_{n\to+\infty} x_n + \liminf_{n\to+\infty} y_n \leq \liminf_{n\to+\infty} (x_n + y_n)$$
et
$$\limsup_{n\to+\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n\,.$$
4. Donner un exemple de deux suites réelles bornées $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ telles que l'on ait :
$$\liminf_{n\to+\infty} x_n + \liminf_{n\to+\infty} y_n < \liminf_{n\to+\infty} (x_n + y_n) < \liminf_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n < \limsup_{n\to+\infty} (x_n + y_n)$$
et
$$\limsup_{n\to+\infty} (x_n + y_n) < \limsup_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n\,.$$
5. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \leq y_n$ pour tout $n \geq n_0$, on a alors :
$$\liminf_{n\to+\infty} x_n \leq \liminf_{n\to+\infty} y_n \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} x_n \leq \limsup_{n\to+\infty} y_n\,.$$

Solution. 1. Soit $\lambda \geq 0$. Alors pour tout $p \geq 0$, on a :
$$\inf\{\lambda x_p\,;\, p \geq n\} = \lambda \inf\{x_p\,;\, p \geq n\} \quad \text{et} \quad \sup\{\lambda x_p\,;\, p \geq n\} = \lambda \sup\{x_p\,;\, p \geq n\}\,.$$
Par conséquent, on a $\liminf_{n\to+\infty} \lambda x_n = \lambda \liminf_{n\to+\infty} x_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} \lambda x_n = \lambda \limsup_{n\to+\infty} x_n$.

2. Soit $\lambda \leq 0$. Alors pour tout $p \geq 0$, on a :
$$\inf\{\lambda x_p\,;\, p \geq n\} = \lambda \sup\{x_p\,;\, p \geq n\} \quad \text{et} \quad \sup\{\lambda x_p\,;\, p \geq n\} = \lambda \inf\{x_p\,;\, p \geq n\}\,.$$

Par conséquent, on a $\liminf_{n\to+\infty} \lambda x_n = \lambda \limsup_{n\to+\infty} x_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} \lambda x_n = \lambda \liminf_{n\to+\infty} x_n$.
3. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\inf\{x_q \; ; \; q \geq n\} + \inf\{y_q \; ; \; q \geq n\} \leq x_p + y_p, \text{ pour tout } p \geq n\,,$$

d'où :

$$\inf\{x_q \; ; \; q \geq n\} + \inf\{y_q \; ; \; q \geq n\} \leq \inf\{x_p + y_p \; ; \; p \geq n\}\,.$$

Par conséquent, on a $\liminf_{n\to+\infty} x_n + \liminf_{n\to+\infty} y_n \leq \liminf_{n\to+\infty} (x_n + y_n)$.
De même, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$x_p + y_p \leq \sup\{x_q \; ; \; q \geq n\} + \sup\{y_q \; ; \; q \geq n\}, \text{ pour tout } p \geq n\,,$$

d'où :

$$\sup\{x_p + y_p \; ; \; p \geq n\} \leq \sup\{x_q \; ; \; q \geq n\} + \sup\{y_q \; ; \; q \geq n\}\,.$$

Par conséquent, on a $\limsup_{n\to+\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n$.
4. Il suffit de prendre x_n, $y_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} x_{4n} & = & 0 \\ x_{4n+1} & = & 1 \\ x_{4n+2} & = & 2 \\ x_{4n+3} & = & 3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y_{4n} & = & -2 \\ y_{4n+1} & = & -3 \\ y_{4n+2} & = & 1 \\ y_{4n+3} & = & 0\,. \end{cases}$$

Alors on a :

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = 0 \quad , \quad \liminf_{n\to+\infty} y_n = -3 \quad , \quad \liminf_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = -2\,,$$

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = 3 \quad , \quad \limsup_{n\to+\infty} y_n = 1 \quad , \quad \limsup_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = 3\,.$$

5. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \leq y_n$ pour tout $n \geq n_0$. Pour tout $n \geq 0$, soient $a_n = \inf\{x_p \; ; \; p \geq n\}$, $b_n = \sup\{x_p \; ; \; p \geq n\}$, $c_n = \inf\{y_p \; ; \; p \geq n\}$ et $d_n = \sup\{y_p \; ; \; p \geq n\}$. Soit $n \geq n_0$. Pour tout $p \geq n$, on a $a_n \leq x_p \leq y_p$, d'où $a_n \leq c_n$. Par conséquent, on a $\liminf_{n\to+\infty} x_n \leq \liminf_{n\to+\infty} y_n$. De même, pour tout $p \geq n$, on a $x_p \leq y_p \leq d_n$, d'où $b_n \leq d_n$. Par conséquent, on a $\limsup_{n\to+\infty} x_n \leq \limsup_{n\to+\infty} y_n$.

Exercice 2.43. Calculer les limite inférieure et limite supérieure des suites suivantes :

$$\big((-1)^n\big)_{n\geq 0}\,, \quad \big((-1)^n\big(1+\tfrac{1}{n}\big)\big)_{n\geq 1}\,, \quad \Big(\big(1+\tfrac{(-1)^n}{n}\big)\cos\big(\frac{n\pi}{3}\big)\Big)_{n\geq 1}\,.$$

Solution. Soit $x_n = (-1)^n$, pour tout $n \geq 0$. Alors on a $x_{2n+1} = -1$, $x_{2n} = 1$ et $-1 \leq x_n \leq 1$, pour tout $n \geq 0$. Par conséquent, on a $\liminf_{n\to+\infty} x_n = -1$ et $\limsup_{n\to+\infty} x_n = 1$.
Pour tout $n \geq 1$, soit $y_n = (-1)^n\big(1+\frac{1}{n}\big)$. Alors on a $\lim_{n\to+\infty} y_{2n+1} = -1$ et $\lim_{n\to+\infty} y_{2n} = 1$, et pour tout $n \geq 0$, on a $-1 \leq y_n \leq 1$. Par conséquent, on a $\liminf_{n\to+\infty} y_n = -1$ et $\limsup_{n\to+\infty} y_n = 1$.
Pour tout $n \geq 1$, soient $z_n = \big(1+\frac{(-1)^n}{n}\big)\cos\big(\frac{n\pi}{3}\big)$ et $t_n = \cos\big(\frac{n\pi}{3}\big)$. Comme on a $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{(-1)^n}{n} = 1$, alors on a $\liminf_{n\to+\infty} z_n = \liminf_{n\to+\infty} t_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} z_n = \limsup_{n\to+\infty} t_n$. Comme pour tout $n \geq 0$, on a $t_{3(2n+1)} = -1$, $t_{6n} = 1$ et $-1 \leq t_n \leq 1$, alors on a $\liminf_{n\to+\infty} t_n = -1$ et $\limsup_{n\to+\infty} t_n = 1$.

Exercice 2.44. On fixe un entier naturel $p \geq 2$ et on pose $N_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

1. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite dans N_p. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{p^n}$ converge dans $[0,\,1]$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{p^n}=1$ si et seulement si pour tout $n\geq 1$, on a $a_n=p-1$.
2. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite dans N_p. On suppose qu'il existe $j\geq 1$ tel que $a_j\neq p-1$ et $a_n=p-1$ pour tout $n\geq j+1$. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geq 1}$ dans N_p distincte de $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{p^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{p^n}$.
3. Soit $x\in[0,\,1[$.
   (i) Montrer qu'il existe une unique suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans N_p telle que :
   $$(\alpha)\qquad \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{p^j}\leq x<\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{p^j}+\frac{1}{p^n},\quad \text{pour tout } n\geq 1.$$
   (ii) Montrer que (α) est équivalent aux propriétés suivantes.
   (β) Pour tout $j\geq 1$, il existe $k\geq j$ tel que $x_k\neq p-1$.
   (δ) $x=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{x_j}{p^j}$. (Une telle écriture, vérifiant (β), de x est appelée le **développement p-adique propre** de x). Ainsi, par (α), le développement p-adique propre de x est unique.
4. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
5. Montrer que l'intervalle $[0,\,1[$ n'est pas dénombrable. En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Solution. 1. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite dans N_p. Pour tout $j\geq 1$, on a $0\leq\frac{a_j}{p^j}\leq\frac{p-1}{p^j}$, d'où $0\leq\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{p^j}\leq\sum_{j=1}^{n}\frac{p-1}{p^j}=(p-1)\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{n+1}}}{1-\frac{1}{p}}=1-\frac{1}{p^n}\leq 1$, donc la suite $\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{p^j}\right)_{n\geq 1}$ est positive, croissante et majorée par 1, donc la série $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{p^n}$ est convergente et on a $0\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{p^n}\leq 1$. Comme on a $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p-1}{p^n}=1$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{p^n}=1\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(p-1)-a_n}{p^n}=0$. Puisque $(p-1)-a_n\geq 0$, pour tout $n\geq 1$, on en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{p^n}=1\Longleftrightarrow a_n=p-1$ pour tout $n\geq 1$.

2. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite dans N_p et on suppose qu'il existe $j\geq 1$ tel que $a_j\neq p-1$ et $a_n=p-1$ pour tout $n\geq j+1$. On a $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{p^n}=\sum_{n=1}^{j-1}\frac{a_n}{p^n}+\frac{a_j}{p^j}+\sum_{n=j+1}^{+\infty}\frac{p-1}{p^n}$ et $\sum_{n=j+1}^{+\infty}\frac{p-1}{p^n}=\frac{1}{p^j}$, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{p^n}=\sum_{n=1}^{j-1}\frac{a_n}{p^n}+\frac{a_j+1}{p^j}$, avec $a_j+1\in N_p$. Soit :

$$b_n=\begin{cases} a_n & \text{si}\quad n<j\,,\\ a_j+1 & \text{si}\quad n=j\,,\\ 0 & \text{si}\quad n\geq j+1\,.\end{cases}$$

Alors $(b_n)_{n\geq 1}$ est une suite dans N_p distincte de $(a_n)_{n\geq 1}$ et on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{p^n}$.

3(i). Soit $x \in [0,\, 1[$. Montrons d'abord l'unicité. Supposons donc qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans N_p telle que pour tout $n \geq 1$, on ait :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p^j} \leq x < \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p^j} + \frac{1}{p^n}\,.$$

Alors pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j p^{n-j} \leq p^n x < \sum_{j=1}^{n} x_j p^{n-j} + 1\,.$$

Or on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j p^{n-j} \in \mathbb{N}$, d'où $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j p^{n-j} = \mathrm{E}\big(p^n x\big)$, la partie entière de $p^n x$, voir proposition C.1.2. On a :

$$\mathrm{E}\big(p^n x\big) = \sum_{j=1}^{n-1} x_j p^{n-j} + x_n \;=\; p \sum_{j=1}^{n-1} x_j p^{(n-1)-j} + x_n \;=\; p\mathrm{E}\big(p^{n-1} x\big) + x_n\,.$$

D'où $x_n = \mathrm{E}\big(p^n x\big) - p\mathrm{E}\big(p^{n-1}x\big)$. Donc si une telle suite $(x_n)_{n\geq 1}$ existe, alors elle est forcément unique.

Montrons l'existence. Pour tout $n \geq 1$, on pose $x_n = \mathrm{E}\big(p^n x\big) - p\mathrm{E}\big(p^{n-1}x\big)$. On a $x_n \in \mathbb{Z}$. Vérifions que $x_n \in N_p$ et que l'on a la propriété (α). On a $p^n x - 1 < \mathrm{E}\big(p^n x\big) \leq p^n x$ et $p^{n-1}x - 1 < \mathrm{E}\big(p^{n-1}x\big) \leq p^{n-1}x$, d'où $p^n x - p < p\mathrm{E}\big(p^{n-1}x\big) \leq p^n x$. Donc on a $-p^n x \leq -p\mathrm{E}\big(p^{n-1}x\big) < -p^n x + p$. On en déduit que l'on a $p^n x - 1 - p^n x < \mathrm{E}\big(p^n x\big) - p\mathrm{E}\big(p^{n-1}x\big) < p^n x - p^n x + p$, donc $-1 < x_n < p$, d'où $x_n \in N_p$. On montre la propriété (α) par récurrence sur n. Appelons (I_n) l'inégalité $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p^j} \leq x < \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p^j} + \frac{1}{p^n}$. On a $x_1 = \mathrm{E}\big(px\big) - p\mathrm{E}\big(x\big) = \mathrm{E}\big(px\big)$, d'où $x_1 \leq px < x_1 + 1$, donc $\dfrac{x_1}{p} \leq x < \dfrac{x_1}{p} + \dfrac{1}{p}$. Autrement dit, l'inégalité (I_1) est vraie. Supposons que l'inégalité (I_n) est vraie pour $n = n_0 - 1$, avec $n_0 \geq 2$, et montrons que l'inégalité (I_n) est vraie pour $n = n_0$. Par hypothèse, on a donc :

$$\sum_{j=1}^{n_0-1} \frac{x_j}{p^j} \leq x < \sum_{j=1}^{n_0-1} \frac{x_j}{p^j} \;+\; \frac{1}{p^{n_0-1}}\,.$$

On multiplie par p^{n_0-1}, on obtient :

$$p^{n_0-1} \sum_{j=1}^{n_0-1} \frac{x_j}{p^j} \leq p^{n_0-1}x < p^{n_0-1} \sum_{j=1}^{n_0-1} \frac{x_j}{p^j} \;+\; 1\,.$$

Donc on a $\mathrm{E}\big(p^{n_0-1}x\big) = p^{n_0-1} \displaystyle\sum_{j=1}^{n_0-1} \frac{x_j}{p^j}$, d'où $\dfrac{\mathrm{E}\big(p^{n_0-1}x\big)}{p^{n_0-1}} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n_0-1} \frac{x_j}{p^j}$. On en déduit que l'on a :

$$\sum_{j=1}^{n_0} \frac{x_j}{p^j} = \sum_{j=1}^{n_0-1} \frac{x_j}{p^j} \;+\; \frac{x_{n_0}}{p^{n_0}} = \frac{\mathrm{E}\big(p^{n_0-1}x\big)}{p^{n_0-1}} \;+\; \frac{x_{n_0}}{p^{n_0}} = \frac{p\mathrm{E}\big(p^{n_0-1}x\big) \;+\; x_{n_0}}{p^{n_0}} = \frac{\mathrm{E}\big(p^{n_0}x\big)}{p^{n_0}}\,.$$

On a aussi $\mathrm{E}\big(p^{n_0}x\big) \leq p^{n_0}x < \mathrm{E}\big(p^{n_0}x\big)+1$, d'où $\dfrac{\mathrm{E}\big(p^{n_0}x\big)}{p^{n_0}} \leq x < \dfrac{\mathrm{E}\big(p^{n_0}x\big)}{p^{n_0}} + \dfrac{1}{p^{n_0}}$. Par conséquent, on a :

$$\sum_{j=1}^{n_0} \frac{x_j}{p^j} \leq x < \sum_{j=1}^{n_0} \frac{x_j}{p^j} + \frac{1}{p^{n_0}}\,.$$

Autrement dit, l'inégalité (I_n) est vraie pour $n = n_0$. Par conséquent, l'inégalité (I_n) est vraie pour tout $n \geq 1$. Donc on a bien la propriété (α).

3(ii). Supposons que l'on a (α). Comme on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p^n} = 0$, alors $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x_j}{p^j}$. Pour montrer que l'on a aussi la propriété (β), on raisonne par l'absurde. On suppose donc que l'on n'a pas la propriété (β). Alors il existe $j_0 \geq 1$ tel que pour tout $k \geq j_0$, on ait $x_k = p-1$. Donc $n_0 = \inf\{j \geq 1\ ;\ \text{pour tout } k \geq j \text{ on ait } x_k = p-1\}$ existe et on a $1 \leq n_0 \leq j_0$. Si $n_0 = 1$, alors pour tout $k \geq 1$, on a $x_k = p-1$, d'où $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x_j}{p^j} = 1$, ce qui est impossible. Si $n_0 > 1$, alors on a :

$$x = \sum_{j=1}^{n_0-1} \frac{x_j}{p^j} + \sum_{j=n_0}^{+\infty} \frac{p-1}{p^j} = \sum_{j=1}^{n_0-1} \frac{x_j}{p^j} + \frac{1}{p^{n_0-1}}\,.$$

Ce qui est impossible car on a par hypothèse $x < \displaystyle\sum_{j=1}^{n_0-1} \frac{x_j}{p^j} + \frac{1}{p^{n_0-1}}$. Par conséquent, on a bien (β).

Réciproquement, montrons que (β) et (δ) impliquent (α). Comme on a $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x_j}{p^j}$, alors pour tout $n \geq 1$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p^j} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x_j}{p^j} = x$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x_j}{p^j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p^j} + \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{x_j}{p^j} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p^j} + \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p^j} + \frac{1}{p^n}\,. \end{aligned}$$

S'il existe $n \geq 1$ tel que $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p^j} + \frac{1}{p^n}$, alors on a $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{(p-1)-x_j}{p^j} = 0$, avec $(p-1)-x_j \geq 0$, pour tout $j \geq n+1$, d'où $x_j = p-1$, pour tout $j \geq n+1$, ce qui contredit (β). Donc, pour tout $n \geq 1$, on a $x < \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p^j} + \frac{1}{p^n}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $\frac{x}{m} \in [0, 1]$. D'après ce qui précède, il existe une suite $(r_n)_{n \geq 0}$ dans $\mathbb{Q}$ tel que $\frac{x}{m} = \lim\limits_{n \to +\infty} r_n$, d'où $x = \lim\limits_{n \to +\infty} mr_n$, avec $mr_n \in \mathbb{Q}$, pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
5. Supposons que $[0, 1[$ est dénombrable, et soit $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow [0, 1[$ une bijection. On considère $p \geq 3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ admet un unique développement p-adique propre $\varphi(n) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{x_{n,j}}{p^j}$.

Pour tout $j \geq 1$, soit :

$$a_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_{j,j} \neq 0\,, \\ \\ 1 & \text{si} \quad x_{j,j} = 0\,. \end{cases}$$

Soit $x = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{a_j}{p^j}$, alors $x \in [0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x \neq \varphi(n)$. Donc φ n'est pas surjective, ce qui est impossible. Par conséquent, $[0, 1[$ n'est pas dénombrable. Comme on a $[0, 1[\subset \mathbb{R}$ et $[0, 1[$ est infini non dénombrable, alors $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Chapitre 3

ESPACES COMPACTS

Proposition. Soient X un espace topologique séparé, F une partie fermée de X et K une partie compacte de X telles que $K \cap F = \emptyset$.

1. Si X est régulier, alors il existe deux ouverts U et V dans X tels que $K \subset U$, $F \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.
2. Si X est complètement régulier, alors il existe une fonction continue $f : X \longrightarrow [0,\, 1]$ telle que pour tout $x \in K$, on ait $f(x) = 1$ et pour tout $y \in F$, on ait $f(y) = 0$.

Démonstration. 1. Comme X est régulier, pour tout $x \in K$, il existe deux ouverts disjoints U_x et V_x dans X tels que $x \in U_x$ et $F \subset V_x$. Comme K est compact, il existe un sous-ensemble fini $\{x_1, \cdots, x_n\}$ de K tel que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Soient $U = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$ et $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$, alors U et V sont des ouverts de X tels que $K \subset U$, $F \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.
2. Comme X est complètement régulier, pour tout $x \in K$, il existe une fonction continue f_x de X dans $[0,\, 1]$ telle que $f_x(x) = 0$ et pour tout $y \in F$, on ait $f_x(y) = 1$. Comme K est compact, il existe un sous-ensemble fini $\{x_1, \cdots, x_n\}$ de K tel que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}^{-1}\big([0,\, \frac{1}{2}[\big)$. Soit $g = f_{x_1} \cdots f_{x_n}$, alors g est continue de X dans $[0,\, 1]$ telle que pour tout $x \in K$, on ait $0 \leq g(x) < \frac{1}{2}$, et pour tout $y \in F$, on ait $g(y) = 1$. Soit :

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\,, \\ 4t - 2 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}\,, \\ 1 & \text{si} \quad \frac{3}{4} \leq t \leq 1\,. \end{cases}$$

Alors h est continue de $[0,\, 1]$ dans $[0,\, 1]$. Soit $f = 1 - h \circ g$, alors f est une fonction continue de X dans $[0,\, 1]$ telle que pour tout $x \in K$, on ait $f(x) = 1$ et pour tout $y \in F$, on ait $f(y) = 0$. ■

Théorème. Soit $(X,\, d)$ un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) L'espace topologique X est compact.

(ii) L'espace métrique $(X,\, d)$ est précompact et complet.

(iii) Toute partie infinie de X possède au moins un point d'accumulation.

(iv) Toute suite de X possède une sous-suite convergente.

(v) Pour toute suite décroissante $(F_n)_{n \geq 0}$ de parties fermées non vides de X, on a $\bigcap\limits_{n \geq 0} F_n \neq \emptyset$.

Démonstration. La preuve de ce théorème est tirée de ([31], p. 117). Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Par hypothèse, X est compact. D'après la remarque 3.1.6, $(X,\, d)$ est précompact. Le fait que $(X,\, d)$ est complet résulte du théorème 2.6.1 et de la proposition 3.1.5 ou des propositions 2.6.2 et 3.1.5.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit A une partie infinie de X. On va construire par récurrence une suite décroissante de parties infinies A_n de X telle que $A_0 = A$ et pour tout $n \geq 1$, $\delta(A_n) \leq \frac{2}{n}$, où $\delta(A_n)$ désigne le diamètre de A_n. Soient $A_0 = A$ et $n \in \mathbb{N}$ et supposons A_n construit. Comme X est précompact, il existe une partie finie I de X telle que $X = \underset{x\in I}{\cup} B\big(x, \frac{1}{n+1}\big)$. Comme A_n est infini, il existe $x \in I$ tel que $B\big(x, \frac{1}{n+1}\big) \cap A_n$ soit infini. On pose alors $A_{n+1} = B\big(x, \frac{1}{n+1}\big) \cap A_n$. Comme $A_{n+1} \subset B\big(x, \frac{1}{n+1}\big)$, alors on a $\delta(\,\overline{A_{n+1}}\,) = \delta(A_{n+1}) \leq \frac{2}{n+1}$. Puisque $(X,\, d)$ est complet et comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(\,\overline{A_{n+1}}\,) = 0$, alors il résulte du théorème 2.6.1 qu'il existe $z \in X$ tel que $\underset{n\geq 0}{\cap} \overline{A_n} = \{z\}$. Soit V un voisinage de z dans X, alors il existe $n \geq 0$ tel que $B'\big(z, \frac{2}{n+1}\big) \subset V$. Donc pour tout $y \in A_{n+1}$, on a $d(z,y) \leq \delta(\,\overline{A_{n+1}}\,) \leq \frac{2}{n+1}$, d'où l'on déduit que $A_{n+1} \subset V$. Par conséquent, on a $A_{n+1} \subset V \cap A$. Ainsi, $V \cap A$ contient une infinité d'éléments. Cela prouve que z est un point d'accumulation de A.

Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (iv). Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans X. On distingue deux cas :

Premier cas : l'ensemble $\{x_n \,;\, n \geq 0\}$ est fini. Alors il existe $x \in X$ et une partie infinie D de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in D$, on ait $x_n = x$. Soit $\varphi(0)$ le plus petit élément de D, et par récurrence, $\varphi(n+1)$ le plus petit élément de D strictement plus grand que $\varphi(n)$. Alors $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers x.

Deuxième cas : l'ensemble $\{x_n \,;\, n \geq 0\}$ est infini. Par hypothèse, cet ensemble possède un point d'accumulation noté y. Vérifions que y est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Soient $C = \{d(y,x_n) \,;\, 0 \leq n \leq N \text{ et } x_n \neq y\} \cup \{\varepsilon\}$ et $\varepsilon' = \inf(C)$, alors $\varepsilon' > 0$. Comme y est un point d'accumulation de l'ensemble $\{x_n \,;\, n \geq 0\}$, il existe $x_n \in B(y,\varepsilon') \setminus \{y\}$, d'où $n > N$. Ainsi, pour tous $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, il existe $n > N$ tel que $x_n \in B(y,\varepsilon)$. Donc y est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Il résulte alors de la proposition 2.2.3 que y est la limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$.

Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (i). Notons déjà que X est un espace séparé car c'est un espace métrique. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Par le lemme 3.1.1, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i \in I$ pour lequel $B(x,r) \subset U_i$. Supposons qu'il n'existe pas de sous-ensemble fini J de I tel que $X = \underset{i\in J}{\cup} U_i$. Alors pour toute partie finie B de X, comme $\underset{x\in B}{\cup} B(x,r)$ est inclus dans un nombre fini d'ouverts U_i, il existe $y \in X$ tel que $d(x,y) \geq r$ pour tout $x \in B$. On choisit un point $x_0 \in X$, puis un point $x_1 \in X$ tel que $d(x_0,x_1) \geq r$, puis un point $x_2 \in X$ tel que $d(x_0,x_2) \geq r$ et $d(x_1,x_2) \geq r$ et, par récurrence, une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X telle que pour tous $p,q \in \mathbb{N}$ avec $p \neq q$, on ait $d(x_p,x_q) \geq r$. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ n'admet aucune sous-suite convergente, c'est une contradiction. Donc il existe bien un sous-ensemble fini J de I tel que $X = \underset{i\in J}{\cup} U_i$. Par conséquent, X est compact.

L'implication (i) $\Longrightarrow$ (v) résulte de la proposition 3.1.5.

Preuve de (v) $\Longrightarrow$ (iv). Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans X. Pour tout $n \geq 0$, soit $F_n = \overline{\{x_p \,;\, p \geq n\}}$. Alors $(F_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de parties fermées non vides de X. Par hypothèse, on a $\underset{n\geq 0}{\cap} F_n \neq \emptyset$. D'autre part, d'après la proposition 1.7.1, l'intersection $\underset{n\geq 0}{\cap} F_n$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ possède au moins une valeur d'adhérence. Il résulte de la proposition 2.2.3 que $(x_n)_{n\geq 0}$ possède une sous-suite convergente. ■

Théorème. Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) X est un espace complètement régulier.

(ii) X est homéomorphe à un sous-espace de $[0,\,1]^J$, pour certain ensemble J.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $E = C(X,\,[0,\,1])$ l'ensemble des applications continues de X dans $I = [0,\,1]$. On munit I^E de la topologie produit et on définit l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \rho: & X & \longrightarrow & I^E \\ & x & \longmapsto & (f(x))_{f\in E} \end{array}$$

Montrons que ρ est une application continue injective. Soient $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Puisque X est complètement régulier, il existe $f \in E$ telle que $f(x) \neq f(y)$, d'où $\rho(x) \neq \rho(y)$. Donc ρ est injective. D'autre part, pour tout $f \in E$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \pi_f \circ \rho: & X & \longrightarrow & I \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est continue. Il en résulte que ρ est continue.
Montrons que ρ est un homéomorphisme de X sur $\rho(X)$. Il reste à montrer que ρ est une application ouverte de X sur $\rho(X)$, *i.e.* pour tout ouvert U de X, $\rho(U)$ est un ouvert de $\rho(X)$. Si $U = X$, $\rho(U) = \rho(X)$ est un ouvert de $\rho(X)$. On suppose $U \neq X$, et donc $F = X \setminus U$ est un fermé non vide de X. Soit $x \in U$. Puisque X est complètement régulier, il existe $h \in E$ telle que $h(x) = 1$ et pour tout $y \in F$, on ait $h(y) = 0$. Soit W l'ouvert dans I^E défini par $W = {\pi_h}^{-1}\big(]0,\,1]\big)$, où π_h est la projection canonique

$$\begin{array}{rccc} \pi_h: & I^E & \longrightarrow & I \\ & (x_f)_{f\in E} & \longmapsto & x_h \end{array}$$

alors on a $W \cap \rho(X) \subset \rho(U)$. Donc $\rho(U)$ est un voisinage de chacun de ses points, d'où $\rho(U)$ est un ouvert de $\rho(X)$. Par conséquent, ρ est un homéomorphisme de X sur $\rho(X)$. Ainsi, on identifie X à $\rho(X)$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons qu'il existe un ensemble J tel que X soit homéomorphe à un sous-espace de $[0,\,1]^J$. Puisque $[0,\,1]^J$ est compact, alors $[0,\,1]^J$ est un espace normal, voir corollaire 3.1.3, donc $[0,\,1]^J$ est un espace complètement régulier. D'autre part, il est clair que tout sous-espace d'un espace complètement régulier est complètement régulier. Par conséquent, X est complètement régulier. ■

Théorème (d'Alembert). Toute fonction polynômiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de degré $n \geq 1$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Soit P une fonction polynômiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de degré $n \geq 1$, *i.e.* il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, avec $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \neq 0$, on a :

$$P\big(\tfrac{1}{z}\big) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} = \frac{a_n}{z^n}\left[1 + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_p}{a_n} z^{n-p}\right].$$

Comme on a $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{a_p}{a_n} z^{n-p} = 0$ et $\lim\limits_{z\to 0} \left|\dfrac{a_n}{z^n}\right| = +\infty$, alors on a $\lim\limits_{z\to 0} \big|P\big(\tfrac{1}{z}\big)\big| = +\infty$. Par conséquent, il existe $R > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| > R$, on ait $|P(z)| > |P(0)|$. Comme l'application $z \longmapsto |P(z)|$ est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ et comme $B'(0, R) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leq R\}$ est compact, alors il existe $z_0 \in B'(0, R)$ tel que $|P(z_0)| = \inf\limits_{|z|\leq R} |P(z)|$, voir théorème 3.2.2. Or on a $0 \in B'(0,R)$, d'où $|P(z_0)| \leq |P(0)|$. Par conséquent, on a $|P(z_0)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$. On va montrer que $P(z_0) = 0$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, soit $Q(z) = P(z + z_0)$, alors on a $Q(0) = P(z_0)$, donc $P(z_0) = 0$ si et seulement si $Q(0) = 0$. Puisque l'application $z \longmapsto z + z_0$ est bijective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, alors on a :

$$|Q(0)| = |P(z_0)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z+z_0)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |Q(z)|\,.$$

Comme Q est aussi une fonction polynômiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de degré $n \geq 1$, alors on a $Q(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n$, avec $n \geq 1$ et $b_n \neq 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, et on a $|b_0| = \inf_{z\in\mathbb{C}} \left|b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n\right|$. Si $b_0 = 0$, le théorème est démontré. Supposons que $b_0 \neq 0$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $1 \leq \left|1 + \sum_{p=1}^{n} c_p z^p\right|$, où $c_p = \dfrac{b_p}{b_0}$. Soit $n_0 = \inf\{p \in \mathbb{N}^* \;;\; c_p \neq 0\}$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $1 \leq \left|1 + c_{n_0} z^{n_0} + \sum_{p=n_0+1}^{n} c_p z^p\right|$. Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^{n_0} = -c_{n_0}$, alors $w \neq 0$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$1 \leq \left|1 + \frac{c_{n_0}}{w^{n_0}} z^{n_0} + \sum_{p=n_0+1}^{n} \frac{c_p}{w^p} z^p\right|.$$

Autrement dit, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$1 \leq \left|1 - z^{n_0} + \sum_{p=n_0+1}^{n} d_p z^p\right|.$$

Où $d_p = \dfrac{c_p}{w^p}$. Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$1 \leq |1 - z^{n_0}| + \left|\sum_{p=n_0+1}^{n} d_p z^p\right|.$$

En particulier, pour tout $x \in]0,1[$, on a $0 \leq -x^{n_0} + \left|\sum_{p=n_0+1}^{n} d_p x^p\right|$, d'où $1 \leq \left|\sum_{p=n_0+1}^{n} d_p x^{p-n_0}\right|$. Ce qui est impossible car $\lim_{x\to 0} \sum_{p=n_0+1}^{n} d_p x^{p-n_0} = 0$. Donc on a bien $P(z_0) = 0$. Autrement dit, la fonction polynômiale P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$. ■

Théorème (**Baire**). Soit X un espace localement compact. Alors X est un espace de Baire. Autrement dit, si $(U_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'ouverts denses dans X, alors l'intersection $\bigcap_{n\geq 0} U_n$ est dense dans X.

Démonstration. Soit V un ouvert non vide de X, il s'agit de montrer que $V \bigcap \bigcap_{n\geq 0} U_n \neq \emptyset$, voir proposition 1.2.4. Comme U_0 est dense dans X, alors $V \cap U_0 \neq \emptyset$, et soit $x_0 \in V \cap U_0$. Comme $V \cap U_0$ est un ouvert de X, d'après le théorème 3.4.1, il existe un ouvert B_0 dans X tel que $\overline{B_0}$ soit compact et $x_0 \in B_0 \subset \overline{B_0} \subset V \cap U_0$.

Par récurrence sur n, on construit une suite $(B_n)_{n\geq 0}$ d'ouverts non vides dans X tels que pour tout $n \geq 1$, $\overline{B_n}$ soit compact et $\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}$. En effet, on a déjà construit B_0 et supposons B_n construit ; comme U_{n+1} est dense dans X, il existe $x_{n+1} \in U_{n+1} \cap B_n$. Comme $U_{n+1} \cap B_n$ est ouvert, il existe un ouvert B_{n+1} dans X tel que $\overline{B_{n+1}}$ soit compact et $x_{n+1} \in B_{n+1} \subset \overline{B_{n+1}} \subset U_{n+1} \cap B_n$. Les $\overline{B_n}$ forment une suite décroissante de compacts non vides dans X. D'après la proposition 3.1.5, on a $\bigcap\limits_{n\geq 0}\overline{B_n} \neq \emptyset$. Or $\overline{B_0} \subset V$ et, pour tout $n \geq 0$, on a $\overline{B_n} \subset U_n$, donc $\bigcap\limits_{n\geq 0}\overline{B_n} \subset V \cap \bigcap\limits_{n\geq 0} U_n$, d'où on a $V \cap \bigcap\limits_{n\geq 0} U_n \neq \emptyset$. Par conséquent, $\bigcap\limits_{n\geq 0} U_n$ est dense dans X. ■

Théorème (**M. Stone, E. Čech**). Soit X un espace complètement régulier. Alors il existe une compactification $(\beta(X), \rho)$ de X telle que

1. Pour tout espace compact Y et toute application continue $h : X \longrightarrow Y$, il existe une (unique) application continue $\beta(h) : \beta(X) \longrightarrow Y$ telle que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\rho"'] & & Y \\ & \beta(X) \arrow[ur, "\beta(h)"'] & \end{tikzcd}$$

2. Pour toute application continue et bornée $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe une (unique) application continue $\beta(h) : \beta(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ prolongeant h, *i.e.* le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\rho"'] & & \mathbb{R} \\ & \beta(X) \arrow[ur, "\beta(h)"'] & \end{tikzcd}$$

3. Si $(\widehat{X}, h)$ est une compactification de X vérifiant la propriété 1 ou la propriété 2, alors $\widehat{X}$ est homéomorphe à $\beta(X)$. De façon plus précise, il existe un homéomorphisme $g : \beta(X) \longrightarrow \widehat{X}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\rho"'] & X \arrow[d, "h"] \\ \beta(X) \arrow[r, "g"] & \widehat{X} \end{tikzcd}$$

4. La compactification $(\beta(X), \rho)$ est une compactification « maximale » de X. Autrement dit, si $(\widehat{X}, h)$ est une compactification de X, il existe une (unique) application continue surjective $g : \beta(X) \longrightarrow \widehat{X}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\rho"'] & X \arrow[d, "h"] \\ \beta(X) \arrow[r, "g"] & \widehat{X} \end{tikzcd}$$

5. Pour tout espace complètement régulier Z et toute application continue $h : X \longrightarrow Z$, il existe une (unique) application continue $\beta(h) : \beta(X) \longrightarrow \beta(Z)$ telle que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\rho"'] & Z \arrow[d, "\rho"] \\ \beta(X) \arrow[r, "\beta(h)"] & \beta(Z) \end{tikzcd}$$

Démonstration. 1. Soient Y un espace compact et $h : X \longrightarrow Y$ une application continue. Soit $C_X = C(X, [0, 1])$ (*resp.* $C_Y = C(Y, [0, 1])$) l'ensemble des applications continues de X (*resp.* Y) dans $[0, 1]$. Puisque Y est compact, alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \rho_Y : & Y & \longrightarrow & [0, 1]^{C_Y} \\ & y & \longmapsto & (g(y))_{g \in C_Y} \end{array}$$

réalise un homéomorphisme de Y sur $\rho_Y(Y) = \beta(Y)$. Soit $\mu : \beta(Y) \longrightarrow Y$ l'application réciproque de cet homéomorphisme. L'application $h : X \longrightarrow Y$ induit l'application naturelle suivante :

$$\begin{array}{rccc} T : & C_Y & \longrightarrow & C_X \\ & g & \longmapsto & g \circ h \end{array}$$

D'autre part, si on voit $[0, 1]^{C_X}$ (*resp.* $[0, 1]^{C_Y}$) comme l'ensemble des applications de C_X (*resp.* C_Y) dans $[0, 1]$, alors T induit à son tour une application naturelle Φ de $[0, 1]^{C_X}$ dans $[0, 1]^{C_Y}$. En fait, l'application Φ est définie par :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & [0, 1]^{C_X} & \longrightarrow & [0, 1]^{C_Y} \\ & (t_f)_{f \in C_X} & \longmapsto & (t_{g \circ h})_{g \in C_Y} \end{array}$$

Puisque, pour tout $g \in C_Y$, l'application

$$\begin{array}{ccc} [0, 1]^{C_X} & \longrightarrow & [0, 1] \\ (t_f)_{f \in C_X} & \longmapsto & t_{g \circ h} \end{array}$$

est continue, alors Φ est continue. Pour tout $x \in X$, on a

$$\big(\Phi \circ \rho_X\big)(x) = \Phi\big((f(x))_{f \in C_X}\big) = ((g \circ h)(x))_{g \in C_Y} = (g(h(x)))_{g \in C_Y} = \rho_Y(h(x)) = \rho_Y \circ h(x)\,.$$

Autrement dit, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\rho_X"'] & Y \arrow[d, "\rho_Y"] \\ {[0, 1]^{C_X}} \arrow[r, "\Phi"] & {[0, 1]^{C_Y}} \end{tikzcd}$$

Donc on a $\Phi(\rho_X(X)) \subset \rho_Y(Y) = \beta(Y)$, d'où $\Phi(\beta(X)) \subset \beta(Y)$. Soit $\beta(h) = \mu \circ \Phi_{|_{\beta(X)}}$, alors $\beta(h)$ est une application continue de $\beta(X)$ dans Y telle que $h = \beta(h) \circ \rho$. L'unicité de $\beta(h)$ résulte du fait que $\rho(X)$ est dense dans $\beta(X)$.

2. Ceci résulte immédiatement de 1. Mais donnons une preuve directe sans utiliser 1. Soit $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et bornée. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ tel que $h(X) \subset [a, b]$, et soit $\varphi : [a, b] \longrightarrow [0, 1]$ un homéomorphisme. Alors on a $\varphi \circ h \in C_X$. Considérons la projection canonique

$$\begin{array}{rccc} \pi_{\varphi \circ h} : & [0, 1]^{C_X} & \longrightarrow & [0, 1] \\ & (t_f)_{f \in C_X} & \longmapsto & t_{\varphi \circ h} \end{array}$$

et soit π la restriction de $\pi_{\varphi \circ h}$ à $\beta(X)$. Alors $\beta(h) = \varphi^{-1} \circ \pi$ est une application continue de $\beta(X)$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\beta(h) \circ \rho = h$. L'unicité de $\beta(h)$ résulte du fait que $\rho(X)$ est dense dans $\beta(X)$.

Les propriétés 3, 4 et 5 résultent facilement de 1 et 2. ■

Théorème (**Tietze**). Soient X un espace localement compact, K un compact de X et U un ouvert de X contenant K. Alors pour tout $f \in C(K)$, il existe $g \in C_c(X)$ telle que $g_{|_K} = f$, $\mathrm{Supp}(g) \subset U$ et $\sup_{x\in X} |g(x)| = \sup_{x\in K} |f(x)|$. Autrement dit, pour toute fonction continue $f : K \longrightarrow \mathbb{K}$, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ prolongeant f telle que $\mathrm{Supp}(g)$ soit compact, $\mathrm{Supp}(g) \subset U$ et $\sup_{x\in X} |g(x)| = \sup_{x\in K} |f(x)|$.

Démonstration. Soit $f \in C(K)$. Montrons d'abord que s'il existe $g \in C_c(X)$ telle que $g_{|_K} = f$ et $\mathrm{Supp}(g) \subset U$, alors il existe $h \in C_c(X)$ telle que $h_{|_K} = f$, $\mathrm{Supp}(h) \subset U$ et $\sup_{x\in X} |h(x)| = \sup_{x\in K} |f(x)|$. En effet, soit $R = \sup_{x\in K} |f(x)|$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose :

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \lambda & \text{si} \quad |\lambda| \leq R\,, \\ \dfrac{R\lambda}{|\lambda|} & \text{si} \quad |\lambda| > R\,. \end{cases}$$

Alors φ est une application continue de $\mathbb{K}$ dans $\{\lambda \in \mathbb{K}\ ;\ |\lambda| \leq R\}$. Soit $h = \varphi \circ g$, alors $h \in C_c(X)$ telle que $h_{|_K} = f$, $\mathrm{Supp}(h) \subset U$ et $\sup_{x\in X} |h(x)| = \sup_{x\in K} |f(x)|$.

Il est clair que l'on peut supposer f à valeurs dans $\mathbb{R}$, et même que l'on a $-1 \leq f(x) \leq 1$, pour tout $x \in K$. D'autre part, d'après le théorème 3.4.1, il existe un ouvert W de X tel que $K \subset W \subset \overline{W} \subset U$ et $\overline{W}$ soit compact.

Montrons d'abord que si $M > 0$ et si $h : K \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $|h(x)| \leq M$, pour tout $x \in K$, alors il existe $g \in C_c(X, \mathbb{R})$ telle que :

(a) $|g(x)| \leq \frac{1}{3}M$, pour tout $x \in X$.

(b) $|h(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}M$, pour tout $x \in K$.

(c) $\mathrm{Supp}(g) \subset W$.

En effet, soient $A = f^{-1}\big([-M, \frac{-1}{3}M]\big)$ et $B = f^{-1}\big([\frac{1}{3}M, M]\big)$. Alors A et B sont deux parties compactes disjointes dans K. D'après le théorème d'Urysohn, théorème 3.6.1, il existe $g \in C_c(X, \mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Supp}(g) \subset W$, $g(x) = \frac{-M}{3}$ sur A, $g(x) = \frac{M}{3}$ sur B et $\frac{-M}{3} \leq g(x) \leq \frac{M}{3}$, pour tout $x \in X$. Par conséquent, pour tout $x \in X$, on a $|g(x)| \leq \frac{1}{3}M$ et on a $|h(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}M$, pour tout $x \in K$.

Maintenant, on va construire par récurrence sur n une suite $(g_n)_{n\geq 1}$ dans $C_c(X, \mathbb{R})$ telle que :

(α) $|g_n(x)| \leq \frac{1}{3}\big(\frac{2}{3}\big)^{n-1}$, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in X$.

(β) $\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right| \leq \big(\frac{2}{3}\big)^n$, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in K$.

(γ) $\mathrm{Supp}(g_n) \subset W$, pour tout $n \geq 1$.

En effet, comme on a $|f(x)| \leq 1$, pour tout $x \in K$, alors on obtient g_1 par ce qui précède. Ensuite, supposons que l'on a construit $g_1, \ldots, g_n$ dans $C_c(X, \mathbb{R})$ telles que :

$$|g_i(x)| \leq \tfrac{1}{3}\big(\tfrac{2}{3}\big)^{i-1}, \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ et pour tout } x \in X\,,$$

$$\left|f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x)\right| \leq \big(\tfrac{2}{3}\big)^i, \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ et pour tout } x \in K\,,$$

$$\mathrm{Supp}(g_n) \subset W\,, \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Alors $f - \sum_{i=1}^{n} g_{i|_K}$ est une fonction continue de K dans $\mathbb{R}$ telle que $\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} g_{i|_K}(x)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$, pour tout $x \in K$. On applique de nouveau le raisonnement précédent à $f - \sum_{i=1}^{n} g_{i|_K}$, on obtient une fonction $g_{n+1} \in C_c(X, \mathbb{R})$ telle que :

$$|g_{n+1}(x)| \leq \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^n, \text{ pour tout } x \in X,$$

$$\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n+1} g_i(x)\right| \leq \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^n = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}, \text{ pour tout } x \in K,$$

$$\mathrm{Supp}(g_{n+1}) \subset W.$$

Ainsi de suite, on construit la suite $\left(g_n\right)_{n\geq 1}$. Puisque la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ est convergente, on déduit de la propriété (α) que pour tout $x \in X$, la série $\sum_{n\geq 1} g_n(x)$ est convergente. On pose $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$, pour tout $x \in X$. Alors g est une fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ telle que $|g(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |g_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1$, pour tout $x \in X$. Comme on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, on déduit de la propriété (β) que pour tout $x \in K$, on a $g(x) = f(x)$. On déduit de la propriété (γ) que l'on a $\mathrm{Supp}(g) \subset \overline{W} \subset U$, et donc $\mathrm{Supp}(g)$ est compact, *i.e.* $g \in C_c(X, \mathbb{R})$. ■

Théorème. Soient X, Y des espaces topologiques, avec X séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application propre. On a :

1. L'espace $f(X)$ est séparé.
2. Si X est régulier, alors $f(X)$ est aussi régulier.
3. Si X est normal, alors $f(X)$ est aussi normal.
4. Si X possède une base dénombrable d'ouverts, alors $f(X)$ possède aussi une base dénombrable d'ouverts.
5. Si X est métrisable, alors $f(X)$ est aussi métrisable.

Démonstration. Puisque la restriction $f_{f(X)} : X \longrightarrow f(X)$ est propre, on peut supposer que f est surjective, *i.e.* $f(X) = Y$.
1. Soient $y_1, y_2 \in Y$ tels que $y_1 \neq y_2$. Alors $f^{-1}(\{y_1\})$ et $f^{-1}(\{y_2\})$ sont des parties compactes disjointes de X. D'après la proposition 3.1.2, il existe deux ouverts disjoints U et V dans X tels que $f^{-1}(\{y_1\}) \subset U$ et $f^{-1}(\{y_2\}) \subset V$. Puisque f est une application fermée, d'après la proposition 1.3.6, il existe deux ouverts V_1 et V_2 de Y contenant respectivement y_1 et y_2 tels que $f^{-1}(V_1) \subset U$ et $f^{-1}(V_2) \subset V$. Par conséquent, on a $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, donc Y est séparé.
2. Soient F un fermé de Y et $y \in Y \setminus F$. Alors $f^{-1}(F)$ est fermé dans X et on a $f^{-1}(F) \cap f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. Comme $f^{-1}(\{y\})$ est une partie compacte de X, d'après la proposition 3.1.3, il existe deux ouverts disjoints U et V dans X tels que $f^{-1}(\{y\}) \subset U$ et $f^{-1}(F) \subset V$. Puisque f est une application fermée, il existe des ouverts U' et V' dans Y tels que $y \in U'$, $F \subset V'$, $f^{-1}(U') \subset U$ et $f^{-1}(V') \subset V$. Donc U' et V' sont disjoints. Par conséquent, Y est régulier.

3. On a déjà montré cette propriété dans la proposition 1.9.3.
4. Soit $\big(U_n\big)_{n\geq 0}$ une base dénombrable d'ouverts de X. Soit :

$$\mathcal{B} = \Big\{ \underset{n\in I}{\cup} U_n \ ; \ I \text{ est un sous-ensemble fini de } \mathbb{N} \Big\}.$$

Alors $\mathcal{B}$ est une famille dénombrable d'ouverts de X. Soit $\mathcal{B}' = \big\{Y \setminus f(X \setminus V) \ ; \ V \in \mathcal{B}\big\}$, alors $\mathcal{B}'$ est une famille dénombrable d'ouverts de Y. Vérifions que $\mathcal{B}'$ est une base d'ouverts de Y. Soient $y \in Y$ et W un ouvert de Y contenant y, d'où on a $f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(W)$. Comme $f^{-1}(\{y\})$ est une partie compacte de X, alors il existe un sous-ensemble fini I de $\mathbb{N}$ tel que $f^{-1}(\{y\}) \subset \bigcup_{n\in I} U_n \subset f^{-1}(W)$. Soit $V = \bigcup_{n\in I} U_n$, alors $V \in \mathcal{B}$ et on a $y \in Y \setminus f(X \setminus V) \subset W$. Par conséquent, $\mathcal{B}'$ est une base dénombrable d'ouverts de Y.
5. Pour une preuve de cette propriété, voir ([13], p. 284). ∎

Lemme. Soit Y un espace topologique séparé.

1. Si Y est localement compact ou vérifie le premier axiome de dénombrabilité, alors Y est engendré par les compacts.
2. Supposons que Y est engendré par les compacts. Soient Z un espace topologique et $f : Y \longrightarrow Z$ une application. Alors f est continue si et seulement si pour tout compact K de Y, $f_{|_K}$ est continue.

Démonstration. 1. Soit F une partie de Y. Supposons d'abord que F est fermée dans Y. Il résulte du théorème 3.1.1 que si K est une partie compacte de Y, alors $F \cap K$ est fermé dans Y. Réciproquement, supposons que pour toute partie compacte K de Y, $F \cap K$ est fermé dans Y.
Premier cas : supposons que Y est localement compact. Soient $x \in \overline{F}$ et K un voisinage compact de x dans Y. Par hypothèse, on a $\overline{F \cap K} = F \cap K$. Soit V un voisinage de x dans Y, alors $V \cap K$ est un voisinage de x dans Y, d'où $V \cap K \cap F \neq \emptyset$. Par conséquent, on a $x \in \overline{F \cap K}$, d'où $x \in F$. Donc on a $\overline{F} = F$, *i.e.* F est fermée dans Y.
Deuxième cas : supposons que Y est un espace topologique séparé vérifiant le premier axiome de dénombrabilité. Soit $x \in \overline{F}$, d'après le corollaire 1.7.1, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans F telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Comme l'ensemble $K = \{x\} \cup \{x_n \ ; \ n \geq 0\}$ est une partie compacte de Y, voir exemple 3.1.1, alors $F \cap K$ est fermé dans Y. Or on a $\{x_n \ ; \ n \geq 0\} \subset F \cap K$, donc $x \in F \cap K$, d'où $x \in F$. Par conséquent, on a $\overline{F} = F$, donc F est fermée dans Y.
2. Supposons que Y est engendré par les compacts. Soient Z un espace topologique et $f : Y \longrightarrow Z$ une application. Si f est continue, il résulte de la proposition 1.4.3 que pour toute partie compacte K de Y, $f_{|_K}$ est continue.
Réciproquement, supposons que pour toute partie compacte K de Y, $f_{|_K}$ est continue. Soit G un fermé de Z. Soit K une partie compacte de Y. Comme on a $f^{-1}(G) \cap K = f_{|_K}^{-1}(G)$, alors $f^{-1}(G) \cap K$ est fermé dans K. Donc $f^{-1}(G) \cap K$ est fermé dans Y. Par conséquent, $f^{-1}(G)$ est fermé dans Y, donc f est continue. ∎

Théorème. Soient X, Y des espaces topologiques, avec X séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) L'application f est propre.

(ii) Pour tout espace topologique Z, l'application $f \times \mathrm{id}_Z : (x, z) \longmapsto (f(x), z)$ de $X \times Z$ dans $Y \times Z$ est fermée.

(iii) Pour tout espace topologique séparé Z, l'application $f \times \mathrm{id}_Z : (x, z) \longmapsto (f(x), z)$ de $X \times Z$ dans $Y \times Z$ est propre.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit Z un espace topologique, et posons $h = f \times \mathrm{id}_Z$. Pour montrer que l'application h est fermée, d'après la proposition 1.3.6, il suffit de montrer que pour tout $(y, z) \in Y \times Z$ et pour tout ouvert U de $X \times Z$ tel que $h^{-1}\big(\{(y, z)\}\big) \subset U$, il existe un voisinage V de (y, z) dans $Y \times Z$ tel que $h^{-1}(V) \subset U$. Soient $(y, z) \in Y \times Z$ et U un ouvert de $X \times Z$ tel que $h^{-1}\big(\{(y, z)\}\big) \subset U$. Puisque $h(X \times Z) = f(X) \times Z$ est une partie fermée de $Y \times Z$, il suffit de prendre $y \in f(X)$. Alors on a $h^{-1}\big(\{(y, z)\}\big) = f^{-1}(\{y\}) \times \{z\} \subset U$, et $f^{-1}(\{y\})$ est une partie compacte non vide de X. D'après la proposition 3.1.4, il existe un ouvert V_1 de X contenant $f^{-1}(\{y\})$ et un ouvert V_2 de Z contenant $\{z\}$ tels que $h^{-1}\big(\{(y, z)\}\big) \subset V_1 \times V_2 \subset U$. Comme f est fermée, il existe un voisinage W de y dans Y tel que $f^{-1}(W) \subset V_1$. Alors $V = W \times V_2$ est un voisinage de (y, z) dans $Y \times Z$ tel que $h^{-1}(V) = f^{-1}(W) \times V_2 \subset V_1 \times V_2 \subset U$. Par conséquent, h est une application fermée.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). En prenant Z l'espace topologique réduit à un seul point, l'espace $X \times Z$ est homéomorphe à X, l'espace $Y \times Z$ est homéomorphe à Y et $f \times \mathrm{id}_Z$ est identifiée à l'application f. Alors on en déduit que f est une application fermée.
Maintenant, soient Z un espace topologique quelconque, $h = f \times \mathrm{id}_Z$ et $y_0 \in Y$, on a $h^{-1}(\{y_0\} \times Z) = f^{-1}(\{y_0\}) \times Z$. Soit $h_0 = h_{\{y_0\} \times Z} : f^{-1}(\{y_0\}) \times Z \longrightarrow \{y_0\} \times Z$, la restriction de h, alors h_0 est une application fermée. Soit $p_0 : \{y_0\} \times Z \longrightarrow Z$ la projection, alors p_0 est une application fermée. Par conséquent, $p_0 \circ h_0 : f^{-1}(\{y_0\}) \times Z \longrightarrow Z$ est une application fermée. Or $p_0 \circ h_0$ n'est autre que la projection canonique sur Z, il résulte alors du théorème 3.2.4 que $f^{-1}(\{y_0\})$ est une partie compacte de X. Par conséquent, f est une application propre.
Preuve de (i) $\Longrightarrow$ (iii). Soit Z un espace topologique séparé. Il résulte de l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) que l'application $h = f \times \mathrm{id}_Z$ est fermée. Comme h est continue, il reste à montrer que pour tout $(y, z) \in Y \times Z$, $h^{-1}\big(\{(y, z)\}\big)$ est une partie compacte de $X \times Z$. Or on a $h^{-1}\big(\{(y, z)\}\big) = f^{-1}(\{y\}) \times \{z\}$, et $f^{-1}(\{y\})$ est une partie compacte de X, donc $h^{-1}\big(\{(y, z)\}\big)$ est une partie compacte de $X \times Z$. Par conséquent, $h = f \times \mathrm{id}_Z$ est une application propre.
Enfin, pour montrer l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i), il suffit de faire le même raisonnement que dans la preuve de l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). ■

Théorème. Soient X un espace localement compact, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans X, $G(\mathcal{R})$ son graphe dans $X \times X$ et $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient. Soient $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de X et $\mathcal{R}_\infty$ la relation d'équivalence dans $\widetilde{X}$ dont le graphe est $G(\mathcal{R}) \cup \{(\infty, \infty)\}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) L'application quotient q est propre.

(ii) Le saturé pour $\mathcal{R}$ de toute partie compacte de X est un ensemble compact.

(iii) La relation $\mathcal{R}_\infty$ est fermée.

(iv) La restriction à $G(\mathcal{R})$ de l'application $(x, y) \longmapsto y$ de $X \times X$ dans X est propre.

(v) La relation $\mathcal{R}$ est fermée et les classes suivant $\mathcal{R}$ sont compactes.

En outre, lorsque ces propriétés sont vérifiées, alors l'espace $X/\mathcal{R}$ est localement compact.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Rappelons d'abord que le saturé pour $\mathcal{R}$ d'un ensemble A de X est l'ensemble $q^{-1}(q(A))$. Si q est propre, d'après le théorème 3.7.1, l'espace quotient $X/\mathcal{R}$ est séparé. Soit K une partie compacte de X. Comme q est continue, alors $q(K)$ est une partie compacte de $X/\mathcal{R}$. D'après le théorème 3.7.2, $q^{-1}(q(K))$ est une partie compacte de X.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit F une partie fermée de $\widetilde{X}$, donc F est une partie compacte de $\widetilde{X}$. Si $\infty \notin F$, alors F est une partie compacte de X et le saturé de F pour $\mathcal{R}_\infty$ est $q^{-1}(q(F))$. Donc $q^{-1}(q(F))$ est une partie compacte de X, d'où $q^{-1}(q(F))$ est fermée dans $\widetilde{X}$. Supposons que $\infty \in F$ et soit $A = F \setminus \{\infty\}$. Le saturé de F pour $\mathcal{R}_\infty$ est $q^{-1}(q(A)) \cup \{\infty\}$. Pour montrer que $q^{-1}(q(F)) \cup \{\infty\}$ est fermé dans $\widetilde{X}$, il suffit de montrer que $q^{-1}(q(A))$ est fermé dans X, voir remarque 3.5.1. D'après le lemme 3.7.2, $q^{-1}(q(A))$ est fermé dans X si et seulement si pour toute partie compacte K de X, $q^{-1}(q(A)) \cap K$ est fermé dans X. Soit K une partie compacte de X. On a :

$$\begin{aligned} q^{-1}(q(A)) \cap K &= q^{-1}(q(A)) \cap q^{-1}(q(K)) \cap K \\ &= q^{-1}\big(q(A) \cap q(K)\big) \cap K \\ &= q^{-1}\big(q(A) \cap q(q^{-1}(q(K)))\big) \cap K \\ &= q^{-1}\big(q\big(A \cap q^{-1}(q(K))\big)\big) \cap K \\ &= q^{-1}\big(q\big(F \cap q^{-1}(q(K))\big)\big) \cap K\,. \end{aligned}$$

Comme $F \cap q^{-1}(q(K))$ est une partie compacte de X, alors $q^{-1}(q(A)) \cap K$ est compact dans X, donc $q^{-1}(q(A)) \cap K$ est fermé dans X. Par conséquent, $q^{-1}(q(A))$ est fermé dans X. Donc la relation $\mathcal{R}_\infty$ est fermée.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (iv). Comme $\widetilde{X}$ est compact, d'après la proposition 3.7.4, la projection canonique $p_2 : (x, y) \longmapsto y$ de $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$ dans $\widetilde{X}$ est propre. Comme $\mathcal{R}_\infty$ est fermée, D'après le théorème 3.8.1, $G(\mathcal{R}_\infty) = G(\mathcal{R}) \cup \{(\infty, \infty)\}$ est fermé dans $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$. D'après le lemme 3.7.1, la restriction de p_2 à $G(\mathcal{R}) \cup \{(\infty, \infty)\}$ est propre. Comme on a $p_2^{-1}(X) = G(\mathcal{R})$, appliquons une fois de plus le lemme 3.7.1, on déduit que l'application $(x, y) \longmapsto y$ de $G(\mathcal{R})$ dans X est propre.
Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (v). Par hypothèse, l'application $p : (x, y) \longmapsto y$ de $G(\mathcal{R})$ dans X est propre. pour tout $y \in X$, on a $p^{-1}(\{y\}) = q^{-1}(\{q(y)\}) \times \{y\}$, donc $q^{-1}(\{q(y)\}) \times \{y\}$ est une partie compacte de $G(\mathcal{R})$, d'où $q^{-1}(\{q(y)\})$ est une partie compacte de X. Donc les classes d'équivalence suivant $\mathcal{R}$ sont compactes. Soit F un fermé de X, alors $(F \times X) \cap G(\mathcal{R})$ est fermé dans $G(\mathcal{R})$. Or on a $q^{-1}(q(F)) = p((F \times X) \cap G(\mathcal{R}))$, donc $q^{-1}(q(F))$ est fermé dans X. Par conséquent, q est une application fermée.
L'implication (v) $\Longrightarrow$ (i) est triviale.
Lorsque ces propriétés sont vérifiées, on déduit du théorème 3.8.1 que l'espace $\widetilde{X}/\mathcal{R}_\infty$ est compact. Si $\widetilde{q} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}/\mathcal{R}_\infty$ est l'application quotient, alors $\widetilde{q}(X)$ est un ouvert de $\widetilde{X}/\mathcal{R}_\infty$ car $X = \widetilde{q}^{-1}(\widetilde{q}(X))$ est ouvert dans $\widetilde{X}$, donc $\widetilde{q}(X)$ est localement compact. Comme X est saturé pour $\mathcal{R}_\infty$ et ouvert dans $\widetilde{X}$, d'après le corollaire 1.4.3, l'espace quotient $X/\mathcal{R}$ est homéomorphe à $\widetilde{q}(X)$, donc $X/\mathcal{R}$ est localement compact. ∎

Supplément d'exercices

Exercice 3.38. Soit $\big(X_n\big)_{n\geq 1}$ une suite d'ensembles non vides. On pose $E = \prod\limits_{n\geq 1} X_n$. Pour deux éléments quelconques distincts $x = (x_n)_{n\geq 1}$ et $y = (y_n)_{n\geq 1}$ de E, soit $k(x, y)$ le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $x_n \neq y_n$. Soit :

$$d(x, y) = \frac{1}{k(x, y)} \quad \text{si} \quad x \neq y \quad \text{et} \quad d(x, x) = 0\,.$$

1. Montrer que d est une distance ultramétrique sur E et que l'espace métrique (E, d) est complet.

2. Montrer que (E, d) est compact si et seulement si X_n est fini pour tout $n \geq 1$.
3. Montrer que (E, d) est localement compact si et seulement si X_n est fini pour tout $n \geq 1$, sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de n.

Solution. 1. On fait exactement le même raisonnement comme dans l'exercice 2.19.
2. Supposons d'abord que (E, d) est compact. Soit $N \geq 1$. Alors il existe $\eta_1, \dots, \eta_p \in E$ tels que $E = \bigcup_{i=1}^{p} B(\eta_i, \frac{1}{N})$. On a $\eta_i = (x_{i,n})_{n\geq 0}$, avec $x_{i,n} \in X_n$. Soit $a \in X_N$. Supposons $a \notin \{x_{1,N}, \dots, x_{p,N}\}$, et soit $\eta = (y_n)_{n\geq 0} \in E$, avec $y_N = a$ et $y_n = x_{1,n}$, si $n \neq N$. Alors on a $d(\eta_i, \eta) \geq \frac{1}{N}$, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, ce qui est impossible. Donc on a $X_N = \{x_{1,N}, \dots, x_{p,N}\}$. Par conséquent, pour tout $n \geq 1$, X_n est fini.
Réciproquement, supposons que pour tout $n \geq 1$, X_n est fini. Comme (E, d) est complet, pour montrer que (E, d) est compact, il reste à montrer que (E, d) est précompact. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \geq 1$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Pour tout $n > N$, on fixe $a_n \in X_n$. Soit $F = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \in E \;;\; x_n = a_n \text{ pour tout } n > N\}$. Alors F est un sous-ensemble fini de (E, d) et on a $E = \bigcup_{x\in F} B(x, \varepsilon)$, donc (E, d) est précompact. Par conséquent, (E, d) est compact.
3. Supposons d'abord que X_n est fini pour tout $n \geq 1$, sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de n. Autrement dit, il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n > N$, X_n soit fini. Soient $X = \prod_{n=1}^{N} X_n$ et $Y = \prod_{n\geq N+1} X_n$. Pour deux éléments quelconques distincts $x = (x_n)_{1\leq n\leq N}$ et $y = (y_n)_{1\leq n\leq N}$ de X, soit $k(x, y)$ le plus petit entier $n \in \{1, \dots, N\}$ tel que $x_n \neq y_n$. Soit :

$$d_1(x, y) = \frac{1}{k(x, y)} \text{ si } x \neq y \text{ et } d_1(x, x) = 0\,.$$

Alors d_1 est une distance ultramétrique sur X. Soient $x \in X$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{1}{N}$. Alors on a $B(x, \varepsilon) = \{x\}$, donc (X, d_1) est localement compact.
De même, pour deux éléments quelconques distincts $x = (x_n)_{n\geq N+1}$ et $y = (y_n)_{n\geq N+1}$ de Y, soit $k(x, y)$ le plus petit entier $n \geq N + 1$ tel que $x_n \neq y_n$. Soit :

$$d_2(x, y) = \frac{1}{k(x, y)} \text{ si } x \neq y \text{ et } d_2(x, x) = 0\,.$$

Alors d_2 est une distance ultramétrique sur Y. On déduit de 2 que (Y, d_2) est compact. On munit l'espace produit $X \times Y$ de la distance d_∞ ; $d_\infty\big((x, y), (x', y')\big) =$
$\max\big(d_1(x, x'), d_2(y, y')\big)$. Alors l'application naturelle de (E, d) sur $(X \times Y, d_\infty)$ est une isométrie, donc c'est un homéomorphisme. On en déduit que (E, d) est localement compact.
Réciproquement, supposons que (E, d) est localement compact. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in E$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B'(x, \varepsilon)$ soit compact. Soit $N \geq 1$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Soit $F = \{y = (x_n)_{n\geq 0} \in E \;;\; y_n = x_n, \text{ avec } 1 \leq n \leq N\}$. Alors F est fermé dans (E, d) et on a $F \subset B'(x, \varepsilon)$, donc F est compact. D'autre part, F est homéomorphe à $\prod_{n=1}^{N} \{x_n\} \times \prod_{n\geq N+1} X_n$. On déduit de 2 que pour tout $n \geq N + 1$, X_n est fini.

Exercice 3.39. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) L'espace métrique (X, d) est précompact.

(ii) De toute suite de points de X, on peut extraire une suite de Cauchy.

(iii) Pour tout $\varepsilon > 0$, si F est une partie de X telle que pour tout $x, y \in F$, avec $x \neq y$, on ait $d(x, y) > \varepsilon$, alors F est finie.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans X. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(X,\, d)$ est précompact, alors il existe $a_1, \ldots, a_p \in X$ tels que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{p} B\big(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\big)$. On en déduit qu'il existe $i \in \{1, \ldots, p\}$ et qu'il existe un sous-ensemble infini A_ε de $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in A_\varepsilon$, on ait $x_n \in B\big(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\big)$. Donc, pour tout $n, m \in A_\varepsilon$, on a $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Ainsi, on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble infini A_ε de $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \in A_\varepsilon$, on ait $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. On va montrer par récurrence qu'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que pour tout $k \geq 0$, on ait $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$. En effet, soit $\varepsilon_0 = 1 = \frac{1}{2^0}$, alors il existe un sous-ensemble infini A_0 de $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \in A_0$, on ait $d(x_n, x_m) < \varepsilon_0$. On pose $n_0 = \min(A_0)$. Soit $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. Comme $B_0 = A_0 \setminus \{n_0\}$ est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$, alors il existe un sous-ensemble infini $A_1 \subset B_0$ tel que pour tout $n, m \in A_1$, on ait $d(x_n, x_m) < \varepsilon_1$. On pose $n_1 = \min(A_1)$. Soit $k \geq 1$ et supposons construits $n_0, \ldots, n_{k-1}$ dans $\mathbb{N}$ et supposons construits des sous-ensembles infinis $A_0, \ldots, A_{k-1}$ de $\mathbb{N}$ tels que $A_0 \subset \ldots \subset A_{k-1}$, $n_i = \min(A_i)$, avec $0 \leq i \leq k-1$, et tels que pour tout tout $n, m \in A_i$, on ait $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^i}$. On pose $B_k = A_{k-1} \setminus \{n_{k-1}\}$ et $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$. Alors il existe un sous-ensemble infini $A_k \subset B_k$ tel que pour tout $n, m \in A_k$, on ait $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^k}$. On pose alors $n_k = \min(A_k)$. Ainsi, on construit une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que pour tout $k \geq 0$, on ait $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$. On en déduit que $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ est une suite de Cauchy, voir exercice 2.20.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soient $\varepsilon > 0$ et F une partie de X telle que pour tout $x, y \in F$, avec $x \neq y$, on ait $d(x, y) > \varepsilon$. Si F est infinie, alors il existe une application injective $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow F$. Pour tout $n \geq 0$, soit $x_n = \varphi(n)$, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans X telle que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, avec $n \neq m$, on ait $d(x_n, x_m) > \varepsilon$. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ n'admet aucune sous-suite de Cauchy, ce qui contredit l'hypothèse. Donc F est bien une partie finie.
Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i). Si $(X,\, d)$ n'est pas précompact, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute partie finie G de X, on ait $X \neq \bigcup\limits_{x\in G} B(x, \varepsilon)$. Autrement dit, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute partie finie G de X, il existe $x \in X$ tel que $d(x, a) \geq \varepsilon$, pour tout $a \in G$. Soit $x_0 \in X$, alors il existe $x_1 \in X$ tel que $d(x_0, x_1) \geq \varepsilon$. Ensuite, il existe $x_2 \in X$ tel que $d(x_0, x_2) \geq \varepsilon$ et $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Ainsi de suite, on construit par récurrence une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de X telle que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, avec $n \neq m$, on ait $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$. Donc l'ensemble $F = \{x_n \,;\, n \geq 0\}$ est infini et pour tout $x, y \in F$, avec $x \neq y$, on ait $d(x, y) > \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $(X,\, d)$ est bien précompact.

Exercice 3.40. Soit $(X,\, d)$ un espace métrique non complet. Il s'agit de montrer qu'il existe une fonction continue non bornée de X dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans X, non convergente.

1. Montrer que pour tout $x \in X$, la suite $(d(x, x_n))_{n\geq 0}$ est convergente vers un réel $g(x) > 0$.
2. Montrer que l'application $h : x \longmapsto \frac{1}{g(x)}$ est continue de X dans $\mathbb{R}$ et qu'elle n'est pas bornée.

Solution. 1. Soit $x \in X$. D'après l'inégalité triangulaire, voir proposition 2.1.1, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a $\big|d(x, x_n) - d(x, x_m)\big| \leq d(x_n, x_m)$. Par conséquent, la suite $\big(d(x, x_n)\big)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc convergente car $\mathbb{R}$ est complet. Pour tout $x \in X$, on pose $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(x, x_n)$, alors on a $g(x) \geq 0$. Soit $x \in X$. Si $g(x) = 0$, alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x dans $(X,\, d)$, ce qui est impossible. Donc on a $g(x) > 0$, pour tout $x \in X$.
2. Montrons que g est continue. Soit $(a_m)_{m\geq 0}$ une suite dans $(X,\, d)$ convergeant vers un élément $a \in X$. Autrement dit, on a $\lim\limits_{m\to+\infty} d(a, a_m) = 0$. Il s'agit de montrer que l'on a $\lim\limits_{m\to+\infty} g(a_m) - g(a) = 0$. On a $g(a_m) - g(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} \big[d(a_m, x_n) - d(a, x_n)\big]$, d'où $|g(a_m) - g(a)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \big|d(a_m, x_n) - d(a, x_n)\big|$. D'autre part, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a $\big|d(a_m, x_n) - d(a, x_n)\big| \leq d(a, a_m)$. Soit $\varepsilon > 0$.

Alors il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq m_0$, on ait $d(a, a_m) < \varepsilon$. D'où pour tout $n \geq 0$ et pour tout $m \geq m_0$, on a $\left|d(a_m, x_n) - d(a, x_n)\right| < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $m \geq m_0$, on a $|g(a_m) - g(a)| \leq \varepsilon$. Donc la suite $(g(a_m))_{m\geq 0}$ converge vers $g(a)$. On en déduit que g est continue. Ensuite, l'application $h : x \longmapsto \frac{1}{g(x)}$ est continue de X dans $\mathbb{R}$, voir proposition 1.3.2. Il reste à vérifier que h n'est pas bornée. Soit $A > 0$. Comme $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $d(x_N, x_n) < \frac{1}{A}$, d'où $g(x_N) \leq \frac{1}{A}$. Donc on a $h(x_N) \geq A$. Par conséquent, l'application h n'est pas bornée.

Exercice 3.41. Soit (X, d) un espace métrique non précompact. Il s'agit de montrer qu'il existe une fonction continue non bornée de X dans $\mathbb{R}$. D'après l'exercice 3.39, il existe un réel $r > 0$ et une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X telle que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, avec $n \neq m$, on ait $d(x_n, x_m) > r$.

1. Montrer qu'il existe une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = n\big(\frac{r}{3} - d(x, x_n)\big)$ si $d(x, x_n) < \frac{r}{3}$ et $f(x) = 0$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $d(x, x_n) \geq \frac{r}{3}$.
2. Montrer que f est continue de X dans $\mathbb{R}$ et qu'elle n'est pas bornée.

Solution. 1. Pour tout $n \geq 0$, soit $B_n = B\big(x_n, \frac{r}{3}\big)$. Puisque, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, avec $n \neq m$, on a $d(x_n, x_m) > r$, alors on a $B_n \cap B_m = \emptyset$, si $n \neq m$. Soit $U = \bigcup_{n\geq 0} B_n$, alors U est un ouvert de X. Soit $x \in U$, alors il existe un unique $n \geq 0$ tel que $x \in B_n$. On pose alors $f(x) = n\big(\frac{r}{3} - d(x, x_n)\big)$. Si $x \in F = X \setminus U$, on pose $f(x) = 0$. Alors f est une fonction bien définie de X dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = n\big(\frac{r}{3} - d(x, x_n)\big)$ si $d(x, x_n) < \frac{r}{3}$ et $f(x) = 0$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $d(x, x_n) \geq \frac{r}{3}$. En plus, une telle fonction est unique.
2. Puisque l'on a $f(x_n) = n\frac{r}{3}$, pour tout $n \geq 0$, alors f n'est pas bornée. Comme pour tout $n \geq 0$, $f_{|B_n}$ est continue et que B_n est un ouvert de X, alors f est continue en tout point de U, voir proposition 1.4.3. Il reste à montrer la continuité de f en tout point de F. Soient $x \in F$ et $B = B\big(x, \frac{r}{3}\big)$. Alors seulement deux cas peuvent se présenter :
Premier cas : pour tout $n \geq 0$, on a $B \cap B_n = \emptyset$. Alors on a $B \subset F$ et $f_{|B} = 0$, donc f est continue en x car B est un ouvert de X.
Deuxième cas : il existe un unique $N \in \mathbb{N}$ tel que $B \cap B_N \neq \emptyset$ et donc, pour tout $n \neq N$, on a $B \cap B_n = \emptyset$. Si $d(x, x_N) > \frac{r}{3}$, alors il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $0 < s < \frac{r}{3}$ et $B(x, s) \cap B_N = \emptyset$, d'où on a $f_{|B(x,s)} = 0$, donc f est continue en x car $B(x, s)$ est un ouvert de X. Donc, on peut supposer $d(x, x_N) = \frac{r}{3}$. Soit $(a_p)_{p\geq 0}$ une suite dans X convergeant vers x. Alors il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_0$, on ait $a_p \in B$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $\big(d(a_p, x_N)\big)_{p\geq 0}$ converge aussi vers $d(x, x_N) = \frac{r}{3}$, alors il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_1$, on ait $\left|d(a_p, x_N) - \frac{r}{3}\right| < \frac{\varepsilon}{N}$. Soit $p \geq \max(p_0, p_1)$. Si $a_p \notin B_N$, alors on a $f(a_p) = 0 = f(x)$. Si $a_p \in B_N$, alors on a $f(a_p) = N\big(\frac{r}{3} - d(a_p, x_N)\big)$, d'où $|f(a_p) - f(x)| = |f(a_p)| < \varepsilon$. Par conséquent, la suite $(f(a_p))_{p\geq 0}$ converge vers $f(x)$. Donc f est continue en x. D'où la continuité de f.

Exercice 3.42. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) L'espace (X, d) est compact.

(ii) Pour tout espace métrique (Y, d') et toute application continue $f : X \longrightarrow Y$, $f(X)$ est fermé dans Y.

(iii) Toute fonction continue $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée.

Solution. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte du théorème 3.2.1.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}$ définie par $\varphi(x) = \Big(\dfrac{2x}{x^2+1}, \dfrac{x^2-1}{x^2+1}\Big)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors φ réalise un homéomorphisme de

$\mathbb{R}$ sur $\mathbb{S} \setminus \{(0,1)\}$, voir exemple 3.5.2. Par hypothèse, $\varphi(f(X)) = (\varphi \circ f)(X)$ est fermé dans $\mathbb{S}$. Donc $\varphi(f(X))$ est un compact, d'où $f(X)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$. Donc $f(X)$ est bornée. Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i). Par hypothèse, toute fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ est bornée. On déduit alors des exercices 3.40 et 3.41 que $(X,\, d)$ est complet et précompact. Il résulte alors du théorème 3.1.3 que $(X,\, d)$ est compact.

Exercice 3.43. Soit $(X,\, d)$ un espace métrique. Montrer que X est compact si et seulement si tout sous-espace discret et infini de X est non fermé dans X.

Solution. Supposons d'abord que $(X,\, d)$ est compact. Soit Y un sous-espace discret et infini de X. Si Y était fermé dans X, alors Y serait compact, ce qui est impossible, voir exemple 3.1.1. Donc Y n'est pas fermé dans X.

Réciproquement, supposons que tout sous-espace discret et infini de X est non fermé dans X. Si $(X,\, d)$ n'est pas précompact, d'après l'exercice 3.39, il existe $\varepsilon > 0$ et un sous-ensemble infini F de X tel que pour tout $x, y \in F$, avec $x \neq y$, on ait $d(x,y) > \varepsilon$. Alors F est fermé dans $(X,\, d)$, voir exercice 2.25, et F muni de la topologie induite par X est discret, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $(X,\, d)$ est précompact. Si $(X,\, d)$ n'est pas complet, il existe une suite de Cauchy $(x_n)_{n\geq 0}$ non convergente dans $(X,\, d)$. Il résulte de l'exercice 2.24 que $A = \{x_n \,;\, n \geq 0\}$ est infini et fermé dans $(X,\, d)$ et que A muni de la topologie induite par X est discret, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $(X,\, d)$ est complet. Par conséquent, $(X,\, d)$ est compact.

Exercice 3.44. Soient X un espace localement compact et X_∞ son compactifié d'Alexandroff. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) X est dénombrable à l'infini.

(ii) $\{\infty\}$ possède un système fondamental dénombrable de voisinages dans X_∞.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ et $X = \overset{\infty}{\underset{n=0}{\cup}} K_n$, voir théorème 3.4.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $V_n = X_\infty \setminus K_n$, alors V_n est un ouvert de X_∞ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système fondamental dénombrable de voisinages de $\{\infty\}$ dans X_∞. En effet, soit V un ouvert de X_∞ contenant $\{\infty\}$, alors $K = X_\infty \setminus V$ est un compact de X. On a $X = \overset{\infty}{\underset{n=0}{\cup}} \overset{\circ}{K}_n$ et $\big(\overset{\circ}{K}_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, donc il existe un $n \geq 0$ tel que $K \subset \overset{\circ}{K}_n$, d'où $V_n \subset X_\infty \setminus \overset{\circ}{K}_n \subset X_\infty \setminus K = V$.

Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts de $\{\infty\}$ dans X_∞. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $K_n = X_\infty \setminus V_n$, alors K_n est une partie compacte de X. Puisque X_∞ est séparé, alors on a $\underset{n\geq 0}{\cap} V_n = \{\infty\}$, d'où :

$$X = X_\infty \setminus \{\infty\} = X_\infty \setminus \underset{n\geq 0}{\cap} V_n = \underset{n\geq 0}{\cup} X_\infty \setminus V_n = \underset{n\geq 0}{\cup} K_n\,.$$

Donc X est dénombrable à l'infini.

Exercice 3.45. Soient X un espace localement compact et non compact, Y un espace topologique, $y_0 \in Y$ et $f\,: X \longrightarrow Y$ une application continue. On note $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de X. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) L'application f admet en $\{\infty\}$ la limite y_0.

(ii) L'application $\tilde{f} : \widetilde{X} \longrightarrow Y$ telle que, pour tout $x \in X$, on ait $\tilde{f}(x) = f(x)$ et $\tilde{f}(\infty) = y_0$ est continue.

(iii) Pour toute partie fermée F de Y ne contenant pas y_0, l'ensemble $f^{-1}(F)$ est un compact dans X.

Solution. L'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) résulte du corollaire 1.6.1.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit F une partie fermée de Y ne contenant pas y_0. Alors $V = Y \setminus F$ est un ouvert de Y contenant y_0. Comme $\tilde{f}$ est continue, alors $\tilde{f}^{-1}(V)$ est un ouvert de $\widetilde{X}$ contenant $\{\infty\}$, donc $\widetilde{X} \setminus \tilde{f}^{-1}(V)$ est un compact dans X. Or on a $\widetilde{X} \setminus \tilde{f}^{-1}(V) = \tilde{f}^{-1}(Y \setminus V) = \tilde{f}^{-1}(F) = f^{-1}(F)$, donc $f^{-1}(F)$ est un compact dans X.
Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit V un voisinage ouvert de y_0 dans Y, alors $F = Y \setminus V$ est un fermé de Y ne contenant pas y_0. Donc $f^{-1}(F)$ est un compact dans X. Soit $W = \widetilde{X} \setminus f^{-1}(F)$, alors W est un ouvert de $\tilde{X}$ contenant $\{\infty\}$ et on a $f(W \cap X) \subset V$, donc y_0 est une limite de f en $\{\infty\}$.

Exercice 3.46. Soient X un espace topologique séparé et D une partie dense dans X telle que $D \neq X$. Soient Y un espace topologique et $f : D \longrightarrow Y$ une application propre. Montrer qu'il n'existe aucune application continue de X dans Y prolongeant f.
Solution. Supposons le contraire, et soit $g : X \longrightarrow Y$ une application continue prolongeant f. Soient $x \in X \setminus D$ et $Z = D \cup \{x\}$. Comme l'adhérence de D dans Z est $\overline{D} \cap Z = X \cap Z = Z$, voir exercice 1.26, alors D est dense dans Z. Notons aussi que la restriction de g à Z est continue et prolonge f. Par conséquent, sans perdre de généralité, on peut supposer $X = D \cup \{x\}$, où $x \notin D$. Par hypothèse, $f^{-1}(\{g(x)\})$ est une partie compacte de X et $x \notin f^{-1}(\{g(x)\})$, donc il existe deux ouverts disjoints U et V de X tels que $x \in U$ et $f^{-1}(\{g(x)\}) \subset V$. Comme $D \setminus V$ est fermé dans D, alors $f(D \setminus V)$ est fermé dans Y, donc $g^{-1}(f(D \setminus V))$ est fermé dans X. D'où on a $\overline{D \setminus V} \subset g^{-1}(f(D \setminus V))$. Comme $x \notin g^{-1}(f(D \setminus V))$, car $g(x) \notin f(D \setminus V)$, alors on a $g^{-1}(f(D \setminus V)) \subset D$, donc $\overline{D \setminus V} \subset D$. On a $D = (D \setminus V) \cup V$, d'où $\overline{D} = \overline{D \setminus V} \cup \overline{V}$. Comme $x \notin \overline{V}$, alors $\overline{D} \subset D$. Par conséquent, on a $X = D$, ce qui est impossible. Donc il n'existe aucune application continue de X dans Y prolongeant f.

Exercice 3.47. Soit X un espace localement compact. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) X est dénombrable à l'infini.

(ii) Il existe une application propre $f : X \longrightarrow [0, +\infty[$.

Solution. Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $f : X \longrightarrow [0, +\infty[$ une application propre. Pour tout $n \geq 0$, soit $K_n = f^{-1}\big([0, n]\big)$, alors K_n est une partie compacte de X, voir théorème 3.7.2, et on a $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$. Donc X est dénombrable à l'infini.
Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). D'après le théorème 3.4.2, il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ et $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$. D'après le théorème 3.6.1 pour tout $n \geq 0$, il existe une application continue $f_n : X \longrightarrow [0, 1]$ telle que $f_n(x) = 1$ pour tout $x \in K_n$ et $\mathrm{Supp}(f_n) \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$. Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in X$, on pose $g_n(x) = 1 - f_n(x)$. Alors g_n est une fonction continue de X dans $[0, 1]$ telle que $g_{n|_{K_n}} = 0$. On pose $f = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$, alors f est une application propre de X dans $[0, +\infty[$. En effet, soit $x \in X$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x \in K_N$, d'où on a $g_n(x) = 0$ pour tout $n \geq N$, donc f est bien définie et à valeurs dans $[0, +\infty[$. Comme on a $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} \overset{\circ}{K}_{n+1}$, pour montrer que f est continue, il suffit de montrer que la restriction de f à chaque $\overset{\circ}{K}_{n+1}$ est continue. Soit $n \geq 0$, pour tout $p > n$, la fonction g_p

est nulle sur $\overset{\circ}{K}_{n+1}$, donc la restriction de f à $\overset{\circ}{K}_{n+1}$ est la somme d'une suite finie de fonctions continues, donc elle est continue. Par conséquent, f est continue sur X. Soit K un compact de $[0, +\infty[$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset [0, N]$. Soit $x \in f^{-1}(K)$, alors on a $f(x) \leq N$. Si $x \in X \setminus K_{N+1}$, alors pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$, on a $g_n(x) = 1$, d'où $f(x) \geq N + 1$, ce qui est impossible. Donc on a $x \in K_{N+1}$. Autrement dit, on a $f^{-1}(K) \subset K_{N+1}$. Comme f est continue, alors $f^{-1}(K)$ est fermé dans X, d'où $f^{-1}(K)$ est compact. Il résulte du théorème 3.7.4 que f est une application propre.

Exercice 3.48. On munit $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f est une application propre.

(ii) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$, *i.e.* pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-B, B]$, on ait $|f(x)| > A$.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $A > 0$, alors $f^{-1}\big([-A, A]\big)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$, donc il existe $B > 0$ tel que $f^{-1}\big([-A, A]\big) \subset [-B, B]$, d'où pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-B, B]$, on a $|f(x)| > A$. Donc on a $\lim\limits_{|x| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$.

Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$, alors K est fermée dans $\mathbb{R}$, d'où $f^{-1}(K)$ est fermé dans $\mathbb{R}$. Soit $A > 0$ tel que $K \subset [-A, A]$. Alors il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-B, B]$, on ait $|f(x)| > A$, d'où $f^{-1}(K) \subset [-B, B]$, donc $f^{-1}(K)$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$, donc f est une application propre.

Exercice 3.49. Soient (Y, d) un espace métrique et $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ une application continue et admettant des limites en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Solution. On donne deux méthode pour faire cet exercice.

Première méthode : puisque f est continue et admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$, d'après le corollaire 1.6.1, f se prolonge par continuité en une application continue $\tilde{f}$ de la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$ dans Y. Comme $\overline{\mathbb{R}}$ est un espace métrique compact, voir exemple 2.4.2, alors $\tilde{f}$ est uniformément continue. Par conséquent, f est uniformément continue.

Deuxième méthode : soient $\ell_1 = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\ell_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $A < B$ et pour tout $x \leq A$, on ait $d(f(x), \ell_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ et pour tout $x \geq B$, on ait $d(f(x), \ell_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme f est uniformément continue de $[A-2, B+2]$ dans Y, alors il existe $0 < \eta < 1$ tel que pour tous $x, y \in [A-1, B+1]$ vérifiant $|x - y| < \eta$, on ait $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \eta$. Si $x \leq A - 1$, alors $y \leq A$ et on a $d(f(x), \ell_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(f(y), \ell_1) < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Si $x \in [A-1, B+1]$, alors $y \in [A-2, B+2]$ et on a $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Si $x \geq B + 1$, alors $y \geq B$ et on a $d(f(x), \ell_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(f(y), \ell_2) < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - y| < \eta$, on ait $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Autrement dit, f est uniformément continue.

Exercice 3.50. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et tendant vers 0 à l'infini.

1. Montrer que f est bornée et uniformément continue.
2. Montrer que si f prend des valeurs positives et négatives, alors f atteint ses bornes.

Solution. 1. Le fait que f est uniformément continue résulte de l'exercice précédent. Le fait que f est bornée résulte de la remarque 3.6.1, mais donnons une preuve directe ici. Puisque f tend vers 0 à l'infini, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-A, A]$, on ait $|f(x)| < 1$. Comme f est continue sur le compact $[-A, A]$, d'après le théorème 3.2.2, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leq f(x) \leq \beta$,

pour tout $x \in [-A, A]$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| \leq \max\{1, |\alpha|, |\beta|\}$. Donc f est bornée.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Soit $M = \inf(-f(a), f(b)) > 0$, alors il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-A, A]$, on ait $|f(x)| < M$. D'où pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-A, A]$, on a $f(a) < f(x) < f(b)$. Par conséquent, $a, b \in [-A, A]$ et on a $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \inf\limits_{x\in[-A, A]} f(x)$ et $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \sup\limits_{x\in[-A, A]} f(x)$. Comme $[-A, A]$ est compact, on déduit du théorème 3.2.2 qu'il existe $x_0, x_1 \in [-A, A]$ tels que $f(x_0) = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ et $f(x_1) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 3.51. Montrer que la fonction *racine carrée* $f : t \longmapsto \sqrt{t}$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$. Montrer qu'elle n'est pas lipschitzienne sur $]0, +\infty[$.
Solution. Comme f est continue sur le compact $[0, 2]$, alors f est uniformément continue sur $[0, 2]$, voir théorème 3.2.3. Comme f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est bornée sur $[1, +\infty[$, alors f est uniformément continue sur $[1, +\infty[$, voir proposition 2.3.3. Par conséquent, f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$. Si f était lipschitzienne sur $]0, +\infty[$, il existerait une constante $k \geq 0$ telle que pour tous $x, y \in]0, +\infty[$, on ait $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x - y|$. On en déduit que l'on a $\left|\sqrt{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{\frac{1}{n}}\right| \leq k\left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right|$ pour tout $n \geq 1$. Donc on a $1 \leq k\left[\sqrt{\frac{1}{n+1}} + \sqrt{\frac{1}{n}}\right]$, pour tout $n \geq 1$, ce qui est impossible car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{n+1}} + \sqrt{\frac{1}{n}}\right] = 0$. Donc f n'est pas lipschitzienne sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3.52. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t = 0\,, \\ t\sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si} \quad t \neq 0\,. \end{cases}$$

Montrer que f est uniformément continue sur $[0, 1]$, mais n'est pas lipschitzienne.
Solution. Comme $[0, 1]$ est compact et f est continue, alors f est uniformément continue sur $[0, 1]$. Si f était lipschitzienne, il existerait une constante $k > 0$ telle que pour tous $t, s \in]0, 1]$, on ait $|f(t) - f(s)| \leq k\,|t - s|$. Donc pour tous $t, s \in]0, 1]$, avec $t \neq s$, on a $\left|\dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}\right| \leq k$. Par conséquent, pour tout $s \in]0, 1]$, on a $|f'(s)| \leq k$. Or, pour tout $s \in]0, 1]$, on a $f'(s) = \sin\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{s}\cos\left(\frac{1}{s}\right)$, donc si $s_n = \frac{1}{2\pi n}$, on a $|f'(s_n)| = 2\pi n$, d'où la contradiction. Donc f n'est pas lipschitzienne.

Exercice 3.53. Distance de Hausdorff. Soient (X, d) un espace métrique non vide et $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-ensembles fermés bornés non vides de X. Pour tous $A, B \in \mathcal{H}$, on pose :

$$\rho(A, B) = \sup_{x\in A} d(x, B) \quad \text{et} \quad D(A, B) = \max(\rho(A, B), \rho(B, A))$$

1. Montrer que D est une distance sur $\mathcal{H}$; D est appelée la **distance de Hausdorff**.
2. Montrer que $x \longmapsto \{x\}$ est une application isométrique de (X, d) dans $(\mathcal{H}, D)$.
3. Montrer que (X, d) est précompact si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie non vide A de X telle que $D(X, A) \leq \varepsilon$.
4. Supposons (X, d) précompact. Soient $\varepsilon > 0$ et A une partie finie non vide de X telle que $X = \bigcup\limits_{a\in A} B'(a, \varepsilon)$.

(i) Soit $B \in \mathcal{H}$ et posons $C = \{x \in A\ ;\ d(x,B) \leq \varepsilon\}$. Montrer que C est une partie fermée bornée non vide de X et que $D(B,C) \leq \varepsilon$.

(ii) En déduire que $(\mathcal{H},\, D)$ est précompact.

5. On suppose $(X,\, d)$ complet. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $(\mathcal{H},\, D)$ telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $D(A_n, A_{n+1}) < 2^{-n}$. Pour tout $n \geq 0$, soit $F_n = \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$ et $F = \bigcap_{n\geq 0} F_n$. Montrer que F est une partie fermée bornée non vide de $(X,\, d)$ et que la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ converge vers F. En déduire que $(\mathcal{H},\, D)$ est complet.

6. Supposons que $(X,\, d)$ est compact. En déduire que $(\mathcal{H},\, D)$ est compact.

Solution. 1. D'après la proposition 2.2.4, pour toute partie non vide E de X, l'application $x \longmapsto d(x,E)$ est lipschitzienne de rapport 1, donc pour tous $A, B \in \mathcal{H}$, $\rho(A,B)$ existe dans $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, D est bien définie. Il est clair que l'on a $D(A,B) = D(B,A)$, $D(A,B) \geq 0$ et que $D(A,A) = 0$. Supposons que l'on a $D(A,B) = 0$, alors $\rho(A,B) = 0$ et $\rho(B,A) = 0$, d'où pour tout $x \in A$, on a $d(x,B) = 0$ et pour tout $y \in B$, on a $d(y,A) = 0$. Comme A et B sont fermés dans X, alors on a $A = B$. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Soient $A, B, C \in \mathcal{H}$. Pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in B$, on a $d(x,C) \leq d(x,y) + d(y,C) \leq d(x,y) + \rho(B,C)$, d'où :

$$d(x,C) \leq \inf_{y\in B} \{d(x,y) + \rho(B,C)\} = \inf_{y\in B} d(x,y) + \rho(B,C) = d(x,B) + \rho(B,C)\,.$$

Donc on a $\rho(A,C) \leq \rho(A,B) + \rho(B,C)$. Par conséquent, on a $\rho(A,C) \leq D(A,B) + D(B,C)$. De même, on a $\rho(C,A) \leq D(C,B) + D(B,A) = D(A,B) + D(B,C)$. Donc on a $D(A,C) \leq D(A,B) + D(B,C)$. Donc D est bien une distance sur $\mathcal{H}$.

2. Pour tout $x, y \in X$, on a $\rho(\{x\},\{y\}) = d(x,y)$, d'où $D(\{x\},\{y\}) = d(x,y)$. Donc $x \longmapsto \{x\}$ est bien une application isométrique de $(X,\, d)$ dans $(\mathcal{H},\, D)$.

3. Supposons $(X,\, d)$ précompact, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie non vide A de X telle que $X = \bigcup_{a\in A} B'(a,\varepsilon)$. Soit $x \in X$, alors il existe $a \in A$ tel que $d(x,a) \leq \varepsilon$, d'où $d(x,A) \leq \varepsilon$. Donc on a $\rho(X,A) \leq \varepsilon$. Comme on a $\rho(A,X) = 0$, alors $D(X,A) \leq \varepsilon$.

Réciproquement, supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie non vide A de X telle que $D(X,A) \leq \varepsilon$. Soient $\varepsilon > 0$ et A une partie finie non vide de X telle que $D(X,A) \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $x \in X$, on a $d(x,A) \leq \varepsilon$. Comme A est finie, il existe $a \in A$ tel que $d(x,A) = d(x,a)$, d'où $d(x,a) \leq \varepsilon$. Donc on a $X = \bigcup_{a\in A} B'(a,\varepsilon)$. Par conséquent, $(X,\, d)$ est précompact.

4(i). Soient $B \in \mathcal{H}$ et $C = \{x \in A\ ;\ d(x,B) \leq \varepsilon\}$. Comme C est une partie finie, alors C est bornée et fermée dans X. Soit $b \in B$, alors il existe $a \in A$ tel que $b \in B'(a,\varepsilon)$. D'où on a $d(a,B) \leq d(a,b) \leq \varepsilon$, donc $a \in C$. Par conséquent, C est non vide et on a $d(b,C) \leq d(b,a) \leq \varepsilon$, d'où $\rho(B,C) \leq \varepsilon$. Pour tout $x \in C$, on a $d(x,B) \leq \varepsilon$, d'où $\rho(C,B) \leq \varepsilon$. Par conséquent, on a $D(B,C) \leq \varepsilon$.

4(ii). Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties finies non vides de A, alors $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble fini de $\mathcal{H}$ et on a $\mathcal{H} = \underset{C\in\mathcal{C}}{B}{}'(C,\varepsilon)$. Donc $(\mathcal{H},\, D)$ est précompact.

5. Pour tout $n \geq 0$, on a $D(A_n, A_{n+1}) < 2^{-n}$, d'où $\rho(A_n, A_{n+1}) < 2^{-n}$. Donc, pour tout $x \in A_n$, on a $d(x, A_{n+1}) < 2^{-n}$. Par conséquent, pour tout $x \in A_n$, il existe $y \in A_{n+1}$ tel que $d(x,y) < 2^{-n}$. Ainsi, on trouve, par récurrence, une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $n \geq 0$, $a_n \in A_n$ et $d(a_n, a_{n+1}) < 2^{-n}$. Comme $(X,\, d)$ est complet, il résulte de l'exercice 2.20 que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est convergente. Soit $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Comme $(F_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de parties fermées de X et pour tout $n \geq 0$, on a $a_n \in F_n$, alors pour tout $n \geq 0$, on a $a \in F_n$, donc $a \in F$. Par conséquent, F est une partie fermée non vide de X. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N}^{+\infty} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n \geq N$. Soit $x \in F$, on a $x \in F_n = \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$. Pour tout $k \geq n$, on a

$D(A_k, A_n) \leq \sum_{p=n}^{k-1} D(A_p, A_{p+1}) < \sum_{p=n}^{k-1} 2^{-p} < \frac{\varepsilon}{2}$. D'où pour tout $k \geq n$ et pour tout $z \in A_k$, on a $d(z, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc on a $d(x, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que F est bornée et que $\rho(F, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, pour tout $n \geq N$. Soit $y \in A_n$. On pose $a_n = y$ et on construit, comme ci-dessus, une suite $(a_k)_{k\geq n}$ telle que pour tout $k \geq n$, $a_k \in A_k$ et $d(a_k, a_{k+1}) < 2^{-k}$. Soit $a = \lim_{k\to+\infty} a_k$, alors $a \in F$ et il existe $k > n$ tel que $d(a, a_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. On a $d(y, a) \leq \sum_{i=n}^{k-1} d(a_i, a_{i+1}) < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $d(y, a) < \varepsilon$. Donc on a $d(y, F) < \varepsilon$. Par conséquent, on a $\rho(A_n, F) \leq \varepsilon$. Finalement, on a $D(A_n, F) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Autrement dit, la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ converge vers F. Donc $(\mathcal{H}, D)$ est complet, voir exercice 2.20.

6. Si (X, d) est compact, alors (X, d) est précompact et complet. Il résulte de ce qui précède que $(\mathcal{H}, D)$ est précompact et complet, donc $(\mathcal{H}, D)$ est compact.

Exercice 3.54. Soient (X, d) un espace métrique compact, (Y, d') un espace métrique. On munit $C(X, Y)$, l'espace des applications continues de X dans Y, de la distance de la convergence uniforme d_∞ ; pour $f, g \in C(X, Y)$, on a $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in X} d'(f(x), g(x))$. On munit l'espace produit $X \times Y$ de la distance d_1 ; $d_1\big((x, y), (a, b)\big) = d(x, a) + d'(y, b)$, pour tous $(x, y), (a, b) \in X \times Y$. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-ensembles fermés bornés non vides de $(X \times Y, d_1)$. On munit $\mathcal{H}$ de la distance de Hausdorff associée à d_1. Soit $G : C(X, Y) \longrightarrow \mathcal{H}$ définie par : $G(f) = G_f = \{(x, f(x))\ ;\ x \in X\}$ le graphe de f.

1. Montrer que G est injective et lipschitzienne.
2. Soit $\mathcal{H}_0$ l'image de G. Montrer que G est un homéomorphisme de $C(X, Y)$ sur $\mathcal{H}_0$.

Solution. 1. Soient $f, g \in C(X, Y)$. Pour tout $x \in X$, on a :

$$d_1\big((x, f(x)), G_g\big) \leq d_1\big((x, f(x)), (x, g(x))\big) = d'(f(x), g(x)) \leq d_\infty(f, g)$$

d'où $\rho(G_f, G_g) \leq d_\infty(f, g)$. De même, on a $\rho(G_g, G_f) \leq d_\infty(g, f) = d_\infty(f, g)$. Par conséquent, on a $D(G_f, G_g) \leq d_\infty(f, g)$. Donc G est lipschitzienne. Si on a $G_f = G_g$, alors pour tout $x \in X$, on a $f(x) = g(x)$, d'où $f = g$. Donc G est injective.

2. Soient $f \in C(X, Y)$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $C(X, Y)$ telle que $(G_{f_n})_{n\geq 0}$ converge vers G_f dans $(\mathcal{H}, D)$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, alors il existe $0 < \eta < \frac{\varepsilon}{2}$ tel que pour tous $x, z \in X$ vérifiant $d(x, z) < \eta$, on ait $d'(f(x), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $(G_{f_n})_{n\geq 0}$ converge vers G_f, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $D(G_{f_n}, G_f) < \eta < \frac{\varepsilon}{2}$. D'où pour tout $n \geq N$, on a $\rho(G_{f_n}, G_f) < \eta < \frac{\varepsilon}{2}$. On a $\rho(G_{f_n}, G_f) = \sup_{x\in X} d_1\big((x, f_n(x)), G_f\big)$, donc pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$, on a $d_1\big((x, f_n(x)), G_f\big) < \eta$. Donc, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$, il existe $z_n \in X$ tel que $d(x, z_n) + d'(f_n(x), f(z_n)) < \eta$. En particulier, on a $d(x, z_n) < \eta$, d'où $d'(f(x), f(z_n)) < \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que l'on a :

$$d'(f_n(x), f(x)) \leq d'(f_n(x), f(z_n)) + d'(f(x), f(z_n)) < \eta + \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.$$

Donc, pour tout $n \geq N$, on a $d_\infty(f_n, f) = \sup_{x\in X} d'(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$. Autrement dit, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans $(C(X, Y), d_\infty)$. Par conséquent, G est un homéomorphisme de $C(X, Y)$ sur $\mathcal{H}_0$.

Exercice 3.55. Soit $(X,\, d)$ un espace métrique localement compact séparable. Le but de cet exercice est de montrer que le compactifié d'Alexandroff $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ est métrisable †. Autrement dit, on veut définir sur $\widehat{X}$ une distance qui induit la topologie de $\widetilde{X}$. Soit $(V_n)_{n\geq 0}$ une base dénombrable d'ouverts de X, voir théorème 2.2.1, et soit :

$$\mathcal{A} = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \;;\; \overline{V_p} \subset V_q \text{ et } \overline{V_p} \text{ compact}\right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{A}$ est dénombrable ; posons $\mathcal{A} = \{(p_n, q_n)\;;\; n \geq 0\}$. Pour tout $n \geq 0$, soit $\phi_n \in C_c(X)$ tel que $0 \leq \phi_n \leq 1$, $\phi_n = 1$ sur V_{p_n} et $\mathrm{Supp}(f) \subset V_{q_n}$, voir théorème 3.6.1. On pose $\phi_n(\infty) = 0$, voir remarque 3.6.1. Pour tout $x, y \in \widehat{X}$, on pose :

$$D(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\phi_n(x) - \phi_n(y)|}{2^n}.$$

1. Montrer que D est une distance sur $\widetilde{X}$.
2. Soit $(x_m)_{m\geq 0}$ une suite dans $\widetilde{X}$. Montrer que $\lim\limits_{m\to+\infty} D(x_m, \infty) = 0$ si et seulement si pour tout compact K de X, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq m_0$, on ait $x_m \notin K$.
3. Soient $(x_m)_{m\geq 0}$ une suite dans X et $x \in X$. Montrer que $\lim\limits_{m\to+\infty} D(x_m, x) = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{m\to+\infty} d(x_m, x) = 0$
4. Montrer que la topologie induite par D sur $\widehat{X}$ est égale à la topologie de $\widetilde{X}$.

Solution. 1. Ceci est trivial.
2. Soit $(x_m)_{m\geq 0}$ une suite dans $\widetilde{X}$. Supposons d'abord que $\lim\limits_{m\to+\infty} D(x_m, \infty) = 0$. Pour tout $m \geq 0$, on a $D(x_m, \infty) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n(x_m)}{2^n}$. Comme X est localement compact, d'après le théorème 3.4.1, pour tout $x \in X$, il existe $n \geq 0$ tel que $x \in V_{p_n} \subset \overline{V_{p_n}} \subset V_{q_n}$. On en déduit que si K est un compact de X, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \bigcup\limits_{n=0}^{N} V_{p_n}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{1}{2^N}$. Alors il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq m_0$, on ait $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n(x_m)}{2^n} = D(x_m, \infty) < \varepsilon$. Soit $m \geq m_0$. Si $x_m \in K$, alors il existe $n \in \{0, \dots, N\}$ tel que $x_m \in V_{p_n}$, d'où $\phi_n(x_m) = 1$, donc on a $D(x_m, \infty) \geq \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^N} > \varepsilon$, ce qui est impossible. Par conséquent, pour tout $m \geq m_0$, on a $x_m \notin K$.
Réciproquement, supposons que pour tout compact K de X, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq m_0$, on ait $x_m \notin K$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Soit $K = \bigcup\limits_{n=0}^{N} \overline{V_{p_n}}$. Alors K est un compact de X. Par hypothèse, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq m_0$, on ait $x_m \notin K$. Alors pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$ et pour tout $m \geq m_0$, on a $\phi_n(x_m) = 0$. Donc, pour tout $m \geq m_0$, on a $D(x_m, \infty) = \displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\phi_n(x_m)}{2^n} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{m\to+\infty} D(x_m, \infty) = 0$.
3. Soient $(x_m)_{m\geq 0}$ une suite dans X et $x \in X$. Supposons d'abord que $\lim\limits_{m\to+\infty} d(x_m, x) = 0$.

†. Notons que si X est un espace localement compact et si $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ est métrisable, alors X est métrisable et séparable.

Autrement dit, $(x_m)_{m\geq 0}$ converge vers x dans $(X,\, d)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \geq 1$ tel que $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{2}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. On a :

$$\begin{aligned}
D(x_m, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\phi_n(x_m) - \phi_n(x)|}{2^n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|\phi_n(x_m) - \phi_n(x)|}{2^n} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|\phi_n(x_m) - \phi_n(x)|}{2^n} \\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|\phi_n(x_m) - \phi_n(x)|}{2^n} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{2}{2^n} \\
&< \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|\phi_n(x_m) - \phi_n(x)|}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2}\,.
\end{aligned}$$

Comme pour tout $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, ϕ_n est continue, alors il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \{0, \ldots, N-1\}$ et pour tout $m \geq m_0$, on ait $\dfrac{|\phi_n(x_m) - \phi_n(x)|}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2N}$. Par conséquent, pour tout $m \geq m_0$, on a $D(x_m, x) < \varepsilon$. Autrement dit, on a $\lim_{m\to+\infty} D(x_m, x) = 0$.

Réciproquement, supposons que $\lim_{m\to+\infty} D(x_m, x) = 0$. On a $D(x_m, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{|\phi_n(x_m) - \phi_n(x)|}{2^n}$. Si $(x_m)_{m\geq 0}$ ne converge pas vers x dans $(X,\, d)$, alors il existe un voisinage compact W de x dans $(X,\, d)$ tel que pour tout $m_0 \in \mathbb{N}$, il existe $m \geq m_0$ tel que $x_m \notin W$. On en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x \in V_{p_N}$ et tel que pour tout $m_0 \in \mathbb{N}$, il existe $m \geq m_0$ tel que $x_m \notin \overline{V_{p_N}}$. Par conséquent, pour tout $m_0 \in \mathbb{N}$, il existe $m \geq m_0$ tel que $D(x_m, x) \geq \dfrac{|\phi_N(x_m) - \phi_N(x)|}{2^N} = \frac{1}{2^N}$, ce qui est impossible. Donc $(x_m)_{m\geq 0}$ converge bien vers x dans $(X,\, d)$.

4. Puisque (X, d) est localement compact et séparable, il résulte de la proposition 3.4.4 que X est dénombrable à l'infini. Par conséquent, tout point de $\widetilde{X}$ possède une base dénombrable de voisinages, voir théorème 2.2.1 et exercice 3.44. On déduit alors du théorème 1.7.3 et des propriétés 2 et 3 ci-dessus que l'application identité

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{X} & \longrightarrow & (\widetilde{X},\, D) \\
x & \longmapsto & x
\end{array}$$

est un homéomorphisme. Par conséquent,la topologie induite par D sur $\widehat{X}$ est égale à la topologie de $\widetilde{X}$.

Exercice 3.56. Soit $(X,\, d)$ un espace métrique avec d bornée. Pour tout $x \in X$, on désigne par f_x la fonction réelle obtenue en prolongeant par continuité la fonction $y \longmapsto d(x, y)$ à $\beta(X)$.

1. Montrer que pour tous $x \in X$, $y \in X$ et $z \in \beta(X)$, on a $f_x(z) + f_y(z) \geq d(x, y)$ et $|f_x(z) - f_y(z)| \leq d(x, y)$. En déduire que pour tout $x \in X$ et pour tout $z \in \beta(X)$, on a $f_x(z) \geq 0$.
2. Montrer que pour tous $x \in X$ et $z \in \beta(X)$ tels que $z \neq x$, on ait $f_x(z) > 0$.

Solution. 1. Soient $x, y \in X$. Pour tout $z \in \beta(X)$, soit $g(z) = f_x(z) + f_y(z)$, alors g est une fonction continue de $\beta(X)$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $a \in X$, on a $g(a) = f_x(a) + f_y(a) = d(x,a) + d(y,a) \geq d(x,y)$. Donc $g^{-1}\big([d(x,y),\, +\infty[\big)$ est un fermé de $\beta(X)$ contenant X. Comme X est dense dans $\beta(X)$, on en déduit que l'on a $\beta(X) \subset g^{-1}\big([d(x,y),\, +\infty[\big)$. Autrement dit, pour tout $z \in \beta(X)$, on a $f_x(z) + f_y(z) \geq d(x,y)$. De même, pour tout $z \in \beta(X)$, soit $h(z) = \big|f_x(z) - f_y(z)\big|$, alors h est une fonction continue de $\beta(X)$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $a \in X$, on a $h(a) = \big|f_x(a) - f_y(a)\big| = \big|d(x,a) - d(y,a)\big| \leq d(x,y)$. Donc $h^{-1}\big([0,\, d(x,y)]\big)$ est un fermé de $\beta(X)$ contenant X. Comme X est dense dans $\beta(X)$, on en déduit que l'on a $\beta(X) \subset h^{-1}\big([0,\, d(x,y)]\big)$. Autrement dit, pour tout $z \in \beta(X)$, on a $\big|f_x(z) - f_y(z)\big| \leq d(x,y)$. Pour tout $x \in X$ et pour tout $z \in \beta(X)$, on a $f_x(z) + f_x(z) \geq d(x,x) = 0$, d'où $f_x(z) \geq 0$.
2. Soient $x \in X$ et $z \in \beta(X)$ tels que $z \neq x$. Alors il existe un voisinage ouvert W_x de x dans $\beta(X)$ et un voisinage ouvert W_z de z dans $\beta(X)$ tels que $W_x \cap W_z = \emptyset$. Si $f_x(z) = 0$, comme f_x est continue, alors pour tout $n \geq 1$, il existe un voisinage ouvert V_n de z dans $\beta(X)$ tel que $V_n \subset W_z$ et pour tout $y \in V_n$, on ait $0 \leq f_x(y) < \frac{1}{n}$. Puisque X est dense dans $\beta(X)$, alors $V_n \cap X \neq \emptyset$. Donc, pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in X$ tel que $x_n \notin W_x \cap X$ et $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers x dans X et pour tout $n \geq 1$, $x_n \notin W_x \cap X$, d'où la contradiction. Donc on a bien $f_x(z) > 0$.

Exercice 3.57. Soient X un espace discret dénombrable et $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ son compactifié d'Alexandroff. Soient Y un espace discret infini non dénombrable et $\widetilde{Y} = Y \cup \{\infty\}$ son compactifié d'Alexandroff. Soit $Z = \big(\widetilde{X} \times \widetilde{Y}\big) \setminus \{(\infty, \infty)\}$. Comme Z est un ouvert d'un espace compact, alors Z est localement compact, voir corollaire 3.4.3.

1. Soient $A = X \times \{\infty\}$ et $B = \{\infty\} \times Y$. Montrer que A et B sont des sous-ensembles fermés disjoints de Z.
2. Montrer que Z n'est pas un espace normal.

Solution. 1. Comme on a $A = \big(\widetilde{X} \times \{\infty\}\big) \cap Z$ et $B = \big(\{\infty\} \times \widetilde{Y}\big) \cap Z$, alors A et B sont des sous-ensembles fermés de Z. Il est clair que A et B sont disjoints.
2. Soient U et V des ouverts de Z tels que $A \subset U$ et $B \subset V$. Montrons que l'on a $U \cap V \neq \emptyset$. Notons d'abord que U et V sont aussi des ouverts de l'espace $\widetilde{X} \times \widetilde{Y}$. Pour tout $x \in X$, $(x, \infty) \in U$, donc il existe un ensemble fini F_x de Y tel que $\{x\} \times \big(\widetilde{Y} \setminus F_x\big) \subset U$. Soit $D = \underset{x\in X}{\cup} F_x$, alors D est un sous-ensemble au plus dénombrable de Y. Soit $y \in Y \setminus D$. Alors on a $X \times \{y\} \subset U$ et $(\infty, y) \in \overline{X \times \{y\}}$. Comme on a aussi $(\infty, y) \in B \subset V$, on en déduit que $U \cap V \neq \emptyset$. Par conséquent, Z n'est pas un espace normal.

Chapitre 4

ESPACES CONNEXES

Théorème. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides. Alors l'espace topologique produit $X = \prod_{i\in I} X_i$ est connexe si et seulement si pour tout $i \in I$, X_i est connexe.

Démonstration. Supposons que X est connexe. Comme les projections canoniques $p_i : X \longrightarrow X_i$ sont continues et surjectives, alors pour tout $i \in I$, X_i est connexe.
Réciproquement, supposons que pour tout $i \in I$, X_i est connexe. Montrons d'abord que le produit de deux espaces topologiques connexes est connexe. Soient Y, Z des espaces topologiques connexes et $f : Y \times Z \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Soit $(y,z), (y',z') \in Y \times Z$. Puisque les ensembles $\{y\} \times Z$ et $Y \times \{z\}$ sont connexes et d'intersection non vide, alors leur réunion $A = \big(\{y\} \times Z\big) \cup \big(Y \times \{z\}\big)$ est connexe. De même, $B = \big(\{y'\} \times Z\big) \cup \big(Y \times \{z'\}\big)$ est connexe. Comme on a $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est connexe. Donc la restriction de f à $A \cup B$ est constante, d'où $f(y,z) = f(y',z')$. Par conséquent, f est constante. Il résulte de la proposition 4.1.1 que $Y \times Z$ est connexe.
On déduit, par récurrence, qu'un produit fini d'espaces topologiques connexes est connexe. En effet, supposons que cette propriété est vraie pour $n \geq 2$ espaces topologiques connexes, et soient $E_1, \ldots, E_{n+1}$ des espaces topologiques connexes. Comme le produit $E_1 \times \ldots \times E_{n+1}$ est homéomorphe au produit de deux espaces topologiques connexes $\big(E_1 \times \ldots \times E_n\big) \times E_{n+1}$, alors il est connexe.
Soit $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Fixons $a = (a_i)_{i\in I} \in X$. Comme f est continue en a et $\{f(a)\}$ est ouvert dans $\{0,1\}$, alors il existe un voisinage V de a dans X tel que pour tout $x \in V$, on ait $f(x) = f(a)$. D'après la définition de la topologie produit, il existe un sous-ensemble fini J de I et des voisinages V_i de a_i dans X_i tel que $\prod_{i\in I} V_i \subset V$ et pour tout $i \in I \setminus J$, on ait $V_i = X_i$. Ainsi, pour tout $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ tel que $x_j = a_j$ pour tout $j \in J$, on ait $f(x) = f(a)$. Fixons $y = (y_i)_{i\in I} \in X$, et considérons l'application $\varphi : \prod_{j\in J} X_j \longrightarrow X$ définie par $\varphi((z_j)_{j\in J}) = (x_i)_{i\in I}$ où $x_i = y_i$ si $i \in I \setminus J$, et $x_i = z_i$ si $i \in J$. Alors φ est continue. Comme $\prod_{j\in J} X_j$ est connexe, alors $f \circ \varphi$ est constante sur $\prod_{j\in J} X_j$. D'où on a :

$$f(a) = f\big(\varphi\big((a_j)_{j\in J}\big)\big) = \big(f \circ \varphi\big)\big((a_j)_{j\in J}\big) = \big(f \circ \varphi\big)\big((y_j)_{j\in J}\big) = f\big(\varphi\big((y_j)_{j\in J}\big)\big) = f(y)\,.$$

Par conséquent, f est constante sur X, donc X est connexe. ■

Proposition. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) L'application f est ouverte.

(ii) L'application f est injective.

(iii) L'application f est strictement monotone.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. Comme f est continue et ouverte, il résulte du corollaire précédent que l'on a $f\big([x,\, y]\big) = [a,\, b]$ et que $f\big(]x,\, y[\big)$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, d'où $a \neq b$. Or on a $f\big([x,\, y]\big) = f\big(]x,\, y[\big) \cup \{f(x), f(y)\}$, d'où $\{f(x), f(y)\} = \{a, b\}$. Par conséquent, on a $f(x) \neq f(y)$. Donc f est injective.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soient $A = \{(x,y) \in I^2 \ ; \ x < y\}$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = f(y) - f(x)$. Vérifions d'abord que A est connexe. Soient $(x,y), (x',y') \in A$, et soit $t \in]0,\, 1[$, on a $tx + (1-t)x' < ty + (1-t)y'$, donc pour tout $t \in [0,\, 1]$, on a $t(x,y) + (1-t)(x',y') \in A$. Or l'application $t \longmapsto t(x,y) + (1-t)(x',y')$ est continue de $[0,\, 1]$ dans A, donc pour tous $(x,y), (x',y') \in A$, il existe une partie connexe B de A contenant (x,y) et (x',y'). Il résulte du théorème 4.1.1 que A est connexe. Comme g est continue, alors $g(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Or f est injective, donc $0 \notin g(A)$. Par conséquent, soit on a $g(A) \subset]0,\, +\infty[$, soit on a $g(A) \subset]-\infty,\, 0[$. Donc f est strictement monotone.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Notons d'abord que f est strictement croissante si et seulement si $-f$ est strictement décroissante. De même, f est ouverte si et seulement si $-f$ est ouverte. Donc, on peut supposer f strictement croissante. Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. Alors pour tout $t \in]x,\, y[$, on a $f(x) < f(t) < f(y)$. Comme f est continue, alors on a $f\big([x,\, y]\big) = [f(x),\, f(y)]$, d'où $f\big(]x,\, y[\big) =]f(x),\, f(y)[$. Comme tout ouvert de I est réunion d'intervalles ouverts, alors f est une application ouverte. ■

Notons que dans la preuve de l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii), l'intervalle I n'a pas besoin d'être ouvert.
Corollary. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Soit $J = f(I)$. Alors f est un homéomorphisme de I sur J si et seulement si f est continue et strictement monotone.

Démonstration. Si f est un homéomorphisme de I sur J, alors f est continue et injective. Alors il résulte de la proposition précédente que f est strictement monotone.
Réciproquement, supposons que f est continue et strictement monotone. Il suffit de traiter le cas où f est strictement croissante. Alors $J = f(I)$ est un intervalle de même nature que I et on a $f\big(\overset{\circ}{I}\big) = \overset{\circ}{J}$. D'après la proposition précédente, f est un homéomorphisme de $\overset{\circ}{I}$ sur $\overset{\circ}{J}$. Il reste à montrer que $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue en tout point de $J \setminus \overset{\circ}{J}$. Supposons, par exemple, que $I =]-\infty,\, a]$, et soit $z < a$. Comme f est continue et injective et comme $[z,\, a]$ est compact, alors f réalise un homéomorphisme de $[z,\, a]$ sur $[f(z),\, f(a)]$, donc la restriction de f^{-1} à $[f(z),\, f(a)]$ est continue. Or $[f(z),\, f(a)]$ est un voisinage de $f(a)$ dans J, donc f^{-1} est continue en $f(a)$. Par conséquent, f est un homéomorphisme de I sur J. On fait le même raisonnement pour les autres cas, où $I =]\alpha,\, a]$, $I = [\alpha,\, a]$ et $I = [a,\, +\infty[$. ■

Proposition. Soit X un espace compact. Pour tout $x \in X$, la composante connexe de x est l'intersection des voisinages de x à la fois ouverts et fermés dans X.

Démonstration. Soient $x \in X$ et C_x sa composante connexe. Soit $(A_i)_{i \in I}$ la famille des ouverts et fermés dans X contenant x. Notons que l'ensemble I est non vide car X est à la fois ouvert et fermé dans X et on a $x \in X$. Soit $K = \bigcap\limits_{i \in I} A_i$. D'après le théorème 4.2.1, pour tout $i \in I$, on a $C_x \subset A_i$, d'où $C_x \subset K$. Pour montrer l'autre inclusion, il suffit de montrer que K est connexe. Notons d'abord que K est une partie compacte de X. Supposons que K n'est pas connexe. Puisque K est fermé dans X et non connexe, alors il existe deux fermés non vides et disjoints E et F dans X tels que $K = E \cup F$. Donc E et F sont compacts. D'après la proposition 3.1.2, il existe deux ouverts disjoints U et V dans X tels que $E \subset U$ et $F \subset U$. Donc on a $K \subset U \cup V$, $K \cap U \neq \emptyset$ et $K \cap V \neq \emptyset$. D'après l'exercice 3.2, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $A = \bigcap_{j \in J} A_j \subset U \cup V$. Notons que A est à la fois ouvert et fermé dans X et on a $x \in A$. Alors $A \cap U$ est un ouvert de X. Comme on a $A \cap U = A \cap (X \setminus V)$, alors $A \cap U$ est aussi fermé dans X. On vérifie de même que $A \cap V$ est la fois ouvert et fermé dans X. Si $x \in U$, alors on a $K \subset A \cap U \subset U$, ce qui est impossible car $K \cap V \neq \emptyset$. Si $x \in V$, alors on a $K \subset A \cap V \subset V$, ce qui est impossible car $K \cap U \neq \emptyset$. Donc K est bien connexe. Par conséquent, on a $C_x = K$. ■

Proposition. Soit (X, d) un espace métrique compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) X est localement connexe.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, X est réunion finie de connexes de diamètre $\leq \varepsilon$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in X$, soit V_x un voisinage connexe de x dans X tel que $V_x \subset B\big(x, \frac{\varepsilon}{2}\big)$. Donc le diamètre de V_x est $\leq \varepsilon$. Comme $\big(\overset{\circ}{V_x}\big)_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X, alors il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Ainsi, X est réunion finie de connexes de diamètre $\leq \varepsilon$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $x \in X$. Soient $\varepsilon > 0$ et $A_1, \ldots, A_n$ un recouvrement de X par des connexes de diamètre $\leq \varepsilon$. Quitte à remplacer A_i par $\overline{A_i}$, connexe de même diamètre, on peut supposer que les A_i sont fermés dans X. Soit $I = \{i \,;\, x \in A_i\}$. On distingue deux cas :
Premier cas : $I = \{1, \ldots, n\}$. Alors $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe et on a $X \subset B'(x, \varepsilon)$.
Deuxième cas : $I \neq \{1, \ldots, n\}$. Soit $J = \{1, \ldots, n\} \setminus I$, alors $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe dans X, $V = \bigcap_{j \in J} (X \setminus A_j)$ est un ouvert de X contenant x et on a $V \subset A \subset B'(x, \varepsilon)$. Donc A est un voisinage connexe de x dans X. Par conséquent, X est localement connexe. ■

Supplément d'exercices

Exercice 4.33. Soit $X = \big(\{0\} \times [-1,\, 1]\big) \cup \big([-1,\, 1] \times \{0\}\big)$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que X est compact et connexe.
2. Montrer que $X \setminus \{(0, 0)\}$ a quatre composantes connexes.
3. Soit $A = \{(0, -1), (1, 0), (0, 1), (-1, 0)\}$.
   (i) Soit $(x, y) \in X \setminus \big(A \cup \{(0, 0)\}\big)$. Montrer que $X \setminus \{(x, y)\}$ a deux composantes connexes.
   (ii) Soit $(x, y) \in X$. Montrer que $X \setminus \{(x, y)\}$ est connexe si et seulement si $(x, y) \in A$.
4. Montrer que X n'est pas homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$. En déduire qu'il n'existe pas d'application continue injective de X dans $\mathbb{R}$.

Solution. 1. Comme X est fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$, alors X est compact. Comme $\{0\} \times [-1,\, 1]$ et $[-1,\, 1] \times \{0\}$ sont connexes d'intersection non vide, alors X est connexe.
2. Soient $U^- = X \cap \big(]-\infty, 0[\times\mathbb{R}\big)$, $U^+ = X \cap \big(]0, +\infty[\times\mathbb{R}\big)$, $V^- = X \cap \big(\mathbb{R}\times]-\infty, 0[\big)$ et $V^+ = X \cap \big(\mathbb{R}\times]0, +\infty[\big)$. Alors U^-, U^+, V^- et V^+ sont des ouverts dans $X \setminus \{(0, 0)\}$ non vides, deux à deux disjoints et connexes tels que $X \setminus \{(0, 0)\} = U^- \cup U^+ \cup V^- \cup V^+$. Il résulte du théorème 4.2.1 que U^-, U^+, V^- et V^+ sont les composantes connexes de $X \setminus \{(0, 0)\}$.
3(i). Soit $(x, y) \in X \setminus \big(A \cup \{(0, 0)\}\big)$. Il y a quatre cas :
Premier cas : $x \in]-1,\, 0[$. Soient $U = X \cap \big(]-\infty, x[\times\mathbb{R}\big)$ et $V = X \cap \big\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,;\, a > x\big\}$. Alors U et V sont des ouverts dans $X \setminus \{(x, y)\}$ non vides, disjoints et connexes tels que $X \setminus \{(x, y)\} = U \cup V$. D'après le théorème 4.2.1, U et V sont les composantes connexes de

$X \setminus \{(x,y)\}$.
Deuxième cas : $y \in]0, 1[$. Soient $U = X \cap \big(\mathbb{R}\times]y, +\infty[\big)$ et $V = X \cap \big\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ b < y\big\}$. Alors U et V sont des ouverts dans $X \setminus \{(x,y)\}$ non vides, disjoints et connexes tels que $X \setminus \{(x,y)\} = U \cup V$. D'après le théorème 4.2.1, U et V sont les composantes connexes de $X \setminus \{(x,y)\}$. On fait le même raisonnement pour les cas $x \in]0, 1[$ et $y \in]-1, 0[$.
3(ii). Soit $(x,y) \in A$. Si, par exemple, $(x,y) = (1,0)$, alors on a $X \setminus \{(x,y)\} = \big([-1, 1[\times\{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times [-1, 1]\big)$, donc $X \setminus \{(x,y)\}$ est connexe. De même pour les autres cas.
Réciproquement, si $(x,y) \notin A$, il résulte de 2 et de 3(i) que $X \setminus \{(x,y)\}$ n'est pas connexe. Donc, si $X \setminus \{(x,y)\}$ est connexe, alors $(x,y) \in A$.
4. Comme X est compact et connexe, si X est homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}$, alors cette partie serait un intervalle fermé borné non vide et non réduit à un point, donc de la forme $[a, b]$. Or, pour tout $t \in [a, b]$, $[a, b] \setminus \{t\}$ est ou bien connexe ou bien a deux composantes connexes. Comme $X \setminus \{(0,0)\}$ a quatre composantes connexes, alors X n'est pas homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$. Comme X est compact, s'il existe une application continue injective de X dans $\mathbb{R}$, alors X serait homéomorphe à son image qui est une partie de $\mathbb{R}$, ce qui est impossible.

Exercice 4.34. Soient X un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans X telle que les classes d'équivalence suivant $\mathcal{R}$ soient connexes. On note $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient.

1. Montrer que les composantes connexes de X sont saturées par $\mathcal{R}$.
2. Montrer que toute partie ouverte et fermée de X est saturée par $\mathcal{R}$.
3. Montrer que les composantes connexes de X sont les images réciproques par q des composantes connexes de $X/\mathcal{R}$.

Solution. 1. Soit C une composante connexe de X. Soit $x \in C$. Comme $q^{-1}\big(\{q(x)\}\big)$, la classe de x suivant $\mathcal{R}$, est connexe et on a $C \cap q^{-1}\big(\{q(x)\}\big) \neq \emptyset$, il résulte du théorème 4.2.1 que $q^{-1}\big(\{q(x)\}\big) \subset C$. Donc C est saturée par $\mathcal{R}$.
2. Soit A une partie à la fois ouverte et fermée de X. Soit $x \in A$. Comme $q^{-1}\big(\{q(x)\}\big)$ est connexe et on a $A \cap q^{-1}\big(\{q(x)\}\big) \neq \emptyset$, il résulte de la proposition 4.1.2 que $q^{-1}(\{q(x)\}) \subset A$. Donc A est saturée par $\mathcal{R}$.
3. Soit C une composante connexe de X. Alors $q(C)$ est une partie connexe de $X/\mathcal{R}$. D'après le théorème 4.2.1, il existe une composante connexe D de $X/\mathcal{R}$ telle que $q(C) \subset D$. De plus D est fermée dans $X/\mathcal{R}$. D'après le théorème 4.1.3, $q^{-1}(D)$ est une partie connexe de X. Comme on a $C \subset q^{-1}(q(C)) \subset q^{-1}(D)$, alors $C = q^{-1}(D)$.

Exercice 4.35. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $C_n = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x = \frac{1}{n} \text{et} \ -1 \leq y \leq 1\big\}$. Soit $X = \bigcup_{n\geq 1} C_n \cup \big(\{0\}\times]0, 1]\big) \cup \big(\{0\} \times [-1, 0[\big)$.

1. Déterminer les composantes connexes de X.
2. Vérifier que X est localement compact.
3. Montrer que dans X il y a des points z dont la composante connexe dans X est distincte de l'intersection des ensembles à la fois ouverts et fermés dans X qui contiennent z.

Solution. 1. Il est clair que pour tout $n \geq 1$, C_n est connexe et fermé dans X. Soit $U = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x > \frac{1}{2}\big\}$, alors U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et on a $U \cap X = C_1$, donc C_1 est aussi ouvert dans X. Soient $n \geq 2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{n+1} < \alpha < \frac{1}{n} < \beta < \frac{1}{n-1}$. Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \alpha < x < \beta\}$, alors U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et on a $U \cap X = C_n$, donc C_n est aussi ouvert dans X. Il résulte du théorème 4.2.1 que pour tout $n \geq 1$, C_n est une composante connexe de X.
Soient $A = \{0\}\times]0, 1]$ et $B = \{0\} \times [-1, 0[$. Il est clair que A et B sont connexes. Comme

$\{0\} \times [0,\,1]$ et $\{0\} \times [-1,\,0]$ sont fermés dans $\mathbb{R}^2$ et on a $\big(\{0\} \times [0,\,1]\big) \cap X = A$ et $\big(\{0\} \times [-1,\,0]\big) \cap X = B$, alors A et B sont fermés dans X. Soient $a = (0, y) \in A$ et C_a la composante connexe de a dans X. Alors, pour tout $n \geq 1$, $C_a \cap C_n = \emptyset$. Comme A est connexe, on a $A \subset C_a$. Si $C_a \cap B \neq \emptyset$, alors on a $C_a = A \cup (C_a \cap B)$, avec A et $C_a \cap B$ sont des fermés non vides disjoints de X, donc C_a n'est pas connexe, ce qui est impossible. Donc on a $C_a = A$. On fait le même raisonnement, et on obtient que B est aussi une composante connexe de X.
2. C'est clair.
3. Soit $a = (0, y) \in A$. Soit U une partie à la fois ouverte et fermée dans X contenant a. Comme A est connexe, Il résulte de la proposition 4.1.2 que l'on a $A \subset U$. Soit U' un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $U' \cap X = U$. Soient $\varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon,\ +\varepsilon[\times\{y\} \subset U'$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $U \cap C_n \neq \emptyset$, d'où pour tout $n \geq N$, on a $C_n \subset U$. Comme pour tout $t \in [-1,\,0[$, on a $(0, t) = \lim\limits_{n \to +\infty} \big(\frac{1}{n}, t\big)$ et U est fermée dans X, on en déduit que $B \subset U$. Comme pour tout $n \geq 1$, C_n est à la fois ouvert et fermé dans X, on en déduit qu'une partie U de X contenant a est à la fois ouverte et fermée dans X si et seulement s'il existe $N \geq 1$ tel que $U = X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{N-1} C_n$. Donc l'intersection des ensembles à la fois ouverts et fermés dans X qui contiennent a est l'ensemble $A \cup B$. Par contre, d'après 2, la composante connexe de a est A.

Exercice 4.36. Considérons dans $\mathbb{R}^2$ l'espace $X = \bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} D_q$, où $D_q = \{(q, y)\ ;\ y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que les D_q sont les composantes connexes de X et que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, D_q n'est pas ouvert dans X.
Solution. Il est clair que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, D_q est connexe. Soient $a = (q, y_0) \in D_q$ et C_a la composante connexe de a dans X. Alors on a $D_q \subset C_a$. Supposons que $C_a \cap D_{q'} \neq \emptyset$, avec $q' \neq q$, par exemple, $q' < q$. Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $q' < \alpha < q$ et $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x < \alpha\}$ et $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x > \alpha\}$. Alors on a $C_a = (C_a \cap U) \cup (C_a \cap V)$ et $C_a \cap U$, $C_a \cap V$ sont des ouverts disjoints non vides de X. Donc C_a n'est pas connexe, ce qui est impossible. Donc on a $C_a \cap D_{q'} = \emptyset$ pour tout $q' \neq q$, d'où $C_a = D_q$. Par conséquent, les D_q sont les composantes connexes de X. Si D_q est un ouvert de X, alors il existe un ouvert U' de $\mathbb{R}^2$ tel que $D_q = X \cap U'$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $]q - \varepsilon,\ q + \varepsilon[\times\{0\} \subset U'$. Soit $q' \in]q - \varepsilon,\ q + \varepsilon[\cap \mathbb{Q}$ tel que $q' \neq q$, alors $D_{q'} \cap U' \neq \emptyset$, d'où on a $D_q \cap D_{q'} \neq \emptyset$, ce qui est impossible. Par conséquent, pour tout $q \in \mathbb{Q}$, D_q n'est pas ouvert dans X.

Exercice 4.37. Soient X un espace connexe et A une partie connexe de X.

1. Montrer que si U est une partie à la fois ouverte et fermée dans $X \setminus A$, alors $A \cup U$ est connexe.
2. Montrer que si C est une composante connexe de $X \setminus A$, alors $X \setminus C$ est connexe.

Solution. 1. Soit $f : A \cup U \longrightarrow \{0,\,1\}$ une application continue. Comme A est connexe, alors $f_{|A}$ est constante. Soit $y \in \{0,\,1\}$ tel que pour tout $a \in A$, on ait $f(a) = y$. Soit $V = X \setminus (A \cup U) = (X \setminus A) \setminus U$. Alors V est à la fois ouverte et fermée dans $X \setminus A$. Pour tout $z \in V$, on pose $g(z) = y$ et pour tout $x \in A \cup U$, on pose $g(x) = f(x)$. Ainsi, on obtient une application de X dans $\{0,\,1\}$. Comme U est fermé dans $X \setminus A$, alors on a $U = \overline{U} \cap X \setminus A$, d'où $\overline{U} = U \cup (\overline{U} \cap A) \subset U \cup A$. Donc $g_{|\overline{U}} = f_{|\overline{U}}$ est continue. De même, comme V est aussi fermé dans $X \setminus A$, alors on a $\overline{V} \subset V \cup A$. Or pour tout $z \in V \cup A$, on a $g(z) = y$, donc $g_{|\overline{V}}$ est aussi continue. L'adhérence de A dans $U \cup A$ est $\overline{A} \cap (U \cup A)$, voir exercice 1.24. Comme f est continue, alors pour tout $x \in \overline{A} \cap (U \cup A)$, on a $f(x) = y$. Par conséquent, pour tout $x \in \overline{A}$, on a $g(x) = y$. Ainsi, $g_{|\overline{A}}$ est continue. Comme on a $X = \overline{A} \cup \overline{U} \cup \overline{V}$, alors g est continue, voir proposition 1.4.4. Or X est connexe, donc g est constante, d'où f est constante. Par conséquent, $A \cup U$ est connexe.

2. Soit $f : X \setminus C \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Comme A est connexe, alors $f_{|A}$ est constante. Donc il existe $y \in \{0, 1\}$ tel que pour tout $a \in A$, on ait $f(a) = y$. Si f n'est pas constante, alors $U = f^{-1}\big(\{1-y\}\big)$ est un ouvert et fermé non vide dans $X \setminus C$ et on a $U \subset X \setminus A$. D'après 1, $C \cup U$ est connexe, ce qui est impossible car C est une composante connexe. Par conséquent, f est constante, donc $X \setminus C$ est connexe.

Exercice 4.38. Soit X un espace topologique non vide. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) L'espace X connexe.

(ii) Pour tout recouvrement ouvert fini $(U_i)_{i\in I}$ de X, il existe un nombre entier $n \geq 1$ et des éléments $i_1, \dots, i_n$ de I tels que $X = \overset{n}{\underset{k=1}{\cup}} U_{i_k}$ et tels que pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on ait $i_k \neq i_{k+1}$ et $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \emptyset$.

Solution. Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soient U et V des ouverts non vides de X tels que $X = U \cup V$. On déduit de l'hypothèse que l'on a $U \cap V \neq \emptyset$. Donc X est connexe.
Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini de X. On peut supposer que pour tout $i \in I$, on ait $U \neq \emptyset$. On va raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments de I. Si I est réduit à un seul élément, l'implication est triviale. Supposons que l'implication est vraie si $\mathrm{card}(I) = p$ et montrons qu'alors l'implication est vraie si $\mathrm{card}(I) = p + 1$. Supposons donc que l'on a $\mathrm{card}(I) = p + 1$. Soit $\alpha \in I$. Comme X est connexe, alors il existe $\beta \in I$ tel que $\beta \neq \alpha$ et $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Soit $W_\alpha = U_\alpha \cup U_\beta$ et pour tout $i \in I \setminus \{\alpha, \beta\}$, soit $W_i = U_i$. Soit $J = I \setminus \{\beta\}$, alors $(W_j)_{j\in J}$ est un recouvrement ouvert fini de X et J est de cardinal p. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un entier $q \geq 1$ et des éléments $j_1, \dots, j_q$ de J tels que $X = \overset{q}{\underset{k=1}{\cup}} W_{j_k}$ et pour tout $k \in \{1, \dots, q-1\}$, on ait $j_k \neq j_{k+1}$ et $W_{j_k} \cap W_{j_{k+1}} \neq \emptyset$. Soit $k \in \{1, \dots, q\}$. Si k est tel que $j_k \neq \alpha$, alors on pose $i_k = j_k$ et on a $W_{j_k} = U_{j_k} = U_{i_k}$. Si k est tel que $j_k = \alpha$, alors on a $W_{j_{k-1}} = U_{j_{k-1}}$, $W_{j_{k+1}} = U_{j_{k+1}}$, $U_{j_{k-1}} \cap (U_\alpha \cup U_\beta) \neq \emptyset$ et $(U_\alpha \cup U_\beta) \cap U_{j_{k+1}} \neq \emptyset$. Supposons, par exemple, $U_{j_{k-1}} \cap U_\alpha \neq \emptyset$, les ouverts U_α et U_β jouent un rôle symétrique. Alors on pose $U_{i_k} = U_\alpha$. Ensuite, on distingue deux cas :
Premier cas : si $U_{j_{k+1}} \cap U_\beta \neq \emptyset$, alors on pose $U_{i_{k'}} = U_\beta$.
Deuxième cas : si $U_{j_{k+1}} \cap U_\beta = \emptyset$, alors on a $U_{j_{k+1}} \cap U_\alpha \neq \emptyset$. On pose alors $U_{i_{k'}} = U_\beta$ et $U_{i_{k''}} = U_\alpha$.
Ainsi, dans les deux cas, on trouve donc un nombre entier $n \geq 1$ et des éléments $i_1, \dots, i_n$ de I tels que $X = \overset{n}{\underset{k=1}{\cup}} U_{i_k}$ et tels que pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on ait $i_k \neq i_{k+1}$ et $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \emptyset$. Par conséquent, l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est vraie si $\mathrm{card}(I) = p + 1$. D'où le résultat.

Exercice 4.39. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Soient $A = \{(x, y) \in I \times I \,;\, x < y\}$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

1. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
2. Montrer que A est connexe. En déduire que $f'(I)$ est un intervalle. Autrement dit, f' a la propriété de la valeur intermédiaire.

Solution. 1. Soit $x \in I$, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x + \frac{1}{n} \in I$. D'où, pour tout $n \geq N$, on a $\big(x, x + \frac{1}{n}\big) \in A$ et $\dfrac{f\big(x + \frac{1}{n}\big) - f(x)}{\frac{1}{n}} = g\big(x, x + \frac{1}{n}\big) \in g(A)$. Comme f est dérivable en x, alors on a $f'(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{f\big(x + \frac{1}{n}\big) - f(x)}{\frac{1}{n}}$, d'où $f'(x) \in \overline{g(A)}$. Donc on a $f'(I) \subset \overline{g(A)}$. D'autre part, soit $(x, y) \in A$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe

$t \in]x,\, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(t)(y-x)$, d'où $g(x,y) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(t) \in f'(I)$. Donc on a $g(A) \subset f'(I)$.
2. Soient $(x,y), (x',y') \in A$ et $t \in]0,\, 1[$, on a $tx + (1-t)x' < ty + (1-t)y'$, donc pour tout $t \in [0,\, 1]$, on a $t(x,y) + (1-t)(x',y') \in A$. Or l'application $t \longmapsto t(x,y)+(1-t)(x',y')$ est continue de $[0,\, 1]$ dans A, donc A est connexe par arcs, d'où A est connexe. Comme g est continue, alors $g(A)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$. Il résulte de la proposition 4.1.3 que $f'(I)$ est un connexe de $\mathbb{R}$, donc $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 4.40. Soient X un espace éparpillé, $Y \subset X$ et A une partie compacte et ouverte dans Y. Montrer qu'il existe une partie B à la fois ouverte et fermée dans X telle que $A = Y \cap B$.
Solution. Comme A est ouvert dans Y, il existe un ouvert U dans X tel que $A = Y \cap U$. Or X est éparpillé, donc il existe une famille $(U_i)_{i\in I}$ de parties ouvertes et fermées dans X telle que $U = \underset{i\in I}{\cup} U_i$, d'où on a $A = \underset{i\in I}{\cup} Y \cap U_i$. Comme A est compact dans Y et pour tout $i \in I$, $Y \cap U_i$ est un ouvert de Y, alors il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $A = \underset{j\in J}{\cup} Y \cap U_j = Y \cap \big(\underset{j\in J}{\cup} U_j\big)$.
Soit $B = \underset{j\in J}{\cup} U_j$, alors B est une partie à la fois ouverte et fermée dans X telle que $A = Y \cap B$.

Exercice 4.41.

1. Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Montrer que X est totalement discontinu si et seulement si pour tous $x, y \in X$ tels que $x < y$, il existe $z \in \mathbb{R} \setminus X$ tel que $x < z < y$.
2. Montrer que tout sous-espace totalement discontinu de $\mathbb{R}$ est éparpillé.
3. En déduire que $\mathbb{Q}$ est éparpillé.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas extrêmement discontinu.

Solution. 1. Supposons d'abord que X est totalement discontinu, et soient $x, y \in X$ tels que $x < y$. Si pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $x < z < y$, on a $z \in X$, alors le segment $[x,\, y]$ est connexe non trivial et on a $[x,\, y] \subset X$, ce qui est impossible car X est totalement discontinu. Par conséquent, il existe $z \in \mathbb{R} \setminus X$ tel que $x < z < y$.
Réciproquement, supposons que pour tous $x, y \in X$ tels que $x < y$, il existe $z \in \mathbb{R} \setminus X$ tel que $x < z < y$. Soient $x \in X$ et C_x la composante connexe de x dans X. Soit $y \in X$ tel que $y \neq x$, par exemple $x < y$. Soit $z \in \mathbb{R} \setminus X$ tel que $x < z < y$. Soit $A =]-\infty,\, z] \cap X =]-\infty,\, z[\cap X$, alors A est une partie à la fois ouverte et fermée dans X telle que $x \in A$. Il résulte de la proposition 4.1.2 que l'on a $C_x \subset A$. Or $y \notin A$, donc $y \notin C_x$. Par conséquent, on a $C_x = \{x\}$. Autrement dit, X est totalement discontinu.
2. Soit X un sous-espace totalement discontinu de $\mathbb{R}$. Montrons que X est éparpillé. Soient $x \in X$ et U un ouvert de X contenant x. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < x < b$ et $]a,\, b[\cap X \subset U$. D'après 1, il existe $a', b' \in \mathbb{R} \setminus X$ tels que $a < a' < x < b' < b$. Alors $A = [a',\, b'] \cap X =]a',\, b'[\cap X$ est une partie à la fois ouverte et fermée dans X telle que $x \in A \subset U$. Par conséquent, X est éparpillé.
3. On a vu, remarque 4.2.1, que $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu de $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{Q}$ est éparpillé.
4. Soient $U =]-\infty,\, 0[\cap \mathbb{Q}$ et $V =]0,\, +\infty[\cap \mathbb{Q}$, alors U et V sont des ouverts disjoints dans $\mathbb{Q}$. Soient U' (*resp.* V') l'adhérence de U (*resp.* V) dans $\mathbb{Q}$, alors on a $U' = \overline{U} \cap \mathbb{Q}$ et $V' = \overline{V} \cap \mathbb{Q}$, voir exercice 1.24, d'où $0 \in U' \cap V'$. Par conséquent, $\mathbb{Q}$ n'est pas extrêmement discontinu.

Exercice 4.42. Soit X un espace extrêmement discontinu.

1. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans X convergente vers un point $x \in X$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n = x$.

2. En déduire que si X est un espace métrique compact et extrêmement discontinu, alors X est fini.

Solution. 1. Il suffit de montrer que l'ensemble $\{x_n \ ; \ n \geq 0\}$ est fini. Supposons le contraire, *i.e.* l'ensemble $\{x_n \ ; \ n \geq 0\}$ est infini. Quitte à prendre une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$, on peut supposer que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$, on ait $x_n \neq x_m$ et $x_n \neq x$. On va construire, par récurrence, une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ d'ouverts de X tels que pour tout $n \geq 0$, $x_n \in U_n$ et pour tout $n \geq 1$, on ait $U_n \cap \big(\overset{n-1}{\underset{i=0}{\cup}} U_i\big) = \emptyset$. Pour tout $n \geq 0$, soit $K_n = \{x_p \ ; \ p \geq n\} \cup \{x\}$. Comme $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x, alors K_n est une partie compacte de X. Comme $x_0 \notin K_1$, d'après la proposition 3.1.2, il existe deux ouverts disjoints U_0 et W_0 tels que $x_0 \in U_0$ et $K_1 \subset W_0$. Comme X est extrêmement discontinu, alors on a $\overline{U_0} \cap \overline{W_0} = \emptyset$, d'où on a $\overline{U_0} \cap K_1 = \emptyset$. De même, comme $x_1 \notin K_2$, il existe un ouvert U_1' de X tel que $x_1 \in U_1'$ et $\overline{U_1'} \cap K_2 = \emptyset$. Soit $U_1 = (X \setminus \overline{U_0}) \cap U_1'$, alors U_1 est un ouvert de X contenant x_1 et on a $\overline{U_1} \cap K_2 = \emptyset$ et $\overline{U_0} \cap \overline{U_1} = \emptyset$. Supposons que l'on a construit des $U_0, \ldots, U_{n-1}$ de X tels que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $x_i \in U_i$, $\overline{U_i} \cap K_{i+1} = \emptyset$ et $\overline{U_i} \cap \big(\overset{i-1}{\underset{j=0}{\cup}} \overline{U_j}\big) = \emptyset$. Comme $x_n \notin K_{n+1}$, il existe un ouvert U_n' de X tel que $x_n \in U_n'$ et $\overline{U_n'} \cap K_{n+1} = \emptyset$. Soit $U_n = \big(X \setminus \overline{\overset{n-1}{\underset{i=0}{\cup}} U_i}\big) \cap U_n'$, alors U_n est un ouvert de X contenant x_n et on a $\overline{U_n} \cap K_{n+1} = \emptyset$. Comme X est extrêmement discontinu, alors $\overline{\overset{n-1}{\underset{i=0}{\cup}} U_i}$ est ouvert dans X, donc $X \setminus \overline{\overset{n-1}{\underset{i=0}{\cup}} U_i}$ est fermé dans X. Or on a $U_n \subset \big(X \setminus \overline{\overset{n-1}{\underset{i=0}{\cup}} U_i}\big)$, d'où $\overline{U_n} \subset \big(X \setminus \overline{\overset{n-1}{\underset{i=0}{\cup}} U_i}\big)$. Autrement dit, on a $\overline{U_n} \cap \big(\overset{n-1}{\underset{i=0}{\cup}} \overline{U_i}\big) = \emptyset$. On pose $U = \underset{n\geq 0}{\cup} U_{2n}$ et $V = \underset{n\geq 0}{\cup} U_{2n+1}$, alors U et V sont des ouverts disjoints de X et on a $\{x_{2n} \ ; \ n \geq 0\} \subset U$, $\{x_{2n+1} \ ; \ n \geq 0\} \subset V$. Par conséquent, on a $x \in \overline{U} \cap \overline{V}$, ce qui est impossible. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n = x$.
2. Si X est infini, alors il existe une application injective de $\mathbb{N}$ dans X. Autrement dit, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X telle que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \neq m$, on ait $x_n \neq x_m$. Comme X est extrêmement discontinu, il résulte de 1 que cette suite n'admet aucune sous-suite convergente, ce qui est impossible car X est métrique compact. Donc X est bien fini.

Exercice 4.43. Donner un exemple d'un espace métrique compact éparpillé qui n'est pas extrêmement discontinu.

Solution. L'espace de Cantor $\mathcal{C}$ est métrique compact infini et éparpillé, voir proposition 4.5.1 et théorème 4.2.2. D'après l'exercice précédent, tout espace métrique compact infini n'est pas extrêmement discontinu. Donc $\mathcal{C}$ est un espace métrique compact éparpillé non extrêmement discontinu.

Exercice 4.44. Soient X un espace extrêmement discontinu et $Y \subset X$.

1. Montrer que si Y est un ouvert de X, alors Y est extrêmement discontinu.
2. Montrer que si Y est dense dans X, alors Y est extrêmement discontinu.

Solution. 1. Supposons que Y est un ouvert de X. Soient U et V deux ouverts disjoints dans Y, alors U et V sont aussi des ouverts disjoints dans X. Comme X est extrêmement discontinu, alors on a $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, d'où $(\overline{U} \cap Y) \cap (\overline{V} \cap Y) = \emptyset$. Or $\overline{U} \cap Y$ et $\overline{V} \cap Y$ sont respectivement les adhérences de U et V dans Y, voir exercice 1.24, donc Y est un espace extrêmement discontinu.
2. On suppose que Y est une partie dense dans X. Soient U et V deux ouverts disjoints dans Y, alors il existe des ouverts U' et V' dans X tels que $U = Y \cap U'$ et $V = Y \cap V'$. On a $U \cap V = \emptyset$, d'où $Y \cap (U' \cap V') = \emptyset$. Comme $U' \cap V'$ est un ouvert de X et Y est dense dans X, on déduit de la proposition 1.2.4 que l'on a $U' \cap V' = \emptyset$. Comme X est extrêmement discontinu, alors

on a $\overline{U'} \cap \overline{V'} = \emptyset$, d'où $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Donc on a $(\overline{U} \cap Y) \cap (\overline{V} \cap Y) = \emptyset$. Or $\overline{U} \cap Y$ et $\overline{V} \cap Y$ sont respectivement les adhérences de U et V dans Y, voir exercice 1.24, donc Y est un espace extrêmement discontinu.

Exercice 4.45. Soit X un espace complètement régulier.

1. Montrer que la compactification de Stone-Čech $\beta(X)$ de X est extrêmement discontinu si et seulement si X est extrêmement discontinu.
2. Montrer que si X est un espace discret infini, alors $\beta(X)$ est extrêmement discontinu et n'est pas métrisable.
3. En déduire que $\beta(\mathbb{N})$ est un espace compact, séparable, extrêmement discontinu et n'est pas métrisable.

Solution. 1. Supposons que $\beta(X)$ est extrêmement discontinu. Comme X est dense dans $\beta(X)$, il résulte de l'exercice précédent que X est extrêmement discontinu.
Réciproquement, supposons que X est extrêmement discontinu. Soit U un ouvert de $\beta(X)$. Comme X est dense dans $\beta(X)$, d'après l'exercice 1.26, on a $\overline{U} = \overline{U \cap X}$. L'adhérence de $U \cap X$ dans X est $X \cap \overline{U \cap X}$, voir exercice 1.24. Comme X est extrêmement discontinu, alors $X \cap \overline{U \cap X}$ est à la fois ouvert et fermé dans X. D'après la proposition 3.5.1, $\overline{X \cap \overline{U \cap X}}$ est à la fois ouvert et fermé dans $\beta(X)$. On a :

$$\overline{U} = \overline{U \cap X} \subset \overline{\overline{U} \cap X} = \overline{\overline{U \cap X} \cap X} \subset \overline{\overline{U \cap X}} = \overline{U \cap X} = \overline{U}$$

d'où on a $\overline{U} = \overline{X \cap \overline{U \cap X}}$. Par conséquent, $\overline{U}$ est ouvert dans $\beta(X)$. Donc $\beta(X)$ est extrêmement discontinu.
2. Si X est discret, alors X est complètement régulier et extrêmement discontinu. Il résulte de 1 que $\beta(X)$ est extrêmement discontinu. Si de plus X est infini, on déduit de l'exercice 4.42 que $\beta(X)$ n'est pas métrisable.
3. Il résulte de 2 que $\beta(\mathbb{N})$ est extrêmement discontinu non métrisable. Puisque $\mathbb{N}$ est dénombrable et dense dans $\beta(\mathbb{N})$, alors $\beta(\mathbb{N})$ est séparable.

Exercice 4.46. Soit X un espace topologique séparé. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) X est extrêmement discontinu.

(ii) Pour tout sous-ensemble dense Y dans X et pour toute fonction continue $f : Y \longrightarrow [0,\, 1]$, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [0,\, 1]$ prolongeant f.

(iii) Pour tout ouvert U de X et pour toute fonction continue $f : U \longrightarrow [0,\, 1]$, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [0,\, 1]$ prolongeant f.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient Y un sous-ensemble dense dans X et $f : X \longrightarrow [0,\, 1]$ une fonction continue. Pour montrer qu'il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [0,\, 1]$ prolongeant f, d'après le théorème 1.9.3, il suffit de montrer que deux sous-ensembles de Y complètement séparés dans Y sont aussi complètement séparés dans X. Soient A et B deux sous-ensembles de Y complètement séparés dans Y. Donc il existe une fonction continue $h : Y \longrightarrow [0,\, 1]$ telle que $h_{|_A} = 0$ et $h_{|_B} = 1$. Soient $U_1 = h^{-1}\big([0,\, \frac{1}{3}[\big)$ et $U_2 = h^{-1}\big(]\frac{2}{3},\, 1]\big)$. Alors U_1 et U_2 sont deux sous-ensembles ouverts disjoints dans Y tels que $A \subset U_1$ et $B \subset U_2$. Soient V_1 et V_2 deux ouverts dans X tels que $U_1 = Y \cap V_1$ et $U_2 = Y \cap V_2$, d'où $Y \cap V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Comme Y est dense dans X, on déduit de la proposition 1.2.4 que l'on a $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Comme X est extrêmement discontinu, d'après la proposition 4.2.3, $\overline{V_1}$ et $\overline{V_2}$ sont disjoints et à la fois ouverts

et fermés dans X. Soit $g : X \longrightarrow [0,\, 1]$ définie par $g(x) = 0$ pour tout $x \in \overline{V_1}$ et $g(x) = 1$ pour tout $x \in X \setminus \overline{V_1}$. Alors g est une fonction continue et pour tout $x \in A$, on ait $g(x) = 0$ et pour tout $x \in B$, on ait $g(x) = 1$. Donc A et B sont complètement séparés dans X.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soient U un ouvert de X et $f : U \longrightarrow [0,\, 1]$ une fonction continue. Soit $Y = U \cup \big(X \setminus \overline{U}\,\big)$. Alors Y est un sous-ensemble dense dans X. Soit $\widetilde{f} : Y \longrightarrow [0,\, 1]$ définie par $\widetilde{f}(x) = f(x)$, pour tout $x \in U$, et $\widetilde{f}(x) = 0$, pour tout $x \in X \setminus \overline{U}$. Alors $\widetilde{f}$ est continue, voir proposition 1.4.4. Par hypothèse, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [0,\, 1]$ prolongeant $\widetilde{f}$. En particulier, g prolonge f.
Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soient U et V deux ouverts disjoints dans X. Soit $f : U \cup V \longrightarrow [0,\, 1]$ définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in U$ et $g(x) = 1$ pour tout $x \in V$. Alors f est une fonction continue. Par hypothèse, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [0,\, 1]$ prolongeant f. Soient $F_1 = g^{-1}\big([0,\, \frac{1}{3}]\big)$ et $F_2 = g^{-1}\big([\frac{2}{3},\, 1]\big)$. Alors F_1 et F_2 sont deux sous-ensembles fermés disjoints dans X tels que $U \subset F_1$ et $V \subset F_2$, d'où on a $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Donc X est extrêmement discontinu.

Chapitre 5

ESPACES FONCTIONNELS

Lemme. Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique, $f \in Y^X$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans Y^X. Soit d' une distance sur Y uniformément équivalente à d. Alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f pour la distance d si et seulement si elle converge uniformément vers f pour d'.

Démonstration. Puisque d et d' sont uniformément équivalentes, alors on a :
$(*)$ Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $y, z \in Y$ vérifiant $d(y, z) < \eta$, on ait $d'(y, z) < \varepsilon$.
$(**)$ Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $y, z \in Y$ vérifiant $d'(y, z) < \alpha$, on ait $d(y, z) < \varepsilon$.
Supposons d'abord que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f pour la distance d. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$, on ait $d(f_n(x), f(x)) < \eta$. En combinant ceci avec la propriété $(*)$, on obtient que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$, on a $d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Donc $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f pour d'.
Réciproquement, supposons que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f pour d'. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$, on ait $d'(f_n(x), f(x)) < \alpha$. En combinant ceci avec la propriété $(**)$, on obtient que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$, on a $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Donc $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f pour d. ■

Proposition. Soient $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

1. Pour tout $n \geq 0$, l'application f_n est croissante, *i.e.* pour tous $x, y \in [a, b]$ tels que $x \leq y$, on ait $f_n(x) \leq f_n(y)$.
2. La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une application continue f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f.

Démonstration. Comme pour tous $n \geq 0$ et $x, y \in [a, b]$ tels que $x \leq y$, on ait $f_n(x) \leq f_n(y)$ et comme la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f, alors on a $f(x) \leq f(y)$. Donc f est croissante. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue et $[a, b]$ est compact, alors f est uniformément continue, donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tous $x, y \in [a, b]$ vérifiant $|x - y| \leq \frac{b-a}{k}$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, d'où $f(x) \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon$. Soit $x_p = a + (b - a)\frac{p}{k}$, avec $p \in \{0, \ldots, k\}$. Comme on a $f(x_p) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_p)$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $p \in \{0, \ldots, k\}$, on ait $|f_n(x_p) - f(x_p)| \leq \varepsilon$. D'où on a $f(x_p) - \varepsilon \leq f_n(x_p) \leq f(x_p) + \varepsilon$. Soit $n \geq N$.

Soit $x \in [a, b]$, alors il existe $p \in \{1, \dots, k\}$ tel que $x_{p-1} \leq x \leq x_p$. Comme f_n est croissante, alors on a $f_n(x_{p-1}) \leq f_n(x) \leq f_n(x_p)$. D'où on a :

$$f(x_{p-1}) - \varepsilon \leq f_n(x_{p-1}) \leq f_n(x) \leq f_n(x_p) \leq f(x_p) + \varepsilon \,.$$

Comme on a $|x - x_{p-1}| \leq \frac{b-a}{k}$ et $|x - x_p| \leq \frac{b-a}{k}$, alors on a $f(x_{p-1}) \leq f(x) \leq f(x_{p-1}) + \varepsilon$ et $f(x) \leq f(x_p) \leq f(x) + \varepsilon$. D'où on a :

$$f(x) - 2\varepsilon \leq f(x_{p-1}) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x_p) + \varepsilon \leq f(x) + 2\varepsilon \,.$$

Donc on a $|f(x) - f_n(x)| \leq 2\varepsilon$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in [a, b]$, on ait $|f(x) - f_n(x)| \leq 2\varepsilon$. Autrement dit, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f. ∎

Proposition. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que

1. La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
2. La suite $(f'_n)_{n\geq 0}$ est uniformément convergente vers une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Alors la fonction f est dérivable sur I et sa dérivée est g.

Démonstration. Soit $a \in I$ et pour tout $x \in J = I \setminus \{a\}$, soient :

$$h_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \,.$$

La suite $(h_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur J vers la fonction h. La fonction h_n admet en a la limite $f'_n(a)$ et la suite $(f'_n(a))_{n\geq 0}$ converge vers $g(a)$. Pour avoir le résultat, d'après le théorème 5.2.4, il suffit de montrer que la suite $(h_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur J vers la fonction h. Soient $x \in J$ et $p, n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $t \in I$ tel que :

$$f_n(x) - f_p(x) - \big(f_n(a) - f_p(a)\big) = (x - a)\big(f'_n(t) - f'_p(t)\big) \,.$$

D'où on a :

$$h_n(x) - h_p(x) = f'_n(t) - f'_p(t) = f'_n(t) - g(t) + g(t) - f'_p(t) \,.$$

Comme la suite $(f'_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I vers g, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, p \geq N$ et pour tout $t \in I$, on ait $|f'_n(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|g(t) - f'_p(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, pour tout $n, p \geq N$ et pour tout $x \in J$, on a $|h_n(x) - h_p(x)| < \varepsilon$. En faisant tendre p vers l'infini, on obtient que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in J$, on a $|h_n(x) - h(x)| \leq \varepsilon$. Autrement dit, la suite $(h_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur J vers la fonction h. ∎

Proposition. Soient X un espace topologique, (Y, d) un espace métrique et $\mathcal{H}$ une partie de Y^X. Alors $\mathcal{H}$ est équicontinue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U de $X \times X$ contenant la diagonale $\Delta = \{(x, x) \;;\; x \in X\}$ et telle que, pour tout $(x, x') \in U$ et pour tout $f \in \mathcal{H}$, on ait $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et U un ouvert de $X \times X$ contenant la diagonale Δ et telle que, pour tout $(x, x') \in U$ et pour tout $f \in \mathcal{H}$, on ait $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Soit $x_0 \in X$. Comme on a $(x_0, x_0) \in \Delta \subset U$ et U est un ouvert, alors il existe un voisinage ouvert V_{x_0} de x_0 dans X tel que $\{x_0\} \times V_{x_0} \subset U$. D'où, pour tout $x \in V_{x_0}$ et pour tout $f \in \mathcal{H}$, on a $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$. Donc $\mathcal{H}$ est équicontinue en x_0. Par conséquent, $\mathcal{H}$ est équicontinue.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{H}$ est équicontinue. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\Omega = \big\{(x,x') \in X \times X \ ; \ d(f(x),f(x')) < \varepsilon \ \text{ pour tout } \ f \in \mathcal{H}\big\}$ et $U = \overset{\circ}{\Omega}$. Pour avoir le résultat, il suffit de montrer que U contient la diagonale Δ. Soit $x \in X$. Comme $\mathcal{H}$ est équicontinue en x, alors il existe un voisinage ouvert V_x de x dans X tel que pour tout $z \in V_x$ et pour tout $f \in \mathcal{H}$, on ait $d(f(x),f(z)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors pour tout $(z,z') \in V_x \times V_x$ et pour tout $f \in \mathcal{H}$, on a $d(f(z),f(z')) \leq d(f(z),f(x)) + d(f(x),f(z')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ainsi on a $V_x \times V_x \subset \Omega$. Or $V_x \times V_x$ est un ouvert de $X \times X$, donc $V_x \times V_x \subset \overset{\circ}{\Omega} = U$, d'où on a $(x,x) \subset U$. Par conséquent, on a $\Delta \subset U$. ■

Lemme. Il existe une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de fonctions polynômiales à une variable, à coefficients réels convergeant uniformément sur $[0,\, 1]$ vers la fonction racine carrée $t \longmapsto \sqrt{t}$. De plus, pour tout $n \geq 0$, on a $P_n(0) = 0$.

Démonstration. On considère la suite de fonctions polynômiales à coefficients réels $(P_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence par :

$$\begin{cases} P_0 = 0\,, \\ P_{n+1}(x) \ = \ P_n(x) + \frac{1}{2}\Big(x - (P_n(x))^2\Big)\,. \end{cases}$$

Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,\, 1]$, on a :

$$(*) \quad 0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x} \quad \text{ et } \quad (**) \quad 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}\,.$$

L'inégalité $(*)$ est vraie à l'ordre $n = 0$ car $P_0 = 0$. Supposons que l'inégalité $(*)$ est vraie à l'ordre n, et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$, d'où $x - (P_n(x))^2 \geq 0$. Donc on a $P_{n+1}(x) \geq P_n(x) \geq 0$. D'autre part, on a :

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{1}{2}\Big(x - (P_n(x))^2\Big) = \big[\sqrt{x} - P_n(x)\big]\big[1 - \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_n(x)\right)\big]\,.$$

Or on a $P_n(x) \leq \sqrt{x} \leq 1$, d'où $\big[1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_n(x)\right)\big] \geq 0$. Par conséquent, on a $P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$. On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{x} \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}} + P_n(x) \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{x}\,(2 + n\sqrt{x}\,) \leq 2\sqrt{x} + (2 + n\sqrt{x}\,)P_n(x) \\ &\Longleftrightarrow \quad nx \leq (2 + n\sqrt{x}\,)P_n(x)\,. \end{aligned}$$

Appelons $(***)$ l'inégalité $nx \leq (2 + n\sqrt{x}\,)P_n(x)$. L'inégalité $(***)$ est vraie à l'ordre $n = 0$. Supposons que l'inégalité $(***)$ est vraie à l'ordre n, et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a :

$$\begin{aligned} \big[2 + (n+1)\sqrt{x}\,\big]P_{n+1}(x) \ &= \ \big[2 + n\sqrt{x} + \sqrt{x}\,\big]\Big[P_n(x) + \frac{1}{2}\Big(x - (P_n(x))^2\Big)\Big] \\ &= \ (2 + n\sqrt{x}\,)P_n(x) + \sqrt{x}P_n(x) + x - (P_n(x))^2 + \alpha_n(x)\,. \end{aligned}$$

Avec $\alpha_n(x) = (n\sqrt{x} + \sqrt{x}\,)\frac{1}{2}\Big(x - (P_n(x))^2\Big) \geq 0$. Comme on a $(2 + n\sqrt{x}\,)P_n(x) \geq nx$ et $\sqrt{x} \geq P_n(x) \geq 0$, alors on a $[2 + (n+1)\sqrt{x}\,]P_{n+1}(x) \geq nx + (P_n(x))^2 + x - (P_n(x))^2 = (n+1)x$.

Donc l'inégalité $(***)$ est vraie à l'ordre $n+1$.
Comme on a $0 \leq n\sqrt{x} \leq 2+n\sqrt{x}$, il résulte de l'inégalité $(**)$ que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0,\,1]$, on a $|\sqrt{x} - P_n(x)| \leq \frac{2}{n}$. Par conséquent, la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0,\,1]$ vers la fonction racine carrée. ■

Lemme. Soient X un espace compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $(C(X,\,\mathbb{R}),\, D_\infty)$. Alors on a :

1. $\overline{\mathcal{A}}$ est une sous-algèbre de $C(X,\,\mathbb{R})$.
2. Pour tout $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, on a $\sup(f,g), \inf(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}$.

Démonstration. 1. Soient $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors il existe des suites $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{A}$ convergeant respectivement vers f et g. Comme $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $C(X,\,\mathbb{R})$, alors pour tout $n \geq 0$, on a $f_n + \lambda g_n,\; f_n g_n \in \mathcal{A}$. D'autre part, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in X$, on a :

$$\begin{aligned} |f_n(x) + \lambda g_n(x) - (f(x) + \lambda g(x))| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |\lambda||g_n(x) - g(x)| \\ &\leq D_\infty(f_n, f) + |\lambda| D_\infty(g_n, g)\,. \end{aligned}$$

D'où on a $D_\infty(f_n+\lambda g_n, f+\lambda g) \leq D_\infty(f_n, f) + |\lambda| D_\infty(g_n, g)$. Par conséquent, la suite $(f_n+\lambda g_n)_{n\geq 0}$ converge vers $f+\lambda g$, donc on a $f+\lambda g \in \overline{\mathcal{A}}$.
Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in X$, on a :

$$\begin{aligned} f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x) &= f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x) + f(x)g_n(x) - f(x)g(x) \\ &= (f_n(x) - f(x))g_n(x) + f(x)(g_n(x) - g(x))\,. \end{aligned}$$

D'où on a :

$$\begin{aligned} D_\infty(f_n g_n, fg) &\leq D_\infty(f_n, f)D_\infty(g_n, 0) + D_\infty(f, 0)D_\infty(g_n, g) \\ &\leq D_\infty(f_n, f)\big[D_\infty(g_n, g) + D_\infty(g, 0)\big] + D_\infty(f, 0)D_\infty(g_n, g)\,. \end{aligned}$$

Donc la suite $(f_n g_n)_{n\geq 0}$ converge vers fg, d'où $fg \in \overline{\mathcal{A}}$. Par conséquent, $\overline{\mathcal{A}}$ est une sous-algèbre de $C(X,\,\mathbb{R})$.
2. Puisque l'on a $\sup(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\inf(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$, il suffit de montrer que pour tout $f \in \overline{\mathcal{A}}$, on a $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$, où $|f|$ est la fonction $x \longmapsto |f(x)|$. Notons que pour tout $x \in X$, on a $|f(x)| = \sqrt{(f(x))^2}$. Soit $f \in \overline{\mathcal{A}}$. Comme X est compact et f est continue, alors $\sup\limits_{x\in X} |f(x)|$ est fini, donc il existe $a > 0$ tel que $a \sup\limits_{x\in X} |f(x)| \leq 1$. Pour tout $t \in [0,\,1]$, soit $g(t) = \sqrt{t}$ et pour tout $x \in X$, soit $h(x) = a^2(f(x))^2$, alors $h \in \overline{\mathcal{A}}$ et h est une fonction continue de X dans $[0,\,1]$. D'après le lemme précédent, la suite $(P_n \circ h)_{n\geq 0}$ converge vers $g \circ h$ dans $(C(X,\,\mathbb{R}),\, D_\infty)$. Comme on a $h \in \overline{\mathcal{A}}$ et $\overline{\mathcal{A}}$ est stable par le produit, alors pour tout $n > 0$, on a $h^n \in \overline{\mathcal{A}}$. Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est aussi un sous-espace vectoriel de $C(X,\,\mathbb{R})$, alors pour toute fonction polynômiale $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $P(0) = 0$, on a $P \circ h \in \overline{\mathcal{A}}$, donc, pour tout $n \geq 0$, on a $P_n \circ h \in \overline{\mathcal{A}}$. Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est fermée, alors on a $g \circ h \in \overline{\mathcal{A}}$. Or on a $g \circ h = a|f|$, d'où $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$. ■

Théorème. Soient X un espace localement compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $C_0(X)$ telle que :

1. Pour tout $x \in X$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$.
2. $\mathcal{A}$ sépare les points de X, *i.e.* pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

3. Pour tout $f \in \mathcal{A}$, le conjugué $\overline{f}$ de f appartient à $\mathcal{A}$.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $(C_0(X),\, D_\infty)$.

Démonstration. Soient X_∞ le compactifié d'Alexandroff de X. Pour tout $f \in C_0(X)$, soit :

$$f_\infty(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in X\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = \infty\,. \end{cases}$$

Alors $f_\infty \in C(X_\infty)$. Réciproquement, si $g \in C(X_\infty)$ telle que $g(\infty) = 0$, alors $g_{|X} \in C_0(X)$, voir remarque 3.6.1. Soit $\mathcal{A}_\infty = \{f_\infty + \lambda \;;\; f \in \mathcal{A}\,,\, \lambda \in \mathbb{K}\}$, alors $\mathcal{A}_\infty$ est sous-algèbre de $C(X_\infty)$ vérifiant les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass. Donc $\mathcal{A}_\infty$ est dense dans $(C(X_\infty),\, D_\infty)$. Soient $f \in C_0(X)$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $g \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\sup\limits_{x \in X_\infty} |f_\infty(x) - (g_\infty(x) + \lambda)| = D_\infty(f_\infty, g_\infty + \lambda) < \frac{\varepsilon}{2}$. En particulier, lorsque $x = \infty$, on a $|\lambda| = |f_\infty(\infty) - (g_\infty(\infty) + \lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, pour tout $x \in X$, on a $|f(x) - g(x)| \leq |f_\infty(x) - (g_\infty(x) + \lambda)| + |\lambda| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. D'où on a $D_\infty(f, g) \leq \varepsilon$. Donc $\mathcal{A}$ est dense dans $(C_0(X),\, D_\infty)$. ■

Supplément d'exercices

Exercice 5.16. Soit $f : [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $f = 0$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$.

Solution. Il est clair que si $f = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$.

Réciproquement, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$. Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (C([0,\, 1], \mathbb{R}),\, D_\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & g & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt \end{array}$$

Alors φ est une application continue telle que pour toute fonction polynômiale P, on ait $\varphi(P) = 0$. D'après le théorème de Stone–Weierstrass, l'ensemble des fonctions polynômiales est dense dans $(C([0,\, 1], \mathbb{R}),\, D_\infty)$, donc on a $\varphi = 0$, d'où $\displaystyle\int_0^1 (f(t))^2 dt = \varphi(f) = 0$. Puisque l'application $t \longmapsto (f(t))^2$ est continue et positive, on en déduit que pour tout $t \in [0,\, 1]$, on a $(f(t))^2 = 0$, d'où $f = 0$.

Exercice 5.17. Soient $(X,\, d)$ un espace métrique compact et $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-ensembles fermés non vides de X. On munit $\mathcal{H}$ de la distance de Hausdorff D, où pour tous $A, B \in \mathcal{H}$, on a $D(A, B) = \max(\rho(A, B), \rho(B, A))$ et $\rho(A, B) = \sup\limits_{x \in A} d(x, B)$. D'après l'exercice 3.53, $(\mathcal{H},\, D)$ est un espace métrique compact. Pour tout $A \in \mathcal{H}$, et pour tout $x \in X$, soit $f_A(x) = d(x, A)$. Alors on a $f_A \in C(X, \mathbb{R})$. On munit $C(X, \mathbb{R})$ de la distance de la convergence uniforme D_∞. Montrer que l'application $A \longmapsto f_A$ est isométrique de $(\mathcal{H},\, D)$ dans $(C(X, \mathbb{R}),\, D_\infty)$. En déduire que $\{f_A \;;\; A \in \mathcal{H}\}$ est une partie compacte de $(C(X, \mathbb{R}),\, D_\infty)$.

Solution. Soient $A, B \in \mathcal{H}$. On a vu, exercice 3.53, que pour tout $x \in X$, on a $d(x, B) \leq d(x, A) + \rho(A, B)$, d'où on a $f_B(x) \leq f_A(x) + D(A, B)$. De même, on a $f_A(x) \leq f_B(x) + D(B, A) = f_B(x) + D(A, B)$, donc on a $|f_A(x) - f_B(x)| \leq D(A, B)$. Par conséquent, on a $D_\infty(f_A, f_B) \leq D(A, B)$. Soit $a \in A$, alors on a $|f_A(a) - f_B(a)| = |d(a, A) - d(a, B)| = d(a, B)$, d'où $d(a, B) \leq D_\infty(f_A, f_B)$. Donc on a $\rho(A, B) \leq D_\infty(f_A, f_B)$. De même, on a $\rho(B, A) \leq D_\infty(f_B, f_A) = D_\infty(f_A, f_B)$. On en déduit $D(A,B) \leq D_\infty(f_A, f_B)$. Par conséquent, l'application $A \longmapsto f_A$ est isométrique. Comme $(\mathcal{H},\, D)$ est compact, alors $\{f_A \;;\; A \in \mathcal{H}\}$ est une partie compacte de $(C(X,\,\mathbb{R}),\, D_\infty)$.

Exercice 5.18. Sur l'intervalle $[0,\,1]$, on considère la suite de polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n\geq 0}$ définis par récurrence par :

$$\begin{cases} P_0 = 0\,, \\ P_{n+1}(x) \;=\; P_n(x) + \frac{1}{3}\left(x - (P_n(x))^3\right)\,. \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$ et que pour tout $x \in [0,\,1]$, on a :

$$(*) \quad 0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq x^{\frac{1}{3}}\,.$$

2. En déduire, en utilisant le théorème de Dini, que la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0,\,1]$ vers la fonction racine cubique.
3. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,\,1]$, on a :

$$0 \leq x^{\frac{1}{3}} - P_n(x) \leq \frac{3\,x^{\frac{1}{3}}}{3 + n\,x^{\frac{2}{3}}}\,.$$

4. En déduire, sans utiliser le théorème de Dini, que $(P_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0,\,1]$ vers la fonction racine cubique.

Solution. 1. Vérifions que l'inégalité $(*)$ est vraie à l'ordre $n = 0$. On a $P_0(x) = 0$, $P_1(x) = \frac{x}{3} \geq P_0(x)$, et $P_1(x) \leq x^{\frac{1}{3}} \iff \frac{x^3}{27} \leq x \iff x\big(1 - \frac{x^2}{27}\big) \geq 0$. Donc on a bien $P_1(x) \leq x^{\frac{1}{3}}$ pour tout $x \in [0,\,1]$. Supposons que l'inégalité $(*)$ est vraie à l'ordre n, et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a $P_{n+2}(x) \;=\; P_{n+1}(x) + \frac{1}{3}(x - (P_{n+1}(x))^3)$ et $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq x^{\frac{1}{3}}$, d'où $(P_{n+1}(x))^3 \leq x$, donc on a $x - (P_{n+1}(x))^3 \geq 0$. Par conséquent, on a $P_{n+2}(x) \geq P_{n+1}(x) \geq P_n(x) \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{3}} - P_{n+2}(x) \;&=\; x^{\frac{1}{3}} - P_{n+1}(x) - \tfrac{1}{3}\left[x - (P_{n+1}(x))^3\right] \\ &=\; \big[x^{\frac{1}{3}} - P_{n+1}(x)\big]\big[1 - \tfrac{1}{3}\big(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}P_{n+1}(x) + (P_{n+1}(x))^2\big)\big]\,. \end{aligned}$$

On a $0 \leq \max\left(x^{\frac{2}{3}}, x^{\frac{1}{3}}P_{n+1}(x), (P_{n+1}(x))^2\right) \leq 1$, d'où $\frac{1}{3}\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}P_{n+1}(x) + (P_{n+1}(x))^2\right) \leq 1$. Or on a aussi $\big(x^{\frac{1}{3}} - P_{n+1}(x)\big) \geq 0$, d'où $x^{\frac{1}{3}} - P_{n+2}(x) \geq 0$. Par conséquent, l'inégalité $(*)$ est vraie à l'ordre $n+1$.

2. Pour tout $x \in [0,\,1]$, la suite de réels $(P_n(x))_{n\geq 0}$ est croissante et majorée, par $x^{\frac{1}{3}}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x)$ existe dans $[0,\,1]$. Soit $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x)$. De l'équation $P_{n+1}(x) \;=\; P_n(x) + \frac{1}{3}\left(x - (P_n(x))^3\right)$, on déduit que l'on a $f(x) = f(x) + \frac{1}{3}\left(x - f(x)^3\right)$, donc on a $f(x)^3 = x$, d'où $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Donc la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction continue f. Or $(P_n)_{n\geq 0}$ est croissante, d'après le théorème de Dini, $(P_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f.

3. Pour tout $n \geq 0$ et que pour tout $x \in [0,\,1]$, on a :

$$x^{\frac{1}{3}} - P_n(x) \leq \frac{3\,x^{\frac{1}{3}}}{3 + n\,x^{\frac{2}{3}}} \iff nx \leq \big(3 + n\,x^{\frac{2}{3}}\big)P_n(x)\,.$$

Appelons I_n la dernière inégalité. L'inégalité est vraie si $n = 0$. Supposons que I_n est vraie pour certain n et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a :

$$\begin{aligned}\left[3 + (n+1)x^{\frac{2}{3}}\right] P_{n+1}(x) &= \left(3 + nx^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)\left[P_n(x) + \tfrac{1}{3}\left(x - (P_n(x))^3\right)\right] \\ &= \left(3 + nx^{\frac{2}{3}}\right) P_n(x) + x^{\frac{2}{3}} P_n(x) + x - (P_n(x))^3 + \alpha_n(x)\,.\end{aligned}$$

Avec $\alpha_n(x) = \left(nx^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)\left[\frac{1}{3}\left(x - (P_n(x))^3\right)\right] \geq 0$, donc on a :

$$\begin{aligned}\left[3 + (n+1)x^{\frac{2}{3}}\right] P_{n+1}(x) &\geq nx + x^{\frac{2}{3}} P_n(x) + x - (P_n(x))^3 \\ &\geq nx + (P_n(x))^3 + x - (P_n(x))^3 \\ &= (n+1)x\,.\end{aligned}$$

Donc l'inégalité I_{n+1} est vraie.
4. La suite $(P_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0,\ 1]$ vers la fonction racine cubique si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in [0,\ 1]$, on ait $|x^{\frac{1}{3}} - P_n| \leq \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors la suite de réels $\left(\dfrac{27}{27 + n\varepsilon^2}\right)_{n\geq 0}$ converge vers 0, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\dfrac{27}{27 + n\varepsilon^2} \leq \varepsilon$. Pour tout $x \in \left[0,\ \frac{1}{27}\varepsilon^3\right]$, on a $3x^{\frac{1}{3}} \leq \varepsilon$, donc pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in \left[0,\ \frac{1}{27}\varepsilon^3\right]$, on a $\left|x^{\frac{1}{3}} - P_n\right| \leq 3x^{\frac{1}{3}} \leq \varepsilon$. Pour $x \in \left[\frac{1}{27}\varepsilon^3,\ 1\right]$, on a $x^{\frac{2}{3}} \geq \dfrac{\varepsilon^2}{9}$, d'où $n\, x^{\frac{2}{3}} \geq \dfrac{n\varepsilon^2}{9}$ et $3 + n\, x^{\frac{2}{3}} \geq \dfrac{27 + n\varepsilon^2}{9}$. Donc on a $\left|x^{\frac{1}{3}} - P_n(x)\right| \leq \dfrac{27x^{\frac{1}{3}}}{27 + n\varepsilon^2} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Par conséquent, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in [0,\ 1]$, on a $\left|x^{\frac{1}{3}} - P_n(x)\right| \leq \varepsilon$.

Exercice 5.19. Polynômes de Bernstein. Pour tous entiers $n \geq j \geq 0$ et pour tout $x \in [0,\ 1]$, on pose :

$$p_{n,j}(x) \;=\; \binom{n}{j} x^j\, (1-x)^{n-j}\,.$$

1. Établir les identités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} p_{n,j}(x) = 1\,, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n} j\, p_{n,j}(x) = n\, x\,, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} j\,(j-1)\, p_{n,j}(x) = n\,(n-1)\, x^2\,, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (j - n\, x)^2\, p_{n,j}(x) = n\, x\,(1-x)\,. \end{array}\right.$$

2. Soit f une fonction continue sur $[0,\ 1]$. Montrer que les **polynômes de Bernstein**

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f\left(\tfrac{j}{n}\right) p_{n,j}(x)$$

fournissent des approximations uniformes de f sur $[0,\ 1]$, ce qui donne une nouvelle démonstration explicite du théorème de Weierstrass.

Solution. 1. On a $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} p_{n,j}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\,(1-x)^{n-j} = (x+1-x)^{\,n} = 1.$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} j\,p_{n,j}(x) &= \sum_{j=1}^{n} j\,p_{n,j}(x)\\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j\,n!}{j!(n-j)!} x^j\,(1-x)^{n-j}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{nx\,(n-1)!}{(j-1)!(n-1-(j-1))!} x^{j-1}\,(1-x)^{n-1-(j-1)}\\
&= nx\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^k\,(1-x)^{n-1-k}\\
&= nx\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}(x)\\
&= nx\,.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} j(j-1)\,p_{n,j}(x) &= \sum_{j=2}^{n} j(j-1)\,p_{n,j}(x)\\
&= \sum_{j=2}^{n} \frac{j(j-1)\,n!}{j!(n-j)!} x^j\,(1-x)^{n-j}\\
&= \sum_{j=2}^{n} \frac{n(n-1)\,(n-2)!}{(j-2)!(n-2-(j-2))!}\,x^2 x^{j-2}\,(1-x)^{n-2-(j-2)}\\
&= n(n-1)x^2\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k\,(1-x)^{n-2-k}\\
&= n(n-1)x^2\sum_{k=0}^{n-2} p_{n-2,k}(x)\\
&= n(n-1)x^2\,.
\end{aligned}$$

On a $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (j-n\,x)^2\,p_{n,j}(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(j^2-2jnx+n^2x^2\right) p_{n,j}(x)$ et $j^2-2jnx+n^2x^2 = j(j-1) + (1-2nx)j + n^2x^2$, d'où :

$$\sum_{j=0}^{n} (j-n\,x)^2\,p_{n,j}(x) = n(n-1)x^2 + (1-2nx)nx + n^2x^2 = nx(1-x)\,.$$

2. Soient $M = \displaystyle\max_{x\in[0,\,1]} |f(x)|$ et $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur $[0,\,1]$, voir théorème 3.2.3, alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in [0,\,1]$ vérifiant $|x-y| \le \eta$, on ait $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{2M}{N\eta^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Soient $n \ge N$ et $x \in [0,\,1]$. Soient $I = \left\{j \in \{0,\dots,n\}\ ;\ \left|x-\frac{j}{n}\right| \le \eta\right\}$ et $J = \left\{j \in \{0,\dots,n\}\ ;\ \left|x-\frac{j}{n}\right| > \eta\right\}$. On a $f(x) - f_n(x) =$

$\sum_{j=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right)\right] p_{n,j}(x)$, d'où :

$$\left|f(x) - f_n(x)\right| \leq \sum_{j=0}^{n} \left|f(x) - f\left(\tfrac{j}{n}\right)\right| p_{n,j}(x) = \sum_{j\in I} \left|f(x) - f\left(\tfrac{j}{n}\right)\right| p_{n,j}(x) + \sum_{j\in J} \left|f(x) - f\left(\tfrac{j}{n}\right)\right| p_{n,j}(x)\,.$$

Si $j \in I$, on a $\left|f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ et si $j \in J$, on a $\left|f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right)\right| \leq 2M$. Or on a $0 \leq \sum_{j\in I} p_{n,j}(x) \leq \sum_{j=0}^{n} p_{n,j}(x) = 1$, donc $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \sum_{j\in J} p_{n,j}(x)$. On a :

$$nx(1-x) = \sum_{j=0}^{n} (j - n\,x)^2\, p_{n,j}(x) = n^2 \sum_{j=0}^{n} \left(\tfrac{j}{n} - x\right)^2 p_{n,j}(x)$$

d'où $\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{j}{n} - x\right)^2 p_{n,j}(x) = \frac{1}{n} x(1-x)$. Donc on a :

$$\sum_{j\in J} \left(\tfrac{j}{n} - x\right)^2 p_{n,j}(x) \leq \sum_{j=0}^{n} \left(\tfrac{j}{n} - x\right)^2 p_{n,j}(x) = \tfrac{1}{n} x(1-x) \leq \tfrac{1}{n}\,.$$

Pour $j \in J$, on a $\left|x - \frac{j}{n}\right| > \eta$, d'où $\left(\frac{j}{n} - x\right)^2 > \eta^2$. Donc on a $\eta^2 \sum_{j\in J} p_{n,j}(x) \leq \frac{1}{n}$, d'où $\sum_{j\in J} p_{n,j}(x) \leq \dfrac{1}{n\eta^2}$. Par conséquent, on a $2M \sum_{j\in J} p_{n,j}(x) \leq \dfrac{2M}{n\eta^2} \leq \dfrac{2M}{N\eta^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, d'où $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in [0,\, 1]$, on ait $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Autrement dit, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[0,\, 1]$.

Chapitre 6

ESPACES NORMÉS

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Si A est un sous-ensemble convexe de E, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute suite finie $x_1, \dots, x_n$ d'éléments de A et pour toute suite finie $t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in A$.
2. Si A est un sous-ensemble convexe de E, alors pour tout $n \geq 1$, on a $nA = \underbrace{A + \cdots + A}_{n \text{ fois}}$.
3. Si A est un sous-ensemble convexe de E tel que $0 \in A$, alors on a $tA \subset A$ pour tout $0 \leq t \leq 1$.
4. Si A et B sont des sous-ensembles convexes de E et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors λA et $A + B$ sont des ensembles convexes.
5. Une intersection de sous-ensembles convexes de E est convexe.
6. Soient F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une **application affine** . Autrement dit, il existe $b \in F$ et $g : E \longrightarrow F$ une application linéaire tels que $f = g + b$. Alors l'image par f (resp. l'image réciproque) d'un sous-ensemble convexe de E (resp. F) est un sous-ensemble convexe de F (resp. E).

Démonstration. 1. Montrons cette propriété par récurrence sur n. Il est clair que cette propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons que cette propriété est vraie pour certain $n \geq 1$, et soient $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in A$ et $t_1 \geq 0, \dots, t_n, t_{n+1} \geq 0$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$. Montrons que l'on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i \in A$. On peut supposer $t_{n+1} \neq 1$, donc $t = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i \ = 1 - t_{n+1} \neq 0$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit $s_i = \dfrac{t_i}{t}$, alors on a $s_i \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$. Par hypothèse de récurrence, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i x_i \in A$. Comme C est convexe et on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = t\Big(\sum_{i=1}^{n} s_i x_i\Big) + (1-t)x_{n+1}$, alors on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i \in A$.
2. Pour tout sous-ensemble A de E, on a $nA \subset \underbrace{A + \cdots + A}_{n \text{ fois}}$. Supposons maintenant que A est

convexe. Soient $x_1, \dots, x_n \in A$. D'après 1, on a $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i \in A$, d'où $\sum_{i=1}^{n} x_i = nx \in nA$. Donc on a aussi $\underbrace{A + \cdots + A}_{n \text{ fois}} \subset nA$.

3. Soit A un sous-ensemble convexe de A tel que $0 \in A$. Pour tout $x \in A$ et pour tout $t \in [0,\,1]$, on a $tx = tx + (1-t)0 \in A$, donc $tA \subset A$.

4. Soient A et B des sous-ensembles convexes de E et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ et $t \in [0,\,1]$, on a $t\lambda a_1 + (1-t)\lambda a_2 = \lambda(ta_1 + (1-t)a_2) \in \lambda A$, donc λA est convexe. On a $t(a_1+b_1) + (1-t)(a_2+b_2) = ta_1 + (1-t)a_2 + tb_1 + (1-t)b_2 \in A + B$, donc $A + B$ est convexe.

5. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles convexes de E. Soient $x, y \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$ et $t \in [0,\,1]$. Pour tout $i \in I$, on a $x, y \in A_i$, d'où $tx + (1-t)y \in A_i$, car A_i est convexe. Par conséquent, on a $tx + (1-t)y \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$. Donc $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ est un sous-ensemble convexe de E.

6. Soient A un sous-ensemble convexe de E et B un sous-ensemble convexe de F. Soient $y_1, y_2 \in f(A) = g(A) + b$ et $t \in [0,\,1]$. Il existe $a_1, a_2 \in A$ tels que $y_1 = f(a_1) = g(a_1) + b$ et $y_2 = f(a_2) = g(a_2) + b$. On a $ty_1 + (1-t)y_2 = tg(a_1) + tb + (1-t)g(a_2) + (1-t)b = g(ta_1 + (1-t)a_2) + b = f(ta_1 + (1-t)a_2)$. Comme A est convexe, alors on a $ta_1 + (1-t)a_2 \in A$, donc $ty_1 + (1-t)y_2 \in f(A)$. Par conséquent, $f(A)$ est un sous-ensemble convexe de F. Soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(B)$ et $t \in [0,\,1]$. Alors $g(x_1) + b = f(x_1) \in B$ et $g(x_2) + b = f(x_2) \in B$. Comme B est convexe, alors $tg(x_1) + tb + (1-t)g(x_2) + (1-t)b \in B$. Or on a $f(tx_1 + (1-t)x_2) = g(tx_1 + (1-t)x_2) + b = tg(x_1) + (1-t)g(x_2) + b = tg(x_1) + tb + (1-t)g(x_2) + (1-t)b$, donc $f(tx_1 + (1-t)x_2) \in B$. Autrement dit, on a $tx_1 + (1-t)x_2 \in f^{-1}(B)$, donc $f^{-1}(B)$ est un sous-ensemble convexe de E. ■

Proposition. Soient $(E, \|\ \|)$, $(F, \|\ \|')$ des espaces normés et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f est un homéomorphisme.

(ii) f est surjective et il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que pour tout $x \in E$, on ait :

$$\alpha \|x\| \leq \|f(x)\|' \leq \beta \|x\| .$$

Si $(E, \|\ \|)$ est un espace de Banach, alors (i) et (ii) sont équivalentes à :

(iii) $f(E)$ est dense dans F et il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que pour tout $x \in E$, on ait :

$$\alpha \|x\| \leq \|f(x)\|' \leq \beta \|x\| .$$

Démonstration. L'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) résulte du théorème 6.3.1. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale. Supposons à présent que l'on a la propriété (iii) et que $(E, \|\ \|)$ est de Banach. Pour avoir la propriété (ii), il reste à montrer que f est surjective. Soit $y \in F$. Comme $f(E)$ est dense dans F, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E telle que $y = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a $\alpha \|x_n - x_m\| \leq \|f(x_n) - f(x_m)\|'$, donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans E qui est de Banach. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers un $x \in E$. De l'inégalité $\|f(x)\|' \leq \beta \|x\|$, pour tout $x \in E$, on déduit que f est continue. Donc on a $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = y$, d'où f est surjective. ■

Lemme. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit H un hyperplan de E. Alors il existe une forme linéaire non nulle f sur E telle que $H = \ker(f)$.

2. Inversement, soit f une forme linéaire non nulle sur E. Alors $H = \ker(f)$ est un hyperplan de E.
3. Soient f et g des formes linéaires sur E. Alors $\ker(f) = \ker(g)$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $g = \lambda f$.

Démonstration. 1. Soit H un hyperplan de E, donc il existe $a \in E$ non nul tel que $E = H + \mathbb{K}\, a$ et $H \cap \mathbb{K}\, a = \{0\}$. Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $(h, \lambda) \in H \times \mathbb{K}$ tel que $x = h + \lambda\, a$. On pose $f(x) = \lambda$, alors f est une forme linéaire non nulle sur E telle que $H = \ker(f)$.
2. Soit f une forme linéaire non nulle sur E, alors $H = \ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Soit $a = \dfrac{x_0}{f(x_0)}$, alors on a $f(a) = 1$. Pour tout $x \in E$, on a $x = x - f(x)a + f(x)a$ et $f(x - f(x)a) = f(x) - f(x)f(a) = 0$, donc $x - f(x)a \in H = \ker(f)$. Par conséquent, on a $E = H + \mathbb{K}\, a$ et $H \cap \mathbb{K}\, a = \{0\}$. Autrement dit, H est un hyperplan de E.
3. Soient f et g des formes linéaires sur E. On peut supposer que f et g sont non nulles. Il est clair que s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $g = \lambda f$, alors on a $\ker(f) = \ker(g)$.
Réciproquement, supposons que $\ker(f) = \ker(g)$. Soit $a \in E$ tel que $f(a) = 1$. Alors $\lambda = g(a) \neq 0$. D'après 2, on a $E = \ker(f) + \mathbb{K}\, a$. Soit $x \in E$, alors il existe $y \in \ker(f)$ et $\mu \in \mathbb{K}$ tels que $x = y + \mu a$, d'où $f(x) = \mu$ et $g(x) = \mu g(a) = \lambda\mu = \lambda f(x)$. Par conséquent, on a $g = \lambda f$. ■

Proposition. Soient $(E, \|\ \|)$ et $(F, \|\ \|')$ deux $\mathbb{R}$-espaces normés et $f : E \longrightarrow F$ une application bornée sur $B(0,1) = \{x \in E\ ;\ \|x\| < 1\}$, et elle vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in E$. Alors f est linéaire et continue.

Démonstration. On a $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, d'où $f(0) = 0$. Soit $x \in E$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(nx) = nf(x)$. On a $f(0x) = f(0) = 0 = 0f(x)$. Supposons que pour un certain $n \geq 1$, on a $f((n-1)x) = (n-1)f(x)$. Alors on a $f(nx) = f((n-1)x + x) = f((n-1)x) + f(x) = (n-1)f(x) + f(x) = nf(x)$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(nx) = nf(x)$. On a $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$, d'où $f(-x) = -f(x)$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(nx) = nf(x)$. Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a $f(x) = f\big(q\big(\frac{1}{q}x\big)\big) = qf\big(\frac{1}{q}x\big)$, d'où $f\big(\frac{1}{q}x\big) = \frac{1}{q}f(x)$. Par conséquent, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a $f\big(\frac{p}{q}x\big) = \frac{p}{q}f(x)$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \in E$ vérifiant $\|x\| < 1$, on ait $\|f(x)\|' \leq A$. Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda_n - \lambda)x = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\|k(\lambda_n - \lambda)x\| < 1$, donc on a $\|f(k(\lambda_n - \lambda)x)\|' \leq A$. D'autre part, on a $f(k(\lambda_n - \lambda)x) = k\lambda_n f(x) - kf(\lambda x)$, d'où $\|\lambda_n f(x) - f(\lambda x)\| \leq \dfrac{A}{k}$. Puisque l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n f(x) = \lambda f(x)$, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\|\lambda f(x) - f(\lambda x)\| \leq \dfrac{A}{k}$. On fait tendre k vers $+\infty$, on obtient que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Par conséquent, f est linéaire. La continuité de f résulte du théorème 6.3.1. ■

Lemme. Soient $E_1, \ldots, E_n, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E = E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application multilinéaire. Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n), a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$, on a :

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \qquad (*)\,.$$

Démonstration. On va montrer l'équation $(*)$ par récurrence sur $k \in \{2, \ldots, n\}$. L'équation $(*)$ est vraie pour $k = 2$, car on a :

$$f(x_1 - a_1, x_2) + f(a_1, x_2 - a_2) = f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) + f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) = f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)\,.$$

Supposons que l'équation $(*)$ est vraie à l'ordre $k-1$. On a :

$$f(x_1,\dots,x_k)-f(a_1,\dots,a_k)=f(x_1-a_1,x_2,\dots,x_k)+f(a_1,x_2,\dots,x_k)-f(a_1,\dots,a_k)\,.$$

Comme l'application $(z_2,\dots,z_k)\longmapsto f(a_1,z_2,\dots,z_k)$ est multilinéaire de $E_2\times\cdots\times E_k$ dans F, on applique l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$f(a_1,x_2,\dots,x_k)-f(a_1,\dots,a_k)=\sum_{i=2}^{k} f(a_1,a_2\dots,a_{i-1},x_i-a_i,x_{i+1},\dots,x_k)\,.$$

D'où on a :

$$f(x_1,\dots,x_k)-f(a_1,\dots,a_k)=\sum_{i=1}^{k} f(a_1,a_2\dots,a_{i-1},x_i-a_i,x_{i+1},\dots,x_k)\,.$$

Donc l'équation $(*)$ est vraie pour $k=n$. ■

Lemme. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties finies non vides de $\mathbb{N}$, deux à deux disjointes. Alors il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que si $R_n=\sigma(A_n)$, la suite des parties R_n vérifie $\max(R_n)<\min(R_{n+1})$ pour tout $n\geq 0$, et les éléments de R_n sont consécutifs dans $\mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $A=\mathbb{N}\setminus\bigcup_{n\geq 0}A_n$. Pour tout $n\geq 0$, soit $a_n=\mathrm{Card}(A_n)$. On distingue deux cas :
Premier cas : on suppose A finie, et soit $a=\mathrm{Card}(A)$. Pour tout $p\in A$, on pose $\sigma(p)=\varphi_A(p)-1$ et pour tout $p\in A_n$, on pose $\sigma(p)=r_n+\varphi_{A_n}(p)$, où $r_0=a-1$ et $r_n=r_0+a_0+a_1+\cdots a_{n-1}$, si $n\geq 1$. Alors σ est une permutation de $\mathbb{N}$ vérifiant les propriétés citées dans l'énoncé.
Deuxième cas : on suppose A infinie. Soit γ_1 une bijection de A sur $\mathbb{N}$. Soit γ_2 une bijection de $\bigcup_{n\geq 0}A_n$ sur $\mathbb{N}$ définie comme précédemment, *i.e.* Pour tout $p\in A_0$, on pose $\gamma_2(p)=\varphi_{A_0}(p)-1$ et pour tout $n\geq 1$ et pour tout $p\in A_n$, on pose $\gamma_2(p)=r_n+\varphi_{A_n}(p)$, où $r_n=-1+a_0+a_1+\cdots a_{n-1}$. Notons que l'on a :

$$\gamma_2(A_0)=\{0,\dots,a_0-1\}\,,$$

$$\gamma_2(A_n)=\{a_0+a_1+\cdots a_{n-1},\dots,-1+a_0+a_1+\dots a_{n-1}+a_n\},\ \text{pour tout } n\geq 1\,.$$

Pour tout $p\in A$, on pose $\gamma(p)=2\gamma_1(p)$ et pour tout $p\in\bigcup_{n\geq 0}A_n$, on pose $\gamma(p)=2\gamma_2(p)+1$, alors γ est une permutation de $\mathbb{N}$ telle que si on note $R'_n=\gamma(A_n)$, alors pour tout $n\geq 0$, on a $\max(R'_n)<\min(R'_{n+1})$, mais les éléments de R'_n ne sont pas consécutifs dans $\mathbb{N}$ si $\mathrm{Card}(R'_n)\geq 2$. Pour tout $n\geq 0$, soit I_n l'intervalle de $\mathbb{N}$ d'extrémités $\min(R'_n)$ et $\max(R'_n)$. Il existe une permutation δ_n de I_n telle que les éléments de $\delta_n(R'_n)$ deviennent consécutifs et on a $\min(\delta_n(R'_n))=\min(R'_n)$ et $\max(\delta_n(R'_n))\leq\max(R'_n)$. On pose $R_n=\delta_n(R'_n)$ et soit δ la permutation de $\mathbb{N}$ définie par $\delta(p)=p$ si $p\in\mathbb{N}\setminus\bigcup_{n\geq 0}I_n$, et pour tout $n\geq 0$ et pour tout $p\in I_n$, $\delta(p)=\delta_n(p)$. On pose $\sigma=\delta\circ\gamma$, alors σ vérifie les propriétés citées dans l'énoncé. ■

Théorème. Dans un espace normé de dimension finie, une famille est sommable si et seulement si elle est normalement sommable.

Démonstration. Soit $(E,\|\ \|)$ un espace normé de dimension finie. Comme toutes les normes sur E sont équivalentes et la nature d'une famille, le fait d'être, ou non, sommable, est inchangée si on remplace la norme $\|\ \|$ par une norme équivalente, on peut supposer que $E=\mathbb{R}^n$ muni de la

norme $\| \ \|_1$ définie par $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{p=1}^{n} |x_p|$. Puisque $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$ est un espace de Banach, il résulte du théorème 6.7.1 que toute famille normalement sommable est sommable dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$.
Réciproquement, soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable dans $\mathbb{R}^n$. Notons d'abord que si $(t_k)_{k\in K}$ est une famille finie dans $\mathbb{R}$, on a $\sum_{k\in K} |t_k| \leq 2 \sup_{J\subset K} \Big|\sum_{j\in J} t_i\Big|$. En effet, soient $K_- = \big\{k \in K \ ; \ t_k < 0\big\}$ et $K_+ = \big\{k \in K \ ; \ t_k \geq 0\big\}$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in K} |t_k| &= \sum_{k\in K_+} t_k - \sum_{k\in K_-} t_k \\
&= \Big|\sum_{k\in K_+} t_k\Big| + \Big|\sum_{k\in K_-} t_k\Big| \\
&\leq \sup_{J\subset K} \Big|\sum_{j\in J} t_i\Big| + \sup_{J\subset K} \Big|\sum_{j\in J} t_i\Big| \\
&= 2 \sup_{J\subset K} \Big|\sum_{j\in J} t_i\Big| .
\end{aligned}$$

Pour tout $i \in I$, on a $a_i = (a_{1,i}, \dots, a_{n,i})$. Puisque les projections canoniques de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$ sont linéaires et continues, pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, la famille $(a_{p,i})_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$. Donc l'ensemble $\Big\{\Big|\sum_{i\in J} a_{p,i}\Big| \ ; \ J \text{ partie finie de } I\Big\}$ est majoré. Par conséquent, il existe $M > 0$ tel que pour toute partie finie J de I et pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, on ait $\Big|\sum_{i\in J} a_{p,i}\Big| \leq M$. Soit J une partie finie de I, on a :

$$\sum_{i\in J} \|a_i\|_1 = \sum_{i\in J} \sum_{p=1}^{n} |a_{p,i}| = \sum_{p=1}^{n} \sum_{i\in J} |a_{p,i}| \leq \sum_{p=1}^{n} 2M = 2M\, n\,.$$

Il résulte de la proposition 6.7.1 que la famille $(\|a_i\|_1)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}_+$. Autrement dit, la famille $(a_i)_{i\in I}$ est normalement sommable. ■

Proposition.

1. Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles sommables d'éléments du corps $\mathbb{K}$. Alors la famille $(a_ib_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable dans $\mathbb{K}$ et on a :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} b_j\Big).$$

2. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries dans $\mathbb{K}$ absolument convergentes. Alors la série $\sum \Big(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\Big)$ est absolument convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\Big) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big).$$

Démonstration. 1. Puisque $\mathbb{K}$ est un espace normé de dimension finie, les familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont aussi absolument sommables. Soit K une partie finie de $I\times J$, alors il existe une partie finie A de I et une partie finie B de J telles que $K\subset A\times B$. On a :

$$\sum_{(i,j)\in K}|a_ib_j|\leq\sum_{(i,j)\in A\times B}|a_ib_j|=\Big(\sum_{i\in A}|a_i|\Big)\Big(\sum_{j\in B}|b_j|\Big)\leq\Big(\sum_{i\in I}|a_i|\Big)\Big(\sum_{j\in J}|b_j|\Big)<+\infty\,.$$

Par la proposition 6.7.1, la famille $(a_ib_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est alors absolument sommable, donc elle est sommable car $\mathbb{K}$ est un espace de Banach. D'après le théorème 6.7.4, on a :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}a_ib_j=\sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J}a_ib_j\Big)=\sum_{i\in I}\Big(a_i\sum_{j\in J}b_j\Big)=\Big(\sum_{i\in I}a_i\Big)\Big(\sum_{j\in J}b_j\Big)\,.$$

2. Puisque les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, d'après le corollaire 6.7.3, les familles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont absolument sommables, donc sommables et on a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}b_n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$. D'après 1, la famille $(a_nb_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}a_nb_m=\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n\Big)\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}}b_n\Big)=\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\Big)\,.$$

Pour tout $n\geq 0$, soit $I_n=\{(k,n-k)\in\mathbb{N}^2\ ;\ 0\leq k\leq n\}$, alors $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$. D'après les théorèmes 6.7.3 et 6.7.4, la famille $(a_nb_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est absolument sommable et on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{k=0}^{n}|a_kb_{n-k}|\Big)=\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}|a_nb_m|<+\infty\,.$$

Donc la série $\displaystyle\sum\Big(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\Big)$ est absolument convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\Big)=\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}a_nb_m=\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\Big)\,.\quad\blacksquare$$

Proposition. Soient $(E,\|\ \|)$ un espace normé et F un sous-espace vectoriel fermé de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) L'espace E est séparable.

(ii) Les espaces F et E/F sont séparables.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Comme tout sous-espace d'un espace métrique séparable est séparable, alors F est séparable. Soit $\pi : E\longrightarrow E/F$ l'application quotient. Soit $D=\{x_n\ ;\ n\geq 0\}$ une partie au plus dénombrable et dense dans E, alors $\pi(D)=\{\pi(x_n)\ ;\ n\geq 0\}$ est une partie au plus dénombrable et dense dans E/F, donc E/F est séparable.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soient $A=\{a_n\ ;\ n\geq 0\}$ une partie au plus dénombrable et dense dans F et $B=\{\pi(b_n)\ ;\ n\geq 0\}$ une partie au plus dénombrable et dense dans E/F. Soit

$D = \{a_n + b_m \ ; \ n, m \geq 0\}$, alors est au plus dénombrable. Montrons que D est dense dans E. Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in E$, alors il existe b_m tel que $\|\pi(x - b_m)\| = \|\pi(x) - \pi(b_m)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où il existe $z \in F$ tel que $\|x - b_m - z\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme A est dense dans F, il existe a_n tel que $\|z - a_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$. D'où on a $\|x - (a_n + b_m)\| \leq \|x - b_m - z\| + \|z - a_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc D est dense dans E. Par conséquent, E est séparable. ∎

Supplément d'exercices

Exercice 6.47. Soient $(E, \| \, \|)$ un espace normé et A une partie non vide de E telle que pour tout $x \in E$ il existe un unique $f(x) \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - f(x)\|$. Soient $x \in E$ et $f(x) = a \in A$. Montrer que pour tout $z \in [x, a]$, on a $d(z, A) = \|z - a\|$.

Solution. On a $z = tx + (1-t)a$, avec $t \in [0, 1]$, d'où $x - z = (1-t)(x-a)$ et $z - a = t(x-a)$. On a :

$$\begin{aligned}
\|x - a\| &\leq \|x - f(z)\| \\
&\leq \|x - z\| + \|z - f(z)\| \\
&\leq \|x - z\| + \|z - a\| \\
&= (1-t)\|x - a\| + t\|x - a\| \;=\; \|x - a\| \,.
\end{aligned}$$

Donc on a $\|x - a\| = \|x - f(z)\|$. Autrement dit, il existe $a, f(z) \in A$ tels que $d(x, A) = \|x - a\| = \|x - f(z)\|$. Par conséquent, on a $f(z) = a$, d'où $d(z, A) = \|z - a\|$.

Exercice 6.48. Soit $(E, \| \, \|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que pour tout $x \in B(0, 1)$, on a $d(x, E \setminus B(0, 1)) = 1 - \|x\|$.

Solution. Soit $y \in E \setminus B(0, 1)$, on a $1 \leq \|y\| \leq \|x\| + \|x - y\|$, d'où $1 - \|x\| \leq \|x - y\|$. Par conséquent, on a $1 - \|x\| \leq d(x, E \setminus B(0, 1))$. Si $x = 0$ et $\|y\| = 1$, alors on a $\|x - y\| = 1$, d'où $d(x, E \setminus B(0, 1)) = 1 = 1 - \|x\|$. On suppose maintenant $x \neq 0$. Soit $y = \dfrac{x}{\|x\|}$, alors on a $\|y\| = 1$, d'où $y \in E \setminus B(0, 1)$. On a aussi $\|x - y\| = 1 - \|x\|$. Par conséquent, on a $d(x, E \setminus B(0, 1)) = 1 - \|x\|$.

Exercice 6.49. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) L'espace (X, d) est compact.

(ii) L'espace de Banach $\big(C_b(X), \| \, \|_\infty\big)$ est séparable.

Solution. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte de la proposition 3.6.1 et du fait que $C_b(X) = C(X)$ si X est compact.

Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons que X n'est pas compact. Montrons d'abord qu'il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans X n'admettant aucune sous-suite convergente et une suite $(r_n)_{n \geq 0}$ de réels strictement positifs tendant vers 0 telles que les boules ouvertes $B(x_n, r_n)$ sont deux à deux disjoints. On distingue deux cas :

Premier cas : (X, d) n'est pas précompact. Alors d'après l'exercice 3.39 du supplément, il existe un réel $r > 0$ et une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans X telle que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, avec $n \neq m$, on ait $d(x_n, x_m) > r$. Il suffit alors de poser $r_n = \frac{r}{2(n+1)}$, pour tout $n \geq 0$.

Deuxième cas : (X, d) n'est pas complet. Soit $(y_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy non convergente dans (X, d). D'après l'exercice 3.40 du supplément, pour tout $x \in X$, la suite $\big(d(x, y_n)\big)_{n \geq 0}$ converge vers un réel strictement positif, donc il existe $t_x > 0$ et il existe $N_x \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N_x$, on ait $d(x, y_n) > t_x$. On construit alors par récurrence une sous-suite $(y_{n_k})_{k \geq 0}$ de $(y_n)_{n \geq 0}$ et une

suite $(t_k)_{k\geq 0}$ strictement décroissante dans $]0, +\infty[$ tendant vers 0 telles que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, avec $q > p$, on ait $d(y_{n_p}, y_{n_q}) > t_p$. Il suffit maintenant de poser $r_p = \frac{t_p}{2}$ et $x_p = y_{n_p}$, pour tout $p \geq 0$.
Pour tout $n \geq 0$, soit $B_n = B(x_n, r_n)$ et on pose :

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{d(x,x_n)}{r_n} & \text{si} \quad x \in B_n\,, \\ 0 & \text{si} \quad x \in X \setminus B_n\,. \end{cases}$$

Alors $\phi_n \in C_b(X)$ et on a $\phi_n(X) \subset [0, 1]$, voir exemple 3.6.2. Puisque les B_n sont deux à deux disjoints, pour tout $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et pour tout $x \in X$, on pose $f_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \phi_n(x)$.
Alors on a :

1. Pour tout $\alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $f_\alpha \in C_b(X)$.
2. Pour tous α, $\beta \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tels que $\alpha \neq \beta$, on a $\|f_\alpha - f_\beta\|_\infty = 1$.

Montrons d'abord que pour tout $\alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on a $f_\alpha \in C_b(X)$. Il est clair que f_α est bornée. Soit $x \in X$. Montrons que f_α est continue en x. Pour tout $s > 0$, soit $A_s = \big\{n \in \mathbb{N}\ ;\ B(x,s) \cap B_n \neq \emptyset\big\}$. Montrons qu'il existe $s > 0$ tel que l'ensemble A_s soit fini. Si pour tout $s > 0$, l'ensemble A_s est infini, alors il existe une suite $(a_k)_{k\geq 0}$ dans X et une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$ telles que pour tout $k \geq 0$, on ait $d(x, a_k) < \frac{1}{k+1}$ et $d(x_{n_k}, a_k) < r_{n_k}$. Comme on a $\lim\limits_{k\to+\infty} r_{n_k} = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 0$, alors on en déduit que $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ converge vers x, ce qui est impossible, car la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ n'admet aucune sous-suite convergente. Par conséquent, il existe bien un $s > 0$ tel que l'ensemble A_s soit fini. Donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > p$, on ait $B(x,s) \cap B_n = \emptyset$. Soit $g_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \alpha_n \phi_n$. Alors g_p est continue sur X et on a ${f_\alpha}_{|_{B(x,s)}} = {g_p}_{|_{B(x,s)}}$. Comme $B(x,s)$ est un ouvert de X, on en déduit que f_α est continue en x. D'où la continuité de f_α. Ainsi, on a $f_\alpha \in C_b(X)$.
Montrons que pour tous α, $\beta \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tels que $\alpha \neq \beta$, on a $\|f_\alpha - f_\beta\|_\infty = 1$. Il est clair que pour tout $x \in X$, on a $|f_\alpha(x) - f_\beta(x)| \leq 1$, d'où $\|f_\alpha - f_\beta\|_\infty \leq 1$. Comme $\alpha \neq \beta$, alors il existe $n \geq 0$ tel que $\alpha_n \neq \beta_n$, d'où $|f_\alpha(x_n) - f_\beta(x_n)| = |\alpha_n - \beta_n| = 1$. Par conséquent, on a $\|f_\alpha - f_\beta\|_\infty = 1$. Comme l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable, voir exercice 6.35, on déduit de la proposition 1.2.5 que $\big(C_b(X),\ \|\ \|_\infty\big)$ n'est pas séparable, ce qui contredit l'hypothèse. Donc X est bien compact.

Exercice 6.50. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe une partie compacte K de E telle que $E = \overline{\mathrm{Vect}(K)}$.

(ii) L'espace E est séparable.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit K une partie compacte de E telle que $E = \overline{\mathrm{Vect}(K)}$. D'après la proposition 3.1.7, K est séparable, donc il existe une partie A de K au plus dénombrable et dense dans K. On en déduit que A est une partie totale de E. Par conséquent, E est séparable.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons que E est séparable. On peut supposer $E \neq \{0\}$. Alors il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments non nuls de E telle que $E = \overline{\{x_n\ ;\ n \geq 1\}}$. Soit $K = \Big\{\frac{x_n}{n\,\|x_n\|}\ ;\ n \geq 1\Big\} \cup \{0\}$. Alors K est une partie compacte de E telle que $E = \overline{\mathrm{Vect}(K)}$.

Exercice 6.51. Montrer que l'espace de Banach $(C_b(]0,1[,\mathbb{R}),\ \|\ \|_\infty)$ n'est pas séparable.
Solution. Ceci résulte de l'exercice 6.49, mais donnons une preuve directe. Il suffit de montrer que $C_b(]0,1[,\mathbb{R})$ contient une copie de ℓ^∞, voir exercice 6.35. Pour tout $n \geq 1$, Soit $f_n \in C_b(]0,1[,\mathbb{R})$ telle que $\|f_n\|_\infty = 1$ et $f_n(t) = 0$ si $t \notin \left]\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n}\right[$ (une telle fonction existe). Pour tout $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$ et pour tout $t \in \left[\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n}\right[$, on pose $T_a(t) = a_n f_n(t)$. Autrement dit, pour tout $t \in]0,1[= \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, on a $T(a)(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(t)$. Alors $T(a) \in C_b(]0,1[,\mathbb{R})$ et l'application

$$\begin{array}{rccc} T: & \ell^\infty & \longrightarrow & C_b(]0,1[,\mathbb{R}) \\ & a & \longmapsto & T(a) \end{array}$$

est linéaire et isométrique. Donc on peut considérer $\ell^\infty \subset C_b(]0,1[,\mathbb{R})$. Comme ℓ^∞ n'est pas séparable, on en déduit que $(C_b(]0,1[,\mathbb{R}),\ \|\ \|_\infty)$ n'est pas séparable.

Exercice 6.52. Soit (X, d) un espace métrique localement compact. Montrer que X est séparable si et seulement si $C_0(X)$ contient une fonction à valeurs strictement positives.
Solution. D'après la proposition 3.4.4, X est séparable si et seulement si X est dénombrable à l'infini. Supposons d'abord qu'il existe $f \in C_0(X)$ telle que pour tout $x \in X$, on ait $f(x) > 0$. Alors, pour tout $n \geq 1$, il existe un compact K_n de X tel que pour tout $x \in X \setminus K_n$, on ait $0 < f(x) < \frac{1}{n}$. On en déduit que l'on a $X = \bigcup\limits_{n\geq 0} K_n$. Donc X est dénombrable à l'infini.
Réciproquement, supposons que X est dénombrable à l'infini. Soit $\left(K_n\right)_{n\geq 0}$ une suite exhaustive de compacts de X, voir théorème 3.4.2. D'après le théorème 3.6.1, pour tout $n \geq 0$, il existe $\phi_n \in C_c(X)$ telle que $\phi_n(X) \subset [0,1]$, $\phi_n(x) = 1$, pour tout $x \in K_n$, et $\mathrm{Supp}(\phi_n) \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$. Puisque la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\phi_n$ est normalement convergente dans l'espace de Banach $\left(C_0(X),\ \|\ \|_\infty\right)$, alors $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\phi_n \in C_0(X)$. Il est clair que pour tout $x \in X$, on a $f(x) > 0$.

Exercice 6.53. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé de dimension infinie. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|x_n\| = 1$ et $\|x_n - x_m\| \geq 1$ si $n \neq m$.
Solution. On construit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par récurrence sur n. Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| = 1$. Soit $F = \mathrm{Vect}(x_0)$ le sous-espace vectoriel engendré par x_0. D'après l'exercice 6.42, il existe $x_1 \in E$ tel que $\|x_1\| = 1$ et $d(x_1, F) = 1$, d'où $\|x_0 - x_1\| \geq d(x_1, F) = 1$. Supposons que l'on a construit $x_0, x_1, \cdots, x_n \in E$ tels que $\|x_i\| = 1$ et $\|x_i - x_j\| \geq 1$, si $i \neq j$, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Soit $F = \mathrm{Vect}\big(\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}\big)$ le sous-espace vectoriel engendré par $x_0, x_1, \cdots, x_n$. D'après l'exercice précédent, il existe $x_{n+1} \in E$ tel que $\|x_{n+1}\| = 1$ et $d(x_{n+1}, F) = 1$, d'où $\|x_{n+1} - x_i\| \geq d(x_{n+1}, F) = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ainsi, on trouve une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|x_n\| = 1$ et $\|x_n - x_m\| \geq 1$ si $n \neq m$.

Exercice 6.54. $(E, \|\ \|)$ un espace normé. Soient f et g deux formes linéaires continues non nulles sur E. Soient $N_f = \ker(f)$ et $N_g = \ker(g)$. Montrer qu'il existe un homéomorphisme linéaire $T : N_f \longrightarrow N_g$.
Solution. Notons d'abord que pour tout $x \in E \setminus N_f$, on a $E = N_f \oplus \mathbb{K}\,x$, et que si $N_g \subset N_f$, alors on a $N_g = N_f$. On suppose $N_g \neq N_f$, car sinon c'est trivial. Soit $h = f_{|N_g} : N_g \longrightarrow \mathbb{K}$, alors h est une forme linéaire continue non nulle. Soit $N = N_g \cap N_f$, alors on a $N = \ker(h)$. Donc il existe $x_g \in N_g$ tel que $N_g = N \oplus \mathbb{K}\,x_g$ et $x_g \notin N_f$. Soit $x_f \in N_f$ tel que $x_f \notin N_g$, alors on a $E = N \oplus \mathbb{K}\,x_g \oplus \mathbb{K}\,x_f$. On peut supposer $f(x_g) = 1 = g(x_f)$. Pour tout $x \in E$, soit

$T(x) = x + (f(x) - g(x))x_f + (g(x) - f(x))x_g$, alors T est linéaire et est un homéomorphisme de E dans E, car T est continue et $T^{-1} = T$. En fait, pour tout $y \in N$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a $T(y + \alpha x_f + \beta x_g) = y + \beta x_f + \alpha x_g$. On a de plus $T(N_f) = N_g$.

Exercice 6.55. Soient $(E, \| \|)$, $(F, \| \|')$ deux espaces normés et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. Soient $a \in E$ et $\rho > 0$. Montrer que l'on a :

$$\|T\| = \sup\Big\{\frac{\|T(x) - T(a)\|'}{\rho}\ ;\ x \in E \text{ et } \|x - a\| = \rho\Big\}.$$

Solution. Soit $\beta = \sup\Big\{\frac{\|T(x) - T(a)\|'}{\rho}\ ;\ x \in E \text{ et } \|x - a\| = \rho\Big\}$, il s'agit de vérifier que l'on a $\|T\| = \beta$. Rappelons que l'on a $\|T\| = \sup\big\{\|T(z)\|'\ ;\ z \in E \text{ avec } \|z\| = 1\big\}$. Soit $x \in E$ tel que $\|x - a\| = \rho$, alors on a $\Big\|\frac{x-a}{\rho}\Big\| = 1$, d'où $\frac{\|T(x) - T(a)\|'}{\rho} \leq \|T\|$. Donc on a $\beta \leq \|T\|$. Réciproquement, soit $z \in E$ tel que $\|z\| = 1$. Soit $x = \rho z + a$, alors on a $\|x - a\| = \rho$ et $\frac{x-a}{\rho} = z$, d'où $\|T(z)\|' = \frac{\|T(x) - T(a)\|'}{\rho} \leq \beta$. Donc on a $\|T\| \leq \beta$. Par conséquent, on a $\|T\| = \beta$.

Exercice 6.56. Soient $(E, \| \|)$ un espace normé et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue non nulle. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $H_\alpha = \{x \in E\ ;\ f(x) = \alpha\}$. Soient $b \in E$ tel que $\alpha < f(b)$ et $\delta = d(b, H_\alpha) > 0$. Montrer que pour tout $x \in B'(b, \delta)$, on a $\alpha \leq f(x)$.
Solution. Soit $a \in E$ tel que $f(a) = \alpha$, on a $H_\alpha = \ker(f) + a$. D'après l'exercice 6.43, on a :

$$\delta = d(b, H_\alpha) = d(b, \ker(f) + a) = d(b - a, \ker(f)) = \frac{|f(b) - f(a)|}{\|f\|} = \frac{f(b) - f(a)}{\|f\|}.$$

Soit $x \in B'(b, \delta)$. Si $f(x) < \alpha$, alors $f(x) < f(a) < f(b)$, d'où $f(b) - f(a) < f(b) - f(x)$. Par conséquent, on a $\delta\|f\| = f(b) - f(a) < f(b) - f(x) \leq \|f\|\|b - x\| \leq \|f\|\,\delta$, ce qui est impossible. Donc, pour tout $x \in B'(b, \delta)$, on a bien $\alpha \leq f(x)$.

Exercice 6.57. Soient $(E, \| \|)$ un espace de Banach, $(F, \| \|')$ un espace normé et $B_F = \{y \in F\ ;\ \|y\|' \leq 1\}$. Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire telle que $T^{-1}(B_F)$ soit fermé dans E. Montrer que T est continue.
Solution. On a $F = \underset{n\geq 1}{\cup} nB_F$, d'où $E = T^{-1}(F) = \underset{n\geq 1}{\cup} nT^{-1}(B_F)$. Comme pour tout $n \geq 1$, $nT^{-1}(B_F)$ est fermé dans E, il résulte du théorème de Baire, théorème 2.8.1, qu'il existe $n \geq 1$ tel que $nT^{-1}(B_F)$ soit d'intérieur non vide dans E. Comme la multiplication dans E par un scalaire non nul est un homéomorphisme de E, alors $T^{-1}(B_F)$ est d'intérieur non vide dans E. En particulier, il existe $x \in E$ et $r > 0$ tels que $B(x, r) \subset T^{-1}(B_F)$. On a aussi $B(-x, r) = -B(x, r) \subset -T^{-1}(B_F) = T^{-1}(-B_F) = T^{-1}(B_F)$. Pour tout $z \in B(0, r)$, on a $z = \frac{1}{2}(z + x) + \frac{1}{2}(z - x)$, avec $z + x \in B(x, r)$ et $z - x \in B(-x, r)$. Comme $T^{-1}(B_F)$ est convexe, on en déduit que l'on a $z \in T^{-1}(B_F)$. Donc on a $B(0, r) \subset T^{-1}(B_F)$. En particulier, $T^{-1}(B_F)$ est un voisinage de 0 dans E. Par conséquent, T est continue.

Exercice 6.58. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t^2}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $N(x, y) = \frac{\|(x, y)\|_2 + |x|}{2}$, où $\| \|_2$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. En déduire que l'on a $\frac{1}{2}\|(x, y)\|_2 \leq N(x, y) \leq \|(x, y)\|_2$.

Solution. 1. On a $N(x,y)=0 \iff$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, $|x+ty|=0 \iff (x,y)=(0,0)$. Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a $N(\lambda(x,y)) = N(\lambda x,\lambda y) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|\lambda x + t\lambda y|}{1+t^2} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|\lambda|\,|x+ty|}{1+t^2} = |\lambda| \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{1+t^2} = |\lambda|\, N(x,y)$. Pour tout (x,y), $(x',y')\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
N((x,y)+(x',y')) &= N(x+x', y+y') \\
&= \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+x'+ty+ty'|}{1+t^2} \\
&\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big(\frac{|x+ty|}{1+t^2} + \frac{|x'+ty'|}{1+t^2}\Big) \\
&\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2} + \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2} \\
&= N(x,y) + (x',y')\,.
\end{aligned}$$

Donc N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Puisque l'on a $N((-x,-y)) = N(x,y)$ et $N((x,-y)) = N(x,y)$, il suffit de montrer l'égalité pour $x\geq 0$ et $y\geq 0$. Soient $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $x\geq 0$ et $y\geq 0$. Alors on a $N(x,y) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{1+t^2} = \sup\limits_{t\geq 0} \dfrac{x+ty}{1+t^2}$. On a $N(x,0) = x = \dfrac{\|(x,0)\|_2 + |x|}{2}$, donc on peut aussi supposer $y>0$. Pour tout $t\geq 0$, soit $f(t) = \dfrac{x+ty}{1+t^2}$. Alors f est dérivable sur $[0, +\infty[$, et on a $f'(t) = \dfrac{-yt^2-2xt+y}{(1+t^2)^2}$. Donc f' s'annule seulement en $t_0 = \dfrac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Par conséquent, on a $N(x,y) = \dfrac{x+t_0y}{1+t_0^2} = \dfrac{\|(x,y)\|_2+|x|}{2}$. D'autre part, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $\frac{1}{2}\|(x,y)\|_2 \leq \dfrac{\|(x,y)\|_2+|x|}{2} \leq \|(x,y)\|_2$, d'où $\frac{1}{2}\|(x,y)\|_2 \leq N(x,y) \leq \|(x,y)\|_2$.

Exercice 6.59. Soit E l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0,\,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout f de E, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)| \quad , \quad N(f) = \|f\|_\infty + K(f) \quad \text{et} \quad K(f) = \sup_{x\neq y} \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| .$$

1. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $C([0,\,1],\mathbb{R})$.
2. Justifier l'existence de $K(f)$ et montrer que pour tout $f,g\in E$, on a :

$$K(f+g) \leq K(f) + K(g) \quad \text{et} \quad \big|K(f)-K(g)\big| \leq K(f-g)\,.$$

3. Montrer que N est une norme sur E.
4. Considérons la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ dans $C([0,\,1],\mathbb{R})$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0\leq x\leq \frac{1}{n}\,, \\[2ex] \frac{1}{n} & \text{si} \quad \frac{1}{n}\leq x\leq 1\,. \end{cases}$$

Vérifier que $f_n\in E$ et montrer que N et $\|\ \|_\infty$ sont deux normes non équivalentes sur E.

5. Montrer que E est de dimension infinie.
6. Montrer que l'espace $(E,\, N)$ est de Banach.

Solution. 1. C'est trivial.
2. Soit $f \in E$, alors il existe $k > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0,\, 1]$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, d'où pour tous $x, y \in [0,\, 1]$ tels que $x \neq y$, on ait $\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq k$, donc $K(f)$ existe dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f, g \in E$, on a :

$$K(f + g) = \sup_{x \neq y} \left|\frac{f(x) + g(x) - f(y) - g(y)}{x - y}\right| .$$

On a aussi :

$$\frac{|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)|}{|x - y|} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} + \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} \leq K(f) + K(g)\,,$$

d'où $K(f+g) \leq K(f) + K(g)$. On en déduit que l'on a $K(f) = K(f - g + g) \leq K(f - g) + K(g)$ et $K(g) = K(g - f + f) \leq K(g - f) + K(f) = K(f - g) + K(f)$. Par conséquent, on a $|K(f) - K(g)| \leq K(f - g)$.
3. On a $N(f) = 0 \iff \|f\|_\infty + K(f) = 0 \iff \|f\|_\infty \iff f = 0$. On a $N(\lambda f) = \|\lambda f\|_\infty + K(\lambda f) = |\lambda|\, \|f\|_\infty + |\lambda|\, K(f)$. On a $N(f+g) = \|f+g\|_\infty + K(f+g) \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + K(f) + K(g) = N(f) + N(g)$. Donc N est une norme sur E.
4. Si $x, y \in \left[0,\, \frac{1}{n}\right]$, on a $f_n(x) - f_n(y) = x - y$. Si $x, y \in \left[\frac{1}{n},\, 1\right]$, on a $f_n(x) - f_n(y) = 0$. Si $x \leq \frac{1}{n}$ et $y \geq \frac{1}{n}$, on a $|f_n(x) - f_n(y)| = \frac{1}{n} - x \leq y - x = |x - y|$. Donc f_n est lipschitzienne de $[0,\, 1]$ dans $\mathbb{R}$, d'où $f \in E$. On a $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ et $K(f_n) = 1$, d'où $N(f_n) = 1 + \frac{1}{n}$. Donc les deux normes $\|\ \|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes, voir remarque 6.1.1.
5. Soit $B'(0, 2)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon 2 dans $(E,\, N)$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $f_n \in B'(0, 2)$. Si E est de dimension finie, alors $B'(0, 2)$ serait compacte, et donc la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ admettrait une sous-suite convergente. Soit $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ une telle sous-suite et soit g la limite de $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ dans $(E,\, N)$. Alors la suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ converge aussi vers g pour la norme $\|\ \|_\infty$. Comme on a $\|f_{n_k}\|_\infty = \frac{1}{n_k}$, alors $g = 0$, d'où on a $\lim\limits_{k \to +\infty} N(f_{n_k}) = 0$, ce qui est impossible car pour tout k, on a $N(f_{n_k}) = 1 + \frac{1}{n_k} \geq 1$. Par conséquent, E est de dimension infinie.
6. Soit $(g_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(E,\, N)$. Comme pour tout $f \in E$, on a $\|f\|_\infty \leq N(g)$, alors $(g_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans $(E,\, \|\ \|_\infty) \subset (C([0,\, 1],\, \mathbb{R}),\, \|\ \|_\infty)$. Comme $(C([0,\, 1],\, \mathbb{R}),\, \|\ \|_\infty)$ est de Banach, voir proposition 2.6.8, alors il existe $g \in C([0,\, 1],\, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|g_n - g\|_\infty = 0$. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\big|K(g_n) - K(g_m)\big| \leq K(g_n - g_m) \leq N(g_n - g_m)\,,$$

donc la suite $\big(K(g_n)\big)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, d'où il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} K(g_n) = \alpha$. Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x, y \in [0,\, 1]$, on a $|g_n(x) - g_n(y)| \leq K(g_n)|x - y|$. On fait tendre n vers l'infini, on obtient $|g(x) - g(y)| \leq \alpha|x - y|$, donc $g \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq k$, on ait $K(g_n - g_m) \leq \varepsilon$. Donc, pour tout $x, y \in [0,\, 1]$ et pour tout $n, m \geq k$, on a $|g_n(x) - g_m(x) - g_n(y) - g_m(y)| \leq \varepsilon|x - y|$. On fait tendre m vers l'infini, on obtient $|g_n(x) - g(x) - g_n(y) - g(y)| \leq \varepsilon|x - y|$. D'où on a $K(g_n - g) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq k$. Comme on a $N(g_n - g) = \|g_n - g\|_\infty + K(g_n - g)$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} N(g_n - g) = 0$. Autrement dit, la suite $(g_n)_{n \geq 0}$ converge vers g dans $(E,\, N)$. Donc $(E,\, N)$ est un espace de Banach.

Exercice 6.60. Soit $(E,\, \|\ \|)$ un espace normé de dimension infinie.

1. Construire une application linéaire bijective non continue $T : (E, \| \|) \longrightarrow (E, \| \|)$.
2. Pour tout $x \in E$, on pose $\|x\|_T = \|T(x)\|$. Montrer que $\| \|_T$ est une norme sur E, que T est une application bijective isométrique de $(E, \| \|_T)$ dans $(E, \| \|)$ et que $(E, \| \|_T)$ est de Banach si et seulement si $(E, \| \|)$ est de Banach.
3. Montrer que les normes $\| \|$ et $\| \|_T$ ne sont pas équivalentes.

Solution. 1. Soient $(e_n)_{n\geq 1}$ une suite infinie de vecteurs de E linéairement indépendants et V le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_n)_{n\geq 1}$. Soit W un supplémentaire algébrique de V dans E. On définit une application linéaire T de E dans E par : pour tout $x \in W$, on pose $T(x) = x$, et pour tout $n \geq 1$, on pose $T(e_n) = n\|e_n\|$, autrement dit, on a $T\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, i\|e_i\|$.
Alors T est une application linéaire bijective non continue de E dans E.
2. C'est une simple vérification.
3. Les normes $\| \|$ et $\| \|_T$ ne sont pas équivalentes car l'application identité $x \longmapsto x$ n'est pas continue de $(E, \| \|)$ dans $(E, \| \|_T)$.

Exercice 6.61. Soient $(E, \| \|)$, $(F, \| \|')$ deux espaces normés et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer qu'il existe toujours une norme sur E qui rend cette application continue.
Solution. Pour tout $x \in E$, on pose $\|x\|'' = \|x\| + \|f(x)\|'$, alors $\| \|''$ est une norme sur E qui rend l'application linéaire f continue.

Exercice 6.62. Soient $E = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})\,;\, f(0) = 0\}$ et $F = C([0, 1], \mathbb{R})$. Considérons l'application dérivée

$$\begin{array}{rccc} D: & E & \longrightarrow & F \\ & f & \longmapsto & f' \end{array}$$

1. On munit E et F de la norme $\| f \|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$. Montrer que D est linéaire bijective non continue.
2. On munit E de la norme $\| f \| = \| f \|_\infty + \| f' \|_\infty$ et F de la norme $\| f \|_\infty$. Montrer que D est continue et calculer sa norme d'opérateur $\|D\|$.

Solution. 1. Il est clair que D est linéaire et bijective. L'application D^{-1} associe à toute application $f \in F$ sa primitive nulle en 0. Autrement dit, on a $D^{-1}(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, d'où :

$$\left|D^{-1}(f)(x)\right| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt \leq \int_0^x \|f\|_\infty\,dt \leq x\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

donc on a $\|D^{-1}(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Par conséquent, D^{-1} est continue. Pour tout $n \geq 1$, soit $f_n(t) = t^n$, alors on a $\| f_n \|_\infty = 1$, mais $\| D(f_n) \|_\infty = n$, donc D n'est pas continue.
2. On a $\|D(f)\|_\infty = \| f'\|_\infty \leq \| f \|_\infty + \| f' \|_\infty = \| f \|$, donc dans ce cas, D est continue et on a $\|D\| \leq 1$. Pour tout $n \geq 1$, soit $g_n(t) = \frac{t^n}{n}$, alors on a $\| g_n \| = \frac{1}{n} + 1$ et $\|D(g_n)\|_\infty = 1$. Comme on a $\|D\| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|D(f)\|_\infty}{\| f \|}$, on en déduit que $\|D\| \geq 1$, donc on a $\|D\| = 1$.

Exercice 6.63. Trouver un espace de Banach E et une application linéaire $T : E \longrightarrow E$ non continue telle que $\ker(T)$ soit fermé.
Solution. Soit $E = c_0$ muni de la norme $\| \|_\infty$. Soit f une forme linéaire non continue sur E, une telle f existe car E est de dimension infinie. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in E$, soit $T(x) =$

$(f(x), x_0, x_1, \cdots)$, alors T est linéaire non continue et $\ker(T) = \{0\}$, donc fermé dans E.

Exercice 6.64. Soient $(E, \|\ \|)$, $(F, \|\ \|')$ deux espaces normés et $T \in \mathscr{L}(E; F)$. On suppose de plus $\dim(E) < +\infty$. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$ et $\|T\| = \max_{\|x\|=1} \|T(x)\|' = \|T(a)\|'$.

Solution. On a $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|'$ et l'application $x \longmapsto \|T(x)\|'$ est continue de E dans $\mathbb{R}$. Comme $\dim(E) < +\infty$, alors la sphère $S = \{x \in E\ ;\ \|x\| = 1\}$ est compacte, on en déduit que qu'il existe $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$ et $\|T\| = \max_{\|x\|=1} \|T(x)\|' = \|T(a)\|'$.

Exercice 6.65. Soient $a > 0$, $b > 0$ et $T : (\mathbb{R}^2, \|\ \|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|\ \|_i)$ une application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$. Calculer sa norme quand $i = 1, 2$ et ∞.

Solution. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $T(x, y) = (ax + by, bx + ay)$.
Premier cas : $i = 1$. On a :

$$\begin{aligned} \|T\| &= \max\big\{\|T(x,y)\|_1\ ;\ \|(x,y)\|_2 = 1\big\} \\ &= \max\big\{|ax+by| + |bx+ay|\ ;\ x^2+y^2 = 1\big\} \\ &= \max\big\{|a\cos(\theta) + b\sin(\theta)| + |b\cos(\theta) + a\sin(\theta)|\ ;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\big\}. \end{aligned}$$

Comme a et b sont de même signe, on a :

$$\begin{aligned} \|T\| &= \max\big\{a\cos(\theta) + b\sin(\theta) + b\cos(\theta) + a\sin(\theta)\ ;\ 0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}\big\} \\ &= (a+b)\max\big\{\cos(\theta) + \sin(\theta)\ ;\ 0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}\big\}. \end{aligned}$$

Soit $h(\theta) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$, alors h est dérivable et on a $h'(\theta) = \cos(\theta) - \sin(\theta)$, donc on a $\max_{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}} h(\theta) = h\big(\frac{\pi}{4}\big) = \sqrt{2}$. Par conséquent, on a $\|T\| = \sqrt{2}\,(a+b)$.
Deuxième cas : $i = 2$. On a :

$$\begin{aligned} \|T\| &= \max\big\{\|T(x,y)\|_2\ ;\ \|(x,y)\|_2 = 1\big\} \\ &= \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\sin(2\theta)} \\ &= a + b. \end{aligned}$$

Troisième cas : $i = \infty$. On a :

$$\begin{aligned} \|T\| &= \max\big\{\|T(x,y)\|_\infty\ ;\ \|(x,y)\|_2 = 1\big\} \\ &= \max\big\{\max(|a\cos(\theta) + b\sin(\theta)|, |b\cos(\theta) + a\sin(\theta)|)\ ;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\big\}. \end{aligned}$$

Comme a et b sont de même signe, alors on a :

$$\begin{aligned} \|T\| &= \max\big\{\max\big(a\cos(\theta) + b\sin(\theta), b\cos(\theta) + a\sin(\theta)\big)\ ;\ 0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}\big\} \\ &= \max\left(\max_{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}\{a\cos(\theta) + b\sin(\theta)\}, \max_{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}\{b\cos(\theta) + a\sin(\theta)\}\right). \end{aligned}$$

Soit $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$, alors on a $b\cos(\theta) + a\sin(\theta) = b\sin(\theta') + a\cos(\theta')$, d'où :

$$\|T\| = \max\left\{a\cos(\theta) + b\sin(\theta)\ ;\ 0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}\right\}.$$

Soit $h(\theta) = a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$, alors h est dérivable et on a $h'(\theta) = -a\sin(\theta) + b\cos(\theta)$, d'où $h'(\theta_0) = 0 \iff \tan(\theta_0) = \frac{b}{a}$. On a $1 + (\tan(\theta_0))^2 = \dfrac{1}{(\cos(\theta_0))^2}$, d'où $\cos(\theta_0) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. On a $\max\limits_{0<\theta<\frac{\pi}{2}} h(\theta) = h(\theta_0) = \cos(\theta_0)[a + b\tan(\theta_0)] = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\max\left(h(0), h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \max(a,b) \leq \sqrt{a^2+b^2}$. Par conséquent, on a $\|T\| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Exercice 6.66. On rappelle que l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'identifie canoniquement à $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p; \mathbb{K}^n)$ grâce aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. Ainsi, le choix de normes sur $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ définit une norme sur $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p; \mathbb{K}^n)$, il fournit ainsi une norme sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si on munit $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ de la norme $\|\ \|_1$, alors on a $\|A\| = \max\limits_{1\leq j\leq p} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

2. Montrer que si on munit $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ de la norme $\|\ \|_\infty$, alors on a $\|A\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{ij}|$.

3. Montrer que si on munit $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ de la norme $\|\ \|_2$, alors on a :

$$\frac{1}{\sqrt{np}}\left(\sum_{i,j=1}^{n,p} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|A\| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n,p} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Solution. On note $(e_j)_{1\leq j\leq q}$ la base canonique de $\mathbb{K}^q$.

1. On a $A\,e_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$, d'où $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \|A\,e_j\|_1 \leq \|A\|\,\|e_j\|_1 = \|A\|$. Par conséquent, on a $\max\limits_{1\leq j\leq p} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \|A\|$. Soit $x = \sum\limits_{j=1}^{p} x_j e_j \in \mathbb{K}^p$, alors on a $A\,x = \sum\limits_{j=1}^{p} x_j A\,e_j = \sum\limits_{j=1}^{p} x_j \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}e_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{p} x_j a_{ij}\right)e_i$, d'où $\|A\,x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}\left|\sum\limits_{j=1}^{p} x_j a_{ij}\right| \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p} |x_j|\,|a_{ij}| = \sum\limits_{j=1}^{p} |x_j|\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right) \leq \left(\max\limits_{1\leq j\leq p} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)\|x\|_1$. Donc on a $\|A\| \leq \max\limits_{1\leq j\leq p} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$. Par conséquent, on a $\|A\| = \max\limits_{1\leq j\leq p} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

2. Soit $x = \sum\limits_{j=1}^{p} x_j e_j \in \mathbb{K}^p$, comme ci-dessus, on a $A\,x = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{p} x_j a_{ij}\right)e_i$, d'où $\|A\,x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n}\left|\sum\limits_{j=1}^{p} x_j a_{ij}\right| \leq \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^{p} |x_j|\,|a_{ij}| \leq \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^{p} |a_{ij}|\,\|x\|_\infty = \left(\max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^{p} |a_{ij}|\right)\|x\|_\infty$. Donc on a $\|A\| \leq \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^{p} |a_{ij}|$. Soit $\varepsilon_{ij} = 1$ si $a_{ij} \geq 0$ et $\varepsilon_{ij} = -1$ si $a_{ij} \leq 0$, alors on a $\varepsilon_{ij}a_{ij} = |a_{ij}|$. Soient $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $x_k = \sum\limits_{j=1}^{p} \varepsilon_{kj}e_j$, alors on a $\|x_k\|_\infty = 1$ et $A\,x_k = \sum\limits_{j=1}^{p} \varepsilon_{kj}A\,e_j =$

$\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_{kj}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_{kj}a_{ij}\Big)e_i = \Big(\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_{kj}a_{kj}\Big)e_k + \sum_{i\neq k}\Big(\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_{kj}a_{ij}\Big)e_i =$ $\Big(\sum_{j=1}^{p}|a_{kj}|\Big)e_k + \sum_{i\neq k}\Big(\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_{kj}a_{ij}\Big)e_i$. D'où on a $\sum_{j=1}^{p}|a_{kj}| \leq \|A(x_k)\|_\infty \leq \|A\|$. Par conséquent, on a $\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}| \leq \|A\|$. Donc on a $\|A\| = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|$.

3. On a $|a_{ij}| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|Ae_j\|_2 \leq \|A\|\,\|e_j\|_2 = \|A\|$, d'où $\sum_{i,j=1}^{n,p}|a_{ij}|^2 \leq np\,\|A\|^2$. Donc on a $\frac{1}{\sqrt{np}}\Big(\sum_{i,j=1}^{n,p}|a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \|A\|$. Soit $x \in \mathbb{K}^p$ tel que $\|x\|_2 = 1$. On a $Ax = y$, avec $y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j$. D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a $|y_i| \leq \Big(\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^{p}|x_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$, donc $\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n,p}|a_{ij}|^2$. Par conséquent, on a $\|Ax\|_2 \leq \Big(\sum_{i,j=1}^{n,p}|a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$, d'où $\|A\| \leq \Big(\sum_{i,j=1}^{n,p}|a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 6.67. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $M_n(\mathbb{K})$ de la norme $\|[a_{ij}]\|_\infty = \max_{i,j}|a_{i,j}|$.

1. Déterminer la norme de la forme linéaire trace

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{tr}: & M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & [a_{ij}] & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{array}$$

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Calculer la norme de l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{R}_A: & M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ & M & \longmapsto & MA \end{array}$$

Solution. 1. Il est clair que tr est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$. On a $\big|\mathrm{tr}\big([a_{ij}]\big)\big| \leq \sum_{i=1}^{n}|a_{ii}| \leq n\|[a_{ij}]\|_\infty$, donc tr est continue et on a $\|\mathrm{tr}\| \leq n$. Soit I_n la matrice identité dans $M_n(\mathbb{K})$, alors on a $\|I_n\|_\infty = 1$ et $\mathrm{tr}(I_n) = n$, donc $\|\mathrm{tr}\| = n$.

2. Soient $A = [a_{ij}]$ et $M = [m_{ij}]$, alors on a $MA = [c_{ij}]$, avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}a_{kj}$, d'où $|c_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{n}|m_{ik}||a_{kj}| \leq \|M\|_\infty\sum_{k=1}^{n}|a_{kj}|$. Soit $\alpha = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$, alors on a $\|MA\|_\infty \leq \alpha\|M\|_\infty$, donc $\|\mathrm{R}_A\| \leq \alpha$. Pour tout $i,k \in \{1,\ldots,n\}$, il existe $\lambda_{ik} \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda_{ik}| = 1$ et $\lambda_{ik}a_{ik} = |a_{ik}|$. Pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, on pose $M_j \in M_n(\mathbb{K})$ définie par $M_j = [m_{ik}]$, avec $m_{ik} = 0$ si $i \neq 1$ et $m_{1k} = \lambda_{kj}$, alors on a $\|M_j\|_\infty = 1$ et $\|\mathrm{R}_A(M_j)\|_\infty \geq \sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$, d'où $\|\mathrm{R}_A\| \geq \sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$. Par conséquent, on a $\|\mathrm{R}_A\| = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$.

Exercice 6.68. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels muni de la norme $\|P\| = \sup\limits_{0\le k\le n} |a_k|$, si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$. On considère les applications linéaires de E suivantes :

$$D(P) = P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \quad \text{et} \quad \varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\, X^{k+1}\,.$$

1. Montrer que D n'est pas continue, mais φ est continue et calculer sa norme.
2. Déterminer $\varphi \circ D$ et $D \circ \varphi$.

Solution. 1. Pour tout $n \ge 1$, On a $\|X^n\| = 1$, $D(X^n) = n\,X^{n-1}$ et $\|D(X^n)\| = n$. Donc il n'existe aucune constante $A > 0$ telle que pour tout $P \in E$, on ait $\|D(P)\| \le A\|P\|$. Donc D n'est pas continue. On a $\|\varphi(P)\| = \sup\limits_{0\le k\le n} \left|\dfrac{a_k}{k+1}\right| \le \sup\limits_{0\le k\le n} |a_k| = \|P\|$, donc φ est continue et on a $\|\varphi\| \le 1$. On a $\varphi(1) = X$ et $\|\varphi(1)\| = \|X\| = 1$, donc $\|\varphi\| \ge 1$. Par conséquent, on a $\|\varphi\| = 1$.
2. On a $D \circ \varphi = \mathrm{id}_E$ et $\varphi \circ D = \mathrm{id}_E - \psi$, où $\psi\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, X^k\Big) = a_0\,.$

Exercice 6.69. On considère l'espace normé $E = (\ell^\infty, \|\ \|_\infty)$.

1. Soit S l'application « décalage » ou « shift » définie sur E par $S(x) = y$, où $y_n = x_{n-1}$ si $n \ge 1$ et $y_0 = 0$. Autrement dit, on a $S((x_0, x_1, x_2, \ldots)) = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots)$. Montrer que $S \in \mathscr{L}(E)$. L'application S est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer $T \in \mathscr{L}(E)$ telle que $T \circ S = id_E$. L'application T est-elle injective ? surjective ? Quelle est l'application $S \circ T$?

Solution. 1. Il est clair que S est linéaire et isométrique, donc $S \in \mathscr{L}(E)$ et est injective. Si $y = (1, 0, 0, \ldots)$, alors $y \in \ell^\infty$ et $y \notin S(\ell^\infty)$, donc S n'est pas surjective.
2. Pour tout $(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \ell^\infty$, on pose $T((x_0, x_1, x_2, \ldots)) = (x_1, x_2, \ldots)$, alors $T \in \mathscr{L}(E)$ et on a $T \circ S = id_E$, donc T est surjective. On a $T((1, 0, 0, \ldots)) = 0$, donc T n'est pas injective. On a $S \circ T((x_0, x_1, x_2, \ldots)) = (0, x_1, x_2, \ldots)$.

Exercice 6.70. On considère l'espace ℓ^∞ muni de la norme $\|\ \|_\infty$, et soit $T : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{K}$ une application linéaire telle que pour tout $x = (x_n)_{n\ge0} \in \ell^\infty$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T(x) = x_n$. On veut montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x = (x_n)_{n\ge0} \in \ell^\infty$, on ait $T(x) = x_p$.

1. Prouver que T est continue.
2. Montrer que la restriction de T à c_c est non nulle.
3. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $T(\mathbf{e}_p) = 1$.
4. Soit $G = \big\{x = (x_n)_{n\ge0} \in \ell^\infty\ ;\ x_n \in \{0, 1\},\ \text{pour tout } n \ge 0\big\}$. Montrer que pour tout $x = (x_n)_{n\ge0} \in G$, on a $T(x) = x_p$.
5. Montrer que $F = \mathrm{Vect}\{G\}$ est égal à l'ensemble des $x \in \ell^\infty$ d'image finie.
6. Montrer que F est dense dans ℓ^∞ et conclure.

Solution. Soit $x = (x_n)_{n\ge0} \in \ell^\infty$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T(x) = x_n$, d'où $|T(x)| = |x_n| \le \|x\|_\infty$. Donc T est continue et on a $\|T\| \le 1$. On a même $\|T\| = 1$ car $T(1) = 1$.
2. Si $T_{|c_c} = 0$, alors $T_{|c_0} = 0$ car c_c est dense dans c_0. Mais si $x_0 = 1$ et $x_n = \frac{1}{n}$ si $n \ge 1$, alors $x = (x_n)_{n\ge0} \in c_0$ et $T(x) \ne 0$. Donc la restriction de T à c_c est non nulle.
3. Puisque $T_{|c_c} \ne 0$, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $T(\mathbf{e}_p) \ne 0$. Or $T(\mathbf{e}_p) \in \{0, 1\}$, donc on a $T(\mathbf{e}_p) = 1$.
4. Soit $x = (x_n)_{n\ge0} \in G$.

Premier cas. Si $x_p = 0$, alors on a $\|x+\mathbf{e}_p\|_\infty = 1$, d'où $|T(x)+1| = |T(x+\mathbf{e}_p)| \le \|x+\mathbf{e}_p\|_\infty = 1$. Or on a $T(x) \in \{0,1\}$, d'où $T(x) = 0 = x_p$.
Deuxième cas. Si $x_p \neq 0$, alors $x_p = 1$, d'où $x - x_p\mathbf{e}_p \in G$ et on applique le premier cas, on obtient $T(x - x_p\mathbf{e}_p) = 0$. Donc on a $T(x) = x_p$.
5. Soit $F = \mathrm{Vect}\{G\}$, le sous-espace vectoriel de ℓ^∞ engendré par G. Il est clair que si $x \in F$, alors x est d'image finie. Réciproquement, si $x = (x_n)_{n\ge 0} \in \ell^\infty$ est d'image finie, alors $\{x_n \;;\; n \ge 0\} = \{a_0, \dots, a_N\}$, avec $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. Soit $A_i = \{n \ge 0 \;;\; x_n = a_i\}$. Soit $\alpha^i = (\alpha_{n,i})_{n\ge 0}$ défini par $\alpha_{n,i} = 1$ si $n \in A_i$ et $\alpha_{n,i} = 0$ si $n \notin A_i$. Alors $\alpha^i \in G$ et on a $x = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} a_i\alpha^i$, donc $x \in F$.
6. Soient $x = (x_n)_{n\ge 0} \in \ell^\infty$ et $\varepsilon > 0$. Pour montrer que F est dense dans ℓ^∞, il suffit de trouver $a = (a_n)_{n\ge 0} \in F$ tel que $\|a - x\|_\infty < \varepsilon$. Comme F est un sous-espace vectoriel, on peut supposer que pour tout $n \ge 0$, on ait $x_n \ge 0$. Soit $r = \|x\|_\infty$, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{r}{N} < \varepsilon$. Soit $A_0 = \{n \ge 0 \;;\; x_n = 0\}$ et pour tout $k \in \{1, \dots, N-1\}$, soit $A_k = \left\{n \ge 0 \;;\; \frac{kr}{N} < x_n \le \frac{(k+1)r}{N}\right\}$, alors les A_k sont deux à deux disjoints et on a $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{N} A_k = \mathbb{N}$. Pour tout $n \in A_k$, soit $a_n = \frac{kr}{N}$, alors $a = (a_n)_{n\ge 0} \in F$ et on a $\|a - x\|_\infty \le \frac{r}{N} < \varepsilon$. Donc F est dense dans ℓ^∞.
Puisque T et l'application $x = (x_n)_{n\ge 0} \longmapsto x_p$ sont continues de ℓ^∞ dans $\mathbb{K}$ et coïncident sur F, on déduit de la proposition 1.5.5 que pour tout $x \in \ell^\infty$, on a $T(x) = x_p$.

Exercice 6.71. On considère l'espace normé $(\ell^\infty, \|\;\|_\infty)$. Soient $F = \big\{x = (x_n)_{n\ge 0} \in \ell^\infty \;;\; 0 < x_n < 1\,,\ \text{pour tout } n \ge 0\big\}$ et $a = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\ge 0} \in \ell^\infty$.

1. Vérifier que F n'est pas fermé dans ℓ^∞.
2. Déterminer $d(a, F)$.

Solution. 1. Pour $k \ge 2$, soit $X_k = \left(1 - \frac{1}{k}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right)$, alors on a $X_k \in F$ et la suite $(X_k)_{k\ge 2}$ converge vers l'élément $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right) \notin F$, donc F n'est pas fermé dans ℓ^∞.
2. Pour $k \ge 2$, soit $a_k = \left(1 - \frac{1}{k}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$, alors on a $a_k \in F$ et la suite $(a_k)_{k\ge 2}$ converge vers a, donc on a $d(a, F) = 0$.

Exercice 6.72. On considère l'espace normé $E = C([0,\,1])$ muni de la norme $\|\;\|_1$. Montrer que les applications linéaires T suivantes sont continues. Calculer leur norme d'opérateur $\|T\|$ et voir si elle est atteinte sur la sphère unité $\{f \in E \;;\; \|f\|_1 = 1\}$.

1. $$\begin{array}{rccc} T: & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & T(f) \end{array}$$
   où $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, pour tout $x \in [0,\,1]$.
2. $$\begin{array}{rccc} T: & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \end{array}$$
3. $$\begin{array}{rccc} T: & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(y)\,dy - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(y)\,dy \end{array}$$

Solution. 1. On a $\|T(f)\|_1 = \int_0^1 |T(f)(x)|\,dx = \int_0^1 \Big|\int_0^x f(t)\,dt\Big|\,dx \le \int_0^1 \Big(\int_0^x |f(t)|\,dt\Big)\,dx \le \int_0^1 \Big(\int_0^1 |f(t)|\,dt\Big)\,dx = \int_0^1 \|f\|_1\,dx = \|f\|_1$, donc T est continue et on a $\|T\| \le 1$. Pour tout $n \ge 1$, soit $f_n(t) = (n+1)(1-t)^n$, alors on a $\|f_n\|_1 = 1$ et $T(f_n)(x) = 1-(1-x)^{n+1} \ge 0$, donc on a $\|T(f_n)\|_1 = 1 - \frac{1}{n+2}$. Or pour tout $n \ge 1$, on a $\|T\| \ge \|T(f_n)\|_1$, d'où $\|T\| = 1$.
S'il existe $f \in E$ telle que $\|f\|_1 = 1$ et $\|T\| = \|T(f)\|_1$, alors de l'inégalité :

$$\|T(f)\|_1 \le \int_0^1 \Big(\int_0^x |f(t)|\,dt\Big)\,dx \le \int_0^1 \Big(\int_0^1 |f(t)|\,dt\Big)\,dx = \|f\|_1\,,$$

on déduit que pour tout $x \in [0,\,1]$, on a $\int_0^1 |f(t)|\,dt = \int_0^x |f(t)|\,dt$. Donc, pour tout $t \in [0,\,1]$, on a $f(t) = 0$, ce qui est impossible. Par conséquent, il n'existe aucune $f \in E$ telle que $\|f\|_1 = 1$ et $\|T\| = \|T(f)\|_1$.
2. On a $|T(f)| = \Big|\int_0^1 f(t)\,dt\Big| \le \int_0^1 |f(t)|\,dt = \|f\|_1$, donc T est continue et on a $\|T\| \le 1$. Soit $f(t) = 2t$, pour tout $t \in [0,1]$, alors on a $\|f\|_1 = 1$ et on a $T(f) = 1$. Par conséquent, on a $\|T\| = 1 = |T(f)|$.
3. On a $|T(f)| = \Big|\int_0^{\frac12} f(t)\,dt - \int_{\frac12}^1 f(t)\,dt\Big| \le \Big|\int_0^{\frac12} f(t)\,dt\Big| + \Big|\int_{\frac12}^1 f(t)\,dt\Big| \le \int_0^{\frac12} |f(t)|\,dt + \int_{\frac12}^1 |f(t)|\,dt = \int_0^1 |f(t)|\,dt = \|f\|_1$, donc T est continue et on a $\|T\| \le 1$. Pour tout $t \in [0,1]$, soit $g(t) = 2(1-2t)$, alors $g \in E$ et on a $T(g) = \|g\|_1 = 1$, donc on a $\|T\| = 1 = |T(g)|$.

Exercice 6.73. Considérons l'espace normé $E = (C([0,\,1],\mathbb{R}),\,\|\ \|_1)$. Soient $h \in E$ et $\varphi_h(f) = \int_0^1 f(t)h(t)dt$, pour tout $f \in E$. Montrer que φ_h est forme linéaire continue sur E et calculer sa norme.
Solution. Il est clair que φ est une forme linéaire sur E. On a :

$$|\varphi_h(f)| = \Big|\int_0^1 f(t)h(t)dt\Big| \le \int_0^1 |f(t)|\,|h(t)|\,dt \le \|f\|_1\,\|h\|_\infty\,.$$

Donc φ_h est continue et on a $\|\varphi_h\| \le \|h\|_\infty$. Si $\|\varphi_h\| < \|h\|_\infty$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|\varphi_h\| + \varepsilon < \|h\|_\infty$. Comme $[0,\,1]$ est compact et h est continue, alors il existe $a \in [0,\,1]$ tel que $\|h\|_\infty = |h(a)|$. Par conséquent, il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [t_0 - 2\alpha,\, t_0 + 2\alpha] \subset [0,\,1]$, et pour tout $t \in I$, on ait $\|\varphi_h\| + \varepsilon < |h(t)|$. Notons que h est de signe constant sur I. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac1n < \alpha$, soit f_n une fonction affine telle que $f_n = 0$ sur $[0,\,1] \setminus \big[t_0 - (\alpha + \frac1n),\, t_0 + (\alpha + \frac1n)\big]$ et $f_n = \dfrac{\mathrm{sign}(h)}{2\alpha}$ sur $[t_0 - \alpha,\, t_0 + \alpha]$. Alors on a $\|f_n\|_1 = 1 + \frac{1}{2\alpha n}$ et

$$\|\varphi_h\| + \varepsilon \le \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} f_n(t)h(t)dt \le \int_0^1 f_n(t)h(t)dt = \varphi_h(f_n) \le \|\varphi_h\|\,\|f_n\|_1 = \|\varphi_h\|\left(1 + \tfrac{1}{2\alpha n}\right).$$

On fait tendre n vers l'infini, on obtient $\|\varphi_h\| + \varepsilon \le \|\varphi_h\|$, ce qui est impossible. Donc on a $\|h\|_\infty \le \|\varphi_h\|$, d'où $\|\varphi_h\| = \|h\|_\infty$.

Exercice 6.74. Soit $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ définie par $T(x) = \big((1 - \frac{1}{n+1})x_n\big)_{n\ge0}$, où $x = (x_n)_{n\ge0} \in \ell^2$. Montrer que T est linéaire continue qui n'atteint pas sa norme.

Solution. Il est clair que T est linéaire continue et que l'on a $\|T\| = 1$. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, non nul, on a $\|T(x)\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(1 - \frac{1}{n+1}\big)^2 |x_n|^2 < \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 = \|x\|_2^2$. On en déduit que T n'atteint pas sa norme.

Exercice 6.75. Donner un exemple d'un espace normé $(E, \|\ \|)$ et d'une forme linéaire continue f sur E telle que $\|f\| = 1$ et $|f(x)| < \|x\|$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Solution. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(1 - \frac{1}{n+1}\big) x_n$. Alors f est une forme linéaire continue sur ℓ^1 telle que $\|f\| = 1$ et $|f(x)| < \|x\|_1$ pour tout $x \in \ell^1 \setminus \{0\}$.

Exercice 6.76. Soit $E = \Big\{ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})\, ;\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty \Big\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel et que $f \longmapsto \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$ est une norme sur E.
2. Étudier la convergence de la série de terme général f_n défini par $f_n(t) = e^{-n\sqrt{|t|}}$. En déduire que E n'est pas de Banach.
3. Pour $a > 0$, on pose $T_a(f) = \dfrac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f(t)\, dt$. Montrer que T_a est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme.
4. Calculer $T(f) = \lim_{a\to 0} T_a(f)$. Montrer que T définit une forme linéaire sur E. Est-ce que T est continue ?

Solution. 1. Il résulte des propriétés de l'intégrale généralisée que E est un espace vectoriel et que $f \longmapsto \|f\|_1$ est une norme sur E.
2. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\sqrt{|t|}}\, dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-n\sqrt{t}}\, dt \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{n}} e^{-n\sqrt{|t|}}\, dt + 2\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} e^{-n\sqrt{|t|}}\, dt \\
&\leq \tfrac{2}{n}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{|t|}}\, dt + \frac{4!2}{n^4}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt \\
&= \tfrac{4}{n\sqrt{n}} + \tfrac{4!2}{n^3}\,.
\end{aligned}$$

Donc la série de terme général f_n est normalement convergente dans $(E, \|\ \|_1)$. Pour montrer que $(E, \|\ \|_1)$ n'est pas de Banach, d'après le théorème 6.7.1, il suffit de montrer que la série de terme général f_n n'est pas convergente dans $(E, \|\ \|_1)$. Si la série $\sum f_n$ est convergente dans $(E, \|\ \|_1)$, alors il existe $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\, dt < \infty$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, on ait :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big| \sum_{k=1}^{n} f_k(t) \ - g(t) \Big|\, dt = \Big\| \sum_{k=1}^{n} f_k \ - g \Big\|_1 < \varepsilon\,.$$

Soit $\alpha > 0$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \Big|\sum_{k=1}^{n} f_k(t) \, - g(t)\Big| \, dt < \varepsilon$. Si $t \in [\alpha, +\infty[$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{e^{\sqrt{t}}}\right)^k = \frac{1}{e^{\sqrt{t}}-1} - \frac{1}{e^{n\sqrt{t}}}\frac{1}{e^{\sqrt{t}}-1}$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^{+\infty} \Big|\frac{1}{e^{\sqrt{t}}-1} \, - g(t)\Big| \, dt &= \int_\alpha^{+\infty} \Big|\frac{1}{e^{\sqrt{t}}-1} \, - g(t) - \frac{1}{e^{n\sqrt{t}}}\frac{1}{e^{\sqrt{t}}-1}\Big| \, dt + \int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{e^{n\sqrt{t}}}\frac{1}{e^{\sqrt{t}}-1} \, dt \\
&< \varepsilon + \int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{e^{n\sqrt{t}}}\frac{1}{e^{\sqrt{t}}-1} \, dt \\
&\leq \varepsilon + \frac{4!2}{n^4\alpha^2} \, .
\end{aligned}$$

Soit $n \geq N$ tel que $\frac{4!2}{n^4\alpha^2} < \varepsilon$. Alors on a $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \Big|\frac{1}{e^{\sqrt{t}}-1} \, - g(t)\Big| \, dt < 2\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, d'où on a $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \Big|\frac{1}{e^{\sqrt{t}}-1} \, - g(t)\Big| \, dt = 0$, donc $g(t) = \dfrac{1}{e^{\sqrt{t}}-1}$ pour tout $t \in [\alpha, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, donc, pour tout $t > 0$, on a $g(t) = \dfrac{1}{e^{\sqrt{t}}-1}$. On en déduit que g n'est pas continue en 0, ce qui est impossible. Donc la série $\sum f_n$ n'est pas convergente dans $(E, \| \, \|_1)$. Par conséquent, $(E, \| \, \|_1)$ n'est pas de Banach.

3. Il est clair que T_a est linéaire. On a :

$$|T_a(f)| \leq \tfrac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |f(t)| \, dt \leq \tfrac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, dt = \tfrac{1}{2a} \|f\|_1 \, .$$

Donc T_a est continue et on a $\|T_a\| \leq \frac{1}{2a}$. Pour tout $n \geq 1$, soit f_n une fonction affine telle que $f_n = 0$ sur $\big] - \infty, -\frac{1}{n} - a\big] \cup \big[\frac{1}{n} + a, +\infty\big[$ et $f_n = 1$ sur $[-a, a]$, alors on a $\|f_n\|_1 = 2a + \frac{1}{n}$ et $T_a(f_n) = 1$. Comme on a $\|T_a\| \geq \dfrac{T_a(f_n)}{\|f_n\|_1}$ pour tout $n \geq 1$, alors $\|T_a\| \geq \frac{1}{2a}$. Par conséquent, on a $\|T_a\| = \frac{1}{2a}$.

4. D'après le théorème de la moyenne, on a $\displaystyle\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(t) \, dt = f(c_a)$, avec $c_a \in [-a, a]$, d'où on a $T(f) = \lim\limits_{a \to 0} T_a(f) = f(0)$. Il est clair que T est linéaire. Pour tout $n \geq 1$, soit f_n une fonction affine telle que $f_n = 0$ sur $\big]-\infty, -\frac{1}{n}\big] \cup \big[\frac{1}{n}, +\infty\big[$ et $f_n(0) = n$, alors on a $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n}$ et $T(f_n) = n$. Donc T n'est pas continue.

Exercice 6.77. Soient $(E, \| \, \|)$ un espace normé et $a \in E$. Soit A un sous-ensemble borné de E tel que $a \in A$ et A est symétrique par rapport à a ; autrement dit, si $x \in A$ et $y \in E$ tels que $\dfrac{x+y}{2} = a$, alors on a $y \in A$.

1. Soit $A_1 = \big\{x \in A \; ; \; \|x - y\| \leq \frac{\delta(A)}{2} \, , \text{ pour tout } y \in A\big\}$. Montrer que $a \in A_1$ et que A_1 est symétrique par rapport à a.
2. Pour tout $n > 1$, on pose $A_n = \big\{x \in A_{n-1} \; ; \; \|x - y\| \leq \frac{\delta(A_{n-1})}{2} \, , \text{ pour tout } y \in A_{n-1}\big\}$. Montrer que $\delta(A_n) \leq \frac{\delta(A_{n-1})}{2}$ et que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{a\}$.
3. En déduire que a est unique.

Solution. 1. Soit $x \in A$, alors il existe $y \in A$ tel que $\frac{x+y}{2} = a$, d'où on a $x - a = a - y$ et $x - y = x - a + a - y = 2(x - a)$. Donc on a $\|x - a\| = \frac{1}{2}\|x - y\| \leq \frac{1}{2}\delta(A)$. Par conséquent, on a $a \in A_1$. Soient $x \in A_1$ et $y \in E$ tels que $\frac{x+y}{2} = a$. Puisque $A_1 \subset A$ et A est symétrique par rapport à a, alors $y \in A$. Soit $z \in A$, alors il existe $z' \in A$ tels que $\frac{z+z'}{2} = a = \frac{x+y}{2}$, d'où on a $y - z = x - z'$ et $\|y - z\| = \|x - z'\| \leq \frac{1}{2}\delta(A)$ car $x \in A_1$. Donc on a $y \in A_1$. Par conséquent, A_1 est symétrique par rapport à a.
2. Il résulte de 1 que pour tout $n > 1$, $a \in A_n$ et A_n est symétrique par rapport à a. Donc on a $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Pour tout $x, y \in A_n$, on a $\|x - y\| \leq \frac{\delta(A_{n-1})}{2}$, on en déduit que $\delta(A_n) \leq \frac{\delta(A_{n-1})}{2}$, donc on a $\delta(A_n) \leq \frac{\delta(A)}{2^n}$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta(A_n) = 0$. Soit $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, alors pour tout $n \geq 1$, on a $\|x - a\| \leq \delta(A_n)$. On fait tendre n vers $+\infty$, on obtient $x = a$, donc on a $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{a\}$.
3. Ceci résulte de ce qui précède.

Exercice 6.78. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé et $a, b \in E$. On note B_1 l'ensemble des points x de E tels que $\|x - a\| = \|x - b\| = \dfrac{\|a - b\|}{2}$.

1. Montrer que $\frac{a+b}{2} \in B_1$, B_1 est symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$ et que $\delta(B_1) \leq \|a - b\|$.
2. Donner un exemple où B_1 n'est pas réduit à $\frac{a+b}{2}$ et que $\delta(B_1) = \|a - b\|$.
3. Pour $n > 1$, soit B_n l'ensembles des points x des B_{n-1} tels que pour tout $y \in B_{n-1}$, on ait $\|x - y\| \leq \dfrac{\delta(B_{n-1})}{2}$. Montrer que pour tout $n > 1$, on a $\delta(B_n) \leq \dfrac{\delta(B_{n-1})}{2}$, puis que l'intersection de tous les B_n est réduite à $\frac{a+b}{2}$.
4. Déduire que toute application isométrique surjective f d'un espace normé réel E sur un espace normé réel F s'écrit $f(x) = g(x) + c$, où g est une application linéaire, isométrique et surjective de E dans F, et c est un point de F.

Solution. 1. On a $\frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$ et $\frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$, d'où $\left\|\frac{a+b}{2} - a\right\| = \left\|\frac{a+b}{2} - b\right\| = \dfrac{\|a - b\|}{2}$, donc on a $\frac{a+b}{2} \in B_1$. Il est clair que $\delta(B_1) \leq \|a - b\|$. Soient $x \in B_1$ et $y \in E$ tels que $\frac{x+y}{2} = \frac{a+b}{2}$, alors on a $y - a = b - x$ et $y - b = a - x$, d'où $\|y - a\| = \|y - b\| = \frac{\|a-b\|}{2}$, donc on a $y \in B_1$. Par conséquent, B_1 est symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$.
2. Il suffit de prendre $E = \mathbb{R}^2$, avec la norme $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$, $a = (0, 0)$ et $b = (2, 0)$. Alors on a $B_1 = \{(1, y)\ ;\ -1 \leq y \leq 1\}$ et $\delta(B_1) = \|a - b\|$.
3. Ceci résulte de l'exercice précédent.
4. On suppose E un espace normé réel, et soient $(F, \| \ \|')$ un espace normé réel et $f : E \longrightarrow F$ une application isométrique surjective. Soient $g(x) = f(x) - f(0)$. Alors g est une application isométrique surjective de E dans F et on a $g(0) = 0$. Montrons que g est linéaire. D'après la proposition 6.3.7, il suffit de montrer que pour tout $a, b \in E$, on a $g(a + b) = g(a) + g(b)$. Soient $a, b \in E$ et B_n comme ci-dessus, alors on a $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \left\{\frac{a+b}{2}\right\}$. Puisque g est injective, on a $g\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} g(B_n)$. On a $g(B_1) = \left\{g(x)\ ;\ \|x - a\| = \|x - b\| = \dfrac{\|a - b\|}{2}\right\}$. Or g est isométrique, alors on $g(B_1) = \left\{g(x)\ ;\ \|g(x) - g(a)\| = \|g(x) - g(b)\| = \dfrac{\|g(a) - g(b)\|}{2}\right\}$. Puisque g est surjective, alors on a $g(B_1) = \left\{z \in F\ ;\ \|z - g(a)\| = \|z - g(b)\| = \dfrac{\|g(a) - g(b)\|}{2}\right\}$. Soit $F_1 = g(B_1)$. Pour tout $n > 1$, on pose $F_n = \left\{z \in F_{n-1}\ ;\ \|z - y\| \leq \frac{\delta(F_{n-1})}{2},\ \text{pour tout } y \in F_{n-1}\right\}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a $g(B_n) = F_n$. On a $g(B_1) = F_1$ et supposons que l'on a $g(B_{n-1}) = F_{n-1}$. On a $B_n = \Big\{x \in B_{n-1} \ ; \ \|x-y\| \leq \frac{\delta(B_{n-1})}{2}$, pour tout $y \in B_{n-1}\Big\}$. Puisque g est une application isométrique, alors on a $g(B_n) = \Big\{g(x) \in B_{n-1} \ ; \ \|g(x)-g(y)\| \leq \dfrac{\delta(g(B_{n-1}))}{2}$, pour tout $g(y) \in g(B_{n-1})\Big\}$, donc on a $g(B_n) = F_n$. D'après 3, on a $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} g(B_n) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \big\{\frac{g(a)+g(b)}{2}\big\}$. Par conséquent, pour tout $a, b \in E$, on a $g\big(\frac{a+b}{2}\big) = \frac{g(a)+g(b)}{2}$. En remplaçant b par 0, sachant que $g(0) = 0$, on obtient que pour tout $a \in E$, $g\big(\frac{a}{2}\big) = \frac{g(a)}{2}$. On en déduit que pour tout $a, b \in E$, on a $\frac{g(a+b)}{2} = g\big(\frac{a+b}{2}\big) = \frac{g(a)+g(b)}{2}$, donc on a $g(a+b) = g(a)+g(b)$. Par conséquent, g est linéaire.

Exercice 6.79. Soient $(E, \| \ \|)$ et $(F, \| \ \|')$ deux espaces normés et $f \in \mathscr{L}(E; F)$ injective. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f est une application isométrique surjective ;

(ii) $f(B'(0,1)) = B'(0,1)$;

(iii) $f(S(0,1)) = S(0,1)$;

(iv) $f(B(0,1)) = B(0,1)$.

Solution. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est claire. Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Par hypothèse, on a $f(B'(0,1)) = B'(0,1)$. Soit $y \in F$ tel que $\|y\|' = 1$, alors il existe $x \in E$ tel que $0 < \|x\| \leq 1$ et $f(x) = y$, d'où $\dfrac{y}{\|x\|} = f\Big(\dfrac{x}{\|x\|}\Big) \in B'(0,1)$ car $\dfrac{x}{\|x\|} \in B'(0,1)$. Donc on a $\dfrac{\|y\|'}{\|x\|} = \Big\|\dfrac{y}{\|x\|}\Big\|' \leq 1$, d'où $1 = \|y\|' \leq \|x\| \leq 1$. Par conséquent, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $f(x) = y$, d'où on a $S(0,1) \subset f(S(0,1))$. Il reste à montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Alors $f(x) \neq 0$ et on a $\Big\|f\Big(\dfrac{x}{\|f(x)\|'}\Big)\Big\|' = 1$. Donc il existe $z \in E$ tel que $\|z\| = 1$ et $f(z) = f\Big(\dfrac{x}{\|f(x)\|'}\Big)$. Comme f est injective, alors on a $z = \dfrac{x}{\|f(x)\|'}$, donc on a $\|f(x)\|' = 1$, d'où $f(S(0,1)) \subset S(0,1)$. Par conséquent, on a $f(S(0,1)) = S(0,1)$.
Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (iv). On a $f(S(0,1)) = S(0,1)$, d'où $\|f\| = 1$, donc on a $f(B(0,1)) \subset B(0,1)$. Réciproquement, soit $y \in F$ tel que $\|y\|' < 1$ et $y \neq 0$. Alors on a $\Big\|\dfrac{y}{\|y\|'}\Big\|' = 1$. Donc il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $f(x) = \dfrac{y}{\|y\|'}$, d'où on a $f(\|y\|' x) = y$. Or on a $\| \|y\|' x\| = \|y\|' \|x\| = \|y\|' < 1$, donc $B(0,1) \subset f(B(0,1))$. Par conséquent, on a $f(B(0,1)) = B(0,1)$.
Montrons l'implication (iv) $\Longrightarrow$ (i). Soit y un élément non nul de F, alors $\Big\|\dfrac{y}{2\|y\|'}\Big\|' = \frac{1}{2} < 1$. Donc il existe $x \in B(0,1)$ tel que $f(x) = \dfrac{y}{2\|y\|'}$, d'où $f(2\|y\|' x) = y$. Donc f est surjective. Il reste à montrer que f est isométrique. Soit x un élément non nul de E. Pour tout $n \geq 1$, on a $\big(1-\frac{1}{n}\big)\dfrac{x}{\|x\|} \in B(0,1)$, donc $\big(1-\frac{1}{n}\big)\dfrac{1}{\|x\|}\|f(x)\|' = \Big\|f\Big(\big(1-\frac{1}{n}\big)\dfrac{x}{\|x\|}\Big)\Big\|' < 1$, d'où on a $\big(1-\frac{1}{n}\big)\|f(x)\|' < \|x\|$. On fait tendre n vers $+$ l'infini, on obtient $\|f(x)\|' \leq \|x\|$. Si $\|f(x)\|' < \|x\|$, alors on a $\Big\|f\Big(\dfrac{x}{\|x\|}\Big)\Big\|' < 1$. Donc il existe $z \in E$ tel que $\|z\| < 1$ et $f(z) = f\Big(\dfrac{x}{\|x\|}\Big)$. Comme f est injective, on en déduit que $z = \dfrac{x}{\|x\|}$, ce qui est impossible car $\Big\|\dfrac{x}{\|x\|}\Big\| = 1$. Donc on a $\|f(x)\|' = \|x\|$. Par conséquent, f est aussi une application isométrique.

Exercice 6.80. Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace normé. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathscr{L}(\mathbb{K}; E) & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & f(1) \end{array}$$

est linéaire, bijective et isométrique.
Solution. Il est clair que T est linéaire. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}; E)$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $f(\lambda) = f(\lambda\, 1) = \lambda\, f(1)$, d'où $\|f\| = \sup\limits_{|\lambda|=1} \|f(\lambda)\| = \sup\limits_{|\lambda|=1} \|\lambda\, f(1)\| = \|f(1)\| = \|T(f)\|$. Par conséquent, T est isométrique. Il reste à vérifier que T est surjective. Soit $x \in E$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, soit $f(\lambda) = \lambda\, x$, alors $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}; E)$ et on a $T(f) = f(1) = x$, donc T est surjective.

Exercice 6.81. **[Transformation d'Abel]** Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé, $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite finie dans E et $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite finie dans $\mathbb{K}$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $b_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$.

Montrer que l'on a $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\, a_k = \lambda_n\, b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1})\, b_k$.
Solution. On a $b_1 = a_1$ et $b_k - b_{k-1} = a_k$ si $2 \leq k \leq n$, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, a_k &= \lambda_1\, b_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k\, (b_k - b_{k-1}) \\ &= \lambda_1\, b_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k\, b_k - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k\, b_{k-1} \\ &= \lambda_1\, b_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k\, b_k - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{k+1}\, b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, b_k - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{k+1}\, b_k \\ &= \lambda_n\, b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1})\, b_k\,. \end{aligned}$$

Exercice 6.82. **[Théorème d'Abel]** Soient $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach, $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dans E et $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de nombres positifs telles que :

1. Il existe $M > 0$ tel que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on ait $\|x_n + \cdots + x_{n+p}\| \leq M$.
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n = 0$.

Montrer que la série $\sum \lambda_n\, x_n$ est convergente et que pour tout $n \geq 0$, on a $\left\| \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \lambda_k\, x_k \right\| \leq \lambda_n\, M$.

Solution. Puisque E est un espace de Banach, il suffit de montrer que la série $\sum \lambda_n\, x_n$ vérifie le critère de Cauchy. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ et on pose $y_k = \sum\limits_{i=n}^{k} x_i$ si $n \leq k \leq n + p$. On applique la transformation d'Abel aux suites finies $(x_n)_{n\leq k\leq n+p}$ et $(\lambda_n)_{n\leq k\leq n+p}$, on obtient :

$$\sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k\, x_k = \lambda_{n+p}\, y_{n+p} + \sum_{k=n}^{n+p-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1})\, y_k$$

d'où on a :

$$\Big\| \sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k\, x_k \Big\| \leq \lambda_{n+p}\, M + \sum_{k=n}^{n+p-1} |\lambda_k - \lambda_{k+1}|\, M = \lambda_{n+p}\, M + \sum_{k=n}^{n+p-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1})\, M = \lambda_n\, M\,.$$

Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$, on en déduit que la série $\sum \lambda_n\, x_n$ vérifie le critère de Cauchy, donc convergente. Comme pour tout $p \geq 0$, on a $\Big\| \sum\limits_{k=n}^{n+p} \lambda_k\, x_k \Big\| \leq \lambda_n\, M$, alors $\Big\| \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \lambda_k\, x_k \Big\| \leq \lambda_n\, M$.

Exercice 6.83. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach, $\sum x_n$ une série convergente dans E et $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de nombres positifs. Montrer que l'on a :

1. Il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on ait $\Big\| \sum\limits_{k=n}^{n+p} x_k \Big\| \leq M\,.$
2. La série $\sum \mu_n\, x_n$ est convergente.
3. Pour tout $n \geq 0$, on a $\Big\| \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mu_k\, x_k \Big\| \leq \mu_n\, M$.

Solution. Puisque la série $\sum x_n$ est convergente, elle est de Cauchy, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on ait $\Big\| \sum\limits_{k=n}^{n+p} x_k \Big\| < \varepsilon$. On en déduit les propriétés suivantes :

(i) il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on ait $\Big\| \sum\limits_{k=n}^{n+p} x_k \Big\| \leq M$;

(ii) si on pose $\alpha_n = \sup\Big\{ \Big\| \sum\limits_{k=n}^{n+p} x_k \Big\| \ ;\ p \in \mathbb{N} \Big\}$, alors la suite de nombres positifs $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est majorée par M et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0\,.$

Comme dans l'exercice 6.82, on montre que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on a $\Big\| \sum\limits_{k=n}^{n+p} \mu_k\, x_k \Big\| \leq \mu_n\, \alpha_n \leq \mu_n\, M$. On a $0 \leq \mu_n\, \alpha_n \leq \mu_0\, \alpha_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, on en déduit que la série série $\sum \mu_n\, x_n$ est de Cauchy, donc elle est convergente dans E, et que pour tout $n \geq 0$, on a $\Big\| \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mu_k\, x_k \Big\| \leq \mu_n\, M$.

Exercice 6.84. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach, $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de E et $(\lambda_i)_{i\in I} \in \ell^\infty(I)$. Montrer que la famille $(\lambda_i x_i)_{i\in I}$ est sommable.

Solution. D'après la remarque 6.7.3, on peut supposer que pour tout $i \in I$, $\lambda_i \geq 0$. Comme $(\lambda_i)_{i\in I}$ est bornée, il existe $r > 0$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $|\lambda_i| \leq r$. Pour montrer que $(\lambda_i x_i)_{i\in I}$ est sommable, il suffit de vérifier que $(\lambda_i x_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, comme $(x_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy, il existe une partie finie J_ε de I telle que pour toute partie finie K de I vérifiant $K\cap J_\varepsilon=\emptyset$, on ait $\Big\|\sum_{i\in K}x_i\Big\|<\dfrac{\varepsilon}{2r}$. Soit J une partie finie de I telle que $J\cap J_\varepsilon=\emptyset$. Soient $n=\mathrm{Card}(J)$ et $\varphi:\{1,\dots,n\}\longrightarrow J$ une application bijective telle que l'application $p\longmapsto\lambda_{\varphi(p)}$ soit croissante. D'après la transformation d'Abel, exercice 6.81, on a :

$$\sum_{i\in J}\lambda_i x_i=\sum_{p=1}^{n}\lambda_{\varphi(p)}x_{\varphi(p)}=\lambda_{\varphi(n)}x_{\varphi(n)}+\sum_{p=1}^{n-1}\big(\lambda_{\varphi(p)}-\lambda_{\varphi(p+1)}\big)x_{\varphi(p)}\,.$$

D'où on a :

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i\in J}\lambda_i x_i\Big\| &\le \lambda_{\varphi(n)}\|x_{\varphi(n)}\|+\sum_{p=1}^{n-1}\big(\lambda_{\varphi(p+1)}-\lambda_{\varphi(p)}\big)\|x_{\varphi(p)}\|\\ &< \frac{r\varepsilon}{2r}+\frac{\varepsilon}{2r}\sum_{p=1}^{n-1}\big(\lambda_{\varphi(p+1)}-\lambda_{\varphi(p)}\big)\,.\end{aligned}$$

Or on a $\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}\big(\lambda_{\varphi(p+1)}-\lambda_{\varphi(p)}\big)=\lambda_{\varphi(n)}-\lambda_{\varphi(1)}\le\lambda_{\varphi(n)}\le r$. Donc on a $\Big\|\sum_{i\in J}\lambda_i x_i\Big\|<\varepsilon$. Par conséquent, la famille $(\lambda_i x_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy, donc $(\lambda_i x_i)_{i\in I}$ est sommable.

Exercice 6.85. Soit $a\in\mathbb{R}$. Montrer que la famille $\big((1+n^2+m^2)^a\big)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si $a<-1$.

Solution. Pour tout $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, on a $0\le 1+n^2+m^2\le(1+n+m)^2$. D'après l'inégalité de Hölder, théorème 6.2.1, on a $(1+n+m)^2\le 3(1+n^2+m^2)$, donc la famille $\big((1+n^2+m^2)^a\big)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si la famille $\big((1+n+m)^{2a}\big)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, soit $I_k=\big\{(n,m)\in\mathbb{N}^2\ ;\ 1+n+m\le k\big\}$, alors on a :

$$I_k=\bigcup_{p=1}^{k}\big\{(n,m)\in\mathbb{N}^2\ ;\ 1+n+m=p\big\}=\bigcup_{p=1}^{k}\big\{(n,p-1-n)\in\mathbb{N}^2\ ;\ 0\le n\le p-1\big\}\,.$$

Comme on a $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}I_k=\mathbb{N}^2$, alors la famille $\big((1+n+m)^{2a}\big)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si l'ensemble des sommes $\displaystyle\sum_{(n,m)\in I_k}(1+n+m)^{2a}$ est borné, voir proposition 6.7.1. Or on a :

$$\sum_{(n,m)\in I_k}(1+n+m)^{2a}=\sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{n=0}^{p-1}p^{2a}\right)=\sum_{p=1}^{k}p^{2a+1}\,.$$

Donc la famille $\big((1+n+m)^{2a}\big)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si la série de terme général p^{2a+1} est convergente. Par conséquent, la famille $\big((1+n^2+m^2)^a\big)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si $a<-1$.

Exercice 6.86. Normes de Hölder sur $C([0,\,1])$. Soit $E=C([0,\,1])$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0,\,1]$ dans $\mathbb{K}$. Soient $p\in[1,\,+\infty[$ et $f\in E$, on pose :

$$\|f\|_\infty=\sup_{0\le t\le 1}|f(t)|\quad\text{et}\quad\|f\|_p=\Big(\int_0^1|f(t)|^p\,dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'application $f \longmapsto \|f\|_p$ est une norme sur E, appelée **norme de Hölder**.
2. Montrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
3. Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace E muni de la norme $\| \ \|_p$ n'est pas de Banach.

Solution. 1. On a déjà vu que $f \longmapsto \|f\|_\infty$ est une norme sur E. On suppose $p \in [1, +\infty[$. Il est clair que pour tout $f \in E$, on a $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$, et que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$. Il reste à montrer l'inégalité de convexité. Pour tout $f \in E$, on a :

$$\int_0^1 |f(t)|^p \, dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right|^p.$$

Soient $f, g \in E$. D'après l'inégalité de Minkowski, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\tfrac{k}{n}\right) + g\left(\tfrac{k}{n}\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| g\left(\tfrac{k}{n}\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On fait tendre n vers $+\infty$, on obtient $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Donc l'application $f \longmapsto \|f\|_p$ est bien une norme sur E.

2. Soit $f \in E$. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on a $0 \leq \displaystyle\int_0^1 |f(t)|^p \, dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty^p \, dt = \|f\|_\infty^p$, d'où $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$. Soit $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\|f\|_\infty = |f(t_0)|$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en t_0, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [t_0 - \eta, \, t_0 + \eta] \cap [0, 1] = [a, b]$, on ait :

$$|f(t)| \geq |f(t_0)| - \tfrac{\varepsilon}{2} = \|f\|_\infty - \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on a :

$$\|f\|_p^p = \int_0^1 |f(t)|^p \, dt \geq \int_a^b |f(t)|^p \, dt \geq (b - a)\left(\|f\|_\infty - \tfrac{\varepsilon}{2}\right)^p \geq \eta\left(\|f\|_\infty - \tfrac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

D'où $\|f\|_p \geq \eta^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Puisque l'on a $\lim\limits_{p \to +\infty} \eta^{\frac{1}{p}} = 1$, alors il existe $p_0 \in [1, +\infty[$ tel que pour tout $p \geq p_0$, on ait $\|f\|_\infty - \varepsilon < \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

3. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite dans E définie par $f_n(x) = n^p$ si $0 \leq x \leq \dfrac{1}{n^{2p}}$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ si $\dfrac{1}{n^{2p}} \leq x \leq 1$. Comme dans l'exercice 2.32, on montre que $(f_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $(E, \| \ \|_p)$, mais $(f_n)_{n \geq 1}$ n'est pas convergente. Donc $(E, \| \ \|_p)$ n'est pas de Banach.

Chapitre 7

THÉORÈMES FONDAMENTAUX

Proposition. Soient $(E, \|\ \|)$, $(F, \|\ \|')$ deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E; F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) T est injective et $T(E)$ est fermé dans F.

(ii) T est un homéomorphisme de E sur $T(E)$.

(iii) Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $\delta \|x\| \leq \|T(x)\|'$.

(iv) On a $\inf \Big\{\|T(x)\|' \ ; \ x \in E \text{ et } \|x\| = 1\Big\} > 0$.

(v) Il n'existe pas de suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E telle que $\|x_n\| = 1$, pour tout $n \geq 0$, et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T(x_n)\|' = 0$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Comme $T(E)$ est fermé dans F, alors $T(E)$ est un espace de Banach. Puisque T est injective, alors T est bijective de E sur $T(E)$. Il résulte du théorème de l'application ouverte que T est un homéomorphisme de E sur $T(E)$.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Si T est un homéomorphisme de E sur $T(E)$, alors $T^{-1} : T(E) \longrightarrow E$ est linéaire continue. Donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $\|T^{-1}(T(x))\| \leq \frac{1}{\delta} \|T(x)\|'$, d'où on a $\delta \|x\| \leq \|T(x)\|'$.
Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $x \in E$ tel que $\|T(x)\|' = 0$, alors on a $0 \leq \delta \|x\| \leq 0$, donc $x = 0$. Par conséquent, T est injective. L'ensemble $T(E)$ est fermé dans F si et seulement si $T(E) = \overline{T(E)}$. On a toujours $T(E) \subset \overline{T(E)}$, il reste à montrer l'inclusion réciproque. Soit $y \in \overline{T(E)}$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E telle que $y = \lim\limits_{n\to+\infty} T(x_n)$, donc la suite $(T(x_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans F. Or pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a $\delta\|x_n - x_m\| \leq \|T(x_n - x_m)\|' = \|T(x_n) - T(x_m)\|'$, on en déduit que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans E, donc elle converge vers un élément $x \in E$. Comme T est continue, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} T(x_n) = T(x)$, donc on a $y = T(x) \in T(E)$. Par conséquent, on a $\overline{T(E)} \subset T(E)$, d'où $T(E) = \overline{T(E)}$.
Il est évident que l'on a les implications (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (v).
Montrons l'implication (v) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $\delta = \inf \Big\{\|T(x)\|' \ ; \ x \in E \text{ et } \|x\| = 1\Big\}$. Alors pour tout $x \in E$, on a $\delta\|x\| \leq \|T(x)\|'$. Si $\delta = 0$, alors pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $\|T(x_n)\|' \leq \frac{1}{n+1}$. Par conséquent, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E telle que $\|x_n\| = 1$, pour tout $n \geq 0$ et telle que l'on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T(x_n)\|' = 0$. Ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc on a bien $\delta > 0$, et alors (iii) est satisfaite. ∎

Proposition. Tout espace de Banach séparable est un quotient de ℓ^1.

Démonstration. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace de Banach séparable. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite dense dans $B_E(0,1)$ et considérons l'application suivante

$$\begin{array}{rccc} T: & \ell^1 & \longrightarrow & E \\ & (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n a_n \end{array}$$

alors T est bien définie, linéaire et continue et on a $B'_E(0,1) \subset \overline{T(B'_{\ell^1}(0,1))}$. Soit $N = \ker(T)$, alors N est un sous-espace vectoriel fermé de ℓ^1 et d'après la proposition 6.4.4, il existe une application linéaire injective et continue $\widetilde{T} : \ell^1/N \longrightarrow E$ telle que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} \ell^1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E \\ & \ell^1/N \arrow[ur, "\widetilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Pour que $\widetilde{T}$ soit une application isométrique surjective il faut et il suffit que $\widetilde{T}(B_{\ell^1/N}(0,1)) = B_E(0,1)$, voir exercice 6.79. Soit $\tilde{x} \in B_{\ell^1/N}(0,1)$, d'après la proposition 6.4.3, il existe $x \in B_{\ell^1}(0,1)$ tel que $\pi(x) = \tilde{x}$. D'où on a $\widetilde{T}(\tilde{x}) = T(x)$ et $\|\widetilde{T}(\tilde{x})\| = \|T(x)\| \leq \|x\|_1 < 1$. Par conséquent, on a $\widetilde{T}(B_{\ell^1/N}(0,1)) \subset B_E(0,1)$. On a $B'_E(0,1) \subset \overline{T(B'_{\ell^1}(0,1))}$ d'où, par la proposition 7.1.2, on a $B_E(0,1) \subset T(B_{\ell^1}(0,1))$. Comme on a $T(B_{\ell^1}(0,1)) \subset \widetilde{T}(B_{\ell^1/N}(0,1))$, alors $B_E(0,1) \subset \widetilde{T}(B_{\ell^1/N}(0,1))$. Par conséquent, on a $B_E(0,1) = \widetilde{T}(B_{\ell^1/N}(0,1))$. Donc $\widetilde{T}$ est une application linéaire bijective et isométrique. Ainsi, on peut identifier l'espace de Banach séparable E à ℓ^1/N. ■

Proposition (dual topologique de c_0). On a les propriétés suivantes :

1. Soit $x = (x_n) \in \ell^1$. L'application

$$\begin{array}{rccc} T_x : & (\ell^\infty, \| \ \|_\infty) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & y & \longmapsto & T_x(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, y_n \end{array}$$

   est une forme linéaire continue sur ℓ^∞, de norme égale à $\|x\|_1$.

2. On note aussi T_x la restriction de T_x à c_0 et considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} T : & (\ell^1, \| \ \|_1) & \longrightarrow & ({c_0}^*, \| \ \|) \\ & x & \longmapsto & T_x \end{array}$$

   alors T est un isomorphisme isométrique de ℓ^1 sur le dual topologique de $(c_0, \| \ \|_\infty)$. Autrement dit, le dual topologique de $(c_0, \| \ \|_\infty)$ est $(\ell^1, \| \ \|_1)$.

Démonstration. 1. On vérifie, comme dans la proposition 7.4.2, que T_x est une forme linéaire continue sur ℓ^∞ et que l'on a $|T_x(y)| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty$, d'où $\|T_x\| \leq \|x\|_1$. Pour tout $n \geq 0$, il existe $\theta_n \in [0, 2\pi[$ tel que $x_n = |x_n|\, e^{i\theta_n}$. Pour tout $k \geq 0$, soit $a_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{k} e^{-i\theta_n}\, \mathbf{e}_n$. Alors on a $a_k \in c_0 \subset \ell^\infty$, $\|a_k\|_\infty = 1$ et $T_x(a_k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{k} |x_n|$, donc on a $\|T_x\| \geq \displaystyle\sum_{n=0}^{k} |x_n|$. On en déduit

$\|T_x\| \geq \|x\|_1$. Par conséquent, on a $\|T_x\| = \|x\|_1$. Notons aussi que ce raisonnement implique que la restriction de T_x à c_0 est de norme égale à $\|x\|_1$.
2. Il est clair que T est linéaire. On a montré ci-dessus que T est aussi isométrique, donc il reste à montrer que T est surjective. Soit f forme linéaire continue sur c_0. Pour tout $n \geq 0$, on pose $x_n = f(\mathbf{e}_n)$. Il s'agit de montrer $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$ et $f = T_x$. On définit les a_k comme précédemment, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} |x_n| = f(a_k) \leq \|f\| \, \|a_k\|_\infty = \|f\|$, donc $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$. Pour tout $n \geq 0$, on a $T_x(\mathbf{e}_n) = x_n = f(\mathbf{e}_n)$, donc $T_x = f$ sur c_c. On a montré, exercice 6.34, que c_c est dense dans $(c_0, \| \, \|_\infty)$, donc on a $T_x = f$. Par conséquent, T est surjective. ■

Proposition. Soient (E, p) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel semi-normé, $(E/F, \| \, \|)$ l'espace vectoriel normé séparé de E et $\pi : E \longrightarrow E/F$ l'application quotient. Soient $(G, \| \, \|')$ un espace normé et $f : E \longrightarrow G$ une application linéaire.

1. Pour qu'il existe une application linéaire continue $\widetilde{f} : E/F \longrightarrow G$ satisfaisant $\widetilde{f} \circ \pi = f$, il faut et il suffit qu'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, on ait $\|f(x)\|' \leq Mp(x)$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G \\ & E/F \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

2. Si un tel $\widetilde{f}$ existe, il est unique et sa norme est la plus petite constante $M > 0$ satisfaisant la propriété 1.

Démonstration. 1. S'il existe $\widetilde{f} \in \mathscr{L}(E/F; G)$ tel que $\widetilde{f} \circ \pi = f$, alors pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\|' = \|\widetilde{f}(\pi(x))\|' \leq \|\widetilde{f}\| \, \|\pi(x)\| = \|\widetilde{f}\| \, p(x)$. Réciproquement, supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, on ait $\|f(x)\|' \leq Mp(x)$. On en déduit que pour tout $x \in F$, on a $f(x) = 0$, donc $F \subset \ker(f)$. Par conséquent, il existe une application linéaire $\widetilde{f} : E/F \longrightarrow G$ telle que $\widetilde{f} \circ \pi = f$. Soit $a \in E/F$, il existe $x \in E$ tel que $\pi(x) = a$. On a $\widetilde{f}(a) = \widetilde{f}(\pi(x)) = f(x)$, d'où $\|\widetilde{f}(a)\|' = \|f(x)\|' \leq Mp(x) = M\|\pi(x)\| = M\|a\|$. Donc $\widetilde{f}$ est continue et on a $\|\widetilde{f}\| \leq M$.
2. Ceci est trivial. ■

Proposition. Soient $(E, \| \, \|)$ un espace normé, B une boule ouverte non vide de E et A un ensemble convexe borné d'intérieur non vide dans E. Alors $\overset{\circ}{A}$ est homéomorphe à B, $\overline{A}$ est homéomorphe à $\overline{B}$ et $\mathrm{Fr}(A)$ est homéomorphe à $\mathrm{Fr}(B)$.

Démonstration. Sans perdre de généralité, on peut supposer $0 \in \overset{\circ}{A}$ et on peut aussi supposer $B = \{x \in E \; ; \; \|x\| < 1\}$. Soit μ_A la jauge de A. D'après le théorème 7.6.2 et la proposition 7.6.2, μ_A est positivement homogène et sous-additive, on a $\{x \in E \; ; \; \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E \; ; \; \mu_A(x) \leq 1\}$ et il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in E$, on ait $\mu_A(x) \leq M\|x\|$. Pour tout $x, y \in E$, on a $\mu_A(x) \leq \mu_A(x-y) + \mu_A(y)$, d'où $\mu_A(x) - \mu_A(y) \leq \mu_A(x-y)$. De même, on a $\mu_A(y) - \mu_A(x) \leq \mu_A(y-x) = \mu_A(x-y)$. Donc on a $|\mu_A(x) - \mu_A(y)| \leq \mu_A(x-y)$. Par conséquent, pour tout $x, y \in E$, on a $|\mu_A(x) - \mu_A(y)| \leq M\|x-y\|$. En particulier, μ_A est une fonction continue. On en déduit que l'on a $\{x \in E \; ; \; \mu_A(x) < 1\} \subset \overset{\circ}{A}$ et $\overline{A} \subset \{x \in E \; ; \; \mu_A(x) \leq 1\}$. Réciproquement, soit $x \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe $t > 0$ tel que $(1+t)x \in A$, d'où $\mu_A(x) \leq \frac{1}{1+t} < 1$. Donc on a $\overset{\circ}{A} = \{x \in E \; ; \; \mu_A(x) < 1\}$. Soit $y \in E$ tel que $\mu_A(y) \leq 1$. D'après la remarque 7.6.2, pour tout

$n \geq 1$, on a $y \in (1+\frac{1}{n})A$, d'où $\frac{n}{n+1}y \in A$. Or on a $y = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1}y$, donc $y \in \overline{A}$. Par conséquent, on a $\overline{A} = \{x \in E \ ; \ \mu_A(x) \leq 1\}$. On en déduit aussi que l'on a $\mathrm{Fr}(A) = \{x \in E \ ; \ \mu_A(x) = 1\}$. Comme A est borné, alors $\delta = \sup\{\|x\| \ ; \ x \in A\} \in]0, +\infty[$. Soient $x \in E$ et $t > 0$ tels que $\delta x \in tA$, alors il existe $a \in A$ tel que $\delta x = ta$, d'où $\delta\|x\| = \|\delta x\| = \|ta\| = t\|a\| \leq t\delta$, donc on a $\|x\| \leq t$. Par conséquent, on a $\delta\mu_A(x) = \mu_A(\delta x) \geq \|x\|$, d'où pour tout $x \in E$, on a $\dfrac{\|x\|}{\delta} \leq \mu_A(x)$. On pose $f(0) = 0$, $g(0) = 0$ et pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $f(x) = \dfrac{\mu_A(x)}{\|x\|}x$ et $g(x) = \dfrac{\|x\|}{\mu_A(x)}x$. Il est clair que l'on a $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_E$ et que f et g sont continues sur $E \setminus \{0\}$. Pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\| = \mu_A(x)$ et $\|g(x)\| \leq \delta\|x\|$, donc f et g sont aussi continues en 0. Par conséquent, f est un homéomorphisme. Il est clair que l'on a $f\big(\overset{\circ}{A}\big) = B$, $f\big(\overline{A}\big) = \overline{B}$ et $f\big(\mathrm{Fr}(A)\big) = \mathrm{Fr}(B)$. D'où le résultat. ■

Proposition. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, A une partie de E, $(c_x)_{x \in A}$ une famille dans $\mathbb{K}$, indexée par A et $M > 0$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe $f \in E^*$ telle que $\|f\| \leq M$ et $f(x) = c_x$ pour tout $x \in A$.

(ii) Pour tout $n \geq 1$, pour tout $x_1, \ldots, x_n \in A$ et pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on a :

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_{x_i}\Big| \leq M \Big\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big\|.$$

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $f \in E^*$ telle que $\|f\| \leq M$ et $f(x) = c_x$, pour tout $x \in A$. Alors pour tout $n \geq 1$, pour tout $x_1, \ldots, x_n \in A$ et pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on a :

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_{x_i}\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\Big| = \Big|f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big)\Big| \leq \|f\| \, \Big\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big\| \leq M \Big\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big\|.$$

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $H = \mathrm{Vect}(A)$ le sous-espace vectoriel engendré par A. Soit $x \in H$, alors il existe $x_1, \ldots, x_n \in A$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que on a $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. On pose $g(x) = g\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_{x_i}$. Alors g est bien définie. En effet, si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j$, avec $x_i, y_j \in A$ et $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{K}$, alors on a $\Big|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_{x_i} - \sum_{j=1}^{n} \mu_j c_{y_j}\Big| \leq M \Big\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j\Big\| = 0$, donc on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j c_{y_j}$. Par conséquent, g est bien définie. Il est clair que g est linéaire sur H et que pour tout $x \in H$, on a $|g(x)| \leq M\|x\|$, donc g est continue et on a $\|g\| \leq M$. Par le théorème de Hahn-Banach, théorème 7.7.3, il existe $f \in E^*$ prolongeant g et telle que $\|f\| = \|g\| \leq M$. ■

Lemme 7.0.1. *Soient $f, f_1, \ldots, f_n$ des formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que $f = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$.

(ii) Il existe $\alpha > 0, \beta > 0$ tels que $\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in E \ ; \ |f_i(x)| < \alpha\} \subset \{x \in E \ ; \ |f(x)| < \beta\}$.

(iii) Il existe $b > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $|f(x)| \leq b \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)|$.

(iv) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker(f_i) \subset \ker(f)$.

Démonstration. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est triviale.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $x \in E$. Si $|f(x)| > \frac{\beta}{\alpha} \max\limits_{1\leq i\leq n} |f_i(x)|$, on pose $y = \dfrac{\beta x}{f(x)}$, alors on a $|f(y)| = \beta$ et pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $|f_i(y)| < \alpha$, ce qui est impossible. Donc, pour tout $x \in E$, on a $|f(x)| \leq \frac{\beta}{\alpha} \max\limits_{1\leq i\leq n} |f_i(x)|$.

L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (iv) est triviale.

Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (i). Considérons l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{cccc} T: & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{array}$$

alors $T(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Pour tout $z = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in T(E)$, on pose $g(z) = f(x)$. Alors g est bien définie car si $(f_1(x), \dots, f_n(x)) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$, alors $x - y \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker(f_i) \subset \ker(f)$, d'où on a $f(x) = f(y)$. De plus g est linéaire. On prolonge g en une forme linéaire h sur $\mathbb{K}^n$. Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que pour tout $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n$, on ait $h(z_1, \dots, z_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i z_i$. On en déduit que pour tout $x \in E$, on a $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)$. ■

Théorème (**Helly**). Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé et $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires continues sur E, $M > 0$, et $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| \leq M + \varepsilon$ et pour tout i, $f_i(x) = c_i$.

(ii) Pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on a $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i c_i\right| \leq M \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right\|$.

Démonstration. Le résultat est trivialement vrai si tous les c_i sont nuls, donc on peut supposer que les c_i ne sont pas tous nuls. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| \leq M + \varepsilon$ et pour tout i, on ait $f_i(x) = c_i$. Alors on a :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)\right| \leq \|x\| \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right\| \leq (M + \varepsilon) \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right\|.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que l'on a $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i c_i\right| \leq M \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right\|$.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Dans un premier temps, on suppose que les formes linéaires $f_1, \dots, f_n$ sont linéairement indépendantes. Considérons l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{cccc} T: & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{array}$$

alors $T(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Si $T(E) \neq \mathbb{K}^n$, alors il existe une forme linéaire non nulle $h : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in E$, on ait $h(T(x)) = 0$. Il existe aussi $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que pour tout $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n$, on ait $h(z_1, \dots, z_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i z_i$. On en déduit que pour tout $x \in E$, on a $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, f_i(x)$, d'où $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, f_i$, ce qui est impossible, car les $f_1, \dots, f_n$

sont linéairement indépendantes. Donc on a $T(E) = \mathbb{K}^n$. Par conséquent, il existe $x \in E$ tel que $(f_1(x), \dots, f_n(x)) = (c_1, \dots, c_n)$. Autrement dit, $F = \{x \in E\ ;\ f_i(x) = c_i, \text{ pour tout } 1 \le i \le n\}$ est non vide. Puisque $0 \notin F$ et F est fermé dans E, alors il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \cap F = \emptyset$. Comme F est convexe, d'après le corollaire 7.8.1, il existe $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$, une forme linéaire continue telle que pour tout $x \in B(0,r)$ et pour tout $y \in F$, on ait $\mathrm{Re}(f(x)) < \mathrm{Re}(f(y))$. Comme $B(0,r)$ est symétrique par rapport à 0, alors pour tout $x \in B(0,r)$ et pour tout $y \in F$, on a $|\mathrm{Re}(f(x))| < \mathrm{Re}(f(y))$. Donc on a $\sup\limits_{x \in B(0,r)} |\mathrm{Re}(f(x))| \le \inf\limits_{y \in F} \mathrm{Re}(f(y))$. On a :

$$\sup_{x \in B(0,r)} |\mathrm{Re}(f(x))| = r \sup_{x \in B(0,r)} \left|\mathrm{Re}\big(f\big(\tfrac{x}{r}\big)\big)\right| = r \sup_{z \in B(0,1)} |\mathrm{Re}(f(z))| = r\,\|\mathrm{Re} \circ f\|\,.$$

D'après la proposition 7.4.5, on a $\|f\| = \|\mathrm{Re} \circ f\|$. Par conséquent, on a $r\|f\| \le \inf\limits_{y \in F} \mathrm{Re}(f(y))$. Montrons que l'on a $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker(f_i) \subset \ker(f)$. Soit $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker(f_i)$. Alors pour tout i, on a $f_i(x) = 0$. Soit $y_0 \in F$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a $y_0 + \alpha x \in F$. Donc, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a $r\|f\| \le \mathrm{Re}(f(y_0) + \alpha f(x))$. Ceci implique que $f(x) = 0$, d'où $x \in \ker(f)$. Donc on a $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker(f_i) \subset \ker(f)$. Il résulte du lemme 7.8.2 qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$.

Soit $\varepsilon > 0$. Si, pour tout $x \in F$, on a $\|x\| \ge M + \varepsilon$, alors on a $B(0, M+\varepsilon) \cap F = \emptyset$. Il résulte de ce qui précède qu'il existe $f \in E^*$, non nulle, telle que $(M+\varepsilon)\|f\| \le \inf\limits_{y \in F} \mathrm{Re}(f(y))$ et il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$. Pour tout $y \in F$, on a :

$$\mathrm{Re}(f(y)) \le |f(y)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(y)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i\right| \le M \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right\| = M\,\|f\|\,.$$

D'où on a $(M+\varepsilon)\|f\| \le M\,\|f\|$, ce qui est impossible. Par conséquent, il existe $x \in F$ tel que $\|x\| \le M + \varepsilon$. D'où on a (i).
à présent, on ne suppose plus que les formes linéaires $f_1, \dots, f_n$ sont linéairement indépendantes. L'inégalité dans (ii) nous dit que les f_i ne sont pas toutes nulles. Quitte à permuter les f_i, on peut supposer qu'il existe $m \le n$ tel que $\{f_1, \dots, f_m\}$ soit une famille libre maximale de $\{f_1, \dots, f_n\}$. Comme la famille $\{f_1, \dots, f_m\}$ vérifie aussi la propriété (ii), d'après ce qui précède, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| \le M + \varepsilon$ et pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on ait $f_i(x) = c_i$. Pour tout $k \in \{m+1, \dots, n\}$, on a $f_k = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{k,i} f_i$, avec $\alpha_{k,i} \in \mathbb{K}$. Comme on a :

$$|f_k(x) - c_k| = \left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_{k,i} c_i \, - \, c_k\right| \le M \left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_{k,i} f_i - f_k\right\| = 0\,.$$

Alors on a aussi $f_k(x) = c_k$, pour tout $k \in \{m+1, \dots, n\}$. Donc on a bien la propriété (i). ■

Proposition. Soient E un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E.

1. Si E est réflexif, alors F est réflexif.
2. E est réflexif si et seulement si E^* est réflexif.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 7 du supplément.

Démonstration. 1. Soit

$$\begin{array}{rccc} \pi : & E^* & \longrightarrow & F^* \\ & f & \longmapsto & f_{|F} \end{array}$$

l'application de restriction. Par le théorème 7.7.3, elle est surjective. Soit $h \in F^{**}$, autrement dit h est une forme linéaire continue sur F^*. Alors $h \circ \pi$ est une forme linéaire continue sur E^*. Or E est réflexif, donc il existe $x \in E$ telle que pour tout $f \in E^*$, on ait $h(\pi(f)) = h \circ \pi(f) = f(x)$. Puisque π est surjective, pour avoir le résultat, il suffit de montrer que $x \in F$. Si $x \notin F$, d'après le corollaire 7.7.2, il existe $f \in E^*$ tel que $f(x) \neq 0$ et $f(y) = 0$ pour tout $y \in F$. D'où on a $\pi(f) = 0$. Par conséquent, on a $0 = h(\pi(f)) = f(x)$, ce qui est impossible. Donc $x \in F$ et par conséquent, F est réflexif.

2. Supposons d'abord E réflexif. Soit $X = E^*$ et notons $J_E : E \longrightarrow E^{**}$ et $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ les applications canoniques. Soit $h \in X^{**}$, autrement dit h est une forme linéaire continue sur $X^* = E^{**}$. Alors $h \circ J_E$ est une forme linéaire continue sur E, donc $h \circ J_E \in E^* = X$. Montrons que l'on a $J_X(h \circ J_E) = h$. Soit $g \in X^* = E^{**}$, comme E est réflexif, il existe $a \in E$ tel que $g = J_E(a)$. On a $h(g) = h(J_E(a)) = (h \circ J_E)(a)$. D'autre part, on a $J_X(h \circ J_E)(g) = g(h \circ J_E) = J_E(a)(h \circ J_E) = (h \circ J_E)(a)$. Par conséquent, on a $h(g) = J_X(h \circ J_E)(g)$, pour tout $g \in X^*$, d'où $h = J_X(h \circ J_E)$. Donc $X = E^*$ est réflexif.

Réciproquement, supposons que E^* est réflexif, d'après ce qui précède, E^{**} est alors réflexif. Comme E est un sous-espace vectoriel fermé de E^{**}, Il résulte de 1 que E est réflexif. ■

Proposition. Soient $(E, \| \|)$, $(F, \| \|')$ deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E; F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) T^* est surjective.

(ii) T est injective et $T(E)$ est fermé dans F.

Démonstration. Montrons d'abord l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Par hypothèse, T^* est surjective. D'après le théorème de l'application ouverte, T^* est ouverte, donc il existe $r > 0$ tel que $rB_{E^*}(0,1) \subset T^*(B_{F^*}(0,1))$. D'après le corollaire 7.9.1, pour tout $x \in E$, on a $\|T(x)\|' = \sup\limits_{f \in B_{F^*}(0,1)} |f(T(x))|$, d'où :

$$\|T(x)\|' = \sup_{f \in B_{F^*}(0,1)} |T^*(f)(x)| \geq \sup_{g \in B_{E^*}(0,1)} |rg(x)| = r \sup_{g \in B_{E^*}(0,1)} |g(x)| = r\|x\| \,.$$

Il résulte de la proposition 7.1.4 que T est injective et $T(E)$ est fermé dans F.

Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons que T est injective et que $T(E)$ est fermé dans F. D'après la proposition 7.1.4, l'application $T : E \longrightarrow T(E)$ est un homéomorphisme. Soit $g \in E^*$, alors $g \circ T^{-1} : T(E) \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire continue sur $T(E)$. Par le théorème 7.7.3, il existe $f \in F^*$ tel que $f_{|T(E)} = g \circ T^{-1}$. Donc, pour tout $x \in E$, on a $f(T(x)) = g(x)$, d'où $T^*(f) = g$, donc T^* est surjective. ■

Proposition. Soient $(E, \| \|)$, $(F, \| \|')$ deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E; F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) T est surjective.

(ii) T^* est injective et $T^*(F^*)$ est fermé dans E^*.

Démonstration. Montrons d'abord l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Par hypothèse, T est surjective. D'après le théorème de l'application ouverte, T est ouverte, donc il existe $r > 0$ tel que

$rB_F(0,1) \subset T(B_E(0,1))$. Pour tout $f \in F^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\|T^*(f)\| = \|f \circ T\| &= \sup_{x \in B_E(0,1)} |f \circ T(x)| \\
&= r \sup_{x \in B_E(0,1)} \left| f\left(\tfrac{1}{r} T(x)\right) \right| \\
&\geq r \sup_{y \in B_F(0,1)} |f(y)| = r\|f\|\,.
\end{aligned}$$

Il résulte de la proposition 7.1.4 que T^* est injective et que $T^*(F^*)$ est fermé dans E^*.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Pour montrer que T est surjective, il suffit de montrer que T est ouverte. D'après les propositions 7.1.1 et 7.1.2, il suffit de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $rB_F(0,1) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$. Supposons le contraire, alors il existe une suite $(y_n)_{n\geq 1}$ dans F telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ et pour tout $n \geq 1$, on ait $y_n \notin \overline{T(B_E(0,1))}$. Donc on a $d_n = d\big(y_n, \overline{T(B_E(0,1))}\big) > 0$. Pour tout $n \geq 1$, soit $V_n = T(B_E(0,1)) + B_F(0,d_n)$, alors V_n est un ouvert convexe et équilibré, et on a $y_n \notin V_n$. D'après le corollaire 7.8.2, il existe $f \in F^*$ telle que $f(y_n) = 1$ et pour tout $z \in V_n$, on ait $|f(z)| < 1$. On a $T(B_E(0,1)) \subset V_n$, d'où :

$$\|T^*(f)\| = \|f \circ T\| = \sup_{x \in B_E(0,1)} |f \circ T(x)| \leq \sup_{z \in V_n} |f(z)| \leq 1\,.$$

Comme T^* est injective et $T^*(F^*)$ est fermé dans E^*, d'après la proposition 7.1.4, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $g \in F^*$, on ait $\|g\| \leq \alpha \|T^*(g)\|$. On en déduit que l'on a $\|f\| \leq \alpha$. Par conséquent, on a $1 = f(y_n) \leq \alpha \|y_n\|$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|y_n\| \neq 0$, d'où la contradiction. Donc T est bien surjective. ■

Supplément d'exercices

Exercice 7.46. Soit $E = \big\{(x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty \,;\, \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \text{ existe dans } \mathbb{K}\big\}$.

1. Montrer que $(E, \|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach.
2. Montrer que c_0 admet un supplémentaire topologique dans E.

Solution. 1. Il est clair que E est sous-espace vectoriel de ℓ^∞. Pour montrer que $(E, \|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach, il suffit de montrer que E est fermé dans ℓ^∞. Il résulte du théorème d'interversion des limites, théorème 5.2.4, que E est fermé dans ℓ^∞, mais montrons directement que E est fermé dans ℓ^∞. Soit $(\xi_p)_{p\geq 0}$ une suite dans E, qui converge vers $x \in \ell^\infty$. On a $x = (x_n)_{n\geq 0}$ et $\xi_p = (x_{p,n})_{n\geq 0}$, avec $x_n, x_{p,n} \in \mathbb{K}$, et pour tout $p \geq 0$, il existe $\lambda_p \in \mathbb{K}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{p,n} = \lambda_p$. Montrons d'abord que $(\lambda_p)_{p\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Soit $\varepsilon > 0$, comme $(\xi_p)_{p\geq 0}$ est convergente dans ℓ^∞, alors $(\xi_p)_{p\geq 0}$ est de Cauchy, donc il existe $p_0 \geq 0$ tel que pour tout $p, q \geq p_0$, on ait $\|\xi_p - \xi_q\|_\infty < \varepsilon$. D'où pour tout $p, q \geq p_0$ et pour tout $n \geq 0$, on a $|x_{p,n} - x_{q,n}| < \varepsilon$. On fait tendre n vers l'infini, on obtient $|\lambda_p - \lambda_q| \leq \varepsilon$, pour tout $p, q \geq p_0$. Donc la suite $(\lambda_p)_{p\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_p = \lambda$. Montrons que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lambda$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(\xi_p)_{p\geq 0}$ converge vers x dans ℓ^∞ et $(\lambda_p)_{p\geq 0}$ converge vers λ dans $\mathbb{K}$, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $|\lambda_p - \lambda| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $\|x - \xi_p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$, d'où pour tout $n \geq 0$, on a $|x_n - x_{p,n}| < \frac{\varepsilon}{3}$. Donc, pour tout $n \geq 0$, on a $|x_n - \lambda| \leq |x_n - x_{p,n}| + |x_{p,n} - \lambda_p| + |\lambda_p - \lambda| < \frac{2\varepsilon}{3} + |x_{p,n} - \lambda_p|$. Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{p,n} = \lambda_p$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|x_{p,n} - \lambda_p| < \frac{\varepsilon}{3}$. On en déduit que pour

tout $n \geq N$, on a $|x_n - \lambda| < \varepsilon$. Donc on a $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lambda$. Par conséquent, on a $x \in E$, donc E est fermé dans ℓ^∞.
2. Soit $\mathbf{e}$ la suite constante égale à 1, *i.e.* $\mathbf{e} = (x_n)_{n \geq 0}$, avec $x_n = 1$, pour tout $n \geq 0$. Alors $\mathbb{K}\mathbf{e}$ est un supplémentaire topologique de c_0 dans E, car $\mathbb{K}\mathbf{e}$ est un supplémentaire algébrique de c_0 dans E, et c_0 et $\mathbb{K}\mathbf{e}$ sont fermés dans l'espace de Banach E.

Exercice 7.47. Soient $(E, \| \,\|)$ un espace de Banach et F, G deux sous-espaces vectoriels fermés de E.

1. On suppose que $F + G$ est fermé dans E. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $z \in F + G$, il existe $x \in F$ et $y \in G$ tels que $z = x + y$ et $\|x\| + \|y\| \leq c\|z\|$.
2. On suppose que l'on a $F \cap G = \{0\}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
   (i) $F + G$ est fermé dans $(E, \| \,\|)$.
   (ii) Il existe une constante $c > 0$ telle que $\|x\| + \|y\| \leq c\|x + y\|$, pour tous $x \in F$ et $y \in G$.
   (iii) Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\|x\| \leq \alpha\|x + y\|$, pour tous $x \in F$ et $y \in G$.

Solution. 1. On munit l'espace $F \times G$ de la norme $\| \,\|_1$. Autrement dit, pour tout $(x, y) \in F \times G$, on a $\|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|$. Alors les espaces $(F \times G, \| \,\|_1)$ et $(F + G, \| \,\|)$ sont de Banach. Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & F \times G & \longrightarrow & F + G \\ & (x, y) & \longmapsto & x + y\,. \end{array}$$

Alors φ est linéaire continue et surjective, donc φ est une application ouverte. Par conséquent, il existe $c > 0$ tel que $B\big(0, \frac{2}{c}\big) \subset \varphi\big(B(0, 1)\big)$. Donc pour tout $z \in F + G$ tel que $\|z\| < \frac{2}{c}$, il existe $(a, b) \in F \times G$ tel que $\|a\| + \|b\| < 1$ et $z = a + b$. Soit z un élément non nul de $F + G$, alors on a $\left\| \dfrac{z}{c\|z\|} \right\| = \frac{1}{c} < \frac{2}{c}$, donc il existe $(a, b) \in F \times G$ tel que $\|a\| + \|b\| < 1$ et $\dfrac{z}{c\|z\|} = a + b$. On pose $x = c\|z\|a$ et $y = c\|z\|b$, alors $z = x + y$, $(x, y) \in F \times G$ et on a $\|x\| + \|y\| = c\|z\| \big(\|a\| + \|b\|\big) < c\|z\|$.
2. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte de 1 et du fait que $F \cap G = \{0\}$. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $(z_n)_{n \geq 0}$ une suite dans $(F + G, \| \,\|)$ qui converge vers un élément z dans $(E, \| \,\|)$. Alors pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F$ et $y_n \in G$ tels que $z_n = x_n + y_n$ et on a $\|x_n - x_m\| \leq \alpha\|x_n - x_m + y_n - y_m\| = \alpha\|x_n + y_n - (x_m + y_m)\|$, donc $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $(F, \| \,\|)$ qui est de Banach. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers un élément $x \in F$. Comme pour tout $n \geq 0$, on a $y_n = z_n - x_n$, alors la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ converge vers un élément $y \in E$. Puisque G est fermé dans E, alors on a $y \in G$. Donc on a $z = x + y \in F + G$. Par conséquent, $F + G$ est fermé dans $(E, \| \,\|)$.

Exercice 7.48. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Banach $(E, \| \,\|)$ tels que $F \cap G = \{0\}$. Montrer que $F + G$ est fermé dans E si et seulement si $d(S_F, S_G) > 0$.
Solution. Supposons d'abord que $F + G$ est fermé dans E. D'après l'exercice précédent, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tous $x \in F$ et $y \in G$, on ait $\|x\| \leq \alpha\|x - y\|$. Par conséquent, pour tous $x \in S_F$ et $y \in S_G$, on a $\frac{1}{\alpha} \leq \|x - y\|$. D'où on a $0 < \frac{1}{\alpha} \leq d(S_F, S_G)$.
Réciproquement, supposons que l'on a $0 < d(S_F, S_G)$. Soit $\beta = \inf(d(S_F, S_G), 4)$, alors $0 < \beta \leq 4$ et pour tous $x \in S_F$ et $y \in S_G$, on a $\beta \leq \|x - y\|$. Soient $x \in F$ et $y \in G$ tels que $x \neq 0$ et

$y \neq 0$. D'après l'exercice 6.13, on a $\frac{1}{4}(\|x\| + \|y\|) \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \|x - y\|$. Par conséquent, on a $\frac{\beta}{4}\|x\| \leq \|x-y\|$. D'où on a $\|x\| \leq \frac{4}{\beta}\|x-y\|$. Donc pour tous $x \in F$ et $y \in G$, on a $\|x\| \leq \frac{4}{\beta}\|x-y\|$. Il résulte de l'exercice précédent que $F + G$ est fermé dans E.

Exercice 7.49. Soient E, F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue.

1. On suppose que $T(E)$ a un supplémentaire algébrique fermé G dans F. Montrer que $T(E)$ est fermé dans F.[On pourra se ramener à ce que T soit injective, puis considérer l'application de $E \times G$ dans F définie par $(x, z) \longmapsto T(x) + z$].
2. En déduire que si $T(E)$ est de codimension finie, alors $T(E)$ est fermé.

Solution. 1. D'après la proposition 6.4.4, il existe une application linéaire continue $\widetilde{T}$ de $E/\ker(T)$ dans F telle que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \\
& E/\ker(T) \arrow[ur, "\widetilde{T}"'] &
\end{tikzcd}$$

Comme $\widetilde{T}$ est injective et on a $\widetilde{T}(E/\ker(T)) = T(E)$, alors on peut supposer que T est injective. Comme G est un sous-espace vectoriel fermé dans F, alors G est un espace de Banach. Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} S : & E \times G & \longrightarrow & F \\ & (x, z) & \longmapsto & T(x) + z \end{array}$$

alors S est linéaire bijective continue. Alors, par le théorème de l'application ouverte, S est un homéomorphisme. Or $E \times \{0\}$ est fermé dans $E \times G$, on en déduit que $T(E) = S(E \times \{0\})$ est fermé dans F.
2. Tout supplémentaire algébrique de $T(E)$ est de dimension finie, donc fermé et on applique 1.

Exercice 7.50. Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace normé $(E, \|\ \|)$ et $T : F \longrightarrow \ell^\infty$ une application linéaire continue. Montrer qu'il existe une application linéaire continue $S : E \longrightarrow \ell^\infty$ prolongeant T telle que $\|S\| = \|T\|$.
Solution. Pour tout $n \geq 0$, soit $f_n : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{K}$ la forme linéaire continue définie par $f_n(\mathbf{e}_n) = 1$ et $f_n(\mathbf{e}_p) = 0$ si $p \neq n$. Pour tout $x \in F$, on a $T(x) = (f_n(T(x)))_{n \geq 0}$. Pour tout $n \geq 0$, on a $f_n \circ T \in F^*$. Par le théorème de Hahn-Banach, théorème 7.7.3, il existe une forme linéaire continue $g_n \in E^*$ prolongeant $f_n \circ T$ telle que $\|g_n\| = \|f_n \circ T\|$. Pour tout $x \in E$, on pose $S(x) = (g_n(x))_{n \geq 0}$. Alors S est une application linéaire continue de E dans ℓ^∞ prolongeant T et telle que $\|S\| = \|T\|$.

Remarque 7.0.3. On montrera, voir exercice 10.34 du supplément, que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace normé séparable $(E, \|\ \|)$ et si $T : F \longrightarrow c_0$ est une application linéaire continue, alors il existe une application linéaire continue $S : E \longrightarrow c_0$ prolongeant T telle que $\|S\| \leq 2\|T\|$.

Exercice 7.51. Supposons que ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach $(E, \|\ \|)$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé N de E tel que E soit la somme directe topologique de ℓ^∞ et N.
Solution. Soit $I : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty$ l'application identité. Par l'exercice précédent, on prolonge I en

une application linéaire continue $p : E \longrightarrow \ell^\infty$ de norme 1. Alors p est une projection continue et il suffit de prendre $N = \ker(p)$, voir corollaire 7.3.2.

Exercice 7.52. On munit $C([0,\,1],\,\mathbb{R})$ de la norme $\|\ \|_\infty$ et soit F un sous-espace vectoriel fermé de $C([0,\,1],\,\mathbb{R})$ tel que tout élément $f \in F$ est de classe C^1 sur $[0,\,1]$. Montrer que F est de dimension finie.
Solution. Considérons l'application dérivée

$$\begin{array}{rccc} D : & F & \longrightarrow & C([0,\,1],\,\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & f' \end{array}$$

alors D est linéaire et le graphe de D est fermé. On en déduit, par le théorème du graphe fermé, que D est continue. Donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $f \in F$, on ait $\|f'\|_\infty \leq N\,\|f\|_\infty$. Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} T : & F & \longrightarrow & \mathbb{R}^{N+1} \\ & f & \longmapsto & \big(f(0), f\big(\frac{1}{N}\big), f\big(\frac{2}{N}\big), \ldots, f\big(\frac{N-1}{N}\big), f(1)\big) \end{array}$$

alors T est linéaire et continue. Montrons que T est injective. Supposons le contraire, alors il existerait $f \in F$ tel que $\|f\|_\infty = 1$ et $f(\frac{i}{N}) = 0$, pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$. Soit $t \in [0,\,1]$ tel que $\|f\|_\infty = |f(t)| = 1$. Soit $i \in \{0, \ldots, N\}$ tel que $|t - \frac{i}{N}| \leq \frac{1}{2N}$. Par le théorème des accroissements finis, on a $f(t) - f(\frac{i}{N}) = (t - \frac{i}{N})f'(\alpha)$. D'où on a $|f(t)| \leq \frac{1}{2N}|f'(\alpha)| \leq \frac{1}{2}$, ce qui est impossible. Donc T est injective et on a $\dim(F) \leq N + 1$.

Exercice 7.53. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé et $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites dans E telles que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n + y_n\| = 2$. Pour tout $n \geq 0$, soit $z_n \in [x_n,\,y_n]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|z_n\| = 1$. En particulier, si $x, y \in E$ tels que $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x + y\| = 2$, alors pour tout $z \in [x,\,y]$, on a $\|x\| = 1$.
Solution. On peut supposer que E est un $\mathbb{R}$-espace normé. Par le théorème de Hahn-Banach, pour tout $n \geq 0$, il existe $f_n \in E^*$ telle que $\|f_n\| = 1$ et $f_n(x_n + y_n) = \|x_n + y_n\|$, d'où on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n + y_n) = 2$. Montrons d'abord que les suites $(f(x_n))_{n\geq 0}$ et $(f(y_n))_{n\geq 0}$ convergent vers 1 dans $\mathbb{R}$. Si $(f(x_n))_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 1, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \geq 0$, il existe $n \geq N$ tel que $f_n(x_n) \leq 1 - \varepsilon$. Comme la suite $(f(x_n) + f(y_n))_{n\geq 0}$ converge vers 2, il existe $N_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N_0$, on ait $2 - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x_n) + f_n(y_n)$. Soit $n \geq N_0$ tel que $f_n(x_n) \leq 1 - \varepsilon$ et $2 - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x_n) + f_n(y_n)$, alors on a $1 + \frac{\varepsilon}{2} < f_n(y_n)$, d'où $1 < \|f_n\|$, ce qui est impossible. Donc on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y_n) = 1$.
Soit $z_n \in [x_n,\,y_n]$, alors il existe $t_n \in [0,\,1]$ tel que $z_n = (1 - t_n)x_n + t_n y_n = x_n + t_n(y_n - x_n)$. Donc on a $f_n(z_n) = f_n(x_n) + t_n[f_n(y_n) - f_n(x_n)]$. On en déduit que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z_n) = 1$. Or on a $f_n(z_n) \leq \|z_n\| \leq 1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \|z_n\| = 1$.

Exercice 7.54. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé dans E^*. Pour tout $x \in E$, on pose $\|x\|_F = \sup\{|f(x)|\ ;\ f \in B_F\}$. Il est clair que $\|\ \|_F$ est une semi-norme sur E et que l'on a $\|x\|_F \leq \|x\|$, pour tout $x \in E$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\|x\|_F = d(J(x), F^\perp)$ (distance dans E^{**}), où $J : E \longrightarrow E^{**}$ est l'application canonique.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
   (i) F est séparante pour E, *i.e.* pour tout $x \in E$, avec $x \neq 0$, il existe $f \in F$ tel que $f(x) \neq 0$.

(ii) $\| \ \|_F$ est une norme sur E.

(iii) $J(E) \cap F^\perp = \{0\}$.

Solution. 1. Soit $\imath : F \longrightarrow E^*$ l'injection canonique. D'après le théorème 7.10.1, il existe une isométrie isomorphisme σ de $E^{**}/F^\perp$ sur F^* tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} E^{**} \arrow[rr, "\imath^*"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F^* \\ & E^{**}/F^\perp \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

On a $\imath^*(\Lambda) = \Lambda_{|F}$, pour tout $\Lambda \in E^{**}$. Par définition de la norme quotient sur $E^{**}/F^\perp$, on a $\|\pi(J(x))\| = d(J(x), F^\perp)$, d'où :

$$\begin{aligned} d(J(x), F^\perp) &= \|\pi(J(x))\| \\ &= \|\sigma \circ \pi(J(x))\| \\ &= \|\imath^*(J(x))\| \\ &= \|J(x)_{|F}\| \\ &= \sup_{f \in B_F} |J(x)(f)| \\ &= \sup_{f \in B_F} |f(x)| = \|x\|_F . \end{aligned}$$

2. L'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) est triviale. L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) résulte du fait que pour tout $x \in E$, on a $\|x\|_F = d(J(x), F^\perp)$ et du fait que $F^\perp$ est fermé dans E^{**}.

Exercice 7.55. Montrer que si $f \in (\ell^\infty)^*$ vérifie $\|f\| = 1$ et $f(1) = 1$, alors on a :

1. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, avec $x_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n \geq 0$, on a $f(x) \in \mathbb{R}$.
2. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, avec $x_n \geq 0$, pour tout $n \geq 0$, on a $f(x) \geq 0$.
3. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, avec $x_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\inf_{n\geq 0} x_n \leq f((x_n)_{n\geq 0}) \leq \sup_{n\geq 0} x_n \,.$$

Solution. 1. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, avec $x_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n \geq 0$. On peut supposer $\|x\|_\infty \leq 1$. On a $f(x) = s + it$, avec $t, s \in \mathbb{R}$. Supposons que $t \neq 0$. Quitte à prendre $-x$, on peut supposer $t > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$|f(n - ix)|^2 \leq \|f\| \, \|n - ix\|_\infty{}^2 \leq \|n - ix\|_\infty{}^2 = n^2 + \|x\|_\infty^2 \leq n^2 + 1 \,.$$

On a aussi $f(n - ix) = n + t - is$, d'où $|f(n - ix)|^2 = n^2 + 2nt + s^2 + t^2$. Par conséquent, pour tout $n \geq 0$, on a $2nt + s^2 + t^2 \leq 1$, ce qui est impossible. Donc on a $t = 0$, d'où $f(x) = s \in \mathbb{R}$.
2. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, avec $x_n \geq 0$, pour tout $n \geq 0$. Alors on a $0 \leq \|x\|_\infty - x_n \leq \|x\|_\infty$, d'où $\big\| \|x\|_\infty - x \big\| \leq \|x\|_\infty$. Donc on a $\big| \|x\|_\infty - f(x) \big| = \big| f(\|x\|_\infty - x) \big| \leq \big\| \|x\|_\infty - x \big\| \leq \|x\|_\infty$. Or $f(x) \in \mathbb{R}$, d'où $f(x) \geq 0$.
3. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, avec $x_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n \geq 0$. Alors pour tout $n \geq 0$, on a

$\inf_{n\geq 0} x_n \leq x_n \leq \sup_{n\geq 0} x_n$, d'où $\inf_{n\geq 0} x_n \leq f((x_n)_{n\geq 0}) \leq \sup_{n\geq 0} x_n$.

Exercice 7.56. Soit X un espace localement compact.

1. Montrer que si le dual topologique de $(C_0(X), \| \|_\infty)$ est séparable, alors X est au plus dénombrable †.
2. En déduire que si X est un métrique connexe localement compact qui contient deux points distincts, alors le dual topologique de $(C_0(X), \| \|_\infty)$ n'est pas séparable
3. En déduire que le dual topologique de $(C([0, 1]), \| \|_\infty)$ n'est pas séparable.
4. En déduire que $(C([0, 1]), \| \|_\infty)$ n'est pas réflexif.

Solution. 1. Pour tout $x \in X$ et tout $f \in C_0(X)$, soit $\delta_x(f) = f(x)$, alors $\delta_x \in C_0(X)^*$ et on a $\|\delta_x\| \leq 1$. Soient $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, alors on a $\|\delta_x - \delta_y\| \leq 2$. D'après le théorème 3.6.1, il existe $f \in C_c(X) \subset C_0(X)$ telle que $f(x) = 1$, $f(y) = -1$ et $-1 \leq f(z) \leq 1$ pour tout $z \in X$. Alors on a $\|f\|_\infty = 1$ et $(\delta_x - \delta_y)(f) = 2$, d'où $\|\delta_x - \delta_y\| \geq 2$. Par conséquent, on a $\|\delta_x - \delta_y\| = 2$. Pour tout $x \in X$, soit $U_x = B_{C_0(X)^*}(\delta_x, 1)$, alors $(U_x)_{x\in X}$ est une famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints dans $C_0(X)^*$. Si $C_0(X)^*$ est séparable, on déduit de la proposition 1.2.5 que X est au plus dénombrable.
2. Ceci résulte de 1 et de l'exercice 4.3.
3. Ceci résulte de 2.
4. Puisque $(C([0, 1]), \| \|_\infty)$ est séparable, voir proposition 6.8.5, et $C([0, 1])^*$ n'est pas séparable, il résulte du corollaire 7.9.2 que $(C([0, 1]), \| \|_\infty)$ n'est pas réflexif.

Exercice 7.57. Soit $(E, \| \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé tel que $\dim(E) > 1$ et soit C un ouvert convexe non vide de E tel que $0 \notin C$. Montrer qu'il existe un élément non nul $x \in E$ tel que $C \cap \mathbb{R}\, x = \emptyset$.
Solution. D'après le lemme 7.8.1, il existe $f \in E^*$ telle que pour tout $z \in C$, on ait $f(z) < f(0) = 0$. Comme $\dim(E) > 1$, alors $\ker(f) \neq \{0\}$. Soit $x \in \ker(f)$ tel que $x \neq 0$, alors on a $C \cap \mathbb{R}\, x = \emptyset$.
On donne une autre solution de cet exercice sans utiliser le lemme 7.8.1. On cherche $x \in E$, $x \neq 0$, tel que $C \cap \mathbb{R}\, x = \emptyset$. On a $C \cap \mathbb{R}\, x = \emptyset$ si et seulement si pour tout $t > 0$, $x \notin tC$ et $x \notin -tC$. Soit $U = \bigcup_{t>0} tC$, alors U est un ouvert de E. Si $U \cap -U \neq \emptyset$, alors il existe $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ et $x_1, x_2 \in C$ tels que $t_1 x_1 = -t_2 x_2$, d'où on a $\dfrac{t_1 x_1 + t_2 x_2}{t_1 + t_2} = 0$. Comme C est convexe, alors on a $\dfrac{t_1 x_1 + t_2 x_2}{t_1 + t_2} \in C$, c'est une contradiction. Donc on a $U \cap -U = \emptyset$. Puisque l'on a $\dim(E) > 1$, alors $E \setminus \{0\}$ est connexe, voir exercice 6.20. Par conséquent, $U \cup -U$ est inclus strictement dans $E \setminus \{0\}$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $x \notin U \cup -U$. Alors on a $C \cap \mathbb{R}\, x = \emptyset$.

Exercice 7.58. Soit $(E, \| \|)$ un espace normé de dimension infinie. Montrer qu'il existe deux sous-ensembles convexes C_1 et C_2 dans E tels que $E = C_1 \cup C_2$, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, et C_1 et C_2 sont denses dans E.
Solution. Soit f une forme $\mathbb{R}$–linéaire non continue sur E. Soient $C_1 = \{x \in E \; ; \; f(x) < 0\}$ et $C_2 = \{x \in E \; ; \; f(x) \geq 0\}$. Alors C_1 et C_2 sont des ensembles convexes disjoints et on a $E = C_1 \cup C_2$. Comme f n'est pas continue, d'après la proposition 6.3.6, $H = \ker(f)$ est dense dans E. Comme on a $H \subset C_2$, alors C_2 est dense dans E. Soient $a \in E$ tel que $f(a) = 1$ et

†. En fait, la réciproque est aussi vraie : si le dual topologique de $(C_0(X), \| \|_\infty)$ est séparable, alors X est au plus dénombrable.

$h \in H$, alors $f(h - \frac{1}{n}a) = -\frac{1}{n} < 0$, d'où on a $h - \frac{1}{n}a \in C_1$. Or on a $h = \lim_{n \to +\infty} h - \frac{1}{n}a$, donc $H \subset \overline{C_1}$. Par conséquent, C_1 est dense dans E.

Exercice 7.59. Trouver un espace de Banach $(E, \| \|)$ et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et F_1, F_2 sont denses dans E.
Solution. Soient $E = C([0, 2\pi], \mathbb{C})$ muni de la norme $\| \|_\infty$, F_1 le sous-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ et F_2 le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques. Alors on a $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. D'après les corollaires 5.5.1 et 5.5.2, F_1, F_2 sont denses dans E.

Exercice 7.60. Soit $(E, \| \|)$ un espace normé. Une application linéaire continue $U : E \longrightarrow E$ est dite une **involution** si $U \circ U = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que si $U : E \longrightarrow E$ est une involution, alors $P = \frac{1}{2}(U + \mathrm{id}_E)$ est une projection continue, *i.e.* P est linéaire continue telle que $P \circ P = P$.
2. Réciproquement, soit $P : E \longrightarrow E$ une projection continue, montrer que $U = 2P - \mathrm{id}_E$ est une involution.

Solution. 1. Il est clair que si U est linéaire continue, alors P est linéaire continue. On a :

$$\begin{aligned} P \circ P &= \tfrac{1}{2}(U + \mathrm{id}_E) \circ \tfrac{1}{2}(U + \mathrm{id}_E) \\ &= \tfrac{1}{4}(U \circ U + U + U + \mathrm{id}_E) \\ &= \tfrac{1}{4}(2U + 2\mathrm{id}_E) = P. \end{aligned}$$

Donc P est une projection continue.
2. Il est clair que si P est linéaire continue, alors $U = 2P - \mathrm{id}_E$ est linéaire continue. On a :

$$\begin{aligned} U \circ U &= (2P - \mathrm{id}_E) \circ (2P - \mathrm{id}_E) \\ &= 4P \circ P - 2P - 2P + \mathrm{id}_E \\ &= \mathrm{id}_E. \end{aligned}$$

Donc U est une involution.

Exercice 7.61. Soient $(E, \| \|)$ un espace normé et $y \in E$ tel que $y \neq 0$. Soit $f \in E^*$ telle que $f(y) = 1$. Pour tout $x \in E$, on pose $P(x) = f(x)y$. Montrer que $P : E \longrightarrow E$ est une projection continue telle que $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(\{y\})$.
Solution. Il est clair que P est linéaire, $P \circ P = P$ et que l'on a $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(\{y\})$. On a $\|P(x)| \leq \|y\| \, \|f\| \, \|x\|$, donc P est continue. Par conséquent, P est une projection continue.

Exercice 7.62. Soit $E = c_0$ ou ℓ^p, avec $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que l'espace normé produit $E \times \mathbb{K}$ est linéairement homéomorphe à E. En déduire que $E \times F$ est linéairement homéomorphe à E, pour tout espace normé de dimension finie F.
Solution. Pour tous $x = (x_n)_{n \geq 0} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $T(x, \lambda) = (\lambda, x_0, x_1, \ldots) \in E$. Alors T est une application linéaire bijective de $E \times \mathbb{K}$ dans E, et on a $\|T(x, \lambda)\| \leq |\lambda| + \|x\|$, donc T est continue. Comme $E \times \mathbb{K}$ et E sont de Banach, il résulte du théorème de l'application ouverte que T est un homéomorphisme. Par récurrence, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, $E \times \mathbb{K}^n$ est linéairement homéomorphe à E. Par conséquent, pour tout espace normé de dimension finie F,

$E \times F$ est linéairement homéomorphe à E.

Exercice 7.63. Soit $E = C([0,\, 1],\, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0,\, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$. Soient F l'ensemble des fonctions constantes sur $[0, 1]$ et G l'ensemble des $g \in E$ telles que $g(0) = 0$. Montrer que E est la somme directe algébrique des F et G, mais E n'est pas la somme directe topologique des F et G.
Solution. Il est clair que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = \{0\}$. Pour tout $f \in E$, on a $f = f - f(0) + f(0)$, avec $f(0) \in F$ et $f - f(0) \in G$, donc E est la somme directe algébrique des F et G. Pour tout $n \geq 1$, soit $f_n \in G$ définie par : $f_n(0) = 0$, f_n est affine sur $\left[0,\, \frac{1}{n}\right]$ et $f_n(t) = 1$ pour tout $t \in \left[\frac{1}{n},\, 1\right]$. Alors la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge dans E vers la fonction constante 1. Donc G n'est pas fermé dans E. Par conséquent, E n'est pas la somme directe topologique des F et G, voir proposition 7.3.1.

Exercice 7.64. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Banach $(E,\, \|\ \|)$. Montrer que E est la somme directe topologique de F et G si et seulement si E^* est la somme directe topologique de $F^\perp$ et $G^\perp$.
Solution. Supposons d'abord que E est la somme directe topologique de F et G. Soit $p : E \longrightarrow E$ la projection continue telle que $\mathrm{Im}(p) = F$ et $\ker(p) = G$. Alors $p^* : E^* \longrightarrow E^*$ est une projection continue telle que $\mathrm{Im}(p^*) = G^\perp$ et $\ker(p^*) = F^\perp$. Donc E^* est la somme directe topologique de $F^\perp$ et $G^\perp$, voir corollaire 7.3.1.
Réciproquement, supposons que E^* est la somme directe topologique de $F^\perp$ et $G^\perp$. Il résulte de ce qui précède que E^{**} est la somme directe topologique de $(F^\perp)^\perp$ et $(G^\perp)^\perp$. Soit $J_E : E \longrightarrow E^{**}$ l'application canonique. Comme on a $J(F) \subset (F^\perp)^\perp$ et $J(G) \subset (G^\perp)^\perp$, alors on a $F \cap G = \{0\}$. Soit $f \in E^*$ telle que $f_{|F+G} = 0$. Comme on a $F^\perp \cap G^\perp = \{0\}$, alors $f = 0$. Il résulte du corollaire 7.7.3 que $F + G$ est dense dans E. Soit $a \in E$, alors il existe $\Lambda_1 \in (F^\perp)^\perp$ et $\Lambda_2 \in (G^\perp)^\perp$ tels que $J(a) = \Lambda_1 + \Lambda_2$. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans F et $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite dans G telles que $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n + y_n$. D'où on a $J(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} J(x_n) + J(y_n)$. Comme les projections naturelles sur $(F^\perp)^\perp$ et $(G^\perp)^\perp$ sont continues, on en déduit que la suite $(J(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers Λ_1 et la suite $(J(y_n))_{n\geq 0}$ converge vers Λ_2. Or J est une application isométrique, donc $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans F et $(y_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans G. Puisque F et G sont des Banach, alors il existe $x \in F$ et $y \in G$ tels que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. Donc on a $J(a) = J(x) + J(y)$, d'où $a = x + y$. Par conséquent, E est la somme directe algébrique de F et G. Il résulte de la proposition 7.3.2 que E est la somme directe topologique de F et G.

Exercice 7.65. Soit $(E,\, \|\ \|)$ un espace normé. Soient $J_E : E \longrightarrow E^{**}$ et $J_{E^*} : E^* \longrightarrow E^{***}$ les applications canoniques. Montrer que $J_{E^*} \circ J_E^* : E^{***} \longrightarrow E^{***}$ est une projection continue. En déduire que E^{***} est la somme directe topologique de $J_{E^*}(E^*)$ et de $J_E(E)^\perp$.
Solution. Notons d'abord que $P = J_{E^*} \circ J_E^*$ est une application linéaire continue. Pour mieux visualiser les applications intervenant dans cet exercice, considérons les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "J_E"] \arrow[dr, "J_{E^*}(f)\circ J_E"'] & E^{**} \arrow[d, "J_{E^*}(f)"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E^* \arrow[d, "J_{E^*}"'] & E^{***} \arrow[l, "J_E^*"'] \arrow[dl, "P"] \\ E^{***} & \end{tikzcd}$$

On a $P \circ P = J_{E^*} \circ J_E^* \circ J_{E^*} \circ J_E^*$. Pour montrer que $P \circ P = P$, il suffit de montrer que pour tout $f \in E^*$, on a $J_E^* \circ J_{E^*}(f) = f$. Pour tout $f \in E^*$ et pour tout $x \in E$, on a

$$J_E^* \circ J_{E^*}(f)(x) = J_E^*(J_{E^*}(f))(x) = \big(J_{E^*}(f) \circ J_E\big)(x) = J_{E^*}(f)(J_E(x)) = J_E(x)(f) = f(x)\,.$$

D'où on a $J_E^* \circ J_{E^*}(f) = f$. Par conséquent, on a $P \circ P = P$. Donc P est une projection continue. D'après la remarque 7.10.1, J_E^* est surjective, donc on a $P(E^{***}) = J_{E^*}(E^*)$. Comme J_{E^*} est une application isométrique, alors on a $\ker(P) = \ker(J_E^*) = J_E(E)^\perp$. Par conséquent, E^{***} est la somme directe topologique de $J_{E^*}(E^*)$ et de $J_E(E)^\perp$.

Exercice 7.66. Soient E, F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue et surjective. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) T admet un inverse à droite, *i.e.* il existe une application $S : F \longrightarrow E$ linéaire continue telle que $T \circ S = \mathrm{id}_F$.

(ii) $\ker(T)$ admet un supplémentaire topologique dans E.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Par hypothèse, il existe $S : F \longrightarrow E$ linéaire continue telle que $T \circ S = \mathrm{id}_F$. Soit $G = S(F)$, alors G est un sous-espace vectoriel de E. Montrons que G est fermé dans E. Soient $x \in E$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite dans F telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} S(y_n) = x$. D'où on a $S(T(x)) = \lim\limits_{n\to+\infty} S(T(S(y_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} S(y_n) = x$, donc $x \in G$. Par conséquent, G est fermé dans E. Soit $x \in G \cap \ker(T)$, alors on a $T(x) = 0$ et il existe $y \in F$ tel que $x = S(y)$, d'où on a $y = (T \circ S)(y) = T(S(y)) = T(x) = 0$, donc $y = 0$. D'où on a $x = 0$. Par conséquent, on a $G \cap \ker(T) = \{0\}$. Pour tout $x \in E$, on a $x = x - S(T(x)) + S(T(x))$, avec $S(T(x)) \in G$ et $x - S(T(x)) \in \ker(T)$, donc E est la somme directe algébrique des $\ker(T)$ et G. Or $\ker(T)$ et G sont fermés dans l'espace de Banach E, donc E est la somme directe topologique des $\ker(T)$ et G, voir proposition 7.3.2.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Par hypothèse, il existe un sous-espace vectoriel fermé G de E tel que $G \cap \ker(T) = \{0\}$ et $E = G + \ker(T)$. Alors G est un espace de Banach et $T_{|_G} : G \longrightarrow F$ est une application linéaire continue et bijective. D'après le théorème de l'application ouverte, il existe $S : F \longrightarrow G \subset E$ linéaire continue telle que pour tout $y \in F$, on ait $T(S(y)) = y$.

Exercice 7.67. Soient E, F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue et injective. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) T admet un inverse à gauche, *i.e.* il existe une application $S : F \longrightarrow E$ linéaire continue telle que $S \circ T = \mathrm{id}_E$.

(ii) $T(E)$ admet un supplémentaire topologique dans F.

Solution. Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Comme $T(E)$ admet un supplémentaire topologique dans F, alors $T(E)$ est fermé dans F, donc de Banach, et la projection naturelle $\pi : F \longrightarrow T(E)$ est linéaire continue. Puisque $T : E \longrightarrow T(E)$ est linéaire continue et bijective, d'après le théorème de l'application ouverte, il existe $\widetilde{S} : T(E) \longrightarrow E$ linéaire continue telle que pour tout $x \in E$, on ait $\widetilde{S}(T(x)) = x$. Soit $S = \widetilde{S} \circ \pi$, alors S est une application linéaire continue de F dans E telle que $S \circ T = \mathrm{id}_E$.
Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Par hypothèse, il existe $S : F \longrightarrow E$ linéaire continue telle que $S \circ T = \mathrm{id}_E$. Montrons que $T(E)$ est fermé dans F. Soient $y \in F$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} T(x_n) = y$. D'où on a $T(S(x)) = \lim\limits_{n\to+\infty} T(S(T(x_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} T(x_n) = y$, donc $y \in T(E)$. Par conséquent, $T(E)$ est fermé dans E. Puisque $\ker(S)$ est un sous-espace vectoriel fermé de F, pour montrer que F est la somme directe topologique des $T(E)$ et $\ker(S)$, il reste

à montrer que F est la somme directe algébrique des $T(E)$ et $\ker(S)$. Soit $y \in T(E) \cap \ker(S)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = T(x)$ et $0 = S(y) = S(T(x)) = x$, d'où $y = 0$. Donc on a $T(E) \cap \ker(S) = \{0\}$. Pour tout $y \in F$, on a $y = y - T(S(y)) + T(S(y))$, avec $T(S(y)) \in T(E)$ et $y - T(S(y)) \in \ker(S)$, donc on a $F = T(E) + \ker(S)$. Par conséquent, F est la somme directe algébrique des $T(E)$ et $\ker(S)$.

Exercice 7.68. Soit $R : \ell^1 \longrightarrow c_0$ définie par : pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$, $R(x) = (r_n)_{n\geq 0}$, où $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} x_k$. Montrer que $R \in \mathscr{L}(\ell^1; c_0)$ et donner une formule explicite de R^* dans $\mathscr{L}(\ell^1; \ell^\infty)$.

Solution. Il est clair que R est bien définie et que R est linéaire. Pour tout $n \geq 0$, on a $|r_n| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |x_k| \leq \|x\|_1$, donc R est continue et on a $\|R\| \leq 1$. Si $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$, on note $T_a \in c_0^*$, définie par $T_a\big((t_n)_{n\geq 0}\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t_n$. On a $R^*(T_a) = T_a \circ R$. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$, on a $R^*(T_a)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big(\sum_{k=n}^{+\infty} x_k\Big)$. D'après le corollaire 6.7.4 et la proposition 6.7.5, la famille $\big(a_n x_k\big)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Soit $I = \big\{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ k \geq n\big\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty}\big\{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ 0 \leq n \leq k\big\}$. D'après le corollaire 6.7.2 et le théorème 6.7.4, la famille $\big(a_n x_k\big)_{(n,k)\in I}$ est sommable et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big(\sum_{k=n}^{+\infty} x_k\Big) = \sum_{(n,k)\in I} a_n x_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{k} a_n\Big)x_k\,.$$

Par conséquent, on a $R^*(T_a)\big((x_n)_{n\geq 0}\big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big)x_n$. Pour tout $n \geq 0$, soit $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, alors $b = (b_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$ et on a $R^*(T_a) = T_b$, où $T_b \in \ell^{1*}$, définie par $T_b\big((x_n)_{n\geq 0}\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x_n$. En identifiant c_0^* à ℓ^1 et ℓ^{1*} à ℓ^∞, on obtient $R^* \in \mathscr{L}(\ell^1; \ell^\infty)$, définie par $R^*\big((a_n)_{n\geq 0}\big) = (b_n)_{n\geq 0}$, où pour tout $n \geq 0$, on a $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Exercice 7.69. Soient E et F deux espaces de Banach. On suppose qu'il existe une application linéaire isométrique T de E dans F^* telle que $T^* \circ J_F : F \longrightarrow E^*$ soit une application isométrique de F dans E^*. Montrer que si E est réflexif, alors on a $F = E^*$ et $E = F^*$.

Solution. Soient $J_E : E \longrightarrow E^{**}$ et $J_F : F \longrightarrow F^{**}$ les applications canoniques. Par hypothèse, $T^* \circ J_F : F \longrightarrow E^*$ est linéaire et isométrique. Pour tout $y \in F$, on a $T^*(J_F(y)) = J_F(y) \circ T$. Si $T^* \circ J_F$ n'était pas surjective, d'après le corollaire 7.7.2, il existerait $h \in E^{**}$ tel que $h \neq 0$ et $h(J_F(y) \circ T) = 0$, pour tout $y \in F$. Comme E est réflexif, il existe $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $h = J_E(x)$, d'où $J_E(x)(J_F(y) \circ T) = 0$, pour tout $y \in F$. Or on a $J_E(x)(J_F(y) \circ T) = (J_F(y) \circ T)(x) = J_F(y)(T(x)) = T(x)(y)$, donc $T(x)(y) = 0$ pour tout $y \in F$, d'où $T(x) = 0$. On en déduit que $x = 0$, car T est isométrique, ce qui est impossible. Par conséquent, $T^* \circ J_F$ est surjective, donc on a $F = E^*$ et $F^* = E^{**} = E$.

Exercice 7.70. Soient $(E\|\;\|)$, $(F\|\;\|')$ deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E; F)$. Montrer que

1. T est bijective de E sur F si et seulement si T^* est bijective de F^* sur E^*.

2. T est isométrique et surjective de E sur F si et seulement si T^* est isométrique et surjective de F^* sur E^*.

Solution. 1. Si T est bijective de E sur F, d'après le théorème de l'application ouverte, il existe $S \in \mathscr{L}(F;\, E)$ tel que $T \circ S = \mathrm{id}_F$ et $S \circ T = \mathrm{id}_E$, d'où on a $T^* \circ S^* = \mathrm{id}_{E^*}$ et $S^* \circ T^* = \mathrm{id}_{F^*}$. Donc T^* est bijective de F^* sur E^*.
Réciproquement, supposons que T^* est bijective de F^* sur E^*. D'après les propositions 7.10.4 7.10.5, T est injective, $T(E)$ est fermé dans F et $T(E)$ est dense dans F, donc T est bijective.
2. Supposons d'abord que T est isométrique et surjective de E sur F. Alors on a $T(B_E(0,1)) = B_F(0,1)$. D'après 1, T^* est aussi bijective de F^* sur E^*. Il reste à vérifier que T^* est isométrique. Pour tout $f \in F^*$, on a :

$$\|T^*(f)\| = \|f \circ T\| = \sup\{|f(T(x))|\ ;\ x \in B_E(0,1)\} = \sup\{|f(y)|\ ;\ y \in B_F(0,1)\} = \|f\|\,.$$

Donc T^* est isométrique.
Réciproquement, supposons que T^* est isométrique et surjective de F^* sur E^*. Alors on a $T^*(B_{F^*}(0,1)) = B_{E^*}(0,1)$. D'après 1, T est aussi bijective de E sur F. Il reste à vérifier que T est isométrique. D'après le corollaire 7.9.1, on a :

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \sup\{|f(T(x))|\ ;\ f \in B_{F^*}(0,1)\}\\ &= \sup\{|T^*(f)(x)|\ ;\ f \in B_{F^*}(0,1)\}\\ &= \sup\{|g(x)|\ ;\ g \in B_{E^*}(0,1)\}\ =\ \|x\|\,.\end{aligned}$$

Donc T est isométrique.

Exercice 7.71. Montrer que c_0 n'est pas linéairement homéomorphe à $C([0,\, 1])$.
Solution. Si c_0 est linéairement homéomorphe à $C([0,\, 1])$, d'après l'exercice précédent, $\ell^1 = c_0^*$ serait linéairement homéomorphe à $C([0,\, 1])^*$. Or ℓ^1 est séparable, mais $C([0,\, 1])^*$ ne l'est pas, voir exercice 7.56, donc c_0 n'est pas linéairement homéomorphe à $C([0,\, 1])$.

Exercice 7.72. Soient $(E,\, \|\ \|)$, $(F,\, \|\ \|)$ deux espaces de Banach et $A : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue surjective. Soit $T : \ell^1 \longrightarrow F$ une application linéaire continue. Montrer qu'il existe une application linéaire continue $S : \ell^1 \longrightarrow E$ telle que $A \circ S = T$. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "A"] & F \\ & \ell^1 \arrow[u, "T"'] \arrow[ul, "S"] \end{tikzcd}$$

Solution. Notons d'abord que l'on peut supposer $T \neq 0$. Pour tout $n \geq 0$, on a $\|T(\mathbf{e}_n)\| \leq \|T\|$. Comme A est une application linéaire continue surjective, d'après le théorème de l'application ouverte, A est une application ouverte. Donc il existe $\eta > 0$ tel que $B_F(0,\eta) \subset A(B_E(0,1))$. Comme pour tout $n \geq 0$, on a $\dfrac{\eta}{2\|T\|}T(\mathbf{e}_n) \in B_F(0,\eta)$, alors il existe $z_n \in B_E(0,1)$ tel que $\dfrac{\eta}{2\|T\|}T(\mathbf{e}_n) = A(z_n)$, d'où on a $T(\mathbf{e}_n) = A\Big(\dfrac{2\|T\|}{\eta}z_n\Big)$. Autrement dit, il existe une suite bornée $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E telle que $A(x_n) = T(\mathbf{e}_n)$, pour tout $n \geq 0$. Soit $\lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$. Comme la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n$ est absolument convergente et comme $(E,\, \|\ \|)$ est de Banach, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n$ existe dans E. On pose ensuite $S((\lambda_n)_{n\geq 0}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n$. Alors S est une application linéaire continue de ℓ^1 dans E telle que $A \circ S = T$.

Chapitre 8

ESPACES DE HILBERT

Proposition. Le complété d'un espace préhilbertien est un espace de Hilbert.

Démonstration. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien et $(H, \|\ \|)$ un espace de Banach tels que E soit un sous-espace vectoriel dense dans H et pour tout $x \in E$, on ait $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Il s'agit de définir un produit scalaire sur H qui induit la norme $\|\ \|$. Soient $x, y \in H$. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ des suites dans E telles que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$ dans H.
Vérifions d'abord que $\big(\langle x_n, y_n\rangle\big)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned}\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_m, y_m\rangle &= \langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y_m\rangle + \langle x_n, y_m\rangle - \langle x_m, y_m\rangle \\ &= \langle x_n, y_n - y_m\rangle + \langle x_n - x_m, y_m\rangle\,.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_m, y_m\rangle| \leq \|x_n\|\,\|y_n - y_m\| + \|x_n - x_m\|\,\|y_m\|\,.$$

Comme les suites $\big(\|x_n\|\big)_{n\geq 0}$ et $\big(\|y_n\|\big)_{n\geq 0}$ sont bornées, alors la suite $\big(\langle x_n, y_n\rangle\big)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$, donc elle converge dans $\mathbb{K}$.
Soient $(x'_n)_{n\geq 0}$ et $(y'_n)_{n\geq 0}$ des autres suites dans E telles que $x'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et $y'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$ dans H. Montrons que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle x'_n, y'_n\rangle$. On a :

$$\begin{aligned}\langle x'_n, y'_n\rangle - \langle x_n, y_n\rangle &= \langle x'_n, y'_n\rangle - \langle x_n, y'_n\rangle + \langle x_n, y'_n\rangle - \langle x_n, y_n\rangle \\ &= \langle x'_n - x_n, y'_n\rangle + \langle x_n, y'_n - y_n\rangle\end{aligned}$$

d'où $|\langle x'_n, y'_n\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \leq \|x'_n - x_n\|\,\|y'_n\| + \|x_n\|\,\|y'_n - y_n\|$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle x'_n, y'_n\rangle$. On pose :

$$\langle x, y\rangle_1 = \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle\,.$$

Alors $\langle x, y\rangle_1$ est bien défini et on a $\langle x, y\rangle_1 \in \mathbb{K}$. On vérifie facilement que $\langle\ ,\ \rangle_1$ est un produit scalaire sur H tel que pour tout $x, y \in E$, on ait $\langle x, y\rangle_1 = \langle x, y\rangle$ et que pour tout $z \in H$, on a $\|z\| = \sqrt{\langle z, z\rangle_1}$. Donc $(H, \|\ \|)$ est un espace de Hilbert. ■

Proposition. Soient E, F et H des espaces de Hilbert.

1. Pour tout $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$, on a $(T^*)^* = T$, $\|T^*\| = \|T\|$ et $\|T^* \circ T\| = \|T \circ T^*\| = \|T\|^2$.

2. L'application suivante est semi-linéaire, bijective et isométrique.

$$\begin{array}{cccc} A: & \mathscr{L}(E;\, F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(F;\, E) \\ & T & \longmapsto & T^* \end{array}$$

3. On a ${\mathrm{id}_E}^* = \mathrm{id}_E$, où id_E désigne l'application identité de E.
4. Pour tout $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$ et tout $S \in \mathscr{L}(F;\, H)$, on a $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.
5. Si $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$ est un homéomorphisme, alors T^* est un homéomorphisme et on a $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Démonstration. 1. Pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on a :

$$\langle y, T(x)\rangle = \overline{\langle T(x), y\rangle} = \overline{\langle x, T^*(y)\rangle} = \langle T^*(y), x\rangle = \langle y, (T^*)^*(x)\rangle\,.$$

Par conséquent, pour tout $x \in E$, on a $T(x) = (T^*)^*(x)$, d'où $T = (T^*)^*$. On a vu dans la proposition précédente que l'on a $\|T^*\| \leq \|T\|$, on en déduit $\|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|$, donc on a $\|T^*\| = \|T\|$. On a $\|T^* \circ T\| \leq \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2$. Par ailleurs, pour tout $x \in E$, on a :

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, T^* \circ T(x)\rangle \leq \|x\|\,\|T^* \circ T(x)\| \leq \|x\|^2\,\|T^* \circ T\|\,.$$

D'où on a $\|T\|^2 = \sup\left\{\|T(x)\|^2\ ;\ \|x\| \leq 1\right\} \leq \|T^* \circ T\|$. On a donc $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$. En appliquant ce résultat à T^*, on obtient $\|T \circ T^*\| = \|(T^*)^* \circ T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$.
2. On a $\|A(T)\| = \|T^*\| = \|T\|$, donc A est isométrique. Soit $R \in \mathscr{L}(F;\, E)$, alors $R^* \in \mathscr{L}(E;\, F)$ et on a $A(R^*) = (R^*)^* = R$, donc A est surjective. Par conséquent, A est isométrique et bijective. Soient $T, S \in \mathscr{L}(E;\, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$, on a :

$$\begin{aligned} \langle (T + \lambda S)(x), y\rangle &= \langle T(x) + \lambda S(x), y\rangle \\ &= \langle T(x), y\rangle + \lambda\langle S(x), y\rangle \\ &= \langle x, T^*(y)\rangle + \lambda\langle x, S^*(y)\rangle \\ &= \langle x, T^*(y) + \overline{\lambda} S^*(y)\rangle \\ &= \langle x, (T^* + \overline{\lambda} S^*)(y)\rangle\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $(T + \lambda S)^* = T^* + \overline{\lambda} S^*$, donc A est semi-linéaire.
3. Pour tout $x, y \in E$, on a $\langle \mathrm{id}_E(x), y\rangle = \langle x, y\rangle = \langle x, \mathrm{id}_E(y)\rangle$, donc on a ${\mathrm{id}_E}^* = \mathrm{id}_E$.
4. Soient $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$ et $S \in \mathscr{L}(F;\, H)$. Pour tout $x \in E$ et pour tout $z \in H$, on a :

$$\langle (S \circ T)(x), z\rangle = \langle S(T(x)), z\rangle = \langle T(x), S^*(z)\rangle = \langle x, T^*(S^*(z))\rangle = \langle x, (T^* \circ S^*)(z)\rangle\,.$$

Par conséquent, on a $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.
5. Soit $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$ et supposons que T est un homéomorphisme, alors $T^{-1} \in \mathscr{L}(F;\, E)$ et on a $T \circ T^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_E$. Il résulte de 3 et 4 que l'on a $(T^{-1})^* \circ T^* = \mathrm{id}_F$ et $T^* \circ (T^{-1})^* = \mathrm{id}_E$. Donc T^* est un homéomorphisme et on a $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. ■

Proposition. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $P \in \mathscr{L}(H)$ tel que $P \circ P = P$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) P est un projecteur orthogonal. Autrement dit, il existe un sous-espace vectoriel fermé F de H tel que $P = P_F$ soit le projecteur orthogonal sur F.

(ii) On a $P^* = P$.

(iii) On a $P \circ P^* = P^* \circ P$.

(iv) On a $\mathrm{Im}(P) = \ker(P)^\perp$.

(v) Pour tout $x \in H$, on a $\langle P(x), x\rangle = \|P(x)\|^2$.

(vi) On a $\|P\| \leq 1$.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 8 du supplément.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Par hypothèse, il existe un sous-espace vectoriel fermé F de H tel que P soit le projecteur orthogonal sur F. D'après la proposition 8.3.7, pour tout $x, y \in H$, on a $\langle P(x), y-P(y)\rangle = 0$ et $\langle x-P(x), P(y)\rangle = 0$, car $y-P(y), x-P(x) \in F^\perp$, donc on a :

$$\begin{aligned}\langle P(x), y\rangle &= \langle P(x), y - P(y) + P(y)\rangle \\ &= \langle P(x), y - P(y)\rangle + \langle P(x), P(y)\rangle \\ &= \langle P(x), P(y)\rangle \\ &= \langle x - P(x), P(y)\rangle + \langle P(x), P(y)\rangle \\ &= \langle x, P(y)\rangle\,.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $P^* = P$.
L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (iv). D'après la proposition 8.4.4 et le corollaire 8.3.2, on a $\overline{\mathrm{Im}(P)} = \ker(P^*)^\perp$. Comme on a $P \circ P = P$, alors $\mathrm{Im}(P) = \ker(\mathrm{id}_H - P)$, donc $\mathrm{Im}(P)$ est fermé dans H, d'où on a $\mathrm{Im}(P) = \overline{\mathrm{Im}(P)}$. Par conséquent, on a $\mathrm{Im}(P) = \ker(P^*)^\perp$. D'autre part, Pour tout $x \in H$, on a :

$$\|P(x)\|^2 = \langle P(x), P(x)\rangle = \langle x, (P^* \circ P)(x)\rangle = \langle x, (P \circ P^*)(x)\rangle = \langle P^*(x), P^*(x)\rangle = \|P^*(x)\|^2\,.$$

Donc on a $\ker(P^*) = \ker(P)$, d'où $\mathrm{Im}(P) = \ker(P)^\perp$.
Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (v). Par hypothèse, on a $\mathrm{Im}(P) = \ker(P)^\perp$. Comme on a $P \circ P = P$, alors $\ker(P) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_H - P)$. Par conséquent, on a $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_H - P) = \mathrm{Im}(P)^\perp$. En particulier, pour tout $x \in H$, on a $\langle P(x), x - P(x)\rangle = 0$. D'où on a :

$$\langle P(x), x\rangle = \langle P(x), x - P(x) + P(x)\rangle = \langle P(x), x - P(x)\rangle + \langle P(x), P(x)\rangle = \|P(x)\|^2\,.$$

Preuve de (v) $\Longrightarrow$ (vi). Par hypothèse, pour tout $x \in H$, on a $\langle P(x), x\rangle = \|P(x)\|^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\langle P(x), x\rangle| \leq \|P(x)\|\,\|x\|$. Par conséquent, pour tout $x \in H$, on a $\|P(x)\| \leq \|x\|$, d'où $\|P\| \leq 1$.
Montrons l'implication (vi) $\Longrightarrow$ (i). Soit $F = P(H)$. Alors F est un sous-espace vectoriel de H, car P est linéaire. Montrons que F est fermé dans H. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans H et $y \in H$ tels que $y = \lim\limits_{n\to+\infty} P(x_n)$. Comme P est continue, alors on a $P(y) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(P(x_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(x_n) = y$, d'où $y = P(y) \in F$. Donc F est fermé dans H et pour tout $y \in F$, on a $P(y) = y$. Soit $z \in F^\perp$, alors $P(z) = y \in F$. Donc, pour tout $n \geq 1$, on a $P\big(y + \frac{1}{n}z\big) = P(y) + \frac{1}{n}P(z) = y + \frac{1}{n}y$. D'où on a $\big(1+\frac{1}{n}\big)^2\|y\|^2 = \big\|P\big(y+\frac{1}{n}z\big)\big\|^2 \leq \big\|y+\frac{1}{n}z\big\|^2 = \|y\|^2 + \frac{1}{n^2}\|z\|^2$. Par conséquent, pour tout $n \geq 1$, on a $(2n+1)\|y\|^2 \leq \|z\|^2$, d'où $y = 0$. Comme on a $H = F + F^\perp$, on en déduit que $P = P_F$ le projecteur orthogonal sur F. ■

Proposition. Soient $(E, \langle\,,\,\rangle)$, $(F, \langle\,,\,\rangle)$ des espaces de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(E; F)$.

1. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
   (i) $T^* \circ T = \mathrm{id}_E$.
   (ii) Pour tout $x,\, y \in E$, on a $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
   (iii) Pour tout $x \in E$, on a $\|T(x)\| = \|x\|$. Autrement dit, T est isométrique.
2. On suppose que T est isométrique. Alors on a :
   (a) L'image d'un sous-espace vectoriel fermé de E par T, est un sous-espace fermé de F.
   (b) Si G un sous-espace vectoriel de E, alors on a $T(G^\perp) \subset T(G)^\perp$.
   (c) Soit $P = T \circ T^*$, alors P est le projecteur orthogonal sur $T(E)$.

Démonstration. 1. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Par hypothèse, on a $T^* \circ T = \mathrm{id}_E$. Alors, pour tout $x,\, y \in E$, on a $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, T^*(T(y))\rangle = \langle x, (T^* \circ T)(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Pour tout $x \in E$, on a :

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

d'où $\|T(x)\| = \|x\|$.
L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (ii) résulte de la proposition 8.2.1, propriétés 4 et 5.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Pour tout $x,\, y \in E$, on a :

$$\langle x, y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, (T^* \circ T)(y)\rangle\,.$$

Donc, pour tout $y \in E$, on a $y = (T^* \circ T)(y)$. Autrement dit, on a $T^* \circ T = \mathrm{id}_E$.
2. On suppose que T est isométrique.
2(a). Soit H un sous-espace vectoriel fermé de E. Soient $y \in F$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans H telle que $y = \lim\limits_{n\to+\infty} T(x_n)$. Comme T^* est continue, alors on a $T^*(y) = \lim\limits_{n\to+\infty} T^*(T(x_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, donc $T^*(y) \in H$. Comme on a $T \circ T^* \circ T = T$, alors $(T \circ T^*)(y) = \lim\limits_{n\to+\infty} (T \circ T^*)(T(x_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} T(x_n) = y$. Par conséquent, on a $y = T(T^*(y)) \in T(H)$. Donc $T(H)$ est fermé dans F.
2(b). Soient $x \in G^\perp$ et $y \in T(G)$. Alors il existe $z \in G$ tel que $y = T(z)$. On a $\langle T(x), y\rangle = \langle T(x), T(z)\rangle = \langle T^*(T(x)), z\rangle = \langle x, z\rangle = 0$, d'où $T(x) \in T(G)^\perp$. Par conséquent, on a $T(G^\perp) \subset T(G)^\perp$.
2(c). Soit $P = T \circ T^*$. Alors on a $P = P^*$ et $P \circ P = T \circ T^* \circ T \circ T^* = T \circ \mathrm{id}_H \circ T^* = T \circ T^* = P$. D'après la proposition précédente, P est le projecteur orthogonal sur $P(E)$. On a $P(E) = T(T^*(E)) \subset T(E)$. On a aussi $T = T \circ T^* \circ T = P \circ T$, d'où $T(E) \subset P(E)$. Donc on a $P(E) = T(E)$. Par conséquent, P est le projecteur orthogonal sur $T(E)$. ■

Théorème. Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert. Alors toute famille orthonormale dans H est contenue dans une base hilbertienne de H. En particulier, Tout espace de Hilbert non nul admet une base hilbertienne.

Démonstration. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale dans H. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des familles orthonormales dans H, contenant les e_i, $i \in I$. Montrons que $\mathcal{B}$ muni de l'inclusion est inductif. Soit $\{B_j\ ;\ j \in J\}$ une partie totalement ordonnée de $\mathcal{B}$. Soient $x, y \in \bigcup\limits_{j\in J} B_j$, alors il existe $j \in J$ tel que $x, y \in B_j$. Donc on a $\langle x, x\rangle = 1$, $\langle y, y\rangle = 1$ et $\langle x, y\rangle = 0$. Il s'ensuit que $\bigcup\limits_{j\in J} B_j$ est un élément de $\mathcal{B}$, majorant tous les B_j. Donc $\mathcal{B}$ est inductif. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{B}$ possède un élément maximal B. Soit $x \in B^\perp$. Si $x \neq 0$, alors $B \cup \left\{\dfrac{x}{\|x\|}\right\}$ est élément de $\mathcal{B}$ et majore B, ce qui contredit la maximalité de B. Donc on a $B^\perp = 0$. Il résulte du corollaire 8.3.3 que B est total. Donc B est une base hilbertienne de H. ■

Théorème. Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert. Deux bases hilbertiennes de H ont même cardinal.

Démonstration. Si H est de dimension finie n, alors toute base hilbertienne de H est aussi une base algébrique, donc son cardinal est n. On suppose maintenant que H est de dimension infinie. Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(e_j)_{j\in J}$ deux bases hilbertiennes de H. Alors I et J sont des ensembles infinis. Soit $D = \{(i,j) \in I \times J\ ;\ \langle x_i, e_j\rangle \neq 0\}$. D'après le théorème 8.6.1, pour tout $i \in I$, on a $0 \neq \|x_i\|^2 = \sum_{j\in J} |\langle x_i, e_j\rangle|^2$, donc, pour tout $i \in I$, il existe $j \in J$ tel que $\langle x_i, e_j\rangle \neq 0$. Par conséquent, l'application $(i,j) \longmapsto i$ de D dans I est surjective, d'où on a $\mathrm{Card}(I) \leq \mathrm{Card}(D)$. D'autre part, pour tout $j \in J$, on a aussi $\|e_j\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x_i, e_j\rangle|^2$. D'après la proposition 6.7.3, l'ensemble $I_j = \{i \in I\ ;\ \langle x_i, e_j\rangle \neq 0\}$ est au plus dénombrable. Soit $f_j : I_j \longrightarrow \mathbb{N}$ une application injective. On a $D = \bigcup_{j\in J} I_j \times \{j\}$, et soit $f : D \longrightarrow J \times \mathbb{N}$ définie par $f(i,j) = (j, f_j(i))$ si $i \in I_j$. Alors f est une application injective. Par conséquent, on a $\mathrm{Card}(D) \leq \mathrm{Card}(J \times \mathbb{N})$. Or on a $\mathrm{Card}(J \times \mathbb{N}) = \mathrm{Card}(J)$, car J est infini, donc on a $\mathrm{Card}(I) \leq \mathrm{Card}(J)$. On échange le rôle de I et J, on obtient aussi $\mathrm{Card}(J) \leq \mathrm{Card}(I)$. Finalement, on a $\mathrm{Card}(I) = \mathrm{Card}(J)$. ■

Supplément d'exercices

Exercice 8.38. [**Noyaux reproduisants**] Soient X un ensemble et $\mathbb{C}^X$ l'espace vectoriel des applications de X dans $\mathbb{C}$. Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^X$ muni d'une structure d'espace de Hilbert. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire sur H et $\|\ \|$ la norme associée.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
   (i) Pour tout $x \in X$, la forme linéaire définie sur H par $f \longmapsto f(x)$ est continue.
   (ii) Il existe une application K de $X \times X$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant
   – pour tout $y \in X$, l'application $K(.,y) : x \longmapsto K(x,y)$ appartient à H ;
   – pour tout $f \in H$ et tout $y \in X$, $\langle f, K(.,y)\rangle = f(y)$.

   Dans ce cas, une telle application K est unique et appelée **le noyau reproduisant** de H.
2. Supposons que H possède le noyau reproduisant K.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\xi = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$, l'application

   $$\begin{array}{rccc} T_{n,\xi}\ : & \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \big((\lambda_i)_{1\leq i\leq n}, (\mu_i)_{1\leq i\leq n}\big) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} K(x_i, x_j)\lambda_i\overline{\mu_j} \end{array}$$

   est une forme hermitienne positive.
   Une application de $X \times X$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété (a) ci-dessus est appelée **application de type positif** de $X \times X$ dans $\mathbb{C}$

   (b) Soit E un sous-espace vectoriel fermé de H. Montrons que E possède un noyau reproduisant K_1 et que pour tout $f \in H$, l'application $y \longmapsto \langle f, K_1(.,y)\rangle$ est la projection orthogonale de f sur E. Soient K_2 le noyau reproduisant de $E^{\perp}$. Montrer que $K_1 + K_2$ est le noyau reproduisant de H.

(c) Soient $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite finie de points de X et $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de n nombres complexes. On suppose que le déterminant $\det\big([K(x_i, x_j)]\big)$ soit non nul, de sorte que le système d'équations linéaires $\sum_{j=1}^{n} c_j K(x_i, x_j) = a_i$, $1 \leq i \leq n$, a une solution unique $(c_i)_{1\leq i\leq n}$. Soit $A = \{f \in H \;;\; f(x_i) = a_i\,,\ 1 \leq i \leq n\}$. Montrer que $f_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j K(., x_j) \in A$ et que $\inf_{f\in A} \|f\| = \|f_0\|$. En déduire que si $x \in X$ tel que $K(x, x) \neq 0$ et si $B = \{f \in H \;;\; f(x) = 1\}$, alors l'application $g_0 = \dfrac{K(., x)}{K(x, x)} \in B$ et que $\inf_{g\in B} \|g\| = \|g_0\|$.

(d) Montrer que la famille $\big(K(., y)\big)_{y\in X}$ est totale dans H.

(e) Supposons de plus que X est un espace topologique séparable et que $H \subset C(X, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^X$. Montrer que H est séparable.

Solution. 1. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) est triviale. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $y \in X$. Comme $f \longmapsto f(y)$ est une forme linéaire continue sur H, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $K(., y) \in H$ tel que pour tout $f \in H$, on ait $\langle f, K(., y)\rangle = f(y)$. D'autre part, $K(., y)$ est une application de X dans $\mathbb{C}$, donc on pose $K(x, y) = K(., y)(x) \in \mathbb{C}$. Ainsi, on définit une application $K : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés (i) et (ii). L'unicité d'une telle application K est triviale.

2(a). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\xi = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$. Notons d'abord que pour tout $x, y \in X$, on a :

$$K(x, y) = K(., y)(x) = \langle K(., y), K(., x)\rangle\,.$$

Par conséquent, on a $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$. Il est clair que $T_{n,\xi}$ est une forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}^n$. D'autre part, on a :

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(x_i, x_j)\lambda_i\overline{\lambda_j} = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i K(., x_i)\,,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i K(., x_i)\Big\rangle \geq 0\,.$$

Par conséquent, $T_{n,\xi}$ est une forme hermitienne positive sur $\mathbb{C}^n$.

2(b). Soit E un sous-espace vectoriel fermé de H. Puisque, pour tout $x \in X$, la forme linéaire $f \longmapsto f(x)$ est continue sur H, alors $f \longmapsto f(x)$ est aussi continue sur E. On déduit de 1 que E possède un noyau reproduisant K_1. Soit P la projection orthogonale de H sur E. Pour tout $f \in H$, on a $f = P(f) + f - P(f)$, avec $f - P(f) \in E^\perp$, d'où $\langle f - P(f), K_1(., y)\rangle = 0$, pour tout $y \in X$. Donc on a $\langle f, K_1(., y)\rangle = \langle P(f), K_1(., y)\rangle = P(f)(y)$, pour tout $y \in X$. Par conséquent, $y \longmapsto \langle f, K_1(., y)\rangle$ est la projection orthogonale de f sur E.

Comme $E^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, il résulte de ce qui précède que $E^\perp$ possède un noyau reproduisant K_2. Soit $f \in H$, on a :

$$\langle f, K_1(., y) + K_2(., y)\rangle = \langle P(f), K_1(., y)\rangle + \langle f - P(f), K_2(., y)\rangle = P(f)(y) + (f - P(f))(y) = f(y)\,.$$

On déduit de 1(ii) que $K_1 + K_2$ est le noyau reproduisant de H.

2(c). Par définition de $(c_i)_{1\leq i\leq n}$, $f_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j K(., x_j) \in A$. Puisque A est convexe non vide et fermé dans H, d'après le théorème de la projection, il existe un unique $h \in A$ tel que $\inf_{f\in A} \|f\| = \|h\|$.

De plus, h est caractérisé par $\mathrm{Re}\big(\langle -h, f-h\rangle\big) \leq 0$, pour tout $f \in A$, voir proposition 8.3.5. Pour tout $f \in A$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle -f_0, f - f_0\rangle &= -\langle f_0, f\rangle + \langle f_0, f_0\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n} c_i \langle K(.,x_i), f\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i\overline{c_j}\langle K(.,x_i), K(.,x_j)\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n} c_i \overline{f(x_i)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i\overline{c_j} K(x_j, x_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} c_i \overline{f(x_i)} + \sum_{i=1}^{n} c_i \Big(\sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}\overline{K(x_i, x_j)}\Big) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} c_i \overline{f(x_i)} + \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{a_i} \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Donc on a $\mathrm{Re}\big(\langle -f_0, f-f_0\rangle\big) \leq 0$, pour tout $f \in A$. Par conséquent, on a $f_0 = h$. Donc on a $\inf\limits_{f\in A} \|f\| = \|f_0\|$.

Pour avoir la deuxième partie, il suffit de prendre $n = 1$.

2(d). Soit $f \in H$ tel que $\langle f, K(.,y)\rangle = 0$, pour tout $y \in X$. On déduit de 1(ii) que $f(y) = 0$, pour tout $y \in X$, donc on a $f = 0$. Il résulte du corollaire 8.3.3 que la famille $\big(K(.,y)\big)_{y\in X}$ est totale dans H.

2(e). Comme X est un espace topologique séparable, alors il existe une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ dense dans H. Montrons que la suite $\big(K(.,y_n)\big)_{n\geq 0}$ est totale dans H. Soit $f \in H$ tel que $\langle f, K(.,y_n)\rangle = 0$, pour tout $n \geq 0$. On déduit de 1(ii) que $f(y_n) = 0$, pour tout $n \geq 0$. Comme f est continue de X dans $\mathbb{C}$, alors on a $f(y) = 0$, pour tout $y \in X$. Autrement dit, on a $f = 0$. On déduit du corollaire 8.3.3 que la suite $\big(K(.,y_n)\big)_{n\geq 0}$ est totale dans H. Il résulte de la proposition 6.8.2 que H est séparable.

Remarque 8.0.4. Étant donné un ensemble X et une application de type positif $K : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$, on peut montrer qu'il existe un espace de Hilbert $H \subset \mathbb{C}^X$ dont le noyau reproduisant est K.

Exercice 8.39. Soit $C([0,\,1])$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0,\,1]$ dans $\mathbb{K}$ muni du produit scalaire défini par $(f,g) \longmapsto \langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$, pour tout $f, g \in C([0,\,1])$. On note $\|\ \|_2$ la norme associée au produit scalaire et on note $L^2([0,\,1])$ l'espace de Hilbert complété de $\big(C([0,\,1]), \langle\ ,\ \rangle\big)$, voir proposition 8.2.3. Soit $\imath : C([0,\,1]) \longrightarrow L^2([0,\,1])$ l'injection canonique. Soit E un sous-espace vectoriel de $C([0,\,1])$ tel que $\imath(E)$ soit fermé dans $L^2([0,\,1])$.

1. Montrer que E est fermé dans $C([0,\,1])$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$.
2. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $f \in E$, on ait $\|f\|_\infty \leq M\,\|f\|_2$.
3. Montrer que, pour tout $t \in [0,\,1]$, il existe un unique élément $g_t \in \imath(E)$ tel que pour tout $f \in E$, on ait $\langle \imath(f), g_t\rangle = f(t)$. Montrer que $\|g_t\|_2 \leq M$.
4. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une suite finie d'éléments de E telle que $(\imath(f_1), \ldots, \imath(f_n))$ soit une famille orthonormale de $\imath(E)$. Montrer que, pour tout $t \in [0,\,1]$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big|f_k(t)\big|^2 \leq \|g_t\|_2^2$.

5. En déduire que E est de dimension finie.

Solution. 1. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E et $f \in C([0,\,1])$ tels que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Comme on a $\|f_n - f_m\|_2 \leq \|f_n - f_m\|_\infty$, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, alors $(\imath(f_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\imath(E)$ qui est de Banach. Par conséquent, il existe $g \in E$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \|\imath(f_n) - \imath(g)\|_2 = 0$. Comme on a aussi $\lim_{n\to+\infty} \|\imath(f_n) - \imath(f)\|_2 = 0$, d'où $\imath(f) = \imath(g)$, donc on a $f = g \in E$. Par conséquent, E est fermé dans $C([0,\,1])$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$.
2. D'après 1, l'espace $(E, \|\ \|_\infty)$ est de Banach. Puisque la restriction de $\imath$ est linéaire continue et bijective de $(E, \|\ \|_\infty)$ dans $(\imath(E), \|\ \|_2)$, on déduit du théorème de l'application ouverte qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $f \in E$, on ait $\|f\|_\infty \leq M\,\|f\|_2$.
3. Soit $t \in [0,\,1]$. Alors on a $|f(t)| \leq \|f\|_\infty \leq M\,\|f\|_2 = M\,\|\imath(f)\|_2$, pour tout $f \in E$. Donc $\mathrm{ev}_t : \imath(f) \longmapsto f(t)$ est une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert $(\imath(E), \|\ \|_2)$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément $g_t \in \imath(E)$ tel que pour tout $f \in E$, on ait $\langle \imath(f), g_t\rangle = f(t)$. En plus, on a $\|g_t\|_2 = \|\mathrm{ev}_t\| \leq M$.
4. Soit $t \in [0,\,1]$. D'après l'inégalité de Bessel, on a $\sum_{k=1}^{n} \big|\langle \imath(f_k), g_t\rangle\big|^2 \leq \|g_t\|_2^2$. Comme pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\langle \imath(f_k), g_t\rangle = f_k(t)$, d'où $\sum_{k=1}^{n} \big|f_k(t)\big|^2 \leq \|g_t\|_2^2$.
5. Supposons que E est de dimension infinie, alors il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ dans E telle que la famille $(\imath(f_n))_{n\geq 1}$ soit orthonormale de $\imath(E)$. On déduit de 3 et 4 que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \in [0,\,1]$, on a $\sum_{k=1}^{n} \big|f_k(t)\big|^2 \leq M^2$, d'où :

$$n = \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \big|f_k(t)\big|^2\,dt \leq \int_0^1 M^2\,dt \;=\; M^2\,.$$

Ce qui est impossible. Par conséquent, E est de dimension finie.

Exercice 8.40. [**Théorème de Motzkin**]. Soit A un ensemble fermé dans $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique point $f(x) \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - f(x)\|$, où $\|\ \|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$. Il s'agit de montrer qu'alors A est convexe.

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow A$ est continue.

Par la suite, on suppose que A n'est convexe et on cherche à aboutir à une contradiction. Soit $U = \mathbb{R}^n \setminus A$.

2. Montrer qu'il existe $x_1,\, x_2 \in A$ tels que $x_1 \neq x_2$ et $]x_1,\, x_2[\subset U$.
3. Soit $c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Vérifier qu'il existe $r_0 > 0$ tel que $B'(c, r_0) \subset U$ et montrer qu'il existe une boule ouverte de rayon maximal $B(b, \rho)$ parmi les boules ouvertes $B(x, r)$ qui contiennent $B(c, r_0)$ et qui sont incluses dans U.
4. Vérifier qu'il existe $a \in A$ tel que $B'(b, \rho) \cap A = \{a\}$. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que le produit scalaire $\langle v, b - a\rangle > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]0,\, \eta]$, on ait $d(b + tv, A) > \rho$. En déduire que l'on a $\|b - c\| + r_0 = \rho$ et qu'il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|b - y\| = \rho$ et $\|c - y\| = r_0$ et que les trois points b, c et y soient alignés.
5. Soit $v = y - a$. Montrer qu'il existe $\rho' > \rho$ et $t > 0$ tel que $B(c, r_0) \subset B(b + tv, \rho')$ et $B(b + tv, \rho') \subset U$. En conclure que l'on a une contradiction.

Solution. 1. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ convergeant vers un point $x \in \mathbb{R}^n$. On a $\|f(x_n)\| \leq \|x_n - f(x_n)\| + \|x_n\| = d(x_n, A) + \|x_n\|$. Comme les suites $\big(d(x_n, A)\big)_{n\geq 0}$ et $(\|x_n\|)_{n\geq 0}$ sont convergentes, alors la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ est bornée. Donc il existe un compact K de $\mathbb{R}^n$ tel que $K \subset A$ et $f(x_n) \in K$, pour tout $n \geq 0$. Par conséquent, pour montrer que la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$, il suffit de montrer que $f(x)$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$. Soient $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$ et $y \in K \subset A$ tels que $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = y$. On a :

$$\|x - f(x)\| = d(x, A) = \lim_{k\to+\infty} d(x_{n_k}, A) = \lim_{k\to+\infty} \|x_{n_k} - f(x_{n_k})\| = \|x - y\|\,.$$

Par unicité de la projection sur A, on a $f(x) = y$. Donc $f(x)$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$. Par conséquent, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$. Autrement dit, f est continue.
2. On a supposé que A n'est pas convexe, donc il existe $a_0, a_1 \in A$ tels que $a_0 \neq a_1$ et $[a_0,\, a_1] \not\subset A$. Donc il existe $s \in]0,\, 1[$ tel que $(1-s)a_0 + sa_1 \in U$. Pour tout $t \in [0,\, 1]$, on pose $a_t = (1-t)a_0 + ta_1$. Soient $t_1 = \inf\big\{t \in]0,\, s]\ ;\ [a_t,\, a_s] \subset U\big\}$ et $t_2 = \sup\big\{t \in [s,\, 1[\ ;\ [a_s,\, a_t] \subset U\big\}$. Comme U est un ouvert, car A est fermé, et l'application $t \longmapsto a_t$ est continue de $[0,\, 1]$ dans $\mathbb{R}^n$, alors $x_1 = a_{t_1}, x_2 = a_{t_2} \in A$, $x_1 \neq x_2$ et $]x_1,\, x_2[\subset U$.
3. Soit $c = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \in U$. Comme U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors il existe $r_0 > 0$ tel que $B(c, 2r_0) \subset U$, d'où $B'(c, r_0) \subset U$. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ tels que $B(c, r_0) \subset B(x, r) \subset U$. On a $B(x, r) \subset U$ si et seulement si $r \leq d(x, A)$. D'autre part, d'après l'exercice 6.3, on a $B(c, r_0) \subset B(x, r)$ si et seulement si $\|x - c\| + r_0 \leq r$. Ainsi, si X est l'ensemble des $(x, r) \in \mathbb{R}^n \times]0,\, +\infty[$ tels que $B(c, r_0) \subset B(x, r) \subset U$, alors on a $X = \big\{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\ ;\ \|x - c\| + r_0 \leq r \leq d(x, A)\big\}$. Donc X est fermé dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Montrons que X est aussi borné. Soit $(x, r) \in X$. Comme on a $\{x_1, x_2\} \cap B(x, r) = \emptyset$, alors :

$$\begin{aligned} 2r^2 &\leq \|x - x_1\|^2 + \|x - x_2\|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\big(\|2x - (x_1 + x_2)\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2\big) \\ &= 2\|x - c\|^2 + \tfrac{1}{2}\|x_1 - x_2\|^2\,. \end{aligned}$$

D'autre part, on a $\|x - c\|^2 + r_0^2 + 2r_0\|x - c\| = \big(\|x - c\| + r_0\big)^2 \leq r^2$. D'où on a :

$$r_0^2 + 2r_0\|x - c\| \leq r^2 - \|x - c\|^2 \leq \tfrac{1}{4}\|x_1 - x_2\|^2\,.$$

Donc $\|x - c\|$ est borné et on en déduit que r est aussi borné. Donc X est bien borné. Par conséquent, X est un compact. Comme l'application $(x, r) \longmapsto r$ est continue, alors il existe $(b, \rho) \in X$ tel que $\rho = \max\big\{r\ ;\ (x, r) \in X\big\}$.
4. Comme on a $B(b, \rho) \subset U$, alors on a $\rho \leq d(b, A)$. Si $\rho < d(b, A)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\rho + \varepsilon < d(b, A)$, d'où $B(b, \rho + \varepsilon) \subset U$, ce qui est impossible. Donc on a $\rho = d(b, A)$. Soit $a = f(b) \in A$, alors on a $\rho = d(b, A) = \|b - a\|$, donc $a \in B'(b, \rho) \cap A$. D'autre part, si $z \in B'(b, \rho) \cap A$, alors on a $\rho = d(b, A) \leq \|b - z\| \leq \rho$, d'où $\|b - z\| = d(b, A)$. Par unicité de la projection sur A, on a $z = f(b) = a$. Par conséquent, on a bien $B'(b, \rho) \cap A = \{a\}$. Soit $v \in \mathbb{R}^n$

tel que $\langle v, b-a\rangle > 0$. Pour tout $t > 0$, soit $a_t = f(b+tv) \in A$. On a :

$$\begin{aligned}
\big(d(b+tv, A)\big)^2 &= \|b+tv-a_t\|^2 \\
&= \|b-a_t\|^2 + t^2\|v\|^2 + 2t\langle v, b-a_t\rangle \\
&= \|b-a_t\|^2 + t^2\|v\|^2 + 2t\big(\langle v, b-a\rangle + \langle v, a-a_t\rangle\big) \\
&\geq \rho^2 + t^2\|v\|^2 + 2t\big(\langle v, b-a\rangle + \langle v, a-a_t\rangle\big)\,.
\end{aligned}$$

Comme f est continue, alors on a $a = \lim\limits_{t\to 0} a_t$, d'où $\lim\limits_{t\to 0}\langle v, a-a_t\rangle = 0$. Par conséquent, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]0,\, \eta]$, on ait $\langle v, b-a\rangle + \langle v, a-a_t\rangle > 0$. Donc, pour tout $t \in]0,\, \eta]$, on a $\big(d(b+tv, A)\big)^2 > \rho^2$, d'où $d(b+tv, A) > \rho$. Pour tout $t \in]0,\, \eta]$, soit ρ_t tel que $\rho < \rho_t < d(b+tv, A)$. Comme on a $B(b+tv, \rho_t) \subset U$ et $\rho_t > \rho$, alors $B(c, r_0) \not\subset B(b+tv, \rho_t)$, donc on a $\rho < \rho_t < \|b+tv-c\| + r_0$. On fait tendre t vers 0, on obtient $\rho \leq \|b-c\| + r_0 \leq \rho$, donc on a $\|b-c\| + r_0 = \rho$. Notons aussi que d'après le choix de r_0, on a $\rho > r_0$. Soit $y = \frac{1}{\rho - r_0}\big(\rho c - r_0 b\big)$, alors on a $c = \frac{r_0}{\rho} b + \frac{\rho - r_0}{\rho} y$, donc b, c et y sont alignés. On a $b - y = \frac{\rho}{\rho - r_0}(b-c)$, d'où $\|b-y\| = \rho$. On a $c - y = \frac{r_0}{\rho - r_0}(b-c)$, d'où $\|c-y\| = r_0$.

5. Soit $v = y - a$. On a $\|y-b\|^2 = \|y-a+a-b\|^2 = \|y-a\|^2 - 2\langle y-a, b-a\rangle + \|b-a\|^2$, d'où $\langle v, b-a\rangle = \langle y-a, b-a\rangle = \frac{1}{2}\|y-a\|^2 > 0$, car $y \in U$. On a $b - c = \frac{\rho - r_0}{\rho}(b-y)$, d'où $\langle v, b-c\rangle = \frac{\rho - r_0}{\rho}\langle y-a, b-y\rangle$. On a $\|b-a\|^2 = \|y-a+b-y\|^2 = \|y-a\|^2 + 2\langle y-a, b-y\rangle + \|b-y\|^2$ d'où $\langle y-a, b-y\rangle = -\frac{1}{2}\|y-a\|^2$. Donc on a $\langle v, b-c\rangle = -\frac{\rho - r_0}{2\rho}\|y-a\|^2 < 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\|b+tv-c\|^2 &= \|b-c\|^2 + t^2\|v\|^2 + 2t\langle v, b-c\rangle \\
&= \|b-c\|^2 + t\big(t\|y-a\|^2 - \tfrac{\rho - r_0}{\rho}\|y-a\|^2\big) \\
&= \|b-c\|^2 + t\|y-a\|^2\big(t - \tfrac{\rho - r_0}{\rho}\big)\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $t \in \big]0,\, \frac{\rho - r_0}{\rho}\big]$, on a $\|b+tv-c\| \leq \|b-c\| = \rho - r_0$. Soit $\beta = \inf\big(\eta, \frac{\rho - r_0}{\rho}\big)$. D'après 4, pour tout $t \in]0,\, \beta]$, on a aussi $\rho < d(b+tv, A)$, donc si ρ_t vérifie $\rho < \rho_t < d(b+tv, A)$, avec $t \in]0,\, \beta]$, on a $B(c, r_0) \subset B(b+tv, \rho_t) \subset U$ et $\rho_t > \rho$. Ce qui est impossible. Donc A est bien convexe.

Exercice 8.41. Soient H un espace de Hilbert, E un sous-espace vectoriel de H, F un espace normé et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue.

1. Montrer que si E est fermé dans H, alors T se prolonge en une application linéaire continue de H dans F.
2. Montrer que si F est de Banach, alors T se prolonge en une application linéaire continue de H dans F.

Solution. 1. On suppose E fermé dans H. Soit $P : H \longrightarrow E$ la projection orthogonale. Alors P est linéaire continue et pour tout $x \in E$, on a $P(x) = x$. Soit $S = T \circ P$, alors S est linéaire continue de H dans F telle que pour tout $x \in E$, on ait $S(x) = T(x)$.
2. D'après la proposition 6.3.5, il existe $\widetilde{T} : \overline{E} \longrightarrow F$ une application linéaire continue prolongeant T. Ensuite, on applique 1 à $\overline{E}$ et $\widetilde{T}$.

Exercice 8.42. On munit $\mathbb{K}^n$ de la structure hermitienne canonique. L'espace $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ s'identifie à l'espace $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Calculer la norme d'opérateur d'une matrice diagonale
$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$
2. Calculer la norme d'opérateur d'une matrice carrée réelle symétrique, respectivement complexe hermitienne.
3. Calculer la norme d'opérateur des matrices $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solution. 1. Soit $(\mathbf{e}_i)_{1\leq i\leq n}$ la base hilbertienne canonique de $\mathbb{K}^n$. On a $\langle A\,e_i, e_i\rangle = \lambda_i$, d'où $\max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i| \leq \|A\|$. Soit $x \in \mathbb{K}^n$, on a $A\,x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mathbf{e}_i$, donc :
$$\|A\,x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2\,|x_i|^2 \leq \Big(\max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|^2\Big)\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \Big(\max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|\Big)^2 \|x\|_2^2\,.$$
D'où on a $\|A\,x\|_2 \leq \Big(\max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|\Big)\|x\|_2$. Par conséquent, on a $\|A\| \leq \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$. Finalement, on a $\|A\| = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$.

2. Si A est une matrice carrée réelle symétrique ou complexe hermitienne, alors il existe $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^*P = PP^* = I_n$ et
$$P^*AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$
où les λ_i sont les valeurs propres de A. D'après 1, on a $\|P^*AP\| = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$. On a $\|P^*\|^2 = \|P\|^2 = \|P^*P\| = 1$, d'où $\|P^*\| = \|P\| = 1$ et $\|P^*AP\| \leq \|P^*\|\,\|A\|\,\|P\| = \|A\|$. On a aussi $A = P(P^*AP)P^*$, on en déduit $\|A\| \leq \|P^*AP\|$. Par conséquent, on a $\|A\| = \|P^*AP\| = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$, où les λ_i sont les valeurs propres de A.

3. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, alors A est réelle symétrique et admet $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ comme valeurs propres. Il résulte de 2 que l'on a $\|A\| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors $A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ est réelle symétrique et admet $\lambda_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2}$ comme valeurs propres. Il résulte de 2 que l'on a $\|A\|^2 = \|A^*A\| = 3 + 2\sqrt{2}$, donc $\|A\| = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

Exercice 8.43. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$.

1. Soit $y \in T(H)$. Montrer que l'ensemble $\{x \in H\ ;\ T(x) = y\}$ est une partie non vide fermée convexe de H. En déduire qu'il existe un unique $R(y) \in H$ tel que $T(R(y)) = y$ et tel que pour tout $x \in H$ vérifiant $T(x) = y$, on ait $\|R(y)\| \leq \|x\|$. Montrer en plus que l'on a $R(x) \in \ker(T)^{\perp}$.
2. Montrer que l'application $y \longmapsto R(y)$ est linéaire de $T(H)$ dans H.

Solution. 1. On a $\{x \in H \ ; \ T(x) = y\} = T^{-1}(\{y\})$. Puisque $y \in T(H)$, on a $T^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Comme T est continue, alors $T^{-1}(\{y\})$ est une partie fermée de H. Comme T est linéaire, alors $T^{-1}(\{y\})$ est convexe. D'après le théorème de la projection, théorème 8.3.1, il existe un unique $R(y) \in T^{-1}(\{y\})$ tel que $\|R(y)\| \leq \|x\|$, pour tout $x \in T^{-1}(\{y\})$. On a $R(y) = a + b$, avec $a \in \ker(T)$ et $b \in \ker(T)^\perp$ et on a $\|R(y)\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$. On a aussi $y = T(R(y)) = T(a) + T(b) = 0 + T(b) = T(b)$, donc $b \in T^{-1}(\{y\})$ et on a $\|b\| \leq \|R(y)\|$. Par l'unicité de $R(y)$, on obtient $R(y) = b \in \ker(T)^\perp$.
2. Soient $y, z \in T(H)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $T(R(y) + \lambda R(z)) = T(R(y)) + \lambda T(R(z)) = y + \lambda z$, donc $R(y) + \lambda R(z) \in T^{-1}(\{y + \lambda z\})$. Soit $x \in T^{-1}(\{y + \lambda z\})$, on a $T(x) = y + \lambda z = T(R(y) + \lambda R(z))$, d'où $x - \big(R(y) + \lambda R(z)\big) = c \in \ker(T)$. Comme on a $R(y) + \lambda R(z) \in \ker(T)^\perp$, d'après le théorème de Pythagore, on a $\|x\|^2 = \|c\|^2 + \|R(y) + \lambda R(z)\|^2$. Donc on a $\|R(y) + \lambda R(z)\| \leq \|x\|$. Par conséquent, on a $R(y) + \lambda R(z) = R(y + \lambda z)$. Donc $y \longmapsto R(y)$ est bien une application linéaire de $T(H)$ dans H.

Exercice 8.44. Soient $(H, \langle \ , \ \rangle)$ un espace de Hilbert et $S, T \in \mathscr{L}(H)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $S(H) \subset T(H)$.

(ii) Il existe $A \in \mathscr{L}(H)$ tel que $S = T \circ A$.

Solution. Il est clair que (ii) $\Longrightarrow$ (i). Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Par hypothèse, on a $S(H) \subset T(H)$. Autrement dit, pour tout $x \in H$, on a $S(x) \in T(H)$. D'après l'exercice précédent, il existe une application linéaire $R : T(H) \longrightarrow H$ telle que $R(T(H)) \subset \ker(T)^\perp$ et pour tout $y \in T(H)$, on ait $T(R(y)) = y$. Soit $A = R \circ S$, alors A est une application linéaire de H dans H telle que $A(H) \subset \ker(T)^\perp$ et pour tout $x \in H$, on ait $(T \circ A)(x) = T(A(x)) = T(R(S(x))) = S(x)$. D'où on a $S = T \circ A$. Il reste à montrer que A est continue. D'après le théorème du graphe fermé, il suffit de montrer que le graphe de A est fermé. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dans H telle que $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers un élément $x \in H$ et $(A(x_n))_{n \geq 0}$ converge vers un élément $y \in H$. Comme T et S sont continues, alors on a :

$$T(A(x)) = S(x) = \lim_{n \to +\infty} S(x_n) = \lim_{n \to +\infty} T(A(x_n)) = T(y)\,.$$

Donc on a $y - A(x) \in \ker(T)$. Comme on a $A(H) \subset \ker(T)^\perp$ et $\ker(T)^\perp$ est fermé, alors $y - A(x) \in \ker(T)^\perp$. Donc on a $y - A(x) \in \ker(T) \cap \ker(T)^\perp$, d'où $y = A(x)$. Par conséquent, le graphe de A est fermé.

Exercice 8.45. Soient $(H, \langle \ , \ \rangle)$ un espace de Hilbert, $T : H \longrightarrow H$ et $S : H \longrightarrow H$ des applications telles que pour tout $x, y \in H$, on ait $\langle T(x), y\rangle = \langle x, S(y)\rangle$. Montrer que T et S sont linéaires continues et que l'on a $T^* = S$.
Solution. Vérifions d'abord que T est linéaire. Soient $x, z \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $y \in H$, on a :

$$\langle T(x+\lambda z), y\rangle = \langle x+\lambda z, S(y)\rangle = \langle x, S(y)\rangle + \lambda\langle z, S(y)\rangle = \langle T(x), y\rangle + \lambda\langle T(z), y\rangle = \langle T(x)+\lambda T(z), y\rangle\,.$$

On en déduit que l'on a $T(x + \lambda z) = T(x) + \lambda T(z)$, donc T est linéaire. Pour vérifier la continuité de T, il suffit de montrer que le graphe de T est fermé dans $H \times H$. Soit $(x, y) \in \overline{G(T)}$, alors il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans H telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} T(x_n) = y$. Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $z \in H$, on a $\langle T(x_n), z\rangle = \langle x_n, S(z)\rangle$. En passant à la limite, on obtient $\langle y, z\rangle = \langle x, S(z)\rangle$. Mais on a $\langle x, S(z)\rangle = \langle T(x), z\rangle$. Ainsi, pour tout $z \in H$, on a $\langle y - T(x), z\rangle = 0$, d'où $y = T(x)$. Donc $G(T)$ est fermé. Par conséquent T est continue. Ainsi, on a $T \in \mathscr{L}(H)$.

D'après la proposition 8.4.2, pour tout $x, y \in H$, on a $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$. Donc, pour tout $y \in H$, on a $S(y) = T^*(y)$, d'où $S = T^*$.

Exercice 8.46. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $P : H \longrightarrow H$ une application telle que $P \circ P = P$ et pour tout $x, y \in H$, on ait $\langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle$. Montrer que P est linéaire et continue, puis que P est la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé de H.
Solution. Ceci résulte de l'exercice précédent et de la proposition 8.4.6.

Exercice 8.47. Soient E, F des espaces de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(E; F)$.

1. Montrer que l'on a $\ker(T) = \ker(T^* \circ T)$.
2. Montrer que l'on a $\overline{T(E)} = \overline{(T \circ T^*)(F)}$.

Solution. 1. Il est clair que l'on a l'inclusion $\ker(T) \subset \ker(T^* \circ T)$. Réciproquement, soit $x \in \ker(T^* \circ T)$, alors on a $T^*(T(x)) = 0$. D'où on a $\langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, T^*(T(x))\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$. Donc on a $T(x) = 0$. Autrement dit, on a $x \in \ker(T)$. Par conséquent, on a $\ker(T) = \ker(T^* \circ T)$.
2. On a $(T \circ T^*)(F) = T(T^*(F)) \subset T(E)$, d'où $\overline{(T \circ T^*)(F)} \subset \overline{T(E)}$. D'après la proposition 8.4.4, on a $T(E)^\perp = \ker(T^*)$ et $((T \circ T^*)(F))^\perp = \ker(T \circ T^*)$. D'après 1, on a $\ker(T^*) = \ker((T^*)^* \circ T^*) = \ker(T \circ T^*)$. Donc on a $T(E)^\perp = ((T \circ T^*)(F))^\perp$. D'après le corollaire 8.3.2, on a $F = \overline{T(E)} \oplus T(E)^\perp$ et $F = \overline{(T \circ T^*)(F)} \oplus ((T \circ T^*)(F))^\perp$. Comme on a $\overline{(T \circ T^*)(F)} \subset \overline{T(E)}$, on en déduit que l'on a $\overline{T(E)} = \overline{(T \circ T^*)(F)}$.

Exercice 8.48. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert, F et G des sous-espaces vectoriels fermés de H. Soient P et Q les projections orthogonales sur F et G respectivement. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $F \subset G$.

(ii) $Q \circ P = P$.

(iii) $P \circ Q = P$.

(iv) $Q - P$ est un projecteur orthogonal.

(v) Pour tout $x \in H$, on a $\|P(x)\| \leq \|Q(x)\|$.

Solution. En prenant l'adjoint, on obtient l'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii).
Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (iii). Pour tout $x, y \in H$, on a $\langle (P \circ Q)(x), y\rangle = \langle P(Q(x)), y\rangle = \langle Q(x), P(y)\rangle = \langle x, Q(P(y))\rangle$. Comme on a $P(y) \in F \subset G$, alors on a $Q(P(y)) = P(y)$, donc on a $\langle (P \circ Q)(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle = \langle P(x), y\rangle$. Par conséquent, on a $(P \circ Q)(x) = P(x)$, pour tout $x \in H$. Autrement dit, on a $P \circ Q = P$.
Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (iv). On a $(Q - P)^* = Q^* - P^* = Q - P$ et $(Q - P) \circ (Q - P) = Q \circ Q - Q \circ P - P \circ Q + P \circ P = Q - P - P + P = Q - P$. Donc $Q - P$ est un projecteur orthogonal, voir proposition 8.4.6.

Montrons l'implication (iv) $\Longrightarrow$ (v). Pour tout $x \in H$, on a :

$$\begin{aligned}
\|Q(x)\|^2 - \|P(x)\|^2 &= \langle Q(x), Q(x)\rangle - \langle P(x), P(x)\rangle \\
&= \langle (Q^* \circ Q)(x), x\rangle - \langle (P^* \circ P)(x), x\rangle \\
&= \langle Q(x), x\rangle - \langle P(x), x\rangle \\
&= \langle (Q-P)(x), x\rangle \\
&= \langle (Q-P)(x), (Q-P)(x)\rangle \\
&= \|(Q-P)(x)\|^2 \geq 0\,.
\end{aligned}$$

Donc on a $\|P(x)\| \leq \|Q(x)\|$.
Montrons l'implication (v) $\Longrightarrow$ (i). Supposons que pour tout $x \in H$, on a $\|P(x)\| \leq \|Q(x)\|$. Soit $x \in F$, alors on a $P(x) = x$, d'où $\|x\| \leq \|Q(x)\|$. Comme on a $\|x\|^2 = \|Q(x)\|^2 + \|x - Q(x)\|^2$, on en déduit $\|x - Q(x)\| = 0$, d'où on a $x = Q(x) \in G$. Par conséquent, on a $F \subset G$.

Exercice 8.49. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert, F et G des sous-espaces vectoriels fermés de H. Soient P et Q les projections orthogonales sur F et G respectivement. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) F et G sont orthogonaux.

(ii) $Q \circ P = 0$.

(iii) $P \circ Q = 0$.

(iv) $P + Q$ est un projecteur orthogonal.

Solution. En passant à l'adjoint, on obtient l'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii).
Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (iii). Pour tout $x, y \in H$, on a $\langle (P \circ Q)(x), y\rangle = \langle P(Q(x)), y\rangle = \langle Q(x), P(y)\rangle = 0$, donc $P \circ Q = 0$.
Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (iv). Soit $R = P + Q$. Alors on a $R^* = R$ et $R^2 = P^2 + P \circ Q + Q \circ P + Q^2 = P + Q = R$. Il résulte de la proposition 8.4.6 que R est un projecteur orthogonal.
Montrons l'implication (iv) $\Longrightarrow$ (i). Comme $P + Q$ est un projecteur orthogonal, alors on a $P \circ Q + Q \circ P = 0$. D'où, pour tout $x \in F$, on a $P(Q(x)) + Q(x) = 0$. Donc on a $0 = \langle Q(x) - P(Q(x)), Q(x)\rangle = \langle 2Q(x), Q(x)\rangle = 2\|Q(x)\|^2$, d'où $Q(x) = 0$. Par conséquent, pour tout $y, z \in H$, on a $\langle P(y), Q(z)\rangle = \langle Q(P(y)), z\rangle = \langle 0, z\rangle = 0$. Donc F et G sont orthogonaux.

Exercice 8.50. Soient E, F des espaces de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(E; F)$. On dit que T est une **isométrie partielle** si pour tout $x \in \ker(T)^\perp$, on a $\|T(x)\| = \|x\|$. Soit $S \in \mathscr{L}(E; F)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $S = S \circ S^* \circ S$.

(ii) $S^* \circ S$ est un projecteur orthogonal.

(iii) $S \circ S^*$ est un projecteur orthogonal.

(iv) S est une isométrie partielle.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $p = S^* \circ S$, alors on a $p = p^*$ et $p \circ p = S^* \circ S \circ S^* \circ S = S^* \circ S = p$. Donc p est un projecteur orthogonal.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $q = S \circ S^*$, alors on a $q = q^*$ et $q \circ q = S \circ S^* \circ S \circ S^* = S \circ p \circ S^*$. D'après l'exercice 8.47, on a $\overline{S^*(F)} = \overline{(S^* \circ S)(E)} = \overline{p(E)} = p(E)$. D'où, pour tout $x \in F$, on a $p(S^*(x)) = S^*(x)$. Donc on a $p \circ S^* = S^*$. Par conséquent, on a $q \circ q = q$. Donc q est un projecteur orthogonal.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (iv). Par hypothèse, $q = S \circ S^*$ est un projecteur orthogonal. On a $\ker(S)^\perp = \overline{S^*(H)}$. Soit $y \in S^*(H)$, alors il existe $x \in H$ tel que $y = S^*(x)$. On a :

$$\|S(y)\|^2 = \|(S \circ S^*)(x)\|^2 = \langle (S \circ S^*)(x), (S \circ S^*)(x) \rangle = \langle q(x), q(x) \rangle$$

et

$$\langle q(x), q(x) \rangle = \langle q(x), x \rangle = \langle (S \circ S^*)(x), x \rangle = \langle S^*(x), S^*(x) \rangle = \|y\|^2 .$$

Donc on a $\|S(y)\| = \|y\|$. On en déduit que pour tout $z \in \overline{S^*(H)} = \ker(S)^\perp$, on a $\|S(z)\| = \|z\|$. Donc S est une isométrie partielle.
Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (i). Soit $x \in \ker(S)$, alors on a $S(x) = 0 = (S \circ S^* \circ S)(x)$. Soient $H = \ker(S)^\perp$ et T la restriction de S à H. Alors H est un espace hilbertien, $T \in \mathscr{L}(H;\, F)$ et pour tout $x \in H$, on a $\|T(x)\| = \|S(x)\| = \|x\|$. Il résulte de la proposition prop 8.4.7 que l'on a $T^* \circ T = \mathrm{id}_H$. Comme pour tout $y \in F$, on a $T^*(y) = S^*(y)$, voir exemple 8.4.1, on en déduit que pour tout $x \in \ker(S)^\perp$, on a $x = (S^* \circ S)(x)$, d'où $S(x) = (S \circ S^* \circ S)(x)$. Comme on a $E = \ker(S) + \ker(S)^\perp$, alors $S = S \circ S^* \circ S$.

Remarque 8.0.5. Soient E, F des espaces de Hilbert et $S \in \mathscr{L}(E;\, F)$.

1. On déduit de l'exercice précédent que S est une isométrie partielle si et seulement si son adjoint $S^* \in \mathscr{L}(F;\, E)$ est une isométrie partielle.
2. On suppose S une isométrie partielle. Alors on a :
   - (i) Il résulte de la définition d'une isométrie partielle que $S(E)$ et $S^*(F)$ sont respectivement des sous-espaces vectoriels fermés de F et E.
   - (ii) Soient $p = S^* \circ S$ et $q = S \circ S^*$. D'après l'exercice précédent, p et q sont des projecteurs orthogonaux et on a $S = S \circ p = q \circ S$. De plus, p est la projection orthogonale sur $S^*(F) = \ker(S)^\perp$ et q est la projection orthogonale sur $S(E)$.

Exercice 8.51. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $S, T \in \mathscr{L}(H)$ deux isométries partielles. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) $T = S \circ T^* \circ T$.
- (ii) $S^* \circ T = T^* \circ T$.
- (iii) $S \circ T^* = T \circ T^*$.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Par hypothèse, on a $T = S \circ T^* \circ T$, d'où $S^* \circ T = S^* \circ S \circ T^* \circ T$. D'après la remarque précédente, $S^* \circ S$ est la projection orthogonale sur $\ker(S)^\perp$ et $T^* \circ T$ est la projection orthogonale sur $\ker(T)^\perp$. Pour montrer que $S^* \circ S \circ T^* \circ T = T^* \circ T$, il suffit de montrer l'inclusion $\ker(T)^\perp \subset \ker(S)^\perp$, voir exercice 8.48. Soit $x \in \ker(T)^\perp$. Alors on a $T(x) = S((T^* \circ T)(x)) = S(x)$, d'où $\|x\| = \|T(x)\| = \|S(x)\|$. Comme S est une isométrie partielle, on en déduit que l'on a $x \in \ker(S)^\perp$. Donc on a bien $\ker(T)^\perp \subset \ker(S)^\perp$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Par hypothèse, on a $S^* \circ T = T^* \circ T$, d'où $S^* \circ T \circ T^* = T^* \circ T \circ T^* = T^*$. Soient $U = T^*$ et $V = S^*$. Alors U et V sont des isométries partielles et on a $U = V \circ U^* \circ U$. Il résulte de ce qui précède que l'on a $V^* \circ U = U^* \circ U$. Autrement dit, on a $S \circ T^* = T \circ T^*$
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Par hypothèse, on a $S \circ T^* = T \circ T^*$, d'où $S \circ T^* \circ T = T \circ T^* \circ T = T$.

Exercice 8.52. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $R \in \mathscr{L}(H)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe un sous-espace vectoriel fermé E de H tel que pour tout $x \in H$, on ait $x+R(x) \in E$ et $x - R(x) \in E^\perp$.

(ii) Il existe un sous-espace vectoriel fermé E de H tel que pour tous $y \in E$ et $z \in E^\perp$, on ait $R(y+z) = y - z$.

(iii) On a $R^2 = \mathrm{id}_H$ et $R = R^*$.

(iv) On a $R^2 = \mathrm{id}_H$ et R est normal.

(v) L'opérateur $P = \frac{1}{2}(R + \mathrm{id}_H)$ est un projecteur orthogonal.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Pour tout $x \in H$, on $x + R(x), R(x) + R^2(x) \in E$ et $x - R(x), R(x) - R^2(x) \in E^\perp$. D'où on a $x - R^2(x) \in E$ et $x - R^2(x) \in E^\perp$. Par conséquent, on a $x - R^2(x) = 0$. Autrement dit, on a $R^2 = \mathrm{id}_H$. D'autre part, on a $x = \dfrac{x+R(x)}{2} + \dfrac{x-R(x)}{2}$, avec $\dfrac{x+R(x)}{2} \in E$ et $\dfrac{x-R(x)}{2} \in E^\perp$, d'où on a $R(x) = \dfrac{R(x)+R^2(x)}{2} + \dfrac{R(x)-R^2(x)}{2} = \dfrac{x+R(x)}{2} - \dfrac{x-R(x)}{2}$.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $x \in H$, alors il existe $y \in E$ et $z \in E^\perp$ tels que $x = y + z$. D'où on a $R^2(x) = R(R(x)) = R(y-z) = R(y+(-z)) = y - (-z) = y + z = x$, donc $R^2 = \mathrm{id}_H$. Soient $a, b \in H$. Alors on a $a = y + z$ et $b = y' + z'$, avec $y, y' \in E$ et $z, z' \in E^\perp$. Donc on a :

$$\langle R(a), b\rangle = \langle y - z, y' + z'\rangle = \langle y, y'\rangle - \langle z, z'\rangle = \langle y + z, y' - z'\rangle = \langle a, R(b)\rangle\,.$$

Par conséquent, on a $R = R^*$.
L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (iv) est triviale.
Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (v). Soit $P = \frac{1}{2}(R + \mathrm{id}_H)$, alors on a :

$$P^2 = P \circ P = \frac{1}{4}(R + \mathrm{id}_H) \circ (R + \mathrm{id}_H) = \frac{1}{4}(R^2 + 2R + \mathrm{id}_H) = \frac{1}{4}(2R + 2\mathrm{id}_H) = P\,.$$

Comme R est normal, il est clair que P l'est aussi. Il résulte alors de la proposition 8.4.6 que P est un projecteur orthogonal.
Preuve de (v) $\Longrightarrow$ (i). Par hypothèse, $P = \frac{1}{2}(R + \mathrm{id}_H)$ est un projecteur orthogonal. Soit $E = P(H)$. Alors E est un sous-espace vectoriel fermé de H. On a $R = 2P - \mathrm{id}_H$, donc, pour tout $x \in H$, on a $R(x) = 2P(x) - x$, d'où $x + R(x) = 2P(x) \in E$ et $x - R(x) = 2x - 2P(x) = 2(x - P(x)) \in E^\perp$.

Exercice 8.53. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $S, T \in \mathscr{L}(H)$ deux opérateurs auto-adjoints. Montrer que $S \circ T = 0$ si et seulement si $S(H) \perp T(H)$.
Solution. Pour tout $x, y \in H$, on a $\langle T(x), S(y)\rangle = \langle (S \circ T)(x), S(y)\rangle$. On en déduit que $S \circ T = 0$ si et seulement si $S(H) \perp T(H)$.

Exercice 8.54. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Soit A une partie de H tel que $T(A) \subset A$. Montrer que l'on a $T(A^\perp) \subset A^\perp$.
Solution. Pour tous $x \in A^\perp$ et $y \in A$, on a $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = 0$, d'où $T(x) \in A^\perp$. Donc on a $T(A^\perp) \subset A^\perp$.

Exercice 8.55. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $P \in \mathscr{L}(H)$ un projecteur orthogonal tel que $P \neq 0$ et $P \neq \mathrm{id}_H$. Montrer que 0 et 1 sont les seules valeurs propres de P.
Solution. Comme P est un projecteur orthogonal tel que $P \neq 0$ et $P \neq \mathrm{id}_H$, alors il existe $x, y \in H$ tels que $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $P(x) = 0$ et $P(y) = y$. Donc 0 et 1 sont des valeurs propres de

P. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de P, alors il existe $z \in H$ tel que $z \neq 0$ et $P(z) = \lambda z$. D'où on a $\lambda z = P(z) = P(P(z)) = P(\lambda z) = \lambda P(z) = \lambda^2 z$. Donc on a $\lambda = \lambda^2$. Par conséquent, on a $\lambda \in \{0, 1\}$.

Exercice 8.56. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$. Supposons que H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T. Montrer que T est normal, *i.e.* $T \circ T^* = T^* \circ T$.
Solution. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T. Pour tout $i \in I$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $T(e_i) = \lambda_i e_i$. Pour tout $i, j \in I$, on a $\langle T^*(e_j), e_i\rangle = \langle e_j, T(e_i)\rangle = \langle e_j, \lambda_i e_i\rangle = \overline{\lambda_i}\langle e_j, e_i\rangle$, d'où :

$$\langle T^*(e_j), e_i\rangle = \begin{cases} \overline{\lambda_j} & \text{si} \quad i = j\,, \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j\,. \end{cases}$$

Par conséquent, on a $T^*(e_j) = \overline{\lambda_j} e_j$, pour tout $j \in I$. D'autre part, Pour tout $x \in H$, il existe une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ dans $\mathbb{K}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$ et $\sum_{i\in I} |\alpha_i|^2 < +\infty$. D'où on a $T(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i \alpha_i e_i$ et $T^*(x) = \sum_{i\in I} \overline{\lambda_i}\alpha_i e_i$. Donc on a $(T \circ T^*)(x) = (T^* \circ T)(x) = \sum_{i\in I} |\lambda_i|^2 \alpha_i e_i$. Par conséquent, on a $T \circ T^* = T^* \circ T$.

Exercice 8.57. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert, $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint, *i.e.* $T = T^*$, et $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$ et $\|T\| = \|T(x)\|$.

1. Montrer que l'on a $T^2(x) = \|T\|^2 x$. Autrement dit, x est un vecteur propre de T^2 associé à la valeur propre $\|T\|^2 = \|T^2\|$.

2. Soit $y = \|T\|x - T(x)$. Montrer que l'on a $T(y) = -\|T\|y$. En déduire que $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est une valeur propre de T.

Solution. 1. On a $\|T\| = \|T(x)\|$, d'où :

$$\|T\|^2 = \|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle T^2(x), x\rangle = \langle x, T^2(x)\rangle\,.$$

On a :

$$\begin{aligned} \langle T^2(x) - \|T\|^2 x, T^2(x) - \|T\|^2 x\rangle &= \langle T^2(x), T^2(x)\rangle - \|T\|^2\langle T^2(x), x\rangle - \|T\|^2\langle x, T^2(x)\rangle + \|T\|^4 \\ &= \langle T^2(x), T^2(x)\rangle - \|T\|^4 - \|T\|^4 + \|T\|^4 \\ &= \langle T^2(x), T^2(x)\rangle - \|T\|^4\,. \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\|T\|^4 = \|T(x)\|^4 &= \big(\langle T(x), T(x)\rangle\big)^2 \\
&= \langle T^2(x), x\rangle \langle T^2(x), x\rangle \\
&\leq \|T^2(x)\|\,\|x\|\,\|T^2(x)\|\,\|x\| \\
&= \|T^2(x)\|^2 \\
&= \langle T^2(x), T^2(x)\rangle \\
&= \langle T^4(x), x\rangle \\
&\leq \|T\|^4\,\|x\| \\
&= \|T\|^4 .
\end{aligned}$$

D'où on a $\|T\|^4 = \langle T^2(x), T^2(x)\rangle$. Par conséquent, on a $\langle T^2(x) - \|T\|^2 x, T^2(x) - \|T\|^2 x\rangle = 0$. Autrement dit, on a $T^2(x) = \|T\|^2 x$.
2. Soit $y = \|T\|x - T(x)$. Alors on a $T(y) + \|T\|y = \|T\|^2 x - T^2(x) = 0$, d'où $T(y) = -\|T\|y$. Si $y = 0$, alors on a $T(x) = \|T\|x$, donc x est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $\|T\|$. Si $y \neq 0$, alors y est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $-\|T\|$.

Exercice 8.58. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$ tel que $\|T\| \leq 1$.

1. Soit $x \in H$. Montrer que $T(x) = x$ si et seulement si $\langle T(x), x\rangle = \|x\|^2$. En déduire que l'on a $\ker(I - T) = \ker(I - T^*)$.

2. Montrer que l'on a $\mathrm{Im}(I - T)^{\perp} = \ker(I - T)$ et en déduire que l'on a $H = \ker(I - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(I - T)}$.

3. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \dfrac{I + T + \cdots + T^n}{n + 1}$. Montrer que pour tout $x \in H$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = P(x)$, où P est la projection orthogonale sur $\ker(I - T)$.

Solution. 1. Soit $x \in H$. Si $T(x) = x$, alors on a $\langle T(x), x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$.
Réciproquement, supposons que l'on a $\langle T(x), x\rangle = \|x\|^2$. On peut aussi supposer $x \neq 0$. Alors on a :

$$\|x\|^2 = \langle T(x), x\rangle \leq \|T(x)\|\,\|x\| \leq \|T\|\,\|x\|^2 \leq \|x\|^2 .$$

D'où on a $\langle T(x), x\rangle = \|T(x)\|\,\|x\|$. D'après l'exercice 8.4, il existe alors $a > 0$ tel que $T(x) = ax$, d'où on a $a\|x\|^2 = a\langle x, x\rangle = \langle ax, x\rangle = \langle T(x), x\rangle = \|x\|^2$. Par conséquent, on a $a = 1$, et donc $T(x) = x$.

Soit $x \in H$, on a :

$$\begin{aligned} x \in \ker(I-T) &\iff T(x) = x \\ &\iff \langle T(x), x\rangle = \|x\|^2 \\ &\iff \langle x, T^*(x)\rangle = \|x\|^2 \\ &\iff \langle T^*(x), x\rangle = \|x\|^2 \\ &\iff T^*(x) = x \ \ (\text{car} \ \ \|T^*\| \leq 1) \\ &\iff x \in \ker(I - T^*)\,. \end{aligned}$$

Donc on a $\ker(I-T) = \ker(I-T^*)$.
2. D'après la proposition 8.4.4, on a $\mathrm{Im}(I-T)^\perp = \ker((I-T)^*) = \ker(I-T^*) = \ker(I-T)$. D'après le corollaire 8.3.1, on a $H = \ker(I-T) \oplus \ker(I-T)^\perp$. Or on a $\ker(I-T)^\perp = (\mathrm{Im}(I-T)^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(I-T)}$, d'où $H = \ker(I-T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(I-T)}$.
3. Soit $x \in \ker(I-T)$, alors on a $T(x) = x$, d'où pour tout $k \geq 1$, on a $T^k(x) = x$. Donc on a $S_n(x) = x$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = x = P(x)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(I-T)$, alors il existe $z \in H$ tel que $(I-T)(z) = y$. On a $S_n(y) = \dfrac{(I+T+\cdots+T^n)\circ(I-T)(z)}{n+1} = \dfrac{(I-T^{n+1})(z)}{n+1}$ et $\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1} \leq 1$, d'où $\|S_n(y)\| \leq \dfrac{\|z\| + \|T^{n+1}(z)\|}{n+1} \leq \dfrac{2\|z\|}{n+1}$. Donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|S_n(y)\| = 0$. Soit $x \in \overline{\mathrm{Im}(I-T)}$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $y \in \mathrm{Im}(I-T)$ tel que $\|x-y\| < \varepsilon$. On a $\|S_n\| \leq 1$, d'où $\|S_n(x) - S_n(y)\| = \|S_n(x-y)\| \leq \|S_n\|\,\|x-y\| < \varepsilon$. Donc on a $\|S_n(x)\| < \varepsilon + \|S_n(y)\|$. Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|S_n(y)\| = 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\|S_n(y)\| < \varepsilon$. Donc, pour tout $n \geq N$, on a $\|S_n(x)\| < 2\varepsilon$. Autrement dit, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|S_n(x)\| = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = 0 = P(x)$. Par conséquent, pour tout $x \in H$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = P(x)$, où P est la projection orthogonale sur $\ker(I-T)$.

Exercice 8.59. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur positif.

1. Montrer que pour tout $S \in \mathscr{L}(H)$, l'opérateur $S^* \circ T \circ S$ est positif, et que pour tout $n \geq 0$, T^n est positif.
2. Montrer que pour tout $x, y \in H$, on a $|\langle T(x), y\rangle|^2 \leq \langle T(x), x\rangle\, \langle T(y), y\rangle$.
3. Montrer que si de plus, l'opérateur $\mathrm{id}_H - T$ est positif, alors pour tout $x \in H$, on a $\langle T(x), T(x)\rangle \leq \langle T(x), x\rangle$.
4. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
   (i) L'opérateur $\mathrm{id}_H - T$ est positif.
   (ii) L'opérateur $T - T^2$ est positif.
   (iii) On a $\|T\| \leq 1$.

   Désormais, on suppose de plus que $\mathrm{id}_H - T$ est positif.
5. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $T^n - T^{n+1}$ est positif.
6. Montrer que pour tout $x \in H$, la suite $\big(\langle T^n(x), x\rangle\big)_{n\geq 0}$ est convergente dans $\mathbb{K}$.
7. Montrer que pour tout $x \in H$, la suite $\big(T^n(x)\big)_{n\geq 0}$ est convergente dans H.

8. Soit $P : H \longrightarrow H$ l'application définie par $P(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} T^n(x)$, pour tout $x \in H$. Montrer que P est un projecteur orthogonal tel que $T \circ P = P$.
9. Montrer que P est le projecteur orthogonal sur $\ker(T - \mathrm{id}_H)$.

Solution. 1. Il est clair que $S^* \circ T \circ S$ est auto-adjoint. D'autre part, pour tout $x \in H$, on a $\langle (S^* \circ T \circ S)(x), x\rangle = \langle T(S(x)), S(x)\rangle \geq 0$, donc $S^* \circ T \circ S$ est positif.
On montre par récurrence que pour tout $n \geq 0$, T^n est positif. Notons d'abord que pour tout $n \geq 0$, T^n est auto-adjoint. Par convention, on a $T^0 = \mathrm{id}_H$, donc c'est un opérateur positif. Par hypothèse, T est positif. Soit $n \geq 2$ et supposons que pour tout $0 \leq k \leq n$, T^k est positif. On a $T^{n+1} = T \circ T^{n-1} \circ T$, et T^{n-1} est positif par hypothèse, il résulte de ce qui précède que T^{n+1} est positif.
2. Pour tout $x, y \in H$, on pose $\varphi(x, y) = \langle T(x), y\rangle$. Alors φ est une forme hermitienne positive sur H. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\langle T(x), y\rangle|^2 \leq \langle T(x), x\rangle \langle T(y), y\rangle$.
3. Soient $x \in H$ et $y = T(x)$. D'après 2, on a :

$$0 \leq \langle T(x), T(x)\rangle^2 = |\langle T(x), y\rangle|^2 \leq \langle T(x), x\rangle \langle T(y), y\rangle = \langle T(x), x\rangle \langle T(T(x)), T(x)\rangle .$$

Comme $\mathrm{id}_H - T$ est positif, alors on a $\langle T(x), T(x)\rangle - \langle T(T(x)), T(x)\rangle = \langle (\mathrm{id}_H - T)(T(x)), T(x)\rangle \geq 0$, d'où $0 \leq \langle T(T(x)), T(x)\rangle \leq \langle T(x), T(x)\rangle$. Par conséquent, on a $0 \leq \langle T(x), T(x)\rangle \leq \langle T(x), x\rangle$.
4. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Notons d'abord que $T - T^2$ est auto-adjoint. Par hypothèse, $\mathrm{id}_H - T$ est positif, alors il résulte de 3 que pour tout $x \in H$, on a $0 \leq \langle T^2(x), x\rangle = \langle T(x), T(x)\rangle \leq \langle T(x), x\rangle$, d'où $0 \leq \langle (T - T^2)(x), x\rangle$. Par conséquent, $T - T^2$ est positif.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Pour tout $x \in H$, on a $\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle T^2(x), x\rangle \leq \langle T(x), x\rangle \leq \|T(x)\|\,\|x\|$, d'où $\|T(x)\| \leq \|x\|$. Par conséquent, on a $\|T\| \leq 1$.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Notons d'abord que $\mathrm{id}_H - T$ est auto-adjoint. Pour tout $x \in H$, on a $\langle (\mathrm{id}_H - T)(x), x\rangle = \langle x, x\rangle - \langle T(x), x\rangle$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $0 \leq \langle T(x), x\rangle \leq \|T(x)\|\,\|x\| \leq \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, d'où $\langle x, x\rangle - \langle T(x), x\rangle \geq 0$. Par conséquent, $\mathrm{id}_H - T$ est positif.
5. Soit $n \geq 0$. Si $n = 2p$ est pair, alors on a $T^n - T^{n+1} = T^{2p} - T^{2p+1} = T^p \circ (\mathrm{id}_H - T) \circ T^p$. Si $n = 2p + 1$ est impair, on a $T^n - T^{n+1} = T^{2p+1} - T^{2p+2} = T^p \circ (T - T^2) \circ T^p$. Il résulte de 1 et 4 que $T^n - T^{n+1}$ est positif.
6. Pour tout $x \in H$, on a $0 \leq \langle (T^n - T^{n+1})(x), x\rangle = \langle T^n(x), x\rangle - \langle T^{n+1}(x), x\rangle$. Donc la suite $\big(\langle T^n(x), x\rangle\big)_{n\geq 0}$ est positive et décroissante, donc convergente dans $\mathbb{K}$.
7. Soit $x \in H$. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\|T^n(x) - T^m(x)\|^2 &= \langle T^n(x) - T^m(x), T^n(x) - T^m(x)\rangle \\
&= \langle T^n(x), T^n(x)\rangle - \langle T^n(x), T^m(x)\rangle + \langle T^m(x), T^m(x)\rangle - \langle T^m(x), T^n(x)\rangle \\
&= \langle T^{2n}(x), x\rangle - \langle T^{n+m}(x), x\rangle + \langle T^{2m}(x), x\rangle - \langle T^{n+m}(x), x\rangle \\
&\leq |\langle T^{2n}(x), x\rangle - \langle T^{n+m}(x), x\rangle| + |\langle T^{2m}(x), x\rangle - \langle T^{n+m}(x), x\rangle| .
\end{aligned}$$

Puisque la suite $\big(\langle T^n(x), x\rangle\big)_{n\geq 0}$ est convergente vers un $t_x \in \mathbb{K}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|\langle T^n(x), x\rangle - t_x| < \frac{\varepsilon}{4}$. Par conséquent, pour tout $n, m \geq N$, on a :

$$|\langle T^{2n}(x), x\rangle - \langle T^{n+m}(x), x\rangle| \leq |\langle T^{2n}(x), x\rangle - t_x| + |t_x - \langle T^{n+m}(x), x\rangle| < \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{4}$$

et

$$|\langle T^{2m}(x), x\rangle - \langle T^{n+m}(x), x\rangle| \leq |\langle T^{2m}(x), x\rangle - t_x| + |t_x - \langle T^{n+m}(x), x\rangle| < \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{4} .$$

Par conséquent, pour tout $n, m \geq N$, on a $\|T^n(x) - T^m(x)\|^2 < \varepsilon$. Donc la suite $\big(T^n(x)\big)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, donc convergente dans H.
8. Il est clair que P est une application linéaire. D'autre part, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in H$, on a $\|T^n(x)\| \leq \|T^n\| \, \|x\| \leq \|T\|^n \, \|x\| \leq \|x\|$, d'où on a $\|P(x)\| \leq \|x\|$. Donc P est continue. Pour tout $x, y \in H$, on a :

$$\begin{aligned} \langle P(x), y\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \langle T^n(x), y\rangle \\ &= \lim_{n\to+\infty} \langle x, T^n(y)\rangle \\ &= \lim_{n\to+\infty} \overline{\langle T^n(y), x\rangle} \\ &= \overline{\lim_{n\to+\infty} \langle T^n(y), x\rangle} \\ &= \overline{\langle P(y), x\rangle} = \langle x, P(y)\rangle \, . \end{aligned}$$

Donc on a $P = P^*$. Autrement dit, P est auto-adjoint. Pour tout $x, y \in H$, on a :

$$\langle (P\circ T)(x), y\rangle = \langle P(T(x)), y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle T^n(T(x)), y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle T^{n+1}(x), y\rangle = \langle P(x), y\rangle \, .$$

D'où on a $P\circ T = P$. Donc on a $P = P^* = T\circ P$. On en déduit que pour tout $n \geq 0$, on a $P \circ T^n = T^n \circ P = P$. On a aussi :

$$\langle P^2(x), y\rangle = \langle P(P(x)), y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle T^n(P(x)), y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle (T^n\circ P)(x), y\rangle = \langle P(x), y\rangle \, .$$

Donc on a $P^2 = P$. Par conséquent, P est un projecteur orthogonal.
9. Soit $x \in \ker(T - \mathrm{id}_H)$. Alors on a $T(x) = x$. On en déduit que pour tout $n \geq 0$, on a $T^n(x) = x$. Donc on a $\langle P(x), y\rangle = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle T^n(x), y\rangle = \langle x, y\rangle$, pour tout $y \in H$. Par conséquent, on a $P(x) = x$, d'où $x \in P(H)$.
Réciproquement, soit $x \in P(H)$, alors on a $P(x) = x$, d'où $x = P(x) = (T\circ P)(x) = T(P(x)) = T(x)$. Donc on a $x \in \ker(T - \mathrm{id}_H)$. Par conséquent, on a $P(H) = \ker(T - \mathrm{id}_H)$. Donc P est le projecteur orthogonal sur $\ker(T - \mathrm{id}_H)$.

Exercice 8.60. Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert non nul. Pour $T \in \mathscr{L}(H)$, on pose :

$$N(T) = \sup\big\{|\langle T(x), x\rangle| \ ; \ \|x\| = 1\big\} \, .$$

Notons que d'après la proposition 8.7.5, si $T \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint, alors on a $N(T) = \|T\|$.

1. Montrer que l'application $T \longmapsto N(T)$ est une norme sur $\mathscr{L}(H)$, et que pour tout $T \in \mathscr{L}(H)$, on a $N(T) = N(T^*)$.
2. Montrer que pour tout $T \in \mathscr{L}(H)$, on a l'inégalité :

$$N(T) \leq \|T\| \leq 2N(T) \, . \tag{8.1}$$

   En particulier, les normes N et $\|\ \|$, sur $\mathscr{L}(H)$, sont équivalentes.
3. Montrer que l'équation (8.1) serait faux si H était un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert.

4. Montrer que si $\dim(H) \geq 2$, la constante 2 ne peut être remplacée dans l'équation (8.1) par aucune constante strictement plus petite.

Solution. 1. Soit $T \in \mathscr{L}(H)$. Il est clair que si $T = 0$, alors $N(T) = 0$. Réciproquement, supposons que $N(T) = 0$. Il résulte de la proposition 8.7.6 que l'on a $T = 0$. Pour tous $T \in \mathscr{L}(H)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $|\langle \lambda T(x), x\rangle| = |\lambda|\,|\langle T(x), x\rangle|$, pour tout $x \in H$. D'où on a $N(\lambda T) = |\lambda| N(T)$. Pour tous $T, S \in \mathscr{L}(H)$ et pour tout $x \in H$, on a :

$$|\langle (T+S)(x), x\rangle| = |\langle T(x), x\rangle + \langle S(x), x\rangle| \leq |\langle T(x), x\rangle| + |\langle S(x), x\rangle| \leq N(T)\|x\|^2 + N(T)\|x\|^2$$

On en déduit que l'on a $N(T+S) \leq N(T) + N(S)$. Donc l'application $T \longmapsto N(T)$ est bien une norme sur $\mathscr{L}(H)$. Pour tout $T \in \mathscr{L}(H)$ et pour tout $x \in H$, on a :

$$|\langle T(x), x\rangle| = |\langle x, T^*(x)\rangle| = |\overline{\langle T^*(x), x\rangle}| = |\langle T^*(x), x\rangle|\,.$$

Par conséquent, on a $N(T) = N(T^*)$.
2. Soit $T \in \mathscr{L}(H)$. D'après le corollaire 8.4.1, on a $\|T\| = \sup\big\{|\langle T(x), y\rangle|\ ;\ \|x\| = \|y\| = 1\big\}$. On en déduit que l'on a $N(T) \leq \|T\|$. Montrons l'autre inégalité. Soit $T \in \mathscr{L}(H)$. Alors $T_1 = \dfrac{T + T^*}{2}$ et $T_2 = \dfrac{T - T^*}{2i}$ sont des opérateurs auto-adjoints et on a $T = T_1 + iT_2$. Donc on a $\|T\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$ et $\|T_1\| = N(T_1)$ et $\|T_2\| = N(T_2)$. Par conséquent, on a $\|T\| \leq N(T_1) + N(T_2) \leq 2N(T)$.
3. Soient $H = \mathbb{R}^2$, muni de sa structure euclidienne canonique, et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $T(x, y) = (y, -x)$. Alors T est linéaire continue de H dans H et on a $\|T\| = 1$. En plus, pour tout pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\langle T(x, y), (x, y)\rangle = 0$. Donc on a $N(T) = 0$. Par conséquent, l'application $T \longmapsto N(T)$ n'est plus une norme sur $\mathscr{L}(H)$ et l'équation (8.1) n'est plus valable.
4. Soient $H = \mathbb{C}^2$, muni de sa structure hermitienne canonique, et pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on pose $T(z_1, z_2) = (0, z_1)$. Alors H est un $\mathbb{C}$-espace hilbertien de dimension 2 et T est linéaire continue de H dans H et on a $\|T\| = 1$. Pour tout pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on a $\langle T(z_1, z_2), (z_1, z_2)\rangle = z_1\overline{z_2}$. D'où on a $|\langle T(z_1, z_2), (z_1, z_2)\rangle| = |z_1|\,|\overline{z_2}| \leq \frac{1}{2}\big(|z_1|^2 + |z_2|^2\big)$. Par conséquent, on a $N(T) = \frac{1}{2}$. Donc la constante 2 ne peut être remplacée dans l'équation (8.1) par aucune constante strictement plus petite. Notons enfin que tout $\mathbb{C}$-espace de Hilbert de dimension ≥ 2 contient une copie de $\mathbb{C}^2$.

Chapitre 9

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

Proposition. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et B une partie de E. Les propriétés suivantes sont équivalents.

(i) B est bornée.

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans B et pour toute suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{K}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$, on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n x_n = 0$.

Démonstration. Montrons l'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans B et $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{K}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$. Soit V un voisinage équilibré de 0 dans E. Comme B est bornée, alors il existe $s > 0$ tel que $B \subset sV$. Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n s = 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|\lambda_n s| \leq 1$. D'où pour tout $n \geq N$, on a $\lambda_n sV \subset V$, car V est équilibré. Donc pour tout $n \geq N$, on a $\lambda_n x_n \in \lambda_n B \subset \lambda_n sV \subset V$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n x_n = 0$.
Preuve de $(ii) \Longrightarrow (i)$. Supposons que B n'est pas bornée, alors il existe un voisinage V de 0 dans E tel que pour tout $n \geq 0$, on ait $B \not\subset (n+1)V$. Pour tout $n \geq 0$, soit $x_n \in B$ tel que $x_n \notin (n+1)V$. Ainsi, on trouve une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans B telle que la suite $\left(\frac{1}{n+1} x_n\right)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 0, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, B est bornée. ■

Proposition. Soient E, F deux espaces vectoriels topologiques et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) T est uniformément continue, *i.e.* pour tout voisinage V de 0 dans F, il existe un voisinage U de 0 dans E tel que pour tout $x, y \in E$ vérifiant $x - y \in U$, on ait $T(x) - T(y) \in V$.

(ii) T est continue.

(iii) T est continue en 0.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $x_0 \in E$ et W un voisinage de $T(x_0)$ dans F. Alors $V = -T(x_0) + W$ est un voisinage de 0 dans F. Donc il existe un voisinage U de 0 dans E tel que pour tout $x, y \in E$ vérifiant $x - y \in U$, on ait $T(x) - T(y) \in V$. Alors $x_0 + U$ est un voisinage de x_0 dans E et pour tout $x \in x_0 + U$, on a $T(x) - T(x_0) \in -T(x_0) + W$, d'où pour tout $x \in x_0 + U$, on a $T(x) \in W$. Donc T est continue en x_0. Par conséquent, T est continue.
L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit V un voisinage de 0 dans F. Comme T est continue en 0, alors il

existe un voisinage U de 0 dans E tel que pour tout $z \in U$, on ait $T(z) \in V$. Soient $x, y \in E$ tels que $x - y \in U$, alors on a $T(x) - T(y) = T(x-y) \in V$. Par conséquent, T est uniformément continue. ∎

Proposition. Soient E, F deux espaces vectoriels topologiques et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Considérons les propriétés suivantes :

(i) T est continue.

(ii) T est bornée.

(iii) Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans E telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $(T(x_n))$ est une suite bornée dans F.

(iv) Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans E telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $T(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. On a les implications suivantes : $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii)$ et $(i) \Longrightarrow (iv)$.
2. Si E est métrisable, alors on a les équivalences $(i) \Longleftrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii) \Longleftrightarrow (iv)$.

Démonstration. 1. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit B une partie bornée dans E. Soit W un voisinage de 0 dans F. Comme T est continue, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $T(V) \subset W$. Comme B est bornée, il existe $s > 0$ tel que $B \subset sV$, d'où $T(B) \subset sT(V) \subset sW$. Par conséquent, $T(B)$ est bornée. Autrement dit, T est une application bornée.
Comme toute suite convergente est bornée, voir proposition 9.1.7, on a l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Enfin, l'implication (i) $\Longrightarrow$ (iv) résulte du théorème 1.7.3.
2. On suppose maintenant que E est métrisable. Alors (iv) $\Longrightarrow$ (i) résulte du théorème 1.7.3 et de la proposition précédente. Pour avoir le résultat, il reste à montrer l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (iv). Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente vers 0 dans E. D'après le lemme 9.1.2, il existe une suite $(t_n)_{n\geq 0}$ dans $]0, +\infty[$ telle que $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ et telle que la suite $(t_n x_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0. Donc la suite $(T(t_n x_n))_{n\geq 0}$ est bornée. Comme on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{t_n} = 0$, d'après la proposition 9.1.6, la suite $\left(\frac{1}{t_n} T(t_n x_n)\right)_{n\geq 0}$ converge vers 0. Donc la suite $(T(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers 0. ∎

Théorème. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique de dimension finie n. Alors il existe un homéomorphisme linéaire T de $\mathbb{K}^n$ sur E, où $\mathbb{K}^n$ est muni de n'importe quelle norme $\| \ \|$.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et considérons l'application

$$\begin{array}{cccc} T : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ & (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array}$$

Alors T est linéaire bijective. Soit $(\xi_p)_{p\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{K}^n$, qui converge vers un élément $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Pour tout $p \geq 0$, on a $\xi_p = (x_{1,p}, \dots, x_{n,p})$ et pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on a $\lim_{p\to+\infty} x_{i,p} = x_i$. Comme les applications $(\lambda, y) \longmapsto \lambda y$ et $(y, z) \longmapsto y + z$ sont respectivement continues de $\mathbb{K} \times E$ dans E et de $E \times E$ dans E, on déduit que l'on a $\lim_{p\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} x_{i,p} e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Donc on a $\lim_{p\to+\infty} T(\xi_p) = T(x)$. Par conséquent, T est continue. Il reste à montrer que T^{-1} est continue. D'après la proposition 9.1.10, il suffit de montrer que T^{-1} est continue en 0. Soit $B = \{x \in \mathbb{K}^n \ ; \ \|x\| \leq 1\}$. D'après le théorème 6.6.2, B est compact, donc T réalise un homéomorphisme de B sur $T(B)$, car E est séparé. Autrement dit, la restriction de T^{-1} à $T(B)$

est continue. Pour montrer que T^{-1} est continue en 0, il suffit de montrer que $T(B)$ contient un voisinage de 0 dans E. Soit $S = \{x \in \mathbb{K}^n \,;\, \|x\| = 1\}$, alors S est compact. Comme T est aussi bijective, alors $T(S)$ est une partie compacte de E telle que $0 \notin T(S)$. D'après la proposition 9.1.5, il existe un voisinage équilibré V de 0 dans E tel que $V \cap T(S) = \emptyset$. Vérifions que l'on a $V \subset T(B)$. Soit $y \in V$. Si $y \notin T(B)$, alors il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|x\| > 1$ et $T(x) = y$. Comme V est équilibré, alors $T\Big(\dfrac{x}{\|x\|}\Big) = \dfrac{1}{\|x\|} y \in V$, ce qui est impossible, car $\dfrac{x}{\|x\|} \in S$. Donc on a bien $V \subset T(B)$. ■

Proposition. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et A une partie à la fois convexe et voisinage de 0 dans E. Alors A est absorbante et la jauge μ_A de A vérifie les propriétés suivantes :

1. La fonction μ_A est sous-additive et positivement homogène et on a :
$$\{x \in E \,;\, \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E \,;\, \mu_A(x) \leq 1\}.$$
2. Si A est équilibrée, alors μ_A est une semi-norme continue sur E et on a :
$$\overset{\circ}{A} = \{x \in E \,;\, \mu_A(x) < 1\} \quad \text{et} \quad \overline{A} = \{x \in E \,;\, \mu_A(x) \leq 1\}.$$
3. Si A est ouverte, on a $A = \{x \in E \,;\, \mu_A(x) < 1\}$ et μ_A est semi-continue supérieurement.
4. Si A est fermée, on a $A = \{x \in E \,;\, \mu_A(x) \leq 1\}$ et μ_A est semi-continue inférieurement.

Démonstration. 1. Puisque A est un voisinage de 0, il résulte de la proposition 9.1.2 que A est absorbante. Donc μ_A est bien définie et d'après le théorème 7.6.2, μ_A est sous-additive et positivement homogène et on a $\{x \in E \,;\, \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E \,;\, \mu_A(x) \leq 1\}$.
2. Supposons de plus que A est équilibrée. D'après le théorème 7.6.2, μ_A est une semi-norme sur E. Comme on a $A \subset \{x \in E \,;\, \mu_A(x) \leq 1\}$, alors $\{x \in E \,;\, \mu_A(x) \leq 1\}$ est un voisinage de 0 dans E. Il résulte alors du lemme précédent que μ_A est continue. Donc $\{x \in E \,;\, \mu_A(x) < 1\}$ est ouvert dans E et $\{x \in E \,;\, \mu_A(x) \leq 1\}$ est fermé dans E. On déduit de 1 que l'on a $\{x \in E \,;\, \mu_A(x) < 1\} \subset \overset{\circ}{A}$ et $\overline{A} \subset \{x \in E \,;\, \mu_A(x) \leq 1\}$. Soit $x \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x \in A$, d'où $\mu_A(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Par conséquent, on a $\overset{\circ}{A} = \{x \in E \,;\, \mu_A(x) < 1\}$. Soit $z \in E$ tel que $\mu_A(z) \leq 1$, alors pour tout $n \geq 1$, il existe $a_n \in A$ tel que $\dfrac{z}{1+\frac{1}{n}} = a_n$. Donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers z, d'où $z \in \overline{A}$. Par conséquent, on a $\overline{A} = \{x \in E \,;\, \mu_A(x) \leq 1\}$.
3. Supposons A ouverte, et soit $x \in A$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x \in A$, d'où $\mu_A(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Par conséquent, on a $A = \{x \in E \,;\, \mu_A(x) < 1\}$. Pour tout $\alpha \leq 0$, on a $\{x \in E \,;\, \mu_A(x) < \alpha\} = \emptyset$, et donc c'est un ouvert de E. Si $\alpha > 0$, on a $\{x \in E \,;\, \mu_A(x) < \alpha\} = \alpha A$, et donc c'est un ouvert de E. Par conséquent, μ_A est semi-continue supérieurement.
4. Supposons A fermée. Soit $x \in E$ tel que $\mu_A(x) \leq 1$. Alors pour tout $n \geq 1$, il existe $a_n \in A$ tel que $\dfrac{x}{1+\frac{1}{n}} = a_n$. Donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers x, d'où $x \in A$. Par conséquent, on a $A = \{x \in E \,;\, \mu_A(x) \leq 1\}$. Pour tout $\alpha > 0$, on a $\{x \in E \,;\, \mu_A(x) \leq \alpha\} = \alpha A$ et donc c'est un fermé de E. On a aussi $\{x \in E \,;\, \mu_A(x) = 0\} = \bigcap\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n} A$, voir remarque 7.6.2, et donc c'est un fermé de E. Par conséquent, μ_A est semi-continue inférieurement. ■

Lemme. Soient E un espace vectoriel, $(F_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces vectoriels topologiques et pour tout $i \in I$, soit $f_i : E \longrightarrow F_i$ une application linéaire. On suppose de plus que la famille $(f_i)_{i\in I}$ est séparante, *i.e.* pour tout $x \in E$ tel que $x \neq 0$, il existe $i \in I$ tel que $f_i(x) \neq 0$. Alors E muni de la topologie initiale associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$ est un espace vectoriel topologique. De plus, si pour tout $i \in I$, F_i est localement convexe, alors E est localement convexe.

Démonstration. D'après la proposition 1.4.1, l'application $(x, y) \longmapsto x + y$ est continue de $E \times E$ dans E si et seulement si pour tout $i \in I$, l'application $(x, y) \longmapsto f_i(x) + f_i(y)$ est continue de $E \times E$ dans F_i. Or l'application $(x, y) \longmapsto (f_i(x), f_i(y))$ est continue de $E \times E$ dans $F_i \times F_i$, et l'application $(a, b) \longmapsto a + b$ est continue de $F_i \times F_i$ dans F_i, donc l'application $(x, y) \longmapsto f_i(x)+f_i(y)$ est continue de $E\times E$ dans F_i. Par conséquent, l'application $(x, y) \longmapsto x+y$ est continue de $E \times E$ dans E.
De même, l'application $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ est continue de $\mathbb{K} \times E$ dans E si et seulement si pour tout $i \in I$, l'application $(\lambda, x) \longmapsto \lambda f_i(x)$ est continue de $\mathbb{K} \times E$ dans F_i. Or l'application $(\lambda, x) \longmapsto (\lambda, f_i(x))$ est continue de $\mathbb{K} \times E$ dans $\mathbb{K} \times F_i$, et l'application $(\lambda, a) \longmapsto \lambda a$ est continue de $\mathbb{K} \times F_i$ dans F_i, donc l'application $(\lambda, x) \longmapsto \lambda f_i(x)$ est continue de $\mathbb{K} \times E$ dans F_i. Par conséquent, l'application $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ est continue de $\mathbb{K} \times E$ dans E. Enfin, comme la famille $(f_i)_{i\in I}$ est séparante, il résulte du lemme 1.5.1 que E est séparé. Par conséquent, E muni de la topologie initiale associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$ est un espace vectoriel topologique. Comme l'image réciproque d'un ensemble convexe par une application linéaire est un ensemble convexe, on en déduit, voir lemme 1.4.1, que si pour tout $i \in I$, F_i est localement convexe, alors E est localement convexe. ■

Théorème. Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques et Γ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Soit K un compact convexe de E tel que pour tout $x \in K$, $\Gamma_x = \big\{f(x) \; ; \; f \in \Gamma\big\}$ soit un sous-ensemble borné de F. Alors il existe une partie bornée D de F telle que $f(K) \subset D$ pour tout $f \in \Gamma$.

Démonstration. Soit $D = \bigcup_{x\in K} \Gamma_x$. Il s'agit de montrer que D est une partie bornée de F. Soit W un voisinage de 0 dans F. Soit U un voisinage équilibré fermé de 0 dans F tel que $U+U \subset W$. Soit $A = \bigcap_{f\in\Gamma} f^{-1}(U)$, alors A est fermé dans E. Si $x \in K$, alors Γ_x est borné dans F et donc il existe $n \geq 1$ tel que $\Gamma_x \subset nU$, d'où $x \in nA$. Par conséquent, on a $K = \bigcup_{n\geq 1}(K \cap nA)$. Puisque $K \cap nA$ est fermé, dans K, d'après le théorème de Baire, théorème 3.4.4, il existe $n \geq 1$ tel que $K \cap nA$ soit d'intérieur non vide relativement à K. Soit x_0 un point dans un tel intérieur. Alors il existe un voisinage équilibré V de 0 dans E tel que $K \cap (x_0 + V) \subset (K \cap nA) \subset nA$. Puisque $K - x_0$ est compact, donc borné, il existe un entier $p > 1$ tel que $K \subset x_0 + pV$. Soit $x \in K$ et soit $z = \big(1 - \frac{1}{p}\big)x_0 + \frac{1}{p}x$, alors $z \in K$, car K est convexe. De plus, on a $z - x_0 = \frac{1}{p}(x - x_0) \in V$, donc $z \in nA$. Puisque pour tout $f \in \Gamma$, on a $f(nA) = nf(A) \subset nU$ et puisque $x = pz - (p-1)x_0$, alors on a $f(x) = pf(z) - (p-1)f(x_0) \in pnU - (p-1)nU = pnU + (p-1)nU \subset pnU + pnU = pn(U+U) \subset pnW$. Ainsi, on a $D \subset pnW$, ce qui prouve que D est bornée. ■

Lemme. Soient $(E, \mathcal{T})$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique, C un convexe ouvert non vide de E et $b \in E$ avec $b \notin C$. Alors il existe $f \in E^*$ tel que $f(x) < f(b)$ pour tout $x \in C$.

Démonstration. Quitte à faire une translation, on peut supposer $0 \in C$. Soit μ_C la jauge de C. D'après la proposition 9.2.2, μ_C est positivement homogène, sous-additive et $C = \{x \in E \; ; \; \mu_C(x) < 1\}$. On a aussi $\mu_C(b) \geq 1$ car $b \notin C$. Posons

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\, b & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & tb & \longmapsto & t \end{array}$$

alors f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}\, b$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(tb) \leq \mu_C(tb)$. En effet, si $t \leq 0$, on a $f(tb) = t \leq 0 \leq \mu_C(tb)$. Si $t > 0$, on a $\mu_C(tb) = t\mu_C(b) \geq t = f(tb)$ car $\mu_C(b) \geq 1$. D'après le théorème 7.7.1, on peut prolonger f en une forme linéaire sur E encore notée f telle que pour tout $x \in E$, on ait $f(x) \leq \mu_C(x)$. Pour tout $x \in C$, on a $f(x) < 1$ et $-1 < -f(x) = f(-x)$. Donc pour tout $x \in C \cap -C$, on a $|f(x)| < 1$. Or $C \cap -C$ est un voisinage de 0, on déduit de la proposition 9.1.12 que f est continue. De plus, pour tout $x \in C$, on a $f(x) \leq \mu_C(x) < 1 = f(b)$. ■

Lemme. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles non vides convexes dans E. Alors $\mathrm{conv}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ est l'ensemble des sommes $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$, où $x_i \in A_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.

Démonstration. Soit C l'ensemble des sommes $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$, où $x_i \in A_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Il est clair que l'on a $A_1 \cup \cdots \cup A_n \subset C \subset \mathrm{conv}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$. Pour montrer que $C = \mathrm{conv}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$, il suffit de montrer que C est un sous-ensemble convexe. Soient $x_i, y_i \in A_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$, $s_1 \geq 0, \dots, s_n \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$. Soit $t \in]0, 1[$, alors on a :

$$t \sum_{i=1}^{n} t_i x_i + (1-t) \sum_{i=1}^{n} s_i y_i = \sum_{i=1}^{n} (t t_i + (1-t) s_i) \frac{t t_i x_i + (1-t) s_i y_i}{t t_i + (1-t) s_i} .$$

Or on a $t t_i + (1-t) s_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} t t_i + (1-t) s_i = 1$ et $\frac{t t_i x_i + (1-t) s_i y_i}{t t_i + (1-t) s_i} \in A_i$ car A_i est convexe. D'où on a $t \sum_{i=1}^{n} t_i x_i + (1-t) \sum_{i=1}^{n} s_i y_i \in C$, donc C est convexe. ■

Proposition. Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.

1. Si $x \in \mathrm{conv}(A)$, alors il existe $a_1, \dots, a_{n+1} \in A$ et $t_1 \geq 0, \dots, t_{n+1} \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{n+1} t_i a_i = x$.
2. On munit $\mathbb{R}^n$ de la topologie usuelle. Si A est compact, alors $\mathrm{conv}(A)$ est compacte.

Démonstration. 1. D'après la proposition 9.5.1, il existe $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_{k+1} \in A$ et $t_1 \geq 0, \dots, t_{k+1} \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{k+1} t_i a_i = x$. Pour avoir le résultat, il suffit de montrer que si $k > n$, alors il existe $c_1 \geq 0, \dots, c_{k+1} \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{k+1} c_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{k+1} c_i a_i = x$ et il existe $j \in \{1, \dots, k+1\}$ tel que $c_j = 0$. On peut supposer que $t_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, k+1\}$. Considérons l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} T : & \mathbb{R}^{k+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ & (s_1, \dots, s_{k+1}) & \longmapsto & \left(\sum_{i=1}^{k+1} s_i a_i, \sum_{i=1}^{k+1} s_i \right) \end{array}$$

Comme $k > n$, alors $\ker(T) \neq \{0\}$, et donc il existe $(s_1, \dots, s_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{i=1}^{k+1} s_i a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{k+1} s_i = 0$. Soit $\lambda = \inf \left\{ \frac{t_i}{s_i} \ ; \ s_i \neq 0 \right\}$, alors il existe $j \in \{1, \dots, k+1\}$ tel que $\lambda = \frac{t_j}{s_j}$ et on a $\lambda s_i \leq t_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, k+1\}$. On pose $c_i = t_i - \lambda s_i$, alors $c_i \geq 0$, $c_j = 0$ et on a $\sum_{i=1}^{k+1} c_i = 1$. De plus, on a $x = \sum_{i=1}^{n+1} t_i a_i = \sum_{i=1}^{n+1} t_i a_i - \lambda \sum_{i=1}^{k+1} s_i a_i = \sum_{i=1}^{k+1} c_i a_i$.

2. Soit S l'ensemble des $t = (t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $t_1 \geq 0, \dots, t_{n+1} \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$. D'après 1, $\mathrm{conv}(A)$ est l'image de $S \times A^{n+1}$ par l'application continue $(t, a_1, \dots, a_{n+1}) \longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} t_i a_i$. Or $S \times A^{n+1}$ est compact, donc $\mathrm{conv}(A)$ est compacte. ■

Supplément d'exercices

Exercice 9.45. Soit K l'ensemble des vecteurs 0 et $\frac{1}{n+1}\mathbf{e}_n$, $n \geq 0$ dans l'espace de Banach $(c_0, \| \ \|_\infty)$.

1. Montrer que K est compact.
2. Montrer que $\overline{\mathrm{conv}}(K)$ est compact mais que $\overline{\mathrm{conv}}(K)$ n'est pas l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Solution. 1. Comme on a $\left\| \frac{1}{n+1}\mathbf{e}_n \right\|_\infty = 1$, alors la suite $\left(\frac{1}{n+1}\mathbf{e}_n\right)_{n \geq 0}$ converge vers 0 dans $(c_0, \| \ \|_\infty)$, donc K est compact.
2. Puisque $(c_0, \| \ \|_\infty)$ est un espace de Banach, il résulte du théorème 9.5.1 que $\overline{\mathrm{conv}}(K)$ est compact. D'après le théorème 9.5.4, tous les points extrémaux de $\overline{\mathrm{conv}}(K)$ appartiennent à K. Comme dans l'exercice 9.42, on vérifie que l'on a :

$$\mathrm{conv}(K) = \left\{ \sum_{p=0}^{n} \frac{t_p}{p+1}\mathbf{e}_p \ ; \ n \geq 0, \, t_0 \geq 0, \dots, t_n \geq 0 \text{ et } \sum_{p=0}^{n} t_p \leq 1 \right\}.$$

On en déduit que si $x \in \overline{\mathrm{conv}}(K) = \overline{\mathrm{conv}(K)}$, alors $x = (x_n)_{n \geq 0} \in c_0$, avec $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$, pour tout $n \geq 0$. Soient $n \geq 0$ et $x = (x_n)_{n \geq 0}$, $y = (y_n)_{n \geq 0} \in \overline{\mathrm{conv}}(K)$ tels que $\frac{1}{n+1}\mathbf{e}_n = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. Alors on a $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n$. Or on a $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $0 \leq y_n \leq \frac{1}{n+1}$, d'où $\frac{1}{n+1} = x_n = y_n$. Pour tout $p \neq n$, on a $0 = \frac{1}{2}x_p + \frac{1}{2}y_p$, avec $0 \leq x_p$ et $0 \leq y_p$, donc on a $0 = x_p = y_p$. Par conséquent, on a $x = y = \frac{1}{n+1}\mathbf{e}_n$, donc $\frac{1}{n+1}\mathbf{e}_n$ est un point extrémal de $\overline{\mathrm{conv}}(K)$. De même, si $x, y \in \overline{\mathrm{conv}}(K)$ tels que $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. Alors on a $0 = x = y$. Donc 0 est aussi un point extrémal de $\overline{\mathrm{conv}}(K)$. Par conséquent, l'ensemble des points extrémaux de $\overline{\mathrm{conv}}(K)$ est K. Soit $x = \left(\frac{1}{2^{p+1}(p+1)}\right)_{p \geq 0}$, alors $x \in \overline{\mathrm{conv}}(K)$, mais $x \notin \mathrm{conv}(K)$. Par conséquent, $\overline{\mathrm{conv}}(K)$ n'est pas l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Exercice 9.46. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et F un sous-espace vectoriel fermé E. Soient $\mathcal{T}_\pi$ la topologie quotient sur l'espace vectoriel quotient E/F et $\pi : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (E/F, \mathcal{T}_\pi)$ l'application quotient. Rappelons qu'un ensemble U de E/F est ouvert dans $(E/F, \mathcal{T}_\pi)$ si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans $(E, \mathcal{T})$. De même, pour les ensembles fermés dans

$(E/F,\, \mathcal{T}_\pi)$. Rappelons aussi que π est une application linéaire continue. Voir la proposition 1.4.10 et la discussion précédant la proposition 6.4.3.

1. Montrer que π est une application ouverte et que E/F muni de la topologie $\mathcal{T}_\pi$ est un espace vectoriel topologique.
2. Montrer que si $\mathcal{B}$ est une base locale de E, alors les ensembles $\pi(V)$, où $V \in \mathcal{B}$, forment une base locale de $(E/F,\, \mathcal{T}_\pi)$.
3. Montrer que si $(E,\, \mathcal{T})$ est localement convexe (*resp.* localement borné, *resp.* métrisable, *resp.* normable), alors il en est de même pour $(E/F,\, \mathcal{T}_\pi)$.
4. Montrer que si $(E,\, \mathcal{T})$ est un F-espace, ou un espace de Fréchet, ou un espace de Banach, il en est de même pour $(E/F,\, \mathcal{T}_\pi)$.

Solution. 1. Soit U un ouvert dans E, alors on a $\pi^{-1}(\pi(U)) = U + F$, donc $\pi^{-1}(\pi(U))$ est ouvert dans E, voir corollaire 9.1.1, d'où $\pi(U)$ est ouvert dans E/F. Donc π est une application ouverte.
Notons d'abord que $\{0\}$ est fermé dans E/F car $\pi^{-1}(\{0\}) = F$ est fermé dans E. Pour tout $(x, y) \in E \times E$, soit $f(x, y) = x + y$ et pour tout $(a, b) \in E/F \times E/F$, soit $f_\pi(a, b) = a + b$. Montrons que l'application f_π est continue de $E/F \times E/F$ dans E/F. Notons d'abord que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
E \times E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
E/F \times E/F \arrow[r, "f_\pi"] & E/F
\end{tikzcd}$$

Soit V un ouvert de E/F. Puisque $\pi \times \pi$ est surjective, alors on a :

$$f_\pi^{-1}(V) = (\pi \times \pi)((\pi \times \pi)^{-1}(f_\pi^{-1}(V)))\,.$$

Comme on a $\pi \circ f = f_\pi \circ (\pi \times \pi)$, alors on a :

$$(\pi \times \pi)^{-1}(f_\pi^{-1}(V)) = (f_\pi \circ (\pi \times \pi))^{-1}(V) = (\pi \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(\pi^{-1}(V))\,.$$

Par conséquent, on a $f_\pi^{-1}(V) = (\pi \times \pi)(f^{-1}(\pi^{-1}(V)))$. Comme f et π sont continues et $\pi \times \pi$ est une application ouverte, alors $f_\pi^{-1}(V)$ est un ouvert de $E/F \times E/F$. Donc f_π est une application continue.
Pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, soit $g(\lambda, x) = \lambda x$ et pour tout $(\lambda, a) \in \mathbb{K} \times E/F$, soit $g_\pi(\lambda, a) = \lambda a$. Montrons que l'application g_π est continue de $\mathbb{K} \times E/F$ dans E/F. On fait le même raisonnement qu'auparavant. Notons d'abord que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \times E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{K}}\times\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{K} \times E/F \arrow[r, "g_\pi"] & E/F
\end{tikzcd}$$

Comme $\mathrm{id}_{\mathbb{K}} \times \pi$ est une application surjective et ouverte, et comme g et π sont continues, alors g_π est continue. Donc E/F muni de la topologie $\mathcal{T}_\pi$ est un espace vectoriel topologique.
2. Soit $\mathcal{B}$ une base locale de E. Comme π est une application continue et ouverte, on en déduit que les ensembles $\pi(V)$, où $V \in \mathcal{B}$, forment une base locale de $(E/F,\, \mathcal{T}_\pi)$.

3. Comme l'image d'un ensemble convexe par une application linéaire est un ensemble convexe, on déduit de 2 que si $(E, \mathcal{T})$ est localement convexe, il en est de même pour $(E/F, \mathcal{T}_\pi)$. Comme π est une application continue, il résulte de la proposition 9.1.11 que π est une application bornée. Puisque π est aussi une application ouverte, on en déduit que $(E/F, \mathcal{T}_\pi)$ est localement borné. Supposons maintenant $(E, \mathcal{T})$ métrisable et soit d une distance invariante par translation sur E dont la topologie associée est $\mathcal{T}$. Pour tout $x, y \in E$, on pose :

$$d_\pi(\pi(x), \pi(y)) = \inf \left\{ d(x-y, z) \ ; \ z \in F \right\}.$$

On vérifie facilement que d_π est bien définie et qu'elle est une distance invariante par translation sur E/F. On vérifie également que pour tout $r > 0$, on a $\pi(\{x \in E \ ; \ d(x, 0) < r\}) = \{z \in E/F \ ; \ d_\pi(z, 0) < r\}$. On déduit de 2 que la topologie induite par d_π sur E/F est la topologie quotient $\mathcal{T}_\pi$. Donc l'espace quotient $(E/F, \mathcal{T}_\pi)$ est bien métrisable. Finalement, on a montré, proposition 6.4.3, que si $(E, \mathcal{T})$ est normable alors $(E/F, \mathcal{T}_\pi)$ est normable.
4. Supposons que $(E, \mathcal{T})$ est un F-espace, et soit d une distance invariante par translation sur E dont la topologie associée est $\mathcal{T}$. D'après 3, l'espace quotient $(E/F, \mathcal{T}_\pi)$ est métrisable et d_π est une distance invariante par translation sur E/F dont la topologie est la topologie quotient $\mathcal{T}_\pi$. Montrons que E/F muni de la distance d_π est complet. Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(E/F, d_\pi)$. On vérifie exactement comme dans la démonstration de la proposition 6.4.5 qu'il existe une sous-suite $(z_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ de $(z_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $d_\pi(z_{\varphi(n+1)}, z_{\varphi(n)}) < 2^{-n}$, et qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E telle pour tout $n \geq 0$, on ait $d(x_{n+1}, x_n) < 2^{-n}$ et $\pi(x_n) = z_{\varphi(n)}$. Alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans (E, d), donc elle converge vers un élément $x \in E$. Or π est continue, on en déduit que $(z_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge vers $\pi(x)$. Par conséquent, la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\pi(x)$, voir proposition 2.6.2. Donc $(E/F, d_\pi)$ est un F-espace. Il résulte de ce que l'on vient de montrer et de 3 que si $(E, \mathcal{T})$ est un espace de Fréchet, alors il en est de même pour $(E/F, \mathcal{T}_\pi)$. Finalement, on a montré, proposition 6.4.3 et proposition 6.4.5, que si $(E, \mathcal{T})$ est un espace de Banach, alors $(E/F, \mathcal{T}_\pi)$ est un espace de Banach.

Exercice 9.47. Soient G et F deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T})$ tels que F soit fermé et G soit de dimension finie. Montrer que $G + F$ est fermé dans $(E, \mathcal{T})$.
Solution. Considérons l'espace vectoriel topologique quotient $(E/F, \mathcal{T}_\pi)$ et soit $\pi : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (E/F, \mathcal{T}_\pi)$ l'application quotient. Alors $\pi(G)$ est sous–espace vectoriel de dimension finie de E/F, donc $\pi(G)$ est fermé dans E/F, voir corollaire 9.1.4. Or on a $F + G = \pi^{-1}(\pi(G))$ et π est continue, donc $F + G$ est fermé dans E.

Exercice 9.48. Soient E, F deux espaces vectoriels topologiques et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soient H un sous-espace vectoriel fermé de E tel que $H \subset \ker(f)$ et $\pi : E \longrightarrow E/H$ l'application quotient. Alors il existe une application linéaire $\widetilde{f} : E/H \longrightarrow F$ telle que $\widetilde{f} \circ \pi = f$, voir proposition 6.4.4. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \\ & E/H \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

1. Montrer que f est continue si et seulement si $\widetilde{f}$ est continue.
2. Montrer que f est ouverte si et seulement si $\widetilde{f}$ est ouverte.

Solution. 1. Puisque l'on a $f = \widetilde{f} \circ \pi$, d'après la proposition 1.4.10, f est continue si et seulement si $\widetilde{f}$ est continue.
2. Supposons que $\widetilde{f}$ est un application ouverte. D'après l'exercice 9.46, l'application quotient π est ouverte, on en déduit que f est une application ouverte car la composée de deux applications ouvertes est une application ouverte.
Réciproquement, supposons que f est une application ouverte. Soit U un ouvert de E/H. Alors $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de E et on a $f(\pi^{-1}(U)) = (\widetilde{f} \circ \pi)(\pi^{-1}(U)) = \widetilde{f}(\pi(\pi^{-1}(U))) = \widetilde{f}(U)$, donc $\widetilde{f}(U)$ est ouvert dans F. Par conséquent, $\widetilde{f}$ est une application ouverte.

Exercice 9.49. Soient E, F deux espaces vectoriels topologiques, avec $\dim(F) < \infty$ et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

1. Montrer que si f est surjective, alors f est ouverte.
2. On suppose que $\ker(f)$ est fermé. Montrer que f est continue.

Solution. 1. Soit G un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim(G) = \dim(F)$ et tel que E soit la somme directe algébrique des $\ker(f)$ et G. Puisque l'application

$$\begin{array}{ccc} \ker(f) \times G & \longrightarrow & E \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array}$$

est continue et bijective, alors l'application inverse

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \ker(f) \times G \\ x & \longmapsto & (\pi_1(x), \pi_2(x)) \end{array}$$

est ouverte. D'après la proposition 1.4.7, la projection canonique

$$\begin{array}{ccc} \ker(f) \times G & \longrightarrow & G \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_2 \end{array}$$

est ouverte. On en déduit que la projection naturelle $\pi_2 : E \longrightarrow G$ est une application linéaire surjective et ouverte. Pour tout $x \in E$, on a $f(x) = f(\pi_2(x))$ et on pose $S(\pi_2(x)) = f(x)$. Alors S est une application linéaire bijective de G sur F. De plus, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & F \\ & G \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

Comme on a $\dim(G) = \dim(F) < +\infty$, alors S est un homéomorphisme, voir corollaire 9.1.3. Or on a $f = S \circ \pi_2$, donc f est une application ouverte.
2. Comme $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé de E, alors $E/\ker(f)$ est un espace vectoriel topologique et il existe une application linéaire injective $\widetilde{f} : E/\ker(f) \longrightarrow F$ telle que $\widetilde{f} \circ \pi = f$, voir proposition 6.4.4. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \\ & E/\ker(f) \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Comme $\tilde{f}$ est injective et $\dim(F) < +\infty$, alors $\dim(E/\ker(f)) < +\infty$. Il s'ensuit que $\widetilde{f}$ est continue, voir corollaire 9.1.3. Par conséquent, f est continue.

Définition 9.0.2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A une partie non vide de E. On appelle **hyperplan d'appui** de A, un hyperplan affine H contenant au moins un point de A et tel que A soit inclus dans l'un des demi-espaces fermés déterminés par H. Autrement dit, il existe une forme linéaire non nulle f sur E, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in A$ tels que $f(a) = \alpha$ et $A \subset \{x \in E \; ; \; f(x) \leq \alpha\}$ ou $A \subset \{x \in E \; ; \; f(x) \geq \alpha\}$. Dans ce cas, on dit aussi que H est un hyperplan d'appui de A en a ou que H est un hyperplan d'appui de A passant par le point a.

Notons que si f est une forme linéaire non nulle sur E, pour qu'il existe un hyperplan d'appui de A parallèle à l'hyperplan $\ker(f)$, il faut et il suffit que l'une des bornes de l'ensemble $f(A)$ soit finie et appartienne à $f(A)$.

Exercice 9.50. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique et A une partie non vide de E.

1. Montrer que si H est un hyperplan d'appui de A, alors on a $H \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset$. En déduire que $H \cap A \subset \mathrm{Fr}(A)$.
2. Montrer que si $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, les hyperplans d'appui de A sont fermés.
3. Montrer que si A est compact, pour tout hyperplan fermé H_0 de E, il existe un hyperplan d'appui fermé de A parallèle à H_0.
4. Montrer que si A est convexe et fermée et si $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, alors par tout point de $\mathrm{Fr}(A)$ passe un hyperplan d'appui fermé de A en ce point.
5. Montrer que si A est fermée tel que $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ et si par tout point de $\mathrm{Fr}(A)$, il passe un hyperplan d'appui de A, alors A est convexe.
6. On suppose que $E = \mathbb{R}^p$ et que A est une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^p$ telle que $A \neq \mathbb{R}^p$. Montrer que pour tout $x \in A \cap \mathrm{Fr}(A)$ passe un hyperplan d'appui fermé de A en x.

Solution. 1. Soit H un hyperplan d'appui de A. Alors il existe une forme linéaire non nulle f sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $H = \{x \in E \; ; \; f(x) = \alpha\}$ et $A \subset \{x \in E \; ; \; f(x) \leq \alpha\}$. Si $H \cap \overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, alors on a $\overset{\circ}{H} \neq \emptyset$, d'où $\overset{\circ}{\ker(f)} \neq \emptyset$. Il résulte de la proposition 9.1.4 que l'on a $\ker(f) = E$, ce qui est impossible car f est non nulle. Donc on a bien $H \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset$. Par conséquent, on a $H \cap A \subset A \setminus \overset{\circ}{A} \subset \mathrm{Fr}(A)$.
2. Soient H un hyperplan d'appui de A et f une forme linéaire non nulle sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $H = \{x \in E \; ; \; f(x) = \alpha\}$ et $A \subset \{x \in E \; ; \; f(x) \leq \alpha\}$. D'après 1, on a $\overset{\circ}{A} \subset \{x \in E \; ; \; f(x) < \alpha\} = D_\alpha$. Si $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, alors on a $\overset{\circ}{D_\alpha} \neq \emptyset$, d'où $\overset{\circ}{D_0} \neq \emptyset$. Donc $\ker(f)$ n'est pas dense dans E. On déduit de la proposition 9.1.12 que f est continue, donc H est fermé.
3. On suppose A compact et soit f une forme linéaire continue non nulle sur E telle que $H_0 = \ker(f)$. Comme A est compact et f est continue, alors il existe $a \in A$ tel que $\sup\limits_{x \in A} f(x) = f(a) = \alpha$ existe dans $\mathbb{R}$. Alors l'hyperplan affine fermé $H = \{x \in E \; ; \; f(x) = \alpha\}$ est un hyperplan d'appui de A parallèle à H_0.
4. On suppose que A est convexe fermée et que $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. Soit $z \in \mathrm{Fr}(A)$. Comme $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert convexe non vide tel que $z \notin \overset{\circ}{A}$, d'après le théorème 9.4.1, il existe $f \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in \overset{\circ}{A}$, on ait $f(a) < \alpha \leq f(z)$. D'après la proposition 9.1.3, on a $\overline{A} = \overline{\overset{\circ}{A}}$. Comme f est continue, on en déduit que pour tout $a \in A$, on a $f(a) \leq \alpha \leq f(z)$. Or A est fermée, donc $z \in A$. Par conséquent, $H = \{x \in E \; ; \; f(x) = \alpha\}$ est un hyperplan d'appui fermé de A passant par le point z.
5. Supposons que A n'est pas convexe, alors il existe $x, y \in A$ et $z \in]x, \, y[$ tel que $z \notin A$. Comme

$\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, alors il existe $a \in \overset{\circ}{A}$ tel que $a \notin \{tx + (1-t)y \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$. Comme $]a, z[$ est connexe et on a $]a, z[\cap \overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ et $]a, z[\cap (E \setminus A) \neq \emptyset$, alors on a $]a, z[\cap \mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$. Soit $u \in]a, z[\cap \mathrm{Fr}(A)$. Par hypothèse, il existe une forme linéaire non nulle f sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(u) = \alpha$ et $f(b) \leq \alpha$, pour tout $b \in A$. Comme on a $u \in \mathrm{conv}(\{x, y, a\})$ et $u \notin [a, y] \cup [x, y] \cup [x, a]$, alors il existe $t, s, r \in]0, 1[$ tels que $t + s + r = 1$ et $u = ta + sx + ry$. D'où on a $\alpha = f(u) = tf(a) + sf(x) + rf(y) \leq tf(a) + s\alpha + r\alpha$. Comme $a \in \overset{\circ}{A}$, d'après 1, on a $f(a) < \alpha$, donc on a $\alpha < t\alpha + s\alpha + r\alpha = \alpha$, ce qui est impossible. Donc A est bien un ensemble convexe.
6. On suppose $E = \mathbb{R}^p$ et A une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^p$ telle que $A \neq \mathbb{R}^p$. Soient $x \in A \cap \mathrm{Fr}(A)$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}^p \setminus A$ convergente vers x. D'après l'exercice 7.39, pour tout $n \geq 0$, il existe une forme linéaire continue f_n sur $\mathbb{R}^p$ telle que $\|f_n\| = 1$ et pour tout $a \in A$, on ait $f_n(a) \leq f_n(x_n)$. Comme $\mathbb{R}^{p*}$ est de dimension finie, alors la sphère unité dans $(\mathbb{R}^{p*}, \| \ \|)$ est compacte. Donc, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$, qui converge vers $f \in \mathbb{R}^{p*}$, d'où on a $\|f\| = 1$. Comme pour tout $k \geq 0$ et pour tout $a \in A$, on a $f_{n_k}(a) \leq f_{n_k}(x_{n_k})$ et comme on a $f(a) = \lim\limits_{k\to+\infty} f_{n_k}(a)$ et $f(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} f_{n_k}(x_{n_k})$, alors pour tout $a \in A$, on a $f(a) \leq f(x)$. Soient $\alpha = f(x)$ et $H = \{z \in \mathbb{R}^p \ ; \ f(z) = \alpha\}$, alors H est un hyperplan d'appui fermé de A passant par x.

Exercice 9.51. Soient $(E, \langle \ , \ \rangle)$ un espace de Hilbert réel et B la boule unité fermée de H. Déterminer les hyperplans d'appui de B.

Solution. Soit $b \in B$ tel que $\|b\| = 1$. Comme B est convexe fermée et on a $\overset{\circ}{B} \neq \emptyset$, d'après l'exercice précédent, il existe un hyperplan d'appui fermé H de B passant par le point b. Soient $f \in E^*$, non nulle, et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $b \in H = \{x \in E \ ; \ f(x) = \alpha\}$ et $B \subset \{x \in E \ ; \ f(x) \leq \alpha\}$. D'après le théorème de Riesz, théorème 8.4.1, il existe $z \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $f(x) = \langle x, z\rangle$. De plus, on a $\|z\| = \|f\|$. Pour tout $x \in B$, on a $f(x) \leq \alpha$ et on a $-B = B$, d'où $\alpha \geq 0$ et on a $|f(x)| \leq \alpha$, pour tout $x \in B$. On en déduit que l'on a $\|f\| \leq \alpha$. On a aussi $\|f\| \geq |f(b)| = \alpha$, d'où $\|z\| = \|f\| = \alpha$. On a $z = \lambda b + y$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in E$ tel que $\langle b, y\rangle = 0$ et $\|z\|^2 = \lambda^2 + \|y\|^2$. Donc on a $\alpha = f(b) = \langle b, z\rangle = \lambda$, d'où $y = 0$ et on a $z = \alpha b$. Autrement dit, on a $f(x) = \langle x, \alpha b\rangle$, pour tout $x \in E$. Par conséquent, on a $\ker(f) = \{b\}^\perp$, d'où $H = \{b\}^\perp + b$. Par conséquent, pour tout $b \in B$ tel que $\|b\| = 1$, il existe un unique hyperplan d'appui de B passant par b, à savoir l'hyperplan tangent à B en b.

Exercice 9.52. Soit B la boule unité fermée de l'espace de Banach c_0, considéré comme un $\mathbb{R}$-espace de Banach et soit f la forme $\mathbb{R}$-linéaire continue sur c_0 définie par $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{Re}(x_n)}{2^n}$, où $x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_0$. Montrer qu'il n'existe aucun hyperplan d'appui de B parallèle à l'hyperplan fermé $H = \ker(f)$.

Solution. Supposons qu'il existe un hyperplan d'appui de B parallèle à l'hyperplan fermé $H = \ker(f)$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in B$, on ait $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{Re}(x_n)}{2^n} \leq \alpha$ et il existe $a = (a_n)_{n\geq 0} \in B$ tel que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{Re}(a_n)}{2^n} = \alpha$. Pour tout $p \geq 0$, soit $\xi_p = \sum\limits_{k=0}^{p} \mathbf{e}_k$, alors $\xi_p \in B$, d'où $\sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{1}{2^k} \leq \alpha$. On fait tendre p vers l'infini, on obtient $2 \leq \alpha$. Comme on a

$\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{Re}(a_n)}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$, alors on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{Re}(a_n)}{2^n} = 2$. Par conséquent, pour tout $n \geq 0$, on a $\mathrm{Re}(a_n) = 1$, ce qui est impossible car $a \in c_0$. Donc il n'existe aucun hyperplan d'appui de B parallèle à l'hyperplan fermé $H = \ker(f)$.

Exercice 9.53. Soient A un ensemble compact non vide d'un $\mathbb{R}$-espace normé $(E, \| \ \|)$ et $\delta = \delta(A)$ le diamètre de A.

1. Montrer que la distance de deux hyperplans d'appui de A est au plus égale à δ.
2. Montrer qu'il existe $a, b \in A$ tels que $\|a - b\| = \delta$. Montrer qu'il existe deux hyperplans d'appui parallèles de A, passant respectivement par a et b, et dont la distance est égale à δ.

Solution. 1. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans d'appui de A, alors on a $H_1 \cap A \neq \emptyset$ et $H_2 \cap A \neq \emptyset$, d'où $d(H_1, H_2) \leq d(H_1 \cap A, H_2 \cap A) \leq \delta$.
2. On a $\delta = \sup\{d(x,y) \ x, y \in A\}$. Comme A est compact non vide et l'application $(x,y) \longmapsto \|x-y\|$ est continue de $A \times A$ dans $\mathbb{R}$, alors il existe $a, b \in A$ tels que $\|a-b\| = \delta$. Soit $B = B'(a, \delta)$ la boule fermée de centre a et de rayon δ dans E. Comme B est convexe fermée et on a $\overset{\circ}{B} \neq \emptyset$ et $b \in \mathrm{Fr}(B)$, d'après l'exercice 9.50, il existe une forme linéaire continue non nulle f sur E telle que pour tout $x \in B$, on ait $f(x) \leq f(b)$ et on a $f(a) < f(b)$ car $a \in \overset{\circ}{B}$. Comme pour tout $x \in B$, on a aussi $2a - x \in B$, on en déduit que pour tout $x \in B$, on a $|f(x) - f(a)| \leq f(b) - f(a)$. Comme on a $\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(a)|}{\delta} \ ; \ x \in E \text{ tel que } \|x - a\| = \delta\right\}$, voir exercice 6.55, alors $\|f\| = \frac{f(b) - f(a)}{\delta} = \frac{f(b) - f(a)}{\|a - b\|}$. Soient $H_a = \{x \in E \ ; \ f(x) = f(a)\} = \ker(f) + a$ et $H_b = \{x \in E \ ; \ f(x) = f(b)\} = \ker(f) + b$. Alors H_b est un hyperplan d'appui de A passant par b. D'après la remarque 6.4.1 et l'exercice 6.43, on a $d(H_a, H_b) = \frac{|f(b) - f(a)|}{\|f\|} = \frac{f(b) - f(a)}{\|f\|}$, d'où $d(H_a, H_b) = \delta$. Il reste à montrer que H_a est un hyperplan d'appui de A passant par a. Soit $x \in A$. Si $f(x) < f(a)$, alors on a $f(x) < f(a) < f(b)$, d'où $f(b) - f(a) < f(b) - f(x)$. Donc on a $\|a - b\| \, \|f\| = f(b) - f(a) < f(b) - f(x) \leq \|f\| \, \|b - x\|$, d'où $\|a - b\| < \|b - x\|$, ce qui est impossible. Par conséquent, pour tout $x \in A$, on $f(a) \leq f(x)$. Donc H_a est bien un hyperplan d'appui de A passant par a et parallèle à H_b.

Remarque. On déduit de l'exercice 9.15 et de l'exercice 9.50, propriété 1, que si A est un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.
(ii) Il existe un hyperplan affine H de $\mathbb{R}^n$ tel que $A \subset H$.
(iii) Pour tout $x \in A$, il existe un hyperplan d'appui de A passant par x.

L'exercice qui va suivre est une sorte de généralisation de cette remarque.

Exercice 9.54. Soit A une partie non vide convexe fermée d'un $\mathbb{R}$-espace de Banach séparable $(E, \| \ \|)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) A est contenue dans un hyperplan affine fermé de E.
(ii) Pour tout $x \in A$, il existe un hyperplan d'appui fermé de A passant par x.

Solution. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est triviale. En effet, si B est une partie non vide de E et si H est hyperplan affine fermé de E tel que $B \subset H$, alors pour tout $x \in B$, H est un hyperplan

d'appui fermé de B passant par x.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Sans perdre de généralité, on peut supposer $0 \in A$. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dense dans A. On pose $y_n = x_n$ si $\|x_n\| \leq 1$ et $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$ si $\|x_n\| > 1$. Soit $n \geq 1$. Si $\|x_n\| > 1$, alors $y_n = \big(1 - \frac{1}{\|x_n\|}\big)0 + \frac{1}{\|x_n\|}x_n \in A$, donc $(y_n)_{n\geq 1}$ est une suite dans A. D'après l'exercice 9.22, la série de terme général $\dfrac{y_n}{2^n}$ est convergente dans E et on a $a = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^n} \in A$. Par hypothèse, il existe un hyperplan d'appui fermé de A en a. Autrement dit, il existe une forme linéaire continue non nulle f sur E telle que pour tout $x \in A$, on ait $f(x) \leq f(a)$. On va montrer que A est contenue dans l'hyperplan affine fermé $H = \{x \in A \ ; \ f(x) = f(a)\}$. S'il existe $n \geq 1$ tel que $f(y_n) < f(a)$, alors on a $f(a) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(y_n)}{2^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(a)}{2^n} = f(a)$, ce qui est impossible. Donc pour tout $n \geq 1$, on a $f(y_n) = f(a) \geq 0 = f(0)$. Donc pour tout $n \geq 0$, on a $f(x_n) \geq 0$. Comme la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est dense dans A, alors pour tout $x \in A$, on a $f(x) \geq 0$. S'il existe $x \in A$ tel que $\|x\| > 1$, alors il existe $n \geq 1$ tel que $\|x_n\| > 1$, d'où $\|x_n\| f(a) = f(x_n) \leq f(a)$. Par conséquent, on a $f(a) = 0$ et on a $A \subset \ker(f) = \{x \in E \ ; \ f(x) = 0 = f(a)\}$. Si pour tout $x \in A$, on a $\|x\| \leq 1$, alors pour tout $n \geq 1$, on a $\|x_n\| \leq 1$ et donc, pour tout $n \geq 1$, on a $f(x_n) = f(a)$. Comme la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est dense dans A, alors pour tout $x \in A$, on a $f(x) = f(a)$. Par conséquent, on a $A \subset \ker(f) = \{x \in E \ ; \ f(x) = f(a)\}$.

Exercice 9.55[théorème de Minkowski]. En utilisant la notion d'hyperplan d'appui, montrer que si K est un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, alors on a $K = \mathrm{conv}(e(K))$, *i.e.* K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.
Solution. On montre ce résultat par récurrence sur n. Il est clair que le résultat est vrai si $n = 1$. Supposons que le résultat est vrai pour tout compact convexe non vide de $\mathbb{R}^{n-1}$. Soit K un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$. D'après l'exercice 9.44, on a $K = \mathrm{conv}(e(K))$ si et seulement si $\mathrm{Fr}(K) \subset \mathrm{conv}(e(K))$. Soit $x \in \mathrm{Fr}(K)$. D'après l'exercice 9.50, il existe un hyperplan d'appui fermé H de K en x. Soient h une forme linéaire continue non nulle sur $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $h(x) = \alpha$, $H = \ker(h) + x = \{z \in \mathbb{R}^n \ ; \ h(z) = \alpha\}$ et $K \subset \{z \in \mathbb{R}^n \ ; \ h(z) \leq \alpha\}$. Alors $K \cap H$ est un compact convexe non vide. Montrons que l'on a $e(K \cap H) = e(K) \cap H$. Il est clair que l'on a $e(K) \cap H \subset e(K \cap H)$. Réciproquement, soient $z \in e(K \cap H) \subset H$ et $a, b \in K$ tels que $z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. On a $h(z) = \frac{1}{2}h(a) + \frac{1}{2}h(b)$, avec $h(z) = \alpha$ et $h(a) \leq \alpha$, $h(b) \leq \alpha$, donc $h(a) = h(b) = h(z) = \alpha$, d'où on a $a, b \in K \cap H$. Comme z est un point extrémal de $K \cap H$, on déduit que l'on a $a = b = z$. Par conséquent, on a $z \in e(K) \cap H$. Donc on a bien $e(K \cap H) = e(K) \cap H$. Soit $f \ : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \ker(h)$ une application linéaire bijective. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} g \ : & \mathbb{R}^{n-1} & \longrightarrow & H = \ker(h) + x \\ & z & \longmapsto & f(z) + x \end{array}$$

est une application affine et c'est un homéomorphisme. D'après l'exercice 9.38, pour toute partie convexe non vide A de $\mathbb{R}^{n-1}$, on a $e(g(A)) = g(e(A))$. Soit $K' = g^{-1}(K \cap H)$, alors K' est compact convexe non vide de $\mathbb{R}^{n-1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $K' = \mathrm{conv}(e(K'))$. Par conséquent, on a $K \cap H = \mathrm{conv}(e(K \cap H)) = \mathrm{conv}(e(K) \cap H) \subset \mathrm{conv}(e(K)$, d'où $x \in \mathrm{conv}(e(K)$. Ainsi, on a montré que l'on a $\mathrm{Fr}(K) \subset \mathrm{conv}(e(K))$. Donc on a $K = \mathrm{conv}(e(K))$.

Remarque 9.0.6. Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. On déduit de la proposition 9.5.2, du corollaire 9.5.4 et de l'exercice précédent que l'on a $\mathrm{conv}(K) = \mathrm{conv}(e(K))$.

Remarque 9.0.7. Soit K un sous-ensemble non vide, compact et convexe de $\mathbb{R}^n$. On déduit de l'exercice précédent et de la proposition 9.5.2 que tout point de K est une combinaison convexe d'au plus $n+1$ points extrémaux de K.

Exercice 9.56. Soit K un sous-ensemble non vide, compact et convexe d'un espace vectoriel topologique E. Montrer que si K est métrisable, alors l'ensemble des points extrémaux de K est une intersection dénombrable d'ensembles ouverts de K.
Solution. Soit d une distance sur K définissant la topologie induite par E sur K. Pour tout $n \geq 1$, soit $F_n = \big\{x \in K \ ;$ il existe $y, z \in K$ avec $x = \frac{y+z}{2}$ et $d(y,z) \geq \frac{1}{n}\big\}$. Montrons que F_n est fermé dans K. Soient $(x_k)_{k\geq 0}$ une suite dans F_n et $x \in K$ tels que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x$. Pour tout $k \geq 0$, soit $y_k, z_k \in K$ tels que $x_k = \frac{y_k+z_k}{2}$ et $d(y_k, z_k) \geq \frac{1}{n}$. Comme K est compact et métrisable, toute suite de K admet une sous-suite convergente dans K. Quitte à prendre des sous-suites, on peut supposer que $(y_k)_{k\geq 0}$ et $(z_k)_{k\geq 0}$ convergent respectivement vers $y, z \in K$. Par conséquent, on a $x = \frac{y+z}{2}$ et $d(y,z) \geq \frac{1}{n}$, d'où $x \in F_n$. Donc F_n est bien fermé dans K. Comme on a $e(K) = K \setminus \bigcup\limits_{n\geq 1} F_n = \bigcap\limits_{n\geq 1} K \setminus F_n$, alors $e(K)$ est une intersection dénombrable d'ensembles ouverts de K.

Exercice 9.57. Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application. Rappelons que f est dite affine s'il existe une application linéaire $g : E \longrightarrow F$ et s'il existe $b \in F$ tels que $f = g + b$. Il est clair que f est affine si et seulement si $f - f(0)$ est linéaire de E dans F. On suppose maintenant que E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) L'application f est affine.

(ii) Pour tout $x, y \in E$ et pour tout $t \in [0,\,1]$, on a $f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y)$.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $g : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $b \in F$ tels que $f = g + b$. Pour tous $x, y \in E$ et $t \in [0,\,1]$, on a :

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= g(tx + (1-t)y) + b \\ &= tg(x) + (1-t)g(y) + b \\ &= t(g(x) + b) + (1-t)(g(y) + b) \\ &= tf(x) + (1-t)f(y)\,. \end{aligned}$$

Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Par hypothèse, pour tout $x, y \in E$ et pour tout $t \in [0,\,1]$, on a $f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y)$. Soit $g = f - f(0)$. Il s'agit de montrer que g est une application linéaire de E dans F. Notons d'abord que $g(0) = 0$. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$f\big(\tfrac{x}{2}\big) = f\big(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}0\big) = \tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{1}{2}f(0)\,,$$
$$f\big(\tfrac{y}{2}\big) = f\big(\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}0\big) = \tfrac{1}{2}f(y) + \tfrac{1}{2}f(0)\,,$$
$$f\big(\tfrac{x+y}{2}\big) = f\big(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y\big) = \tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{1}{2}f(y)\,.$$

Donc on a $f\big(\frac{x+y}{2}\big) + f(0) = f\big(\frac{x}{2}\big) + f\big(\frac{y}{2}\big)$, d'où $f(x+y) + f(0) = f\big(\frac{2x+2y}{2}\big) + f(0) = f(x) + f(y)$. Par conséquent, on a :

$$g(x+y) = f(x+y) - f(0) = f(x+y) + f(0) - 2f(0) = f(x) - f(0) + f(y) - f(0) = g(x) + g(y)\,.$$

On en déduit par récurrence que pour tout $x \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g(nx) = ng(x)$. On a aussi $0 = g(0) = g(x + (-x)) = g(x) + g(-x)$, d'où $g(-x) = -g(x)$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $f(tx) = f(tx + (1-t)0) = tf(x) + (1-t)f(0)$, d'où $f(tx) - f(0) = t(f(x) - f(0))$, donc on a $g(tx) = tg(x)$. Soit $s \geq 0$, alors il existe $n \geq 1$ tel que $0 \leq \frac{s}{n} \leq 1$, d'où $g(sx) = g(\frac{s}{n}(nx)) = \frac{s}{n}g(nx) = n\frac{s}{n}g(x) = sg(x)$. Soit $s \leq 0$, on a $g(sx) = g(-s(-x)) = -sg(-x) = -s(-g(x)) = sg(x)$. Par conséquent, g est une application linéaire de E dans F.

Définition 9.0.3. Soient C une partie convexe d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est une application **convexe** si pour tout $x, y \in C$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$.

Exemple 9.0.2. Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application affine, alors f est une fonction convexe sur E.

Exemple 9.0.3. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé. Alors la fonction $x \longmapsto \|x\|$ est une fonction convexe sur E.

Exercice 9.58. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé. Pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = \|x\|^2$. Montrer que f est une fonction convexe sur E.
Solution. Pour tout $x, y \in E$ et $t \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= \|tx + (1-t)y\|^2 \\ &\leq \Big(t\|x\| + (1-t)\|y\|\Big)^2 \\ &= t^2\|x\|^2 + (1-t)^2\|y\|^2 + 2t(1-t)\|x\|\|y\| \,. \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$tf(x) + (1-t)f(y) - \Big(t^2\|x\|^2 + (1-t)^2\|y\|^2 + 2t(1-t)\|x\|\|y\|\Big) = t(1-t)\Big(\|x\| - \|y\|\Big)^2 \geq 0 \,.$$

D'où on a $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$. Autrement dit, f est une fonction convexe sur E.

Exercice 9.59. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé et A une partie non vide de E. Pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = d(x, A)$. Montrer que f est une fonction convexe sur E.
Solution. Soient $x, y \in E$ et $t \in [0, 1]$. Pour tout $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq \|tx + (1-t)y - a\| \\ &= \|tx + (1-t)y - ta - (1-t)a\| \\ &\leq t\|x - a\| + (1-t)\|y - a\| \,. \end{aligned}$$

D'où on a :

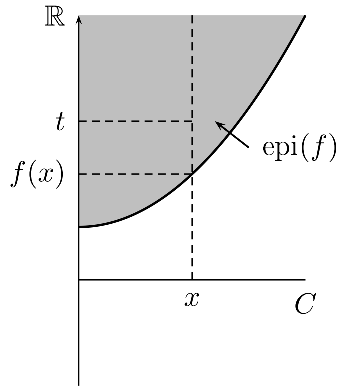
$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq \inf_{a \in A} t\|x - a\| + (1-t)\|y - a\| \\ &= t \inf_{a \in A} \|x - a\| + (1-t) \inf_{a \in A} \|y - a\| \\ &= tf(x) + (1-t)f(y) \,. \end{aligned}$$

Donc f est bien une fonction convexe sur E.

Exercice 9.60. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, C une partie convexe de E et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f est convexe.

(ii) L'ensemble $\text{epi}(f) = \big\{(x,t) \in C \times \mathbb{R} \;;\; f(x) \leq t\big\}$, appelé **épigraphe** de f, est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$.



(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute suite finie $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de C et pour toute suite finie $t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, on a $f\Big(\sum_{i=1}^n t_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons f convexe. Soient $(x,t_1),(y,t_2) \in \text{epi}(f)$ et $s \in]0,\,1[$. On a $s(x,t_1)+(1-s)(y,t_2) = (sx+(1-s)y, st_1+(1-s)t_2)$. Comme f est convexe, alors on a $f(sx+(1-s)y) \leq sf(x)+(1-s)f(y) \leq st_1+(1-s)t_2$, donc $(sx+(1-s)y, st_1+(1-s)t_2) \in \text{epi}(f)$. Par conséquent, $\text{epi}(f)$ est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$.

Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soient $x_1, \ldots, x_n \in C$ et $t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $(x_i, f(x_i)) \in \text{epi}(f)$. Par hypothèse, $\text{epi}(f)$ est un ensemble convexe, alors il résulte de la proposition 6.1.3 que l'on a $\sum_{i=1}^n t_i(x_i, f(x_i)) \in \text{epi}(f)$. Or on a $\Big(\sum_{i=1}^n t_i x_i, \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)\Big) = \sum_{i=1}^n t_i(x_i, f(x_i))$, d'où $f\Big(\sum_{i=1}^n t_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$.
Finalement, l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i) est triviale.

Remarque 9.0.8. Lorsque f est une application convexe définie sur un ensemble convexe $C \subset E$, alors les ensembles $\{x \in C \;;\; f(x) \leq t\}$ et $\{x \in C \;;\; f(x) < t\}$ sont convexes pour tout $t \in \mathbb{R}$. La réciproque n'est pas vraie. En effet, soient $E = \mathbb{R}$, $C = [0, +\infty[$ et pour tout $x \in C$, soit $f(x) = [x]$, la partie entière de x. Alors l'application f n'est pas convexe et pourtant les ensembles $\{x \in C \;;\; f(x) \leq t\}$ et $\{x \in C \;;\; f(x) < t\}$ sont convexes pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 9.61. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et C un ensemble convexe non vide de $E \times \mathbb{R}$. Soit $K = p(C)$ la projection de C sur E, K est un ensemble convexe non vide de E car p est une application linéaire. Pour tout $x \in K$, on pose $f(x) = \inf\big\{s \in \mathbb{R} \;;\; (x,s) \in C\big\}$. Montrer que f est une fonction convexe sur l'ensemble convexe K.
Solution. Pour tout $z \in K$, on pose $A_z = \big\{s \in \mathbb{R} \;;\; (z,s) \in C\big\}$. Soient $x, y \in K$ et $t \in [0,\,1]$. Soient $s, s' \in \mathbb{R}$ tels que $(x,s),(y,s') \in C$. Alors on a :

$$(tx+(1-t)y, ts+(1-t)s') = t(x,s)+(1-t)(y,s') \in C\,,$$

d'où :

$$f(tx + (1-t)y) \leq ts + (1-t)s'.$$

Donc on a :

$$f(tx + (1-t)y) \leq \inf_{s \in A_x} ts + (1-t)s' = tf(x) + (1-t)s'.$$

Par conséquent, on a :

$$f(tx + (1-t)y) \leq \inf_{s' \in A_y} tf(x) + (1-t)s' = tf(x) + (1-t)f(y).$$

Donc f est bien une fonction convexe.

Exercice 9.62. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application positivement homogène. Alors f est sous-additive si et seulement si f est convexe.
Solution. Supposons d'abord que f est sous-additive. Pour tout $x, y \in E$ et pour tout $t \in [0,\, 1]$, on a $f(tx + (1-t)y \leq f(tx) + f((1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y)$, donc f est convexe.
Réciproquement, supposons que f est convexe. Alors on a :

$$f(x+y) = f\big(2\big(\tfrac{x}{2} + \tfrac{y}{2}\big)\big) = 2f\big(\tfrac{x}{2} + \tfrac{y}{2}\big) \leq 2\big(\tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{1}{2}f(y)\big) = f(x) + f(y).$$

Donc f est sous-additive.

Exercice 9.63. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application positivement homogène. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f est une fonction convexe.

(ii) f est sous-additive.

(iii) L'ensemble $C_f = \{x \in E\ ;\ f(x) \leq 1\}$ est convexe.

Solution. L'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) résulte de l'exercice précédent. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est claire. Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons donc C_f convexe, et déduisons la sous-additivité de f. Soient $x, y \in E$ et $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $s > f(x)$ et $t > f(y)$, alors $\frac{x}{s}, \frac{y}{t} \in C_f$. Comme C_f est convexe, on en déduit que l'on a $z = \frac{s}{s+t}\frac{x}{s} + \frac{t}{s+t}\frac{y}{t} \in C_f$. Or $z = \frac{x+y}{s+t}$, donc on a $f(x+y) \leq s+t$. Par conséquent, on a $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Exercice 9.64. Soient I un ensemble non vide, $(C_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles convexes non vides d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et pour tout $i \in I$, soit $f_i : C_i \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Supposons que $C = \big\{x \in \bigcap_{i\in I} C_i\ ;\ \sup_{i\in I} f_i(x) < +\infty\big\} \neq \emptyset$. Montrer que C est un ensemble convexe de E et que l'application $x \longmapsto f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$ est une fonction convexe sur C.
Solution. Soient $x, y \in C$ et $t \in [0,\, 1]$. Pour tout $i \in I$, $tx + (1-t)y \in C_i$ et on a :

$$f_i(tx + (1-t)y) \leq tf_i(x) + (1-t)f_i(y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

d'où $\sup_{i\in I} f_i(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) < +\infty$. Donc $tx + (1-t)y \in C$ et on a $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$. Autrement dit, C est un ensemble convexe et f est une fonction convexe sur C.

Exercice 9.65. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A un ensemble convexe de E et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si A est absorbant et f non constante, alors f ne peut atteindre sa borne supérieure dans A au point 0.
2. Montrer que l'ensemble des points de A où f atteint sa borne inférieure dans A est convexe.

Solution. 1. On suppose A absorbant. Supposons que f atteint sa borne supérieure dans A au point 0. Autrement dit, pour tout $x \in A$, on a $f(x) \leq f(0)$. Soit $x \in A$. Alors il existe $s > 0$ tel que $-sx \in A$. Soit $t = \frac{s}{1+s}$, alors $t \in]0, 1[$ et on a $0 = (1-t)(-sx) + tx$. D'où on a $f(0) \leq (1-t)f(-sx) + tf(x) \leq (1-t)f(0) + tf(x)$, donc $tf(0) \leq tf(x)$. Par conséquent, pour tout $x \in A$, on a $f(x) = f(0)$. Donc f est constante.
2. Soient $t \in [0, 1]$ et $a, b \in A$ tels que $f(a) \leq f(x)$ et $f(b) \leq f(x)$ pour tout $x \in A$. Alors on a $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \leq tf(x) + (1-t)f(x) = f(x)$. Par conséquent, l'ensemble des points de A où f atteint sa borne inférieure dans A est convexe.

Exercice 9.66. Soient U un ouvert convexe non vide d'un espace vectoriel topologique E et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application convexe. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f est continue.

(ii) Il existe un point $a \in U$ tel que f soit continue en a.

(iii) Il existe un ouvert non vide V de U dans lequel f est majorée.

(iv) f est localement majorée. Autrement dit, pour tout $x \in U$, il existe un voisinage V_x de x dans E dans lequel f est majorée.

Solution. Les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) et (i) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (iii) sont triviales. Il reste à montrer l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons donc qu'il existe un ouvert non vide V de U dans lequel f est majorée. Soit $M > 0$ tel que pour tout $x \in V$, on ait $f(x) \leq M$. Soit $y \in V$. Montrons d'abord que f est continue en y. Soit W un voisinage équilibré de 0 dans E tel que $y + W \subset V$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $\eta \in]0, 1[$ tel que $\eta(M - f(y)) < \varepsilon$. Notons aussi que $y + \eta W$ est un voisinage de y dans E tel que $y + \eta W \subset y + W \subset V$. Soit $z \in y + \eta W$, alors $z = y + \eta a$, avec $a \in W$. On a $z = (1-\eta)y + \eta(y+a)$, d'où $f(z) \leq (1-\eta)f(y) + \eta f(y+a) \leq (1-\eta)f(y) + \eta M$. Donc on a $f(z) - f(y) \leq \eta(M - f(y))$. D'autre part, on a $y = \frac{1}{1+\eta}z + \left(1 - \frac{1}{1+\eta}\right)(y-a)$ et $y - a \in y + W \subset V$, d'où $f(y) \leq \frac{1}{1+\eta}f(z) + \left(1 - \frac{1}{1+\eta}\right)f(y-a) \leq \frac{1}{1+\eta}f(z) + \frac{M\eta}{1+\eta}$. Donc on a $-\eta(M - f(y)) \leq f(z) - f(y)$. Par conséquent, on a $|f(z) - f(y)| \leq \eta(M - f(y)) < \varepsilon$. Donc f est continue en y. Pour compléter la démonstration, il suffit de montrer que pour tout $x \in U$, il existe un voisinage V_x de x dans E tel que $V_x \subset U$ et dans lequel f est majorée. Soit $x \in U$. Comme U est un ouvert, alors il existe $t > 1$ tel que $tx + (1-t)y \in U$. Soit W' un voisinage équilibré de 0 dans E tel que $W' \subset W$ et $x + W' \subset U$, alors $x + \left(1 - \frac{1}{t}\right)W'$ est un voisinage de x dans E tel que $x + (1 - \frac{1}{t})W' \subset x + W' \subset U$ et $y + W' \subset y + W \subset V$. Montrons que f est majorée dans $x + (1 - \frac{1}{t})W'$. Soit $z = x + \left(1 - \frac{1}{t}\right)a$, avec $a \in W'$. On a $z = x - \left(1 - \frac{1}{t}\right)y + \left(1 - \frac{1}{t}\right)(y + a) = \frac{1}{t}\big(tx + (1-t)y\big) + \left(1 - \frac{1}{t}\right)(y + a)$, d'où on a :

$$f(z) \leq \frac{1}{t}f(tx + (1-t)y) + \left(1 - \frac{1}{t}\right)f(y+a) \leq \frac{1}{t}f(tx + (1-t)y) + \left(1 - \frac{1}{t}\right)M\,.$$

Donc f est bien majorée dans $x + (1 - \frac{1}{t})W'$.

Exercice 9.67. Soient U un ouvert convexe non vide d'un espace vectoriel topologique E et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application convexe. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f est continue.

(ii) Il existe un point $a \in U$ et il existe $t \in \mathbb{R}$ tels que $(a, t) \in \overset{\circ}{\mathrm{epi}}(f)$.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $a \in U$. D'après l'exercice précédent, il existe un voisinage ouvert V_a de a dans E tel que $V_a \subset U$ et tel que la restriction de f à V_a soit majorée par un réel s. Soient $\varepsilon > 0$ et $t = s + \varepsilon$. Alors on a $(a,t) \in V_a \times \left]s + \frac{\varepsilon}{2}, s + \frac{3\varepsilon}{2}\right[\subset \mathrm{epi}(f)$. Donc on a $(a,t) \in \overset{\circ}{\mathrm{epi}}(f)$.

Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soient $a \in U$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $(a,t) \in \overset{\circ}{\mathrm{epi}}(f)$, alors il existe un voisinage ouvert W de a dans E tel que $W \times \{t\} \subset \mathrm{epi}(f)$. Soit $V = W \cap U$, alors V est un voisinage ouvert de a dans E tel que $V \subset U$ et pour tout $x \in V$, on ait $f(x) \leq t$. Il résulte de l'exercice précédent que f est continue.

Exercice 9.68. Soient U un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application convexe. Montrer que f est continue.

Solution. Sans perdre de généralité, on peut supposer $0 \in U$. Comme U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, alors on a $\mathrm{Vect}(U) = \mathbb{R}^n$, voir proposition 9.1.4. Soient $a_1, \ldots, a_n \in U$ tel que $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ soit une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Soit $a_0 = 0$, on a $\mathrm{conv}(A \cup \{0\}) = \left\{\sum_{i=0}^{n} t_i a_i \ ; \ t_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\right\}$. Soit $M = \max_{0 \leq i \leq n} f(a_i)$, alors pour tout $z = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i \in \mathrm{conv}(A \cup \{0\})$, on a $f(z) \leq \sum_{i=0}^{n} t_i f(a_i) \leq \sum_{i=0}^{n} t_i M = M$. Donc f est majorée dans $\mathrm{conv}(A \cup \{0\})$. Comme $\mathrm{conv}(A \cup \{0\})$ est d'intérieure non vide, voir remarque 9.6.2, il résulte de l'exercice 9.66 que f est continue.

Exercice 9.69. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé.

1. Soient $r > 0$ et $g : B(0, r) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que pour tout $x \in B(0, r)$, on ait $|g(x)| \leq 1$. Montrer que pour tout $x, y \in B\big(0, \frac{r}{2}\big)$, on a $|g(x) - g(y)| \leq \frac{5}{r}\|x - y\|$.
2. En déduire que si U est un ouvert non vide E et si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe continue, alors f est localement lipschitzienne.

Solution. 1. Soient $x, y \in B\big(0, \frac{r}{2}\big)$. Supposons que l'on a $g(y) - g(x) > \frac{5}{r}\|x - y\|$. Soit $z = y + \dfrac{r(y-x)}{2\|x-y\|}$. Alors $z \in B(0, r)$ et on a $y = \dfrac{1}{2\|x-y\| + r}\big(rx + 2\|x-y\|z\big)$. Comme g est convexe, alors on a $g(y) \leq \dfrac{1}{2\|x-y\| + r}\big(rg(x) + 2\|x-y\|g(z)\big)$. On en déduit que l'on a $2\|x-y\|g(y) + r(g(y) - g(x)) \leq 2\|x-y\|g(z)$. Par conséquent, on a $-2\|x-y\| + 5\|x-y\| \leq 2\|x-y\|g(z)$, d'où $\frac{3}{2} \leq g(z)$, ce qui est impossible. Donc on a bien $g(y) - g(x) \leq \frac{5}{r}\|x-y\|$. On en déduit que pour tout $x, y \in B(0, \frac{r}{2})$, on a $|g(x) - g(y)| \leq \frac{5}{r}\|x-y\|$.

2. Soit $x_0 \in U$. Comme f est continue en x_0, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset U$ et tel que pour tout $x \in B(x_0, r)$, on ait $|f(x) - f(x_0)| \leq 1$. On a $B(x_0, r) = x_0 + B(0, r)$, et pour tout $z \in B(0, r)$, on pose $g(z) = f(x_0 + z) - f(x_0)$. Alors g est une fonction convexe et pour tout $z \in B(0, r)$, on a $|g(z)| \leq 1$. D'après 1, pour tout $a, b \in B\big(0, \frac{r}{2}\big)$, on a $|g(a) - g(b)| \leq \frac{5}{r}\|a - b\|$, d'où $|f(x_0 + a) - f(x_0 + b)| \leq \frac{5}{r}\|a - b\| = \frac{5}{r}\|x_0 + a - (x_0 + b)\|$. Or on a $B\big(x_0, \frac{r}{2}\big) = x_0 + B\big(0, \frac{r}{2}\big)$. Par conséquent, pour tout $x, y \in B\big(x_0, \frac{r}{2}\big)$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{5}{r}\|x - y\|$. Donc f est bien localement lipschitzienne.

Exercice 9.70. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé.

1. Soit C un convexe non vide de E et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et lipschitzienne de rapport K. Pour tout $x \in E$, on pose $F(x) = \inf\big\{f(z) + K\|z - x\| \ ; \ z \in C\big\}$. Montrer que

F est une fonction convexe de E dans $\mathbb{R}$ et lipschitzienne de rapport K telle que pour tout $x \in C$, on ait $F(x) = f(x)$.

2. Soit U un ouvert non vide de $(E, \| \ \|)$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. Montrer que pour tout $a \in U$, il existe $r > 0$ et il existe $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue tels que $B(a,r) \subset U$ et $h_{|B(a,r)} = g_{|B(a,r)}$.

Solution. 1. Soient $a \in C$ et $x \in E$. Pour tout $z \in C$, on a $f(a) - f(z) \leq K\|a - z\| \leq K\|a - x\| + K\|x - z\|$, d'où $f(a) - K\|a - x\| \leq f(z) + K\|z - x\|$. Donc F est bien définie. Il est clair que pour tout $x \in C$, on a $F(x) = f(x)$. Pour tout $x, y \in E$, on a $f(z) + K\|z - x\| \leq f(z) + K\|z - y\| + K\|y - x\|$, d'où $F(x) \leq F(y) + K\|y - x\|$. On en déduit que pour tout $x, y \in E$, on a $|F(x) - F(y)| \leq K\|y - x\|$. Donc F est lipschitzienne de rapport K. Il reste à montrer que F est convexe. Soient $x, y \in E$ et $t \in [0, 1]$. Pour tout $z \in C$, on a :

$$\begin{aligned} f(z) + K\|z - (tx + (1-t)y)\| &= tf(z) + (1-t)f(z) + K\|t(z - x) + (1-t)(z - y)\| \\ &\leq tf(z) + (1-t)f(z) + tK\|z - x\| + (1-t)K\|z - y\| \\ &= t(f(z) + K\|z - x\|) + (1-t)(f(z) + K\|z - y\|) . \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $F(tx + (1-t)y) \leq tF(x) + (1-t)F(y)$. Donc F est bien une fonction convexe.
2. Il suffit de combiner 1 et l'exercice précédent.

Exercice 9.71. Soient C une partie convexe fermée d'un $\mathbb{R}$-espace localement convexe E et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une application convexe et semi-continue inférieurement.

1. Montrer que $\mathrm{epi}(f)$ est une partie convexe et fermée de $E \times \mathbb{R}$.
2. Soit φ une forme linéaire continue sur $E \times \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ et $v \in E^*$ tels que pour tout $(x, t) \in E \times \mathbb{R}$, on ait $\varphi(x, t) = v(x) + bt$.
3. Soient $x \in C$ et $\varepsilon > 0$. En appliquant le théorème 9.4.1 à $\mathrm{epi}(f)$ et $(x, f(x) - \varepsilon)$, montrer qu'il existe $u \in E^*$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) - \varepsilon \leq u(x) + a$ et pour tout $y \in C$, $u(y) + a \leq f(y)$.
4. En déduire qu'il existe une famille $(g_i)_{i \in I}$ de fonctions affines continues de E dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in C$, on ait $f(x) = \sup\limits_{i \in I} g_i(x)$.

Solution. 1. Comme f est une fonction convexe, il résulte de l'exercice 9.60 que $\mathrm{epi}(f)$ est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$. Comme f est semi-continue inférieurement, il résulte de l'exercice 1.44 que $\mathrm{epi}(f)$ est fermée dans $C \times \mathbb{R}$. Or $C \times \mathbb{R}$ est fermé dans $E \times \mathbb{R}$, donc $\mathrm{epi}(f)$ est fermée dans $E \times \mathbb{R}$.
2. Soit φ une forme linéaire continue sur $E \times \mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$, on pose $v(x) = \varphi((x, 0))$, et soit $b = \varphi((0, 1))$, alors $v \in E^*$, $b \in \mathbb{R}$ et pour tout $(x, t) \in E \times \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi(x, t) = \varphi((x, 0)) + t\varphi((0, 1)) = v(x) + bt .$$

3. Comme $\mathrm{epi}(f)$ est une partie convexe et fermée de $E \times \mathbb{R}$ telle que $(x, f(x) - \varepsilon) \notin \mathrm{epi}(f)$, d'après le théorème 9.4.1, il existe une forme linéaire continue φ sur $E \times \mathbb{R}$ telle que pour tout $y \in C$, on ait $\varphi((y, f(y))) < \varphi((x, f(x) - \varepsilon))$. D'après 2, il existe alors $b \in \mathbb{R}$ et $v \in E^*$ tels que pour tout $y \in C$, on ait $v(y) + bf(y) < v(x) + (f(x) - \varepsilon)b$. Donc on a $bf(x) < (f(x) - \varepsilon)b$, d'où $b < 0$. Par conséquent, pour tout $y \in C$, on a :

$$\tfrac{-1}{b} v(y) - f(y) < \tfrac{-1}{b}\big(v(x) + (f(x) - \varepsilon)b\big) .$$

Soient $u = \frac{-1}{b}v$ et $a = \frac{1}{b}\big(v(x) + (f(x) - \varepsilon)b\big)$, alors $u \in E^*$, $a \in \mathbb{R}$, $f(x) - \varepsilon = u(x) + a$ et pour tout $y \in C$, on a $u(y) + a \leq f(y)$.
4. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions affines continues g de E dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in C$, on ait $g(x) \leq f(x)$. D'après 3, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et donc pour tout $x \in C$, on a $\sup_{g\in\mathcal{A}} g(x) \leq f(x)$. Soit $x \in C$. D'après 3, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $g_n \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) - \frac{1}{n} \leq g_n(x) \leq \sup_{g\in\mathcal{A}} g(x)$. On fait tendre n vers l'infini, on obtient $f(x) \leq \sup_{g\in\mathcal{A}} g(x)$. Par conséquent, pour tout $x \in C$, on a $f(x) = \sup_{g\in\mathcal{A}} g(x)$.

Exercice 9.72. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f est une fonction convexe.

(ii) Pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a :

$$(z - x)f(y) \leq (z - y)f(x) + (y - x)f(z)\,,$$

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}, \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \quad \text{et} \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}\,.$$

(iii) Pour tout $a \in I$, l'application

$$t \longmapsto \varphi(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

(iv) Pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$.

(v) Pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix}$$

est positif.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x < y < z$. Soit $t = \dfrac{y - x}{z - x}$, alors $t \in]0, 1[$, $1 - t = \dfrac{z - y}{z - x}$ et on a $y = (1 - t)x + tz$. Comme f est convexe, alors on a $f(y) \leq (1 - t)f(x) + tf(z)$, d'où :

$$(z - x)f(y) \leq (z - y)f(x) + (y - x)f(z)\,.$$

On a : $f(y) - f(z) \leq (1 - t)f(x) + tf(z) - f(z) = (1 - t)(f(x) - f(z))$, d'où :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}\,.$$

On a aussi $f(y) - f(x) \leq t(f(z) - f(x))$, d'où :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \quad \text{et} \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}\,.$$

Les implications (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) sont triviales.
Montrons l'équivalence (iv) $\Longleftrightarrow$ (v). Soient $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$. On a :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & y & z-y \\ f(x) & f(y) & f(z)-f(y) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-y \\ f(x) & f(y)-f(x) & f(z)-f(y) \end{vmatrix} \\
&= (y-x)(f(z)-f(y)) - (z-y)(f(y)-f(x)) \\
&= (y-x)(z-y)\left(\frac{f(z)-f(y)}{z-y} - \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a bien l'équivalence (iv) $\Longleftrightarrow$ (v).
Montrons l'implication (iv) $\Longrightarrow$ (i). Soient $x, z \in I$ tels que $x < z$. Soient $t \in]0,1[$ et $y = tx + (1-t)z$. Comme on a $x < y < z$, alors par hypothèse, on a $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$. On en déduit que l'on a :

$$f(y) \leq \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z).$$

Or on a $\dfrac{z-y}{z-x} = t$ et $\dfrac{y-x}{z-x} = 1-t$, d'où $f(y) \leq tf(x) + (1-t)f(z)$. Donc f est une fonction convexe.

Exercice 9.73. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Montrer que si f est une fonction convexe, alors pour tout $a \in \overset{\circ}{I}$, les dérivées à gauche $f_g'(a)$ et à droite $f_d'(a)$ existent dans $\mathbb{R}$ et on a $f_g'(a) \leq f_d'(a)$.
2. Montrer que si f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est convexe si et seulement si f' est croissante sur $\overset{\circ}{I}$.
3. Montrer que si f est continue sur I et deux fois dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est convexe si et seulement si f'' est positive sur $\overset{\circ}{I}$.

Solution. 1. Soit $a \in \overset{\circ}{I}$. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on pose $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Soient $s, t \in I$ tels que $s < a < t$. D'après l'exercice précédent, la fonction $s \longmapsto \varphi(s)$ est croissante sur $]-\infty, a[\cap I$ et majorée par $\varphi(t)$, alors $f_g'(a) = \lim\limits_{\substack{s \to a \\ s<a}} \varphi(s)$ existe dans $\mathbb{R}$ et on a $f_g'(a) \leq \varphi(t)$. De même, la fonction $t \longmapsto \varphi(t)$ est croissante sur $I \cap]a, +\infty[$ et minorée par $f_g'(a)$, donc $f_d'(a) = \lim\limits_{\substack{t \to a \\ t>a}} \varphi(t)$ existe dans $\mathbb{R}$ et on a $f_g'(a) \leq f_d'(a)$.
2. On suppose que f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Supposons d'abord que f est convexe. Soient $a, b \in \overset{\circ}{I}$ tels que $a < b$. On a $f'(a) = f_g'(a) \leq f_d'(a) \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f_g'(b) \leq f_d'(b) = f'(b)$.
Donc f' est croissante sur $\overset{\circ}{I}$.
Réciproquement, supposons que f' est croissante sur $\overset{\circ}{I}$. Soient $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$.

Comme f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, d'après le théorème des accroissements finis il existe $a \in]x, y[$ et $b \in]y, z[$ tels que $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(a)$ et $\dfrac{f(z)-f(y)}{z-y} = f'(b)$. Or f' est croissante, donc on a $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$. Il résulte de l'exercice précédent que f est une fonction convexe.
3. Ceci résulte de 2 et du théorème des accroissements finis.

Chapitre 10

TOPOLOGIES FAIBLE ET $*$-FAIBLE

Proposition (**Schur**). Dans l'espace de Banach $(\ell^1, \|\ \|_1)$ une suite est convergente pour la norme si et seulement si elle est faiblement convergente.

Démonstration. Soit $(\xi_k)_{k\geq 0}$ une suite dans $(\ell^1, \|\ \|_1)$, qui converge faiblement vers un élément $\xi \in \ell^1$. Il s'agit de montrer que l'on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \|\xi_k - \xi\|_1 = 0$. Quitte à remplacer ξ_k par $\xi_k - \xi$, on peut supposer $\xi = 0$. Notons que pour tout $k \geq 0$, on a $\xi_k = (x_{k,n})_{n\geq 0}$, avec $x_{k,n} \in \mathbb{K}$. Rappelons, voir proposition 7.4.2, que $(\xi_k)_{k\geq 0}$ converge faiblement vers 0 si et seulement si pour tout élément $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_{k,n}y_n = 0$. Par conséquent, on peut aussi supposer que pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, on a $x_{k,n} \in \mathbb{R}$. On déduit aussi que pour tout $n \geq 0$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{k,n} = 0$. Donc, pour tout $p \geq 0$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{p} |x_{k,n}| = 0$. On raisonne par l'absurde en supposant que $(\xi_k)_{k\geq 0}$ converge faiblement vers 0, mais $\big(\|\xi_k\|_1\big)_{k\geq 0}$ ne converge pas vers 0. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \geq 0$, il existe $k' \geq k$ tel que $\|\xi_{k'}\|_1 \geq \varepsilon$. En multipliant par $\frac{2}{\varepsilon}$, puis en extrayant une sous-suite, on peut supposer que pour tout $k \geq 0$, on a $\|\xi_k\|_1 > 1$. Alors, on va construire par récurrence une sous-suite $(\xi_{\varphi(k)})_{k\geq 0}$ de $(\xi_k)_{k\geq 0}$ et une sous-suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 0}$ telles que $n_0 = 0$ et pour tout $k \geq 0$, on ait :

$$|z_{k,n_k+1}| + \cdots + |z_{k,n_{k+1}}| > \frac{3}{4}\big\|\xi_{\varphi(k)}\big\|_1 \tag{10.1}$$

où $\xi_{\varphi(k)} = (z_{k,n})_{n\geq 0}$. En effet, soit $n_0 = 0$. Comme on a $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{k,0} = 0$, alors il existe un $r_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq r_0$, on ait $|x_{k,0}| < \frac{1}{4} < \frac{1}{4}\|\xi_k\|_1$. D'où, pour tout $k \geq r_0$, on a $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|x_{k,j}| > \frac{3}{4}\|\xi_k\|_1$. On pose $\varphi(0) = r_0$ et on choisit n_1 tel que $\sum\limits_{j=1}^{n_1}|x_{r_0,j}| > \frac{3}{4}\|\xi_{r_0}\|_1$. Supposons que l'on a construit $n_0, \ldots, n_p$ et $\varphi(0), \ldots, \varphi(p-1)$ vérifiant l'équation (10.1). Comme on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{j=0}^{n_p} |x_{k,j}| = 0$, alors il existe $r_p > \varphi(p-1)$ tel que pour tout $k \geq r_p$, on ait $\sum\limits_{j=0}^{n_p}|x_{k,j}| < \frac{1}{4} < \frac{1}{4}\|\xi_k\|_1$. D'où, pour tout $k \geq r_p$, on a $\sum\limits_{j>n_p}^{\infty} |x_{k,j}| > \frac{3}{4}\|\xi_k\|_1$. On pose $\varphi(p) = r_p$ et on choisit n_{p+1} tel que

$\displaystyle\sum_{j>n_p}^{n_{p+1}} |x_{r_p,j}| > \frac{3}{4}\|\xi_{r_p}\|_1$. Soit $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, défini par $y_0 = \mathrm{sgn}(z_{0,0})$ et $y_n = \mathrm{sgn}(z_{k,n})$ si $n_k < n \leq n_{k+1}$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} z_{k,n} y_n &\geq \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} |x_{k,n}| - \sum_{n=0}^{n_k} |x_{k,n}| - \sum_{n=n_{k+1}+1}^{\infty} |x_{k,n}| \\
&= 2\Big(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} |x_{k,n}|\Big) - \|\xi_{\varphi(k)}\|_1 \\
&> \tfrac{3}{2}\|\xi_{\varphi(k)}\|_1 - \|\xi_{\varphi(k)}\|_1 \\
&= \tfrac{1}{2}\|\xi_{\varphi(k)}\|_1 \\
&> \tfrac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que la suite $(\xi_{\varphi(k)})_{k\geq 0}$ converge faiblement vers 0. Par conséquent, $\big(\|\xi_k\|_1\big)_{k\geq 0}$ converge bien vers 0. ■

Proposition. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique tel que E^* sépare les points de E. Alors E^* muni de la topologie $*$-faible est métrisable si et seulement si E admet une base algébrique finie ou dénombrable.

Démonstration. Si E admet une base algébrique finie, il résulte de la proposition 10.1.2 que E^* muni de la topologie $*$-faible est normable, donc métrisable. Supposons maintenant que E admet une base algébrique dénombrable $(e_n)_{n\geq 0}$. La famille des parties finies et non vides de $\mathbb{N}$ est dénombrable. Soit $(I_n)_{n\geq 0}$ une telle famille. Pour tout $m \geq 0$, soit :

$$V_{n,m} = \Big\{f \in E^* \ ; \ |f(e_k)| < \tfrac{1}{m+1}\,, \text{ pour tout } k \in I_n\Big\}\,.$$

Alors $\big(V_{n,m}\big)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille dénombrable de voisinages ouverts de 0 dans E^* muni de la topologie $*$-faible. Pour montrer que E^* est métrisable, d'après le théorème 9.1.1, il suffit de montrer que $\big(V_{n,m}\big)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est une base locale de E^*. Soient $x_1, \ldots, x_p \in E$, $\varepsilon > 0$, et $V = \big\{f \in E^* \ ; \ |f(x_i)| < \varepsilon, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq p\big\}$. Comme $(e_n)_{n\geq 0}$ est base algébrique de E, alors il existe $n \geq 0$ tel que $x_1, \ldots, x_p \in \mathrm{Vect}(\{e_k \ ; \ k \in I_n\})$. Pour tout i, avec $1 \leq i \leq p$, il existe $\alpha_{i,k} \in \mathbb{K}$ tels que $x_i = \displaystyle\sum_{k\in I_n} \alpha_{i,k} e_k$. Soit $m \geq 0$ tel que $\displaystyle\sum_{k\in I_n} \frac{1}{m+1}|\alpha_{i,k}| < \varepsilon$, pour tout $1 \leq i \leq p$. Alors on a $V_{n,m} \subset V$. Par conséquent, $\big(V_{n,m}\big)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est une base locale de E^*. Donc E^* muni de la topologie $*$-faible est métrisable.

Réciproquement, supposons que E^* muni de la topologie $*$-faible est métrisable. Soit $\big(W_n\big)_{n\geq 0}$ une base locale dénombrable de E^*. Pour tout $n \geq 0$, il existe un sous-ensemble fini A_n de E et $\varepsilon_n > 0$ tels que $V_n = \big\{f \in E^* \ ; \ |f(x)| < \varepsilon_n\,, \text{ pour tout } x \in A_n\big\} \subset W_n$. Soit $A = \bigcup\limits_{n\geq 0} A_n$. Alors A est un sous-ensemble au plus dénombrable de E. Montrons que l'on a $\mathrm{Vect}(A) = E$. Soit $y \in E$, alors $V = \{f \in E^* \ ; \ |f(y)| < 1\}$ est un voisinage de 0 dans E^* muni de la topologie $*$-faible. Donc il existe $n \geq 0$ tel que $V_n \subset V$. Pour tout $x \in E$, soit $J(x) : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$ la forme linéaire définie par $J(x)(f) = f(x)$, pour tout $f \in E^*$. Ainsi, on a :

$$V_n = \big\{f \in E^* \ ; \ |J(x)(f)| < \varepsilon_n\,, \text{ pour tout } x \in A_n\big\} \subset V = \big\{f \in E^* \ ; \ |J(y)(f)| < 1\big\}\,.$$

D'après le lemme 7.8.2, il existe $\alpha_x \in \mathbb{K}$ tels que $J(y) = \sum_{x\in A_n} \alpha_x J(x)$. Autrement dit, pour tout $f \in E^*$, on a $f(y) = f\Big(\sum_{x\in A_n} \alpha_x x\Big)$. Comme E^* sépare les points de E, alors on a $y = \sum_{x\in A_n} \alpha_x x$, donc $y \in \mathrm{Vect}(A)$, d'où on a $\mathrm{Vect}(A) = E$. ■

Proposition Soient X un espace compact et $E = C(X)$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$. Alors on a $e(B_{E^*}) = \big\{\lambda\delta_x\ ;\ x \in X \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}\,,\ \text{avec } |\lambda| = 1\big\}$.

Démonstration. Rappelons d'abord que δ_x est la forme linéaire continue sur E définie par $\delta_x(f) = f(x)$, pour tout $f \in E$. Soit $A = \big\{\lambda\delta_x\ ;\ x \in X \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}\,,\ \text{avec } |\lambda| = 1\big\}$. Comme on a $A \subset B_{E^*}$ et B_{E^*} est convexe et $*$-faiblement compact, alors on a $\overline{\mathrm{conv}}(A) \subset B_{E^*}$, l'adhérence est pour la topologie $*$-faible. Montrons d'abord que l'on a $\overline{\mathrm{conv}}(A) = B_{E^*}$. Supposons que $\overline{\mathrm{conv}}(A) \neq B_{E^*}$ et soit $\mu \in B_{E^*}$ tel que $\mu \notin \overline{\mathrm{conv}}(A)$. D'après les théorèmes 9.4.1 et 10.1.1, il existe $f \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in X$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| = 1$, on ait $\mathrm{Re}(\lambda f(x)) < \alpha < \beta < \mathrm{Re}(\mu(f))$. On en déduit que pour tout $x \in X$, on a $|f(x)| < \alpha < \beta < \mathrm{Re}(\mu(f)) \leq \|f\|_\infty$. Par conséquent, on a $\|f\|_\infty < \alpha < \beta < \|f\|_\infty$, d'où la contradiction. Donc on a bien $\overline{\mathrm{conv}}(A) = B_{E^*}$. Puisque l'application $(\lambda, x) \longmapsto \lambda\delta_x$ est continue de $\mathbb{K}\times X$ dans E^*, muni de la topologie $*$-faible, on en déduit que A est $*$-faiblement compact. On déduit du théorème 9.5.4 que l'on a $e(B_{E^*}) \subset A$. Pour avoir le résultat, il reste à montrer que pour tout $x \in X$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| = 1$, $\lambda\delta_x$ est un point extrémal de B_{E^*}. Soient $x \in X$, $t \in]0, 1[$ et $\mu_1, \mu_2 \in B_{E^*}$ tels que $\delta_x = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$. Soit $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1 sur X, alors on a $1 = \delta_x(\mathbf{1}) = t\mu_1(\mathbf{1}) + (1-t)\mu_2(\mathbf{1})$. Or on a $|\mu_1(\mathbf{1})| \leq 1$ et $|\mu_2(\mathbf{1})| \leq 1$, d'où $\mu_1(\mathbf{1}) = 1$ et $\mu_2(\mathbf{1}) = 1$, voir exercice 9.32. Soit $f \in B_E$ telle que $f \geq 0$ sur X et $f(x) = 0$. Alors on a $\|\mathbf{1} - f\|_\infty = 1$ et $1 = \delta_x(\mathbf{1} - f) = t\mu_1(\mathbf{1} - f) + (1-t)\mu_2(\mathbf{1} - f)$, d'où on a $\mu_1(\mathbf{1} - f) = 1$ et $\mu_2(\mathbf{1} - f) = 1$. Donc on a $\mu_1(f) = 0$ et $\mu_2(f) = 0$. Soit $f \in B_E$ telle que $f(x) = 0$, alors on a $f = g - h + i(p - q)$, avec $g, h, p, q \in B_E$, $g \geq 0$, $h \geq 0$, $p \geq 0$ et $q \geq 0$ sur X et $g(x) = h(x) = p(x) = q(x) = 0$. Il résulte de ce qui précède que l'on a $\mu_1(g) = \mu_1(h) = \mu_1(p) = \mu_1(q) = 0$ et $\mu_2(g) = \mu_2(h) = \mu_2(p) = \mu_2(q) = 0$. Donc on a $\mu_1(f) = \mu_2(f) = 0$. Autrement dit, on a $\ker(\delta_x) \subset \ker(\mu_1)$ et $\ker(\delta_x) \subset \ker(\mu_2)$. Par conséquent, il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $\mu_1 = a\delta_x$ et $\mu_2 = b\delta_x$. D'où on a $\delta_x = ta\delta_x + (1-t)b\delta_x$. Donc on a $1 = ta + (1-t)b$. Comme on a $\mu_1, \mu_2 \in B_{E^*}$, alors $|a| \leq 1$ et $|b| \leq 1$, on en déduit $a = b = 1$. Par conséquent, on a $\mu_1 = \mu_2 = \delta_x$. Ainsi, δ_x est un point extrémal de B_{E^*}. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| = 1$. Vérifions que $\lambda\delta_x$ est aussi un point extrémal de B_{E^*}. Soient $t \in]0, 1[$ et $\mu_1, \mu_2 \in B_{E^*}$ tels que $\lambda\delta_x = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$. Alors on a $\delta_x = t\frac{\mu_1}{\lambda} + (1-t)\frac{\mu_2}{\lambda}$, avec $\frac{\mu_1}{\lambda}, \frac{\mu_2}{\lambda} \in B_{E^*}$. Il résulte du raisonnement ci-dessus que l'on a alors $\delta_x = \frac{\mu_1}{\lambda} = \frac{\mu_2}{\lambda}$, d'où $\lambda\delta_x = \mu_1 = \mu_2$. Donc $\lambda\delta_x$ est bien un point extrémal de B_{E^*}. ■

Lemme. Soient $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace normé et $x \in E \setminus \{0\}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) La norme $\|\ \|$ est Gâteaux différentiable en x.

(ii) Pour tout $h \in E$, $\lim_{t\to 0} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t}$ existe dans $\mathbb{R}$.

(ii) Pour tout $h \in E$, $\lim_{t\to 0} \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t} = 0$.

Démonstration. L'application (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte immédiatement de la définition.
L'application (ii) $\Longrightarrow$ (iii) résulte de l'égalité suivante :

$$\frac{\|x + th\| - \|x\|}{t} - \frac{\|x - th\| - \|x\|}{-t} = \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t}\,. \tag{10.2}$$

Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $h \in E$. Puisque l'application suivante

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \|x+th\| \end{array}$$

est convexe, alors :

$$G_x^-(h) = \lim_{t\to 0^-} \frac{\|x+th\|-\|x\|}{t} \quad \text{et} \quad G_x^+(h) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\|x+th\|-\|x\|}{t}$$

existent dans $\mathbb{R}$ et on a $G_x^-(h) \leq G_x^+(h)$, voir exercice 9.73. Par hypothèse, on a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+th\|+\|x-th\|-2\|x\|}{t} = 0\,.$$

Il résulte de l'égalité (10.2) que l'on a $G_x^-(h) = G_x^+(h)$. Autrement dit, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\|x+th\|-\|x\|}{t}$ existe dans $\mathbb{R}$. Pour tout $h \in E$, soit $G_x(h) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\|x+th\|-\|x\|}{t}$. Il s'agit de montrer que G_x est une forme linéaire continue sur E. On a :

$$G_x(-h) = \lim_{t\to 0} \frac{\|x-th\|-\|x\|}{t} = -\lim_{t\to 0} \frac{\|x-th\|-\|x\|}{-t} = -G_x(h)\,.$$

On a $G_x(0) = 0$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a :

$$G_x(\lambda h) = \lim_{t\to 0} \frac{\|x+t\lambda h\|-\|x\|}{t} = \lambda \lim_{t\to 0} \frac{\|x+t\lambda h\|-\|x\|}{\lambda} = \lambda G_x(h)\,.$$

Pour tout $h_1, h_2 \in E$ et pour tout $s \in [0,\,1]$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \|x+t(sh_1+(1-s)h_2)\|-\|x\| & = & \|s(x+th_1)+(1-s)(x+th_2)\| - s\|x\| - (1-s)\|x\| \\ & \leq & s\|x+th_1\| + (1-s)\|x+th_2\| - s\|x\| - (1-s)\|x\| \\ & = & s\big(\|x+th_1\|-\|x\|\big) + (1-s)\big(\|x+th_2\|-\|x\|\big)\,. \end{array}$$

Par conséquent, on a $G_x(sh_1+(1-s)h_2) \leq sG_x(h_1)+(1-s)G_x(h_2)$. On déduit de ce qui précède que l'on a $G_x(h_1+h_2) = 2G_x(\frac{1}{2}h_1+\frac{1}{2}h_2) \leq G_x(h_1)+G_x(h_2)$. On a aussi $G_x(h_1)+G_x(h_2) = -G_x(-h_1)-G_x(-h_2) \leq -G_x(-h_1-h_2) = G_x(h_1+h_2)$. Donc on a $G_x(h_1+h_2) = G_x(h_1)+G_x(h_2)$. Par conséquent, G_x est une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur E. On a :

$$\left|\frac{\|x+th\|-\|x\|}{t}\right| = \frac{\big|\|x+th\|-\|x\|\big|}{|t|} \leq \frac{\|x+th-x\|}{|t|} = \|h\|\,,$$

d'où $|G_x(h)| \leq \|h\|$, donc G_x est continue. De plus, on a $G_x(x) = \|x\|$, d'où $\|G_x\| = 1$. ∎

Théorème. Soient $(E,\, \|\ \|)$ un espace normé et $x \in E\setminus\{0\}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) La norme $\|\ \|$ est Gâteaux différentiable en x, quand on considère $(E,\, \|\ \|)$ comme un $\mathbb{R}$-espace normé.

(ii) Pour toutes suites $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ dans S_{E^*} vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \|x\|$, la suite $(f_n - g_n)_{n\geq 0}$ converge $*$-faiblement vers 0 dans E^*.

(iii) Il existe une unique $f \in E^*$ telle $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$.

Démonstration. Rappelons d'abord que si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans E^*, alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge $*$-faiblement vers 0 dans E^* si et seulement si pour tout $h \in E$, la suite $(f_n(h))_{n\geq 0}$ converge vers 0 dans $\mathbb{K}$. D'autre part, d'après la proposition 7.4.5, on peut considérer dans ce théorème que $(E, \| \|)$ est un $\mathbb{R}$-espace normé.
Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ deux suites dans S_{E^*} vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \|x\|$. Soit $h \in E$. Comme la norme $\| \|$ est Gâteaux différentiable en x, d'après le lemme précédent, on a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+th\| + \|x-th\| - 2\|x\|}{t} = 0\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $|t| \leq \eta$, on ait :

$$\left| \frac{\|x+th\| + \|x-th\| - 2\|x\|}{t} \right| < \varepsilon\,.$$

Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \|x\|$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\max\big(|\,\|x\| - f_n(x)|, |\,\|x\| - g_n(x)|\big) < \eta\varepsilon$. On a :

$$\begin{aligned}
f_n(h) - g_n(h) &= \frac{f_n(\eta h) - g_n(\eta h)}{\eta} \\
&= \frac{f_n(x+\eta h) + g_n(x-\eta h) - f_n(x) - g_n(x)}{\eta} \\
&= \frac{f_n(x+\eta h) + g_n(x-\eta h) - 2\|x\| + \|x\| - f_n(x) + \|x\| - g_n(x)}{\eta} \\
&\leq \frac{\|x+\eta h\| + \|x-\eta h\| - 2\|x\|}{\eta} + \frac{\|x\| - f_n(x) + \|x\| - g_n(x)}{\eta} \\
&< 3\varepsilon\,, \quad \text{pour tout} \quad n \geq N\,.
\end{aligned}$$

De même, on a $-(f_n(h) - g_n(h)) = f_n(-h) - g_n(-h) < 3\varepsilon$, pour tout $n \geq N$. Par conséquent, pour tout $n \geq N$, on a $|f_n(h) - g_n(h)| < 3\varepsilon$. Autrement dit, la suite $(f_n(h) - g_n(h))_{n\geq 0}$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons que l'on n'a pas (i), *i.e.* la norme $\| \|$ n'est pas Gâteaux différentiable en x. Alors il existe $h \in E$ et il existe $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $\eta > 0$, il existe $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < |t| \leq \eta$ et on ait $\dfrac{\|x+th\| + \|x-th\| - 2\|x\|}{t} \geq \varepsilon$. Par conséquent, il existe une suite $(t_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$ et pour tout $n \geq 0$, on ait $\dfrac{\|x+t_nh\| + \|x-t_nh\| - 2\|x\|}{t_n} \geq \varepsilon$.
D'après le théorème de Hahn-Banach, corollaire 7.7.1, pour tout $n \geq 0$, il existe $f_n, g_n \in S_{E^*}$ telles que $f_n(x+t_nh) = \|x+t_nh\|$ et $g_n(x-t_nh) = \|x-t_nh\|$. On a $|f_n(t_nh)| \leq \|t_nh\| = |t_n|\,\|h\|$ et $|g_n(t_nh)| \leq \|t_nh\| = |t_n|\,\|h\|$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t_nh) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t_nh) = 0$. On a $f_n(x) = f_n(x+t_nh) - f_n(t_nh) = \|x+t_nh\| - f_n(t_nh)$ et $g_n(x) = g_n(x-t_nh) + g_n(t_nh) = \|x-t_nh\| + g_n(t_nh)$,

donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \|x\|$. On a :

$$\begin{aligned} f_n(h) - g_n(h) &= \frac{f_n(t_n h) - g_n(t_n h)}{t_n} \\ &= \frac{f_n(x + t_n h) + g_n(x - t_n h) - f_n(x) - g_n(x)}{t_n} \\ &= \frac{\|x + t_n h\| + \|x - t_n h\| - f_n(x) - g_n(x)}{t_n} \\ &\geq \frac{\|x + t_n h\| + \|x - t_n h\| - 2\|x\|}{t_n} \geq \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Donc la suite $(f_n - g_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas $*$-faiblement vers 0 dans E^*. Donc on n'a pas (ii).
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). D'après le théorème de Hahn-Banach, corollaire 7.7.1, il existe $f \in E^*$ telle $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$. Supposons qu'il existe $g \in E^*$ telle $\|g\| = 1$ et $g(x) = \|x\|$. D'après (ii), la suite constante $(f - g)$ converge $*$-faiblement vers 0 dans E^*. Autrement dit, pour tout $h \in E$, on a $f(h) - g(h) = 0$. D'où on a $f = g$.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ deux suites dans S_{E^*} vérifiant $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \|x\|$. Si $(f_n - g_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas $*$-faiblement vers 0 dans E^*, il existe $y \in E$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $|f_n(y) - g_n(y)| \geq \varepsilon$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que pour tout $n \geq 0$, on a $|f_n(y) - g_n(y)| \geq \varepsilon$. D'après le théorème d'Alaoglu, B_{E^*} munie de la topologie $*$-faible est compacte, donc il existe $f, g \in B_{E^*}$ tels que (f, g) soit une valeur d'adhérence de la suite $\big((f_n, g_n)\big)_{n\geq 0}$ dans $B_{E^*} \times B_{E^*}$, voir proposition 3.1.5. Or, pour tout $z \in E$, l'application $(h, p) \longmapsto (h(z), p(z))$ est continue de $E^* \times E^*$ dans $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$, E^* étant muni de la topologie $*$-faible, donc pour tout $z \in E$, $(f(z), g(z))$ est une valeur d'adhérence de la suite $\big((f_n(z), g_n(z))\big)_{n\geq 0}$. On en déduit que l'on a $f(x) = \|x\|$ et $g(x) = \|x\|$ et que $f(y) - g(y)$ est une valeur d'adhérence de la suite $\big((f_n(y) - g_n(y))\big)_{n\geq 0}$, d'où on a $|f(y) - g(y)| \geq \varepsilon$. Donc on a $\|f\| = \|g\| = 1$, $f \neq g$ et $f(x) = g(x) = \|x\|$, ce qui contredit (iii). Par conséquent, $(f_n - g_n)_{n\geq 0}$ converge $*$-faiblement vers 0 dans E^*. ■

Proposition (**Clarkson**). Pour tout $1 < p < +\infty$, l'espace de Banach $(\ell^p, \|\ \|_p)$ est uniformément convexe.

Démonstration. Puisque la fonction $t \longmapsto t^p$ est strictement convexe sur $]0, +\infty[$, alors pour tous $s > 0$, $t > 0$ tels que $s \neq t$, on a $\left(\frac{s+t}{2}\right)^p < \frac{s^p + t^p}{2}$. Après quelques vérifications, on en déduit que pour tous $x, y \in \mathbb{K}$ tels que $x \neq y$, on a $\left|\frac{x+y}{2}\right|^p < \frac{|x|^p + |y|^p}{2}$. Notez aussi que pour tous x, $y \in \mathbb{K}$, on a $\left|\frac{x+y}{2}\right|^p \leq \frac{|x|^p + |y|^p}{2}$. Soient $\varepsilon > 0$ et :

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{K}^2\ ;\ \frac{|x|^p + |y|^p}{2} = 1 \text{ et } \left|\frac{x-y}{2}\right|^p \geq \varepsilon\right\}.$$

Alors C est un compact. Soit $\rho = \inf\left\{\frac{|x|^p + |y|^p}{2} - \left|\frac{x+y}{2}\right|^p\ ;\ (x, y) \in C\right\}$, alors $\rho > 0$. Par homogénéité, on en déduit que pour tous x, $y \in \mathbb{K}$ vérifiant $\left|\frac{x-y}{2}\right|^p \geq \varepsilon\,\frac{|x|^p + |y|^p}{2}$, on a alors

$\rho\,\dfrac{|x|^p+|y|^p}{2} \leq \dfrac{|x|^p+|y|^p}{2} - \left|\dfrac{x+y}{2}\right|^p$. Pour montrer que $(\ell^p, \|\ \|_p)$ est uniformément convexe, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \ell^p$ vérifiant $\|x\|_p \leq 1$, $\|y\|_p \leq 1$ et $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|_p^p > 1-\delta$, on ait $\left\|\dfrac{x-y}{2}\right\|_p^p < 2\varepsilon$. Soient $\varepsilon > 0$ et $\rho > 0$ défini comme ci-dessus, alors il existe $\delta > 0$ tel que $\delta < \rho\varepsilon$. Soient $x, y \in \ell^p$ tels que $\|x\|_p \leq 1$ et $\|y\|_p \leq 1$ et soit $A = \left\{n \geq 0\ ;\ \left|\dfrac{x_n-y_n}{2}\right|^p \geq \varepsilon\,\dfrac{|x_n|^p+|y_n|^p}{2}\right\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^p &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{x_n-y_n}{2}\right|^p \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A}\left|\frac{x_n-y_n}{2}\right|^p + \sum_{n\in A}\left|\frac{x_n-y_n}{2}\right|^p \\
&\leq \varepsilon\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A}\frac{|x_n|^p+|y_n|^p}{2} + \sum_{n\in A}\frac{|x_n|^p+|y_n|^p}{2} \\
&\leq \varepsilon + \tfrac{1}{\rho}\sum_{n\in A}\left[\frac{|x_n|^p+|y_n|^p}{2} - \left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|^p\right] \\
&\leq \varepsilon + \tfrac{1}{\rho}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{|x_n|^p+|y_n|^p}{2} - \left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|^p\right] \\
&\leq \varepsilon + \tfrac{1}{\rho}\left[1 - \sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|^p\right] \\
&= \varepsilon + \tfrac{1}{\rho}\left[1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p\right] \\
&< \varepsilon + \tfrac{1}{\rho}\delta \\
&< 2\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $(\ell^p, \|\ \|_p)$ est bien uniformément convexe. ■

Proposition. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) L'espace $(E, \|\ \|)$ est uniformément convexe.

(ii) Pour toutes suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ dans S_E vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|\dfrac{x_n+y_n}{2}\right\| = 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n-y_n\| = 0$.

(iii) Pour toutes suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ dans $(E, \|\ \|)$ telles que $(x_n)_{n\geq 0}$ soit bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n+y_n\|^2\right] = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n-y_n\| = 0$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites dans S_E telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|\dfrac{x_n+y_n}{2}\right\| = 1$. Si la suite $\big(\|x_n-y_n\|\big)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 0, dans $\mathbb{R}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \geq 0$, il existe $n \geq N$ tel que $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$. Par hypothèse, $(E, \| \,\|)$ est uniformément convexe, donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $N \geq 0$, il existe $n \geq N$ tel que $\left\|\dfrac{x_n + y_n}{2}\right\| \leq 1 - \delta$. Par conséquent, la suite $\left(\left\|\dfrac{x_n + y_n}{2}\right\|\right)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 1, d'où la contradiction. Donc on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites dans $(E, \| \,\|)$ telles que $(x_n)_{n\geq 0}$ soit bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n + y_n\|^2\right] = 0$. Puisque l'on a :

$$\left[2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n + y_n\|^2\right] \geq 2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \left(\|x_n\| + \|y_n\|\right)^2 = \left(\|x_n\| - \|y_n\|\right)^2 \geq 0\,.$$

On en déduit que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\|x_n\| - \|y_n\|\right] = 0$. Ainsi, la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est bornée. Puisque la suite $\left(\|x_n - y_n\|\right)_{n\geq 0}$ est bornée, pour montrer que $\left(\|x_n - y_n\|\right)_{n\geq 0}$ converge vers 0, d'après la proposition 3.1.5, il suffit de montrer que 0 est l'unique valeur d'adhérence de la suite $\left(\|x_n - y_n\|\right)_{n\geq 0}$. Soient $t \geq 0$ et $k \longmapsto n_k$ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ tels que $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_{n_k} - y_{n_k}\| = t$. Comme on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \left[\|x_{n_k}\| - \|y_{n_k}\|\right] = 0$, quitte à prendre des sous-suites, on peut considérer que l'on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_{n_k}\| = \lim\limits_{k\to+\infty} \|y_{n_k}\| = a \geq 0$. Si $a = 0$, alors on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_{n_k} - y_{n_k}\| = 0$, d'où $t = 0$. Si $a > 0$, alors on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_{n_k} + y_{n_k}\| = 2a$, car on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \left[2\|x_{n_k}\|^2 + 2\|y_{n_k}\|^2 - \|x_{n_k} + y_{n_k}\|^2\right] = 0$. On a $\dfrac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}, \dfrac{y_{n_k}}{\|y_{n_k}\|} \in S_E$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|\dfrac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} + \dfrac{y_{n_k}}{\|y_{n_k}\|}\right\| = 2$, d'après (ii), on a alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|\dfrac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} - \dfrac{y_{n_k}}{\|y_{n_k}\|}\right\| = 0$. D'où on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_{n_k} - y_{n_k}\| = 0$, donc $t = 0$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons que $(E, \| \,\|)$ n'est pas uniformément convexe. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n,\, y_n \in S_E$ vérifiant $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$ et $0 \leq 1 - \left\|\dfrac{x_n + y_n}{2}\right\| \leq \frac{1}{n+1}$. Or on a :

$$0 \leq \left(\|x_n\| - \|y_n\|\right)^2 \leq \left[2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n + y_n\|^2\right] = 4 - \|x_n + y_n\|^2\,,$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n + y_n\|^2\right] = 0$, mais pour tout $n \geq 0$, on a $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$. Ce qui contredit (iii). ■

Théorème (**Milman-Pettis**). Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

Démonstration. Soit $(E, \| \,\|)$ un espace de Banach uniformément convexe et soit $\eta \in E^{**}$ tel que $\|\eta\| = 1$. Soit $J : E \longrightarrow E^{**}$ l'application canonique. Il s'agit de montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $J(x) = \eta$. D'après le théorème de Goldstine, il existe une famille filtrante croissante $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans B_E telle que $(J(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers η pour la topologie $*$-faible. On vérifie facilement, comme dans la proposition 10.2.1, propriété 4, que $\left(\|J(x_\lambda)\|\right)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $1 = \|\eta\|$. D'où $\left(\|x_\lambda\|\right)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers 1. Par conséquent, $\left(J\left(\dfrac{x_\lambda}{\|x_\lambda\|}\right)\right)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers η pour la topologie $*$-faible. Donc on peut supposer que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans S_E. Soit $I = \Lambda \times \Lambda$, et on décrète que pour $(\lambda_1, \mu_1),\, (\lambda_2, \mu_2) \in I$, on a $(\lambda_1, \mu_1) \leq (\lambda_2, \mu_2)$ si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ et $\mu_1 \leq \mu_2$. Alors $\left(J\left(\dfrac{x_\lambda + x_\mu}{2}\right)\right)_{(\lambda,\mu)\in I}$ est une famille filtrante croissante qui converge vers η pour la topologie $*$-faible. Comme on a $\|\eta\| = 1$ et pour tout $(\lambda, \mu) \in I$, on a $\left\|J\left(\dfrac{x_\lambda + x_\mu}{2}\right)\right\| \leq 1$, on vérifie facilement, comme dans la proposition 10.2.1, propriété 4, que la famille filtrante croissante $\left(\left\|J\left(\dfrac{x_\lambda + x_\mu}{2}\right)\right\|\right)_{(\lambda,\mu)\in I}$

converge vers $1 = \|\eta\|$. D'où la famille filtrante croissante $\left(\left\|\frac{x_\lambda + x_\mu}{2}\right\|\right)_{(\lambda,\mu)\in I}$ converge vers 1. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(E, \|\ \|)$ est uniformément convexe, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in S_E$ vérifiant $1 - \delta < \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$, on ait $\|x - y\| < \varepsilon$. Alors il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que pour tout $\lambda,\ \mu \in \Lambda$ vérifiant $\lambda_0 \le \lambda$ et $\lambda_0 \le \mu$, on ait $1 - \delta < \left\|\frac{x_\lambda + x_\mu}{2}\right\|$. Donc, pour tout $\lambda,\ \mu \in \Lambda$ vérifiant $\lambda_0 \le \lambda$ et $\lambda_0 \le \mu$, on a $\|x_\lambda - x_\mu\| < \varepsilon$. Par conséquent, la famille filtrante croissante $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est de Cauchy dans $(E, \|\ \|)$, donc elle converge, pour la norme, vers un élément $x \in E$. D'où la famille filtrante croissante $(J(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $J(x)$ pour la norme dans E^{**}. Donc la famille filtrante croissante $(J(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $J(x)$ pour la topologie $*$-faible. Comme la limite est unique, on en déduit que $\eta = J(x)$. Par conséquent, $(E, \|\ \|)$ est réflexif. ■

Supplément d'exercices

Exercice 10.20. Soit $E = C([0,\ 1])$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,\ 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de la norme $\|\ \|_\infty$. Pour tout $t \in [0,\ 1]$, soit $\delta_t \in E^*$ définie par $\delta_t(f) = f(t)$, et soit $\Lambda \in E^*$ définie par $\Lambda(f) = \int_0^1 f(t)\, dt$, pour tout $f \in E$. Dans tout cet exercice, on munit E^* de la topologie $*$-faible.

1. Montrer que l'application $t \longmapsto \delta_t$ est continue de $[0,\ 1]$ dans E^*. En déduire que $K = \{\delta_t\ ;\ 0 \le t \le 1\}$ est compact.
2. Montrer que $\Lambda \in \overline{\mathrm{conv}}(K)$.
3. Montrer que si $T \in \overline{\mathrm{conv}}(K)$, alors pour tout $f \in E$ vérifiant $f(t) \ge 0$, pour tout $t \in [0,\ 1]$, on a $T(f) \ge 0$.
4. Soit $M = \mathrm{Vect}(\Lambda, K)$, *i.e.* le sous-espace vectoriel de E^* formé de toutes les combinaisons linéaires finies $c_0\Lambda + c_1\delta_{t_1} + \cdots + c_n\delta_{t_n}$, où $c_i \in \mathbb{K}$. Notez que $\mathrm{conv}(K) \subset M$ et que $M \cap \overline{\mathrm{conv}}(K)$ est l'enveloppe convexe fermé de K dans M. Montrer que Λ est un point extrémal de $M \cap \overline{\mathrm{conv}}(K)$, et pourtant Λ n'appartient pas à K, voir théorème 9.5.4.

Solution. 1. D'après l'exercice 10.17, l'application $t \longmapsto \delta_t$ est continue de $[0,\ 1]$ dans E^*. Comme $[0,\ 1]$ est compact, alors $K = \{\delta_t\ ;\ 0 \le t \le 1\}$ est compact.
2. Pour tout $f \in E$, on a :

$$\Lambda(f) = \int_0^1 f(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(\tfrac{k}{n}\big) = \lim_{n\to+\infty} \Big(\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\frac{k}{n}}\Big)(f)\,.$$

Or on a $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{\frac{k}{n}} \in \mathrm{conv}(K)$, d'où $\Lambda \in \overline{\mathrm{conv}}(K)$.
3. Soit $P = \big\{T \in E^*\ ;\ T(f) \ge 0 \text{ si } f \in E \text{ et } f \ge 0\big\}$. Il est clair que que P est convexe et fermé dans E^* pour la topologie $*$-faible. Comme on a $K \subset P$, on en déduit que l'on a $\overline{\mathrm{conv}}(K) \subset P$.
4. Soient $T, S \in M \cap \overline{\mathrm{conv}}(K)$ tels que $\Lambda = \frac{1}{2}(T + S)$. Soient $c_0, \ldots, c_n,\ d_0, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$ et $t_1, \ldots, t_n,\ s_1, \ldots, s_n \in [0,\ 1]$ tels que $T = c_0\Lambda + c_1\delta_{t_1} + \cdots + c_n\delta_{t_n}$ et $S = d_0\Lambda + d_1\delta_{s_1} + \cdots + d_n\delta_{s_n}$. On peut bien sûr supposer que les t_i sont deux à deux distingues et que les s_i sont aussi deux à deux distingues. Comme $T, S \in \overline{\mathrm{conv}}(K) \subset P$, alors pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on a $c_i \ge 0$ et $d_i \ge 0$. On a $(1 - \frac{1}{2}c_0 - \frac{1}{2}d_0)\Lambda = \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{2}\delta_{t_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{2}\delta_{s_i}$. On peut construire facilement une fonction affine positive non nulle f sur $[0,\ 1]$ telle que $\Lambda(f) \ne 0$ et telle que $f(t_i) = f(s_i) = 0$, pour tout

$i \in \{1, \ldots, n\}$. Par conséquent, on a $1 - \frac{1}{2}c_0 - \frac{1}{2}d_0 = 0$, d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{2}\delta_{t_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{2}\delta_{s_i} = 0$. Comme pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $c_i \geq 0$ et $d_i \geq 0$, alors pour tout i, on a $c_i = d_i = 0$. On a aussi $1 = \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}d_0$, avec $c_0 \geq 0$ et $d_0 \geq 0$, d'où $c_0 = d_0 = 1$. Par conséquent, on a $T = S = \Lambda$. Donc Λ est bien un point extrémal de $M \cap \overline{\mathrm{conv}}(K)$.

Exercice 10.21. Soient X un espace topologique et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

1. Montrer que si f est semi-continue inférieurement, alors pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X convergeant vers x, on a $f(x) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.
2. Montrer que si tout point de X possède une base dénombrable de voisinages et si pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X convergeant vers x, on a $f(x) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$, alors f est semi-continue inférieurement.

Solution. 1. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un voisinage V de x dans X tel que pour tout $y \in V$, on ait $f(x) - \varepsilon < f(y)$. Comme $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n \in V$. Donc, pour tout $n \geq N$, on a $f(x) - \varepsilon < f(x_n)$, d'où $f(x) - \varepsilon \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$. Comme ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que l'on a $f(x) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.
2. Supposons que f n'est pas semi-continue inférieurement. Alors il existe $x \in X$ et il existe $\varepsilon > 0$ tels que pour tout voisinage V de x dans X, il existe $y \in V$ tel que $f(y) \leq f(x) - \varepsilon$. Soit $(V_n)_{n\geq 0}$ une base dénombrable de voisinages de x dans X telle que $V_{n+1} \subset V_n$, pour tout $n \geq 0$. Alors pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n \in V_n$ tel que $f(x_n) \leq f(x) - \varepsilon$. Alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x dans X et on a $\liminf\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \leq f(x) - \varepsilon < f(x)$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc f est bien semi-continue inférieurement.

Exercice 10.22. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé.

1. Montrer que l'application $x \longmapsto \|x\|$ est semi-continue inférieurement pour la topologie faible sur E.
2. En déduire que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans E convergeant faiblement vers un $x \in E$, alors on a $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|x_n\|$.
3. Donner un exemple d'un espace normé, où l'application $x \longmapsto \|x\|$ n'est pas faiblement continue.

Solution. 1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E\ ;\ \|x\| \leq t\}$ est convexe et fermé pour la norme, donc il est faiblement fermé. Par conséquent, l'application $x \longmapsto \|x\|$ est semi-continue inférieurement pour la topologie faible sur E.
2. Ceci résulte de 1 et de l'exercice précédent. Notons que l'on a montré cette propriété dans la proposition 10.2.1.
3. Il suffit de prendre $E = \ell^p$, avec $p \in]1, +\infty[$, voir remarque 10.2.1.

Exercice 10.23. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach séparable. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dense dans S_E. Pour tout $f \in E^*$, on pose $T(f) = \left(\frac{f(x_n)}{2^n}\right)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que T est une application linéaire continue de E^* dans ℓ^2.
2. Montrer que T est aussi continue de E^*, muni de la topologie $*$-faible, dans ℓ^2 muni de la topologie faible.

Solution. 1. Il est clair que T est une application linéaire de E^* dans ℓ^2. Pour tout $f \in E^*$, on a :

$$\|T(f)\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f(x_n)|^2}{4^n}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|f\|^2}{4^n}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\|f\|.$$

Donc T est continue de E^*, muni de la norme, dans ℓ^2.
2. Soit $y = (t_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$. Montrons que l'application

$$\begin{array}{rccc} T_y : & E^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n f(x_n)}{2^n} \end{array}$$

est continue de E^*, muni de la topologie $*$-faible dans $\mathbb{K}$. Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{t_n x_n}{2^n}$ est absolument convergente, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{t_n x_n}{2^n}$ est convergente dans E et on a $T_y(f) = f\Big(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n x_n}{2^n}\Big)$. Par conséquent, T_y est continue de E^*, muni de la topologie $*$-faible dans $\mathbb{K}$. On déduit de la proposition 7.4.4 que T est continue de E^*, muni de la topologie $*$-faible, dans ℓ^2 muni de la topologie faible.

Exercice 10.24. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) B_E est séparable pour la topologie faible.

(ii) S_E est séparable pour la topologie faible.

(iii) E est séparable pour la topologie faible.

(iv) E est séparable pour la norme.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit A un ensemble au plus dénombrable et dense dans B_E. Soit $x \in S_E$. Alors il existe une famille filtrante croissante $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans A convergente vers x pour la topologie faible. D'après l'exercice 10.22, l'application $y \longmapsto \|y\|$ est semi-continue inférieurement pour la topologie faible sur E. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x dans E pour la topologie faible tel que pour tout $y \in V$, on ait $\|x\| - \varepsilon < \|y\|$. Soit $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, on ait $x_\lambda \in V$. Alors pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, on a $1 - \varepsilon < \|x_\lambda\| \leq 1$, d'où $\displaystyle\lim_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\| = 1$. Par conséquent, on a $\displaystyle\lim_{\lambda\in\Lambda} \frac{x_\lambda}{\|x_\lambda\|} = x$, pour la topologie faible. On en déduit que l'ensemble $\left\{\dfrac{y}{\|y\|}\ ;\ y \in A \setminus \{0\}\right\}$ est au plus dénombrable et dense dans S_E, donc S_E est séparable pour la topologie faible.
L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) résulte de l'exercice 10.11.
Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $x \in E$ tel que $\|x\| > 1$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{x}{n} \in B_E$. Comme A est dense dans B_E pour la topologie faible, alors il existe une famille filtrante croissante $(z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans A convergente vers $\frac{x}{n}$ pour la topologie faible, d'où $(nz_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers x pour la topologie faible. Par conséquent, l'ensemble $\{ny\ ;\ n \geq 1 \text{ et } y \in A\}$ est dénombrable et dense dans E pour la topologie faible, donc E est séparable pour la topologie faible.
L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (iv) résulte de la proposition 10.2.6.
Montrons l'implication (iv) $\Longrightarrow$ (i). Comme E est séparable pour la norme, alors B_E est séparable pour la norme car tout sous-espace d'un espace métrique séparable est séparable, voir remarque 2.4.1. Par conséquent, B_E est séparable pour la topologie faible car la topologie faible est moins fine que la topologie associée à la norme.

Remarque 10.0.9. Soit $(E, \| \|)$ un espace normé. On fait le même raisonnement comme dans l'exercice précédent et on montre que B_{E^*} est séparable pour la topologie $*$-faible si et seulement si S_{E^*} est séparable pour la topologie $*$-faible.

Exercice 10.25. Montrer que $(\ell^\infty)^*$ est séparable pour la topologie $*$-faible.
Solution. Comme l'espace normé $(\ell^1, \| \|_1)$ est séparable, on déduit de la proposition 10.2.6 que ℓ^1 muni de la topologie faible est séparable. On déduit alors de la remarque 10.1.5 et du théorème de Goldstine, corollaire 10.2.1, que $(\ell^1)^{**}$ est séparable pour la topologie $*$-faible. Comme $(\ell^1)^*$ est isométriquement isomorphe à ℓ^∞, voir proposition 7.4.2, alors $(\ell^\infty)^*$ est séparable pour la topologie $*$-faible.

Exercice 10.26. Montrer que tout sous-ensemble faiblement compact de ℓ^∞ est séparable pour la norme.
Solution. Soit C un sous-ensemble faiblement compact de ℓ^∞. D'après l'exercice précédent et la proposition 10.2.7, C est métrisable pour la topologie faible. Donc C est séparable pour la topologie faible. Soit A un ensemble au plus dénombrable et faiblement dense dans C. D'après le théorème 10.1.2, on a $\overline{\text{conv}(A)}^w = \overline{\text{conv}(A)}^{\| \|_\infty}$. Or $\overline{\text{conv}(A)}^{\| \|_\infty}$ est séparable pour la norme et on a $C \subset \overline{\text{conv}(A)}^w$, donc C est séparable pour la norme.

Exercice 10.27. Soit $f : \ell^1 = c_0^* \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$.
Il est clair que f est une forme linéaire continue quand on munit ℓ^1 de la norme. Montrer que f n'est pas continue quand on munit $\ell^1 = c_0^*$ de la topologie $*$-faible.
Solution. Pour tout $n \geq 0$, soit $T_n \in c_0^*$ défini par $T_n(y) = y_n$, pour tout $y = (y_n)_{n\geq 0} \in c_0$. Alors la suite $(T_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 pour la topologie $*$-faible, mais on a $f(T_n) = 1$, pour tout $n \geq 0$. Donc f n'est pas continue quand on munit $\ell^1 = c_0^*$ de la topologie $*$-faible.

Exercice 10.28. Soit $(E, \| \|)$ un espace de Banach réflexif.

1. Montrer que pour tout $f \in B_{E^*}$, il existe un point extrémal x de B_E tel que $\|f\| = f(x)$.
2. Montrer que si E est de dimension infinie, alors $e(B_E)$ n'est pas dénombrable.

Solution. 1. D'après les propositions 6.3.1 et 7.4.5, on a $\|f\| = \sup\limits_{x\in B_E} |\text{Re}(f(x))| = \sup\limits_{x\in B_E} \text{Re}(f(x))$.
Comme $(E, \| \|)$ est de Banach réflexif, alors B_E est compact pour la topologie faible. D'après le corollaire 9.5.3, il existe alors un point extrémal x de B_E tel que $\|f\| = \text{Re}(f(x))$. D'autre part, on a $|f(x)| \leq \|f\|$, d'où $\text{Im}(f(x)) = 0$ et $\text{Re}(f(x)) = f(x)$. Donc on a bien $\|f\| = f(x)$.
2. Notons d'abord que d'après la proposition 10.2.8, $e(B_E)$ est un ensemble infini. Raisonnons par l'absurde et supposons que $e(B_E)$ est dénombrable, *i.e.* $e(B_E) = \{x_n \ ; \ n \geq 0\}$. Pour tout $n \geq 0$, soit $F_n = \{f \in B_{E^*} \ ; \ \|f\| = f(x_n)\}$. D'après 1, on a $B_{E^*} = \bigcup\limits_{n\geq 0} F_n$. Comme B_{E^*} est compact pour la topologie $*$-faible et comme pour tout $n \geq 0$, F_n est fermé pour la topologie $*$-faible, on déduit du théorème de Baire, théorème 3.4.4, qu'il existe $n \geq 0$ tel que l'intérieur de F_n dans B_{E^*} n'est pas vide. On en déduit qu'il existe $g \in F_n$ tel que $\|g\| < 1$ et qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $z_1, \ldots, z_p \in E$ tels que pour tout $f \in B_{E^*}$ vérifiant $|f(z_i) - g(z_i)| < \varepsilon$, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on ait $f \in F_n$. Soit $N = \bigcap\limits_{i=1}^{p} \ker(J(z_i)) \cap \ker(J(x_n)) = \{f \in E^* \ f(x_n) = f(z_1) = \cdots = f(z_p) = 0\}$, N est un sous-espace vectoriel de E^*. Comme E est de dimension infinie et donc E^* est de dimension infinie, il résulte du lemme 7.8.2 que N est non nul. Par conséquent, il existe $f \in g + N$ tel que $\|f\| = 1$, d'où on a $1 = \|f\| = f(x_n) = g(x_n) = \|g\| < 1$, ce qui est impossible. Donc

l'ensemble $e(B_E)$ n'est pas dénombrable.

Exercice 10.29. Soient A un sous-ensemble non vide convexe, borné et fermé dans un espace de Banach $(E, \| \|)$ et $J : E \longrightarrow E^{**}$ l'application canonique. Montrer que A est compact pour la topologie faible si et seulement si $J(A)$ et $\overline{J(A)}^{w^*}$ ont les mêmes points extrémaux dans E^{**}.
Solution. Si A est compact pour la topologie faible, alors $J(A)$ est compact pour la topologie $*$-faible sur E^{**}, d'où on a $J(A) = \overline{J(A)}^{w^*}$, donc $J(A)$ et $\overline{J(A)}^{w^*}$ ont évidemment les mêmes points extrémaux dans E^{**}.
Pour montrer la réciproque, on suppose que A n'est pas compact pour la topologie faible. D'après le théorème 10.2.8, il existe $f \in E^*$ tel que pour tout $a \in A$, on ait $\mathrm{Re}(f(a)) \neq \sup\limits_{x\in A} \mathrm{Re}(f(x))$.
Comme A est borné, alors $\overline{J(A)}^{w^*}$ est compact pour la topologie $*$-faible. On applique le corollaire 9.5.3 au compact $\overline{J(A)}^{w^*}$ et à la forme linéaire continue $\Lambda \longmapsto \Lambda(f)$ sur E^{**}, on trouve un point extrémal Λ_0 de $\overline{J(A)}^{w^*}$ tel que :

$$\mathrm{Re}(\Lambda_0(f)) = \sup_{\Lambda \in \overline{J(A)}^{w^*}} \mathrm{Re}(\Lambda(f)) = \sup_{x\in A} \mathrm{Re}(J(x)(f)) = \sup_{x\in A} \mathrm{Re}(f(x))\,.$$

Par conséquent, $\Lambda_0 \notin J(A)$. Donc $J(A)$ et $\overline{J(A)}^{w^*}$ n'ont pas les mêmes points extrémaux dans E^{**}.

Exercice 10.30. Soient $(E, \| \|)$ un espace normé, $(F, \| \|')$ un espace normé strictement convexe et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue et injective. Pour tout $x \in E$, on pose $\|x\|_r = \|x\| + \|T(x)\|'$. Montrer que $\| \|_r$ est une norme équivalente à la norme $\| \|$ et que $(E, \| \|_r)$ est strictement convexe.
Solution. Il est clair que $\| \|_r$ est une norme sur E. D'autre part, pour tout $x \in E$, on a $\|x\| \leq \|x\|_r \leq (1 + \|T\|)\,\|x\|$. Donc les deux normes $\| \|$ et $\| \|_r$ sont équivalentes. Soient $x, y \in E$ tels que (x, y) soit libre. Comme T est injective, alors $(T(x), T(y))$ est libre dans F. Puisque $(F, \| \|')$ est strictement convexe, il résulte de la proposition 10.3.1 que l'on a $\|T(x) + T(y)\|' < \|T(x)\|' + \|T(y)\|'$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_r &= \|x+y\| + \|T(x) + T(y)\|' \\
&\leq \|x\| + \|y\| + \|T(x) + T(y)\|' \\
&< \|x\| + \|y\| + \|T(x)\|' + \|T(y)\|' \\
&= \|x\|_r + \|y\|_r\,.
\end{aligned}$$

On déduit de la proposition 10.3.1 que $(E, \| \|_r)$ est strictement convexe.

Exercice 10.31. Soit $E = C([0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\| = \sqrt{\|f\|_\infty^2 + \|f\|_2^2}$, où $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$ et $\|f\|_2 = \left(\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$. Montrer que $\| \|$ est une norme sur E telle $(E, \| \|)$ soit strictement convexe, mais $(E, \| \|)$ ne soit pas uniformément convexe.
Solution. On vérifie facilement que $\| \|$ est une norme sur E. Montrons que $(E, \| \|)$ est strictement convexe. Soient $f, g \in E$ tels que (f, g) soit une famille libre. Comme $(E, \| \|_2)$ est

un espace préhilbertien, alors $(E, \| \ \|_2)$ est strictement convexe, voir exercice 8.4, d'où on a $\|f+g\|_2 < \|f\|_2 + \|g\|_2$. Donc on a :

$$\begin{aligned}
\|f+g\| &= \sqrt{\|f+g\|_\infty^2 + \|f+g\|_2^2} \\
&< \sqrt{\big(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty\big)^2 + \big(\|f\|_2 + \|g\|_2\big)^2} \\
&\leq \sqrt{\|f\|_\infty^2 + \|f\|_2^2} + \sqrt{\|g\|_\infty^2 + \|g\|_2^2} \\
&= \|f\| + \|g\| \,.
\end{aligned}$$

On déduit de la proposition 10.3.1 que $(E, \| \ \|)$ est strictement convexe.
Montrons que $(E, \| \ \|)$ n'est pas uniformément convexe. Pour tout $n \geq 1$, soit $f_n = \mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1 sur $[0,\, 1]$, et soit :

$$g_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n}\,, \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

Alors on a $\|f_n\|^2 = 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g_n\|^2 = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n + g_n\|^2 = 8$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \Big[2\|f_n\|^2 + 2\|g_n\|^2 - \|f_n + g_n\|^2\Big] = 0\,,$$

mais on a $\|f_n - g_n\|^2 \geq \|f_n - g_n\|_\infty^2 \geq 1$. Donc la propriété (iii) de la proposition 10.4.3 n'est pas vérifiée. Par conséquent, $(E, \| \ \|)$ n'est pas uniformément convexe.

Exercice 10.32. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé uniformément convexe.

1. Soient $x_0 \in E$ et $r > 0$. Montrer que l'ensemble des points extrémaux de la boule fermée $B'(x_0, r) = \big\{x \in E \;;\; \|x - x_0\| \leq r\big\}$ est la sphère $S(x_0, r) = \big\{x \in E \;;\; \|x - x_0\| = r\big\}$.
2. Soient A un sous-ensemble de E et $a \in A$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ et $r > 0$ tels que $\|a - x_0\| = r$ et $A \subset B'(x_0, r)$. Montrer que a est un point extrémal de A.

Solution. 1. Puisque l'application $x \longmapsto x_0 + rx$ est linéaire et homéomorphisme de E, il suffit de montrer que l'on a $e(B_E) = S_E$. On déduit de la remarque 9.5.2 que l'on a $e(B_E) \subset S_E$. Réciproquement, soit $x \in S_E$. Montrons que x est un point extrémal de B_E. D'après la proposition 9.5.3, il suffit de montrer que pour tout $y, z \in B_E$ vérifiant $x = \frac{y+z}{2}$, on a $y = z = x$. Soient $y, z \in B_E$ tels que $x = \frac{y+z}{2}$. Alors on a $1 = \|x\| \leq \frac{1}{2}\|y\| + \frac{1}{2}\|z\| \leq 1$, d'où $\|y\| = \|z\| = 1$. Si $y \neq z$, alors on a $\|y - z\| = \varepsilon > 0$. Comme $(E, \| \ \|)$ est uniformément convexe, alors il existe $\delta > 0$ tel que $\left\|\frac{y+z}{2}\right\| \leq 1 - \delta < 1$, ce qui est impossible. Donc on a $y = z$, d'où $x = y = z$. Par conséquent, x est un point extrémal de B_E.
2. D'après 1, a est un point extrémal de $B'(x_0, r)$. Comme on a $A \subset B'(x_0, r)$, alors a est un point extrémal de A.

Exercice 10.33. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé tel que le dual topologique $(E^*, \| \ \|)$ soit uniformément convexe. Soient $f, f_n \in S_{E^*}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f pour la norme si et seulement si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge $*$-faiblement vers f.
Solution. Il est clair que si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f pour la norme, alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge $*$-faiblement vers f.

Réciproquement, supposons que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge $*$-faiblement vers f. Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in S_E$ tels que $|f(x)| > 1-\varepsilon$. On a $2 \geq \|f_n+f\| \geq |f_n(x)+f(x)|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x)+f(x)| = 2|f(x)| > 2-2\varepsilon$, donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n + f\| = 2$. Il résulte de la proposition 10.4.3 que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Exercice 10.34. Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace normé séparable $(E, \|\ \|)$ et $T : F \longrightarrow c_0$ une application linéaire continue. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une application linéaire continue $S : E \longrightarrow c_0$ prolongeant T telle que $\|S\| \leq 2\|T\|$.
Sans perdre de généralité, on peut supposer $\|T\| = 1$.
Pour tout $n \geq 0$, soit $f_n : c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ la forme linéaire continue définie par $f_n(\mathbf{e}_n) = 1$ et $f_n(\mathbf{e}_p) = 0$ si $p \neq n$. Alors on a $T(x) = (f_n \circ T(x)))_{n\geq 0}$, pour tout $x \in F$. Comme $f_n \circ T \in F^*$, d'après le théorème de Hahn-Banach, théorème 7.7.3, il existe une forme linéaire continue $g_n \in E^*$ prolongeant $f_n \circ T$ telle que $\|g_n\| = \|f_n \circ T\| \leq \|f_n\|\,\|T\| = 1$. Puisque $(E, \|\ \|)$ est séparable, d'après le théorème d'Alaoglu et le théorème 10.2.4, B_{E^*} est compact et métrisable pour la topologie $*$-faible. Soit d une distance induisant la topologie $*$-faible sur B_{E^*}. Rappelons, voir la démonstration du théorème 10.2.4, que si $(x_p)_{p\geq 0}$ est une suite dense dans S_E, alors pour tout $f, g \in B_{E^*}$, on a $d(f,g) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p}|f(x_p) - g(x_p)|$. Soient $F^\perp = \{f \in E^* \ ;\ F \subset \ker(f)\}$ et $K = B_{E^*} \cap F^\perp$.

1. Montrer que si g est une valeur d'adhérence de la suite $(g_n)_{n\geq 0}$ pour la topologie $*$-faible, alors on a $g \in K$.

2. Montrer que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(g_n, K) = 0$.

3. Vérifier qu'il existe une suite $(h_n)_{n\geq 0}$ dans K telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(g_n, h_n) = 0$. Pour tout $x \in E$, on pose $S(x) = (g_n(x) - h_n(x))_{n\geq 0}$. Montrer que S est une application linéaire continue de E dans c_0 prolongeant T telle que $\|S\| \leq 2$.

Solution. 1. Soit g une valeur d'adhérence de la suite $(g_n)_{n\geq 0}$. Comme B_{E^*} est compact et métrisable pour la topologie $*$-faible, alors $g \in B_{E^*}$ et il existe une sous-suite $(g_{n_i})_{i\geq 0}$ de $(g_n)_{n\geq 0}$ convergeant vers g pour la topologie $*$-faible. Alors pour tout $x \in E$, on a $g(x) = \lim\limits_{i\to+\infty} g_{n_i}(x)$. Pour tout $x \in F$, on a $g_{n_i}(x) = f_{n_i} \circ T(x)$, d'où $\lim\limits_{i\to+\infty} g_{n_i}(x) = 0$ car $T(x) \in c_0$. Donc, pour tout $x \in F$, on a $g(x) = 0$, d'où $g \in F^\perp$. Donc on a bien $g \in K$.
2. Comme $\big(d(g_n, K)\big)_{n\geq 0}$ est une suite bornée dans $\mathbb{R}$, pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(g_n, K) = 0$, il suffit de montrer que 0 est l'unique valeur d'adhérence de la suite $\big(d(g_n, K)\big)_{n\geq 0}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une valeur d'adhérence de la suite $\big(d(g_n, K)\big)_{n\geq 0}$. Alors il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} d(g_{\varphi(n)}, K)$. Comme $(g_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ est une suite dans le compact B_{E^*}, alors $(g_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ possède une valeur d'adhérence $g \in B_{E^*}$, d'où g est une valeur d'adhérence de la suite $(g_n)_{n\geq 0}$. D'après 1, on a alors $g \in K$. Par conséquent, on a $\alpha = d(g, K) = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} d(g_n, K) = 0$.
3. Comme on a $d(g_n, K) = \inf\limits_{h\in K} d(g_n, h)$, alors pour tout $n \geq 0$, il existe $h_n \in K$ tel que $d(g_n, h_n) < d(g_n, K) + \frac{1}{n+1}$, d'où on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(g_n, h_n) = 0$. Pour tout $x \in E$, on pose $S(x) = (g_n(x) - h_n(x))_{n\geq 0}$. Montrons d'abord que pour tout $x \in E$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) - h_n(x) = 0$.

Puisque l'on a $d(g_n, h_n) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} |g_n(x_p) - h_n(x_p)|$, alors pour tout $p \geq 0$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(x_p) - h_n(x_p) = 0 \,.$$

Comme la suite $(g_n - h_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans E^* pour la norme, on en déduit que pour tout $x \in E$, on a $\lim_{n \to +\infty} g_n(x) - h_n(x) = 0$. Donc S est bien une application linéaire de E dans c_0. Pour tout $x \in F$, on a $h_n(x) = 0$, donc S prolonge T. D'autre part, pour tout $x \in E$, on a $|g_n(x) - h_n(x)| \leq |g_n(x)| + |h_n(x)| \leq \|g_n\| \, \|x\| + \|h_n\| \, \|x\| \leq 2\|x\|$. Par conséquent, on a $\|S\| \leq 2$.

Chapitre 11

GROUPES TOPOLOGIQUES

Proposition. Soient G un groupe topologique et A, B deux parties de G.

1. On a $\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} AV$, où $\mathcal{V}$ est l'ensemble des voisinages de e dans G.
2. Si U est un ouvert de G, alors U^{-1}, AU et UA sont des ouverts de G.
3. Si A est une partie fermée de G et B est une partie compacte de G, alors AB et BA sont des parties fermées de G.
4. Si G est séparé et si A et B sont des parties compactes de G, alors AB et BA sont des parties compactes de G.

Démonstration. 1. Soit $x \in E$, on a $x \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout voisinage V de e dans G, on a $(xV) \cap A \neq \emptyset$. Ceci est équivalent à $x \in AV^{-1}$. Or V est un voisinage de e dans G si et seulement si V^{-1} est un voisinage de e dans G, donc on a $\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} AV$.
2. Comme l'application $x \longmapsto x^{-1}$ est un homéomorphisme de G, alors U^{-1} est un ouvert de G. On a $AU = \bigcap_{a \in A} aU = \bigcap_{a \in A} L_a(U)$ et $UA = \bigcap_{a \in A} Ua = \bigcap_{a \in A} R_a(U)$. Or pour tout $a \in G$, L_a et R_a sont des homéomorphismes de G, voir remarque 11.1.1, donc AU et UA sont des ouverts de G.
3. Montrons que $G \setminus AB$ est ouvert dans G. Soit $z \in G \setminus AB$, alors on a $zB^{-1} \cap A = \emptyset$. Puisque l'application $f : (x, y) \longmapsto xy^{-1}$ de $G \times G$ dans G est continue, alors $f^{-1}(G \setminus A)$ est un ouvert de $G \times G$ contenant le compact $\{z\} \times B$. D'après la proposition 3.1.4, il existe un ouvert U de G contenant z tel que $U \times B \subset f^{-1}(G \setminus A)$, d'où $UB^{-1} = f(U \times B) \subset G \setminus A$. Donc on a $UB^{-1} \cap A = \emptyset$, d'où $U \cap AB = \emptyset$. Par conséquent, $G \setminus AB$ est ouvert dans G. Autrement dit, AB est fermé dans G. De même, BA est fermée dans G.
4. Puisque $A \times B$ est compact, AB est séparée et l'application $(a, b) \longmapsto ab$ est continue et surjective de $A \times B$ sur AB, alors AB est compacte. De même, BA est compacte. ■

Proposition. Soit G un groupe topologique séparé. Alors on a :

1. G est un espace régulier.
2. Soient A un compact de G et B un fermé de G tels que $A \cap B = \emptyset$. Alors il existe un voisinage ouvert W de e dans G tel que $AW \cap BW = \emptyset$.

Démonstration. 1. Soient $x \in G$ et F une partie fermée de G tels que $x \notin F$, d'où $e \notin x^{-1}F$. Soit $U = G \setminus x^{-1}F$, alors U est un ouvert de G contenant e. Soit $f : G \times G \longrightarrow G$ définie par $f(x, y) = xy^{-1}$. Comme f est continue en (e, e), il existe un ouvert V de G contenant e tel que $VV^{-1} \subset U$. Alors xV et FV sont des ouverts de G tels que $x \in xV$ et $F \subset FV$. Vérifions que xV et FV sont disjoints. Si $(xV) \cap FV \neq \emptyset$, alors il existe $a, b \in V$ et $y \in F$ tels que $xa = yb$, d'où

$ab^{-1} = x^{-1}y \in (x^{-1}F) \cap U$, ce qui est impossible. Donc on a $(xV) \cap FV = \emptyset$. Par conséquent, G est un espace régulier.
2. Soit $a \in A$. Comme on a $A \cap B = \emptyset$, alors $e \notin a^{-1}B$. D'après 1, il existe un voisinage ouvert V_a de e dans G tel que $aV_a \cap BV_a = \emptyset$. Soit W_a un voisinage ouvert de e dans G tel que $W_aW_a \subset V_a$. Comme A est compact et on a $A \subset \bigcup_{a\in A} aW_a$ et aW_a est un ouvert de G, pour tout $a \in A$, alors il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} a_iW_{a_i}$. Soit $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_{a_i}$, alors W est un voisinage ouvert de e dans G tel que $AW \subset \bigcup_{i=1}^{n} a_iW_{a_i}W \subset \bigcup_{i=1}^{n} a_iW_{a_i}W_{a_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} a_iV_{a_i}$. On a aussi $BW \subset \bigcap_{i=1}^{n} BW_{a_i} \subset \bigcap_{i=1}^{n} BV_{a_i}$. Comme pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $a_iV_{a_i} \cap BV_{a_i} = \emptyset$, alors on a $\big(\bigcup_{i=1}^{n} a_iV_{a_i}\big) \cap \big(\bigcap_{i=1}^{n} BV_{a_i}\big) = \emptyset$, d'où $AW \cap BW = \emptyset$. ■

Proposition. Soient G un groupe topologique et G_0 la composante connexe de e dans G. Alors on a :

1. G_0 est sous-groupe distingué et fermé dans G.
2. Pour tout $x \in G$, la composante connexe de x dans G est $xG_0 = G_0x$.
3. Le groupe topologique quotient G/G_0 est séparé et totalement discontinu.
4. Si G est localement connexe, alors G/G_0 est un groupe discret.

Démonstration. 1. Puisque l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (x,y) & \longmapsto & xy^{-1} \end{array}$$

est continue et $G_0 \times G_0$ est connexe, alors $f(G_0 \times G_0)$ est une partie connexe de G contenant e, donc on a $f(G_0 \times G_0) \subset G_0$. Autrement dit, G_0 est un sous-groupe de G. Soit $x \in G$. Puisque l'application

$$\begin{array}{rccc} g: & G & \longrightarrow & G \\ & y & \longmapsto & xyx^{-1} \end{array}$$

est continue, alors $xG_0x^{-1} = g(G_0)$ est une partie connexe de G contenant e, donc on a $xG_0x^{-1} \subset G_0$. Par conséquent, G_0 est distingué. Notons enfin que toute composante connexe d'un point dans un espace topologique est fermée, voir théorème 4.2.1.
2. Comme G_0 est un sous-groupe distingué de G, alors pour tout $x \in G$, on a $xG_0 = G_0x$. Soient $x \in G$ et C_x la composante connexe de x dans G. Comme l'application $y \longmapsto xy$ est continue de G dans G, alors xG_0 est une partie connexe de G contenant x, d'où on a $xG_0 \subset C_x$. Puisque l'application $y \longmapsto x^{-1}y$ est continue de G dans G, alors $x^{-1}C_x$ est une partie connexe de G contenant e, donc on a $x^{-1}C_x \subset G_0$, d'où $C_x \subset xG_0$. Par conséquent, on a $C_x = xG_0$.
3. Comme G_0 est un sous-groupe fermé de G, il résulte de la proposition 11.2.1 que le groupe topologique quotient G/G_0 est séparé. Pour montrer que G/G_0 est totalement discontinu, d'après 2, il suffit de montrer que la composante connexe de l'élément neutre dans le groupe topologique quotient G/G_0 est réduit à l'élément neutre. Soit G_0' la composante connexe de l'élément neutre dans le groupe topologique quotient G/G_0. D'après 1, G_0' est un sous-groupe distingué dans G/G_0. Soit $q : G \longrightarrow G/G_0$ l'application quotient. Comme q est un morphisme de groupes, alors $G' = q^{-1}(G_0')$ est un sous-groupe distingué de G et on a $G_0 \subset G'$. Soit $\varphi : G' \longrightarrow G_0'$ défini par $\varphi(x) = q(x)$. Alors φ est un morphisme de groupes continue, surjective et ouverte. D'après la proposition 11.2.3, G'/G_0 est homéomorphe à G_0', donc G'/G_0 est connexe. Il résulte de la proposition 11.2.4 que G' est connexe. D'où on a $G' \subset G_0$. Par conséquent, on a $G' = G_0$. Donc

la composante connexe de l'élément neutre dans le groupe topologique quotient G/G_0 est réduit à l'élément neutre.
4. Puisque G est localement connexe, alors $\overset{\circ}{G_0} \neq \emptyset$. Il résulte du théorème 11.2.1 que G_0 est ouvert dans G. On déduit de la proposition 11.2.1 que le groupe topologique quotient G/G_0 est discret. ∎

Théorème. Soit G un groupe topologique séparé opérant continûment sur un espace localement compact X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) G opère proprement sur X.

(ii) Pour tout compact K de X, l'ensemble $G_K = \{g \in G \ ; \ K \cap gK \neq \emptyset\}$ est relativement compact dans G.

(iii) Pour tous $x, y \in X$, il existe des voisinages ouverts U et V dans X de x et y respectivement tels que l'ensemble $\{g \in G \ ; \ U \cap gV \neq \emptyset\}$ soit relativement compact dans G.

(iv) (a) Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que l'ensemble $\{g \in G \ ; \ U \cap gU \neq \emptyset\}$ soit relativement compact dans G.

(b) L'espace des orbites X/G est séparé.

Démonstration. Puisque X est localement compact, il résulte du théorème 3.7.4 que l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & G \times X & \longrightarrow & X \times X \\ & (g,x) & \longmapsto & (gx, x) \end{array}$$

est propre si et seulement si pour tout compact K' de $X \times X$, $f^{-1}(K')$ est un compact de $G \times X$.
Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit K un compact de X. Comme l'application f est propre, alors $f^{-1}(K \times K) = \{(g,x) \in G \times X \ ; \ x, gx \in K\}$ est un compact de $G \times X$. Puisque la projection canonique $p_1 : G \times X \longrightarrow G$ est continue, alors $p_1(f^{-1}(K \times K))$ est une partie compacte de G. Or on a $G_K = \{g \in G \ ; \ K \cap gK \neq \emptyset\} \subset p_1(f^{-1}(K \times K))$, donc G_K est relativement compact dans G.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit K' un compact de $X \times X$. Alors il existe un compact de X tel que $K' \subset K \times K$. Pour montrer que $f^{-1}(K')$ est un compact de $G \times X$, il suffit de montrer que $f^{-1}(K \times K)$ est un compact de $G \times X$ car $f^{-1}(K')$ est fermé dans $G \times X$. Or on a $f^{-1}(K \times K) \subset G_K \times K \subset \overline{G_K} \times K$ et $\overline{G_K}$ est compact de G, donc $f^{-1}(K \times K)$ est compact de $G \times X$, car $f^{-1}(K \times K)$ est déjà fermé dans $G \times X$.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soient $x, y \in X$. Comme X est localement compact, il existe deux voisinages ouverts U et V dans X de x et y respectivement tels que $\overline{U}$ et $\overline{V}$ soient compacts. Alors $K = \overline{U} \cup \overline{V}$ est un compact de X. Par hypothèse, l'ensemble $G_K = \{g \in G \ ; \ K \cap gK \neq \emptyset\}$ est relativement compact dans G. Or on a $\{g \in G \ ; \ U \cap gV \neq \emptyset\} \subset G_K$, donc $\{g \in G \ ; \ U \cap gV \neq \emptyset\}$ est relativement compact dans G.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Soit K un compact de X. Soit $x \in K$. Pour tout $y \in K$, il existe deux voisinages ouverts $U_{x,y}$ et $V_{x,y}$ dans X de x et y respectivement tels que $A_{x,y} = \{g \in G \ ; \ U_{x,y} \cap gV_{x,y} \neq \emptyset\}$ soit relativement compact dans G. Comme K est compact, alors il existe $y_1, \dots, y_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x,y_i}$. Soient $U_x = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x,y_i}$ et $V_x = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x,y_i}$, alors U_x est un voisinage ouvert de x dans X et V_x est un ouvert de X tels que $K \subset V_x$ et $A_x = \{g \in G \ ; \ U_x \cap gV_x \neq \emptyset\}$ soit relativement compact dans G. Comme K est compact, alors il existe $x_1, \dots, x_p \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{j=1}^{p} U_{x_j}$. Soient $U = \bigcup_{j=1}^{p} U_{x_j}$ et $V = \bigcap_{j=1}^{p} V_{x_j}$, alors U et V sont des ouverts de X tels que $K \subset U$, $K \subset V$ et tels que $\{g \in G \ ; \ U \cap gV \neq \emptyset\}$ soit relativement compact dans G. Or on a $G_K = \{g \in G \ ; \ K \cap gK \neq \emptyset\} \subset \{g \in G \ ; \ U \cap gV \neq \emptyset\}$, donc G_K est

relativement compact dans G.
Preuve de (i) $\Longrightarrow$ (iv). Comme on a (i) $\Longleftrightarrow$ (iii), il est clair que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que l'ensemble $\big\{g \in G \; ; \; U \cap gU \neq \emptyset\big\}$ soit relativement compact dans G. Comme G opère proprement sur X, on déduit de la proposition 11.3.3 que l'espace des orbites X/G est séparé.
Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $q : X \longrightarrow X/G$ l'application quotient. Soient $x, y \in X$. Si $q(x) \neq q(y)$, comme X/G est séparé, alors il existe des voisinages ouverts U et V dans X de x et y respectivement tels que $GU \cap GV = \emptyset$, d'où $\big\{g \in G \; ; \; U \cap gV \neq \emptyset\big\}$ est vide. Supposons que $q(x) = q(y)$, alors il existe $h \in G$ tel que $y = hx$. Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que l'ensemble $\big\{g \in G \; ; \; U \cap gU \neq \emptyset\big\}$ soit relativement compact dans G. Soit $V = hU$, alors V est un voisinage ouvert de y dans X et on a :

$$\big\{g \in G \; ; \; U \cap gV \neq \emptyset\big\} = \big\{g \in G \; ; \; U \cap ghU \neq \emptyset\big\} = \big\{g \in G \; ; \; U \cap gU \neq \emptyset\big\}h^{-1} .$$

Donc $\big\{g \in G \; ; \; U \cap gV \neq \emptyset\big\}$ est relativement compact dans G car l'application $g \longmapsto gh^{-1}$ est un homéomorphisme de G. ■

Lemme (**racine carrée d'une matrice positive**). Soient A et B deux matrices positives de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Pour tout $\alpha > 0$, $A + \alpha I_n$ est inversible.
2. Si $A^2 = B^2$, alors on a $A = B$.
3. Il existe une unique matrice positive C de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $C^2 = A$. La matrice C est dite **racine carrée** de A.

Démonstration. 1. Comme A est une matrice positive, d'après la proposition 11.4.1, il existe $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$ et il existe $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ tels que :

$$PP^* = P^*P = I_n \quad \text{et} \quad A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} P^* .$$

D'où on a :

$$A + \alpha I_n = P \begin{bmatrix} \lambda_1 + \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n + \alpha \end{bmatrix} P^* .$$

Comme pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a $\lambda_j + \alpha > 0$, alors la matrice :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 + \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n + \alpha \end{bmatrix}$$

est inversible dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Par conséquent, A est inversible.
2. Puisque A et B sont auto-adjoints, alors on a $\ker(A) = \ker(A^2) = \ker(B^2) = \ker(B)$. Soit λ une valeur propre de $A^2 = B^2$ telle que $\lambda \neq 0$, alors on a $\lambda > 0$. Il est clair que l'on a $\ker(A - \sqrt{\lambda} I_n) \subset \ker(A^2 - \lambda I_n)$. D'autre part, on a $A^2 - \lambda I_n = (A + \sqrt{\lambda} I_n)(A - \sqrt{\lambda} I_n)$. D'après

1, $A + \sqrt{\lambda} I_n$ est inversible, donc on a $\ker(A^2 - \lambda I_n) \subset \ker(A - \sqrt{\lambda} I_n)$. Par conséquent, on a $\ker(A^2 - \lambda I_n) = \ker(A - \sqrt{\lambda} I_n)$. Or on a $A^2 = B^2$, d'où :

$$\ker(A - \sqrt{\lambda} I_n) = \ker(A^2 - \lambda I_n) = \ker(B^2 - \lambda I_n) = \ker(B - \sqrt{\lambda} I_n)\,.$$

Ainsi, les restrictions de A et B aux sous-espaces propres de $A^2 = B^2$ sont égales, $\mathbb{K}^n$ étant la somme directe de ces sous-espaces propres, voir propositions 8.7.9 et 8.7.10, on en déduit que l'on a $A = B$.
3. Comme A est une matrice positive de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, d'après la proposition 11.4.1, il existe $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$ et il existe $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ tels que :

$$PP^* = P^*P = I_n \quad \text{et} \quad A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} P^*\,.$$

Soit :

$$C = P \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} P^*\,.$$

Alors C est une matrice positive de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $C^2 = A$. L'unicité résulte de 2.

■

Proposition. On a les propriétés suivantes :

1. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
2. L'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration. 1. Comme l'application déterminant est continue de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, voir exemple 6.6.1, alors $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \big\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \ ; \ \det(A) \neq 0\big\}$ est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mu_1, \ldots, \mu_p$ les valeurs propres non nulles de A. Soient $r = \inf\limits_{1 \leq i \leq p} |\mu_i|$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < r$. Alors pour tout $k \geq N$, la matrice $A - \frac{1}{k} I_n$ est inversible et la suite $\big(A - \frac{1}{k} I_n\big)_{k \geq N}$ converge vers A dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, donc $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, alors il existe une matrice inversible P dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure B telles que $A = PBP^{-1}$, où :

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & \ldots & \ldots & x_{1n} \\ 0 & 0 & x_{23} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & x_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Les λ_i sont les valeurs propres de A. Si tous les λ_i sont distincts, alors A est diagonalisable. Supposons que $\mathrm{card}(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}) = m$, avec $1 \leq m < n$. Donc on a $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$, avec $\mu_i \neq \mu_j$ si $i \neq j$. Soit $r > 0$ tel que $B(\mu_i, r) \cap B(\mu_j, r) = \emptyset$ si $i \neq j$. Comme la suite $\left(\frac{n}{p}\right)_{p \geq 1}$ tend vers 0, alors il existe $p_0 \geq 1$ tel que pour tout $p \geq p_0$, on ait $\frac{n}{p} < r$. Alors pour tout $p \geq p_0$, les nombres complexes $\lambda_q + \frac{q}{p}$, pour $q \in \{1, \ldots, n\}$, sont deux à deux distincts. Pour tout $p \geq p_0$, posons $A_p = PB_pP^{-1}$, avec :

$$B_p = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{p} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \frac{2}{p} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n + \frac{n}{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & \ldots & \ldots & x_{1n} \\ 0 & 0 & x_{23} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & x_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors A_p est diagonalisable et la suite $\Big(A_p\Big)_{p \geq p_0}$ converge vers A dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Donc l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. ■

Proposition. On a les propriétés suivantes :

1. Le groupe compact $\mathrm{SO}(n)$ est connexe par arcs.
2. Le groupe compact $\mathrm{O}(n)$ a deux composantes connexes dont celle contenant I_n est $\mathrm{SO}(n)$.
3. Le groupe topologique $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ a deux composantes connexes dont celle contenant I_n est $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) = \big\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ \det(A) > 0\big\}$ qui est de plus connexe par arcs.

Démonstration. Si $n = 1$, on a $\mathrm{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\mathrm{SO}(1) = \{1\}$, $\mathrm{O}(1) = \{-1, 1\}$ et $\mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc les trois propriétés sont triviales. Donc on peut supposer $n \geq 2$.
1. Soit $A \in \mathrm{SO}(n)$. D'après la proposition 11.4.2, il existe $P \in \mathrm{O}(n)$ et il existe une matrice diagonale par blocs de la forme $D = \mathrm{Diag}(I_r, -I_s, R(\theta_1), \ldots, R(\theta_p))$ tels que $A = PDP^*$, où $R(\theta_k) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{bmatrix}$, avec $\theta_k \in]0, \pi[$, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$. Comme on a $\det(A) = 1$, alors le nombre s est pair. On peut donc écrire $-I_s$ sous la forme d'une matrice diagonale de $\frac{s}{2}$ blocs de la forme $R(\pi) = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix}$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $A(t) = P\mathrm{Diag}(I_r, R(t\pi), \ldots, R(t\pi), R(t\theta_1), \ldots, R(t\theta_p))P^*$, alors $A(t) \in \mathrm{SO}(n)$, $t \longmapsto A(t)$ est continue et $A(0) = I_n$ et $A(1) = A$. Par conséquent, $\mathrm{SO}(n)$ est connexe par arcs.
2. Soit $\mathrm{O}^-(n) = \big\{A \in \mathrm{O}(n)\ ;\ \det(A) = -1\big\}$ et soit $B \in \mathrm{O}^-(n)$ définie par :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors l'application $A \longmapsto BA$ est un homéomorphisme de $\mathrm{SO}(n)$ sur $\mathrm{O}^-(n)$, donc $\mathrm{O}^-(n)$ est connexe. Or on a $\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \cup \mathrm{O}^-(n)$, avec $\mathrm{SO}(n) \cap \mathrm{O}^-(n) = \emptyset$ et $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{O}^-(n)$ sont des fermés non vides dans $\mathrm{O}(n)$, on déduit du théorème 4.2.1 que $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{O}^-(n)$ sont les composantes connexes de $\mathrm{O}(n)$.
3. Soit G_0 la composante connexe de I_n dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Comme l'application $\varphi : A \longmapsto \det(A)$ est continue de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors $\varphi(G_0)$ est une partie connexe de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ contenant 1, d'où pour tout $A \in G_0$, on a $\det(A) > 0$. Autrement dit, on a $G_0 \subset \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$. Pour montrer que l'on a $G_0 = \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$, il reste à montrer que $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ est connexe. On va montrer par récurrence que $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ est connexe. On a $\mathrm{GL}^+(1, \mathbb{R}) =]0, +\infty[$, donc $\mathrm{GL}^+(1, \mathbb{R})$ est connexe.

Soit $n \geq 2$ et supposons que $\mathrm{GL}^+(n-1,\mathbb{R})$ est connexe. Soit H le sous-groupe de $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ formé des matrices de $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$, dont la première colonne est :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Comme l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n-1} \times \mathrm{GL}^+(n-1,\mathbb{R}) & \longrightarrow & H \\ ((x_2,\dots,x_n),A) & \longmapsto & \begin{bmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

est continue et surjective et comme $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathrm{GL}^+(n-1,\mathbb{R})$ est connexe, alors H est connexe. Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ & [a_{ij}] & \longmapsto & (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) \end{array}$$

Il est clair que f est continue et surjective. L'application f est la restriction de l'application

$$\begin{array}{cccc} h : & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & [a_{ij}] & \longmapsto & (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) \end{array}$$

Comme h est continue, linéaire et surjective, alors h est une application ouverte, voir théorème 7.1.1. Puisque $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on en déduit que f est aussi une application ouverte. Notons aussi que si $A, B \in \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$, alors $A^{-1}B \in H$ si et seulement si $f(A) = f(B)$. On déduit alors du corollaire 1.4.1 qu'il existe un homéomorphisme $\widetilde{f} : \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})/H \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ & \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})/H \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Or $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe car $n \geq 2$, d'où $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})/H$ est connexe. Il résulte de la proposition 11.2.4 que $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ est connexe. Montrons maintenant que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ a deux composantes connexes. Soit $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,;\, \det(A) < 0\}$ et soit $B \in \mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ définie par :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors l'application $A \longmapsto BA$ est un homéomorphisme de $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ sur $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$, donc $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ est connexe. On a $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) \cup \mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ sont des ouverts non vides disjoints dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, alors on déduit du théorème 4.2.1 que $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ sont les composantes connexes de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ est aussi ouvert dans l'espace normé $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ est connexe par arcs, voir proposition 6.1.5. ■

Supplément d'exercices

Exercice 11.20. Rappelons que l'on a :

$$\mathbb{S}^3 = \left\{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \; ; \; |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\right\} \quad \text{et} \quad \mathbb{S}^2 = \left\{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \; ; \; |z|^2 + t^2 = 1\right\}.$$

Considérons l'**application de Hopf** suivante :

$$\begin{array}{rccc} \eta : & \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ & (z_0, z_1) & \longmapsto & \left(2z_0\overline{z_1}, |z_0|^2 - |z_1|^2\right) \end{array}$$

Montrer que $\mathbb{S}^2$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$. En déduire que $\mathbb{CP}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.

Solution. Il est clair que η est une application continue. Vérifions que η est surjective. Soit $(z, t) \in \mathbb{S}^2$. Soient $z_0 = \sqrt{\frac{1+t}{2}} e^{i \arg(z)}$ et $z_1 = \sqrt{\frac{1-t}{2}}$, alors on a $(z_0, z_1) \in \mathbb{S}^3$ et $\eta(z_0, z_1)) = (z, t)$. Donc η est surjective. Soient $(z_0, z_1), (z_0', z_1') \in \mathbb{S}^3$, alors on a $\eta((z_0, z_1)) = \eta((z_0', z_1'))$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{S}^1$ tel que $(z_0', z_1') = \lambda(z_0, z_1)$. Comme η est aussi une application fermée car $\mathbb{S}^3$ est compact, on déduit du corollaire 1.4.1 qu'il un homéomorphisme $\widetilde{\eta}$ de $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^2$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^3 \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "q"'] & & \mathbb{S}^2 \\ & \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 \arrow[ur, "\widetilde{\eta}"'] & \end{tikzcd}$$

Donc l'espace $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$. D'après l'exercice 11.19, $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{CP}^1$. Par conséquent, $\mathbb{CP}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.

Exercice 11.21. Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \beta : & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & z & \longmapsto & z^2 \end{array}$$

Montrer que $\mathbb{S}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1/\mathbb{S}^0$. En déduire que $\mathbb{RP}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.

Solution. Il est clair que β est une application continue et surjective. En plus, β est une application fermée car $\mathbb{S}^1$ est compact. Soient $z, z' \in \mathbb{S}^1$, alors on a $\beta(z) = \beta(z')$ si et seulement si $z' = \pm z$. Autrement dit, on a $\beta(z) = \beta(z')$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ tel que $z' = \lambda z$. On déduit alors du corollaire 1.4.1 qu'il un homéomorphisme $\widetilde{\beta}$ de $\mathbb{S}^1/\mathbb{S}^0$ dans $\mathbb{S}^1$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "q"'] & & \mathbb{S}^1 \\ & \mathbb{S}^1/\mathbb{S}^0 \arrow[ur, "\widetilde{\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

Donc l'espace $\mathbb{S}^1/\mathbb{S}^0$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$. D'après l'exercice 11.19, $\mathbb{S}^1/\mathbb{S}^0$ est homéomorphe à $\mathbb{RP}^1$. Par conséquent, $\mathbb{RP}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.

Définition 11.0.4. 1. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. On appelle **réflexion** d'hyperplan H l'opérateur $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $T(x) = x$, pour tout $x \in H$ et $T(y) = -y$, pour tout $y \in H^\perp$. Autrement dit, un opérateur $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ est une réflexion s'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (V_1, V_2, V_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de T dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$. On appelle **retournement** ou **renversement** d'axe F l'opérateur $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $T(x) = x$, pour tout $x \in F$ et $T(y) = -y$, pour tout $y \in F^\perp$. Autrement dit, un opérateur $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ est une retournement s'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'' = (W_1, W_2, W_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de T dans la base $\mathcal{B}''$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Notez que si $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, alors T est une réflexion si et seulement si $-T$ est un retournement.

Exercice 11.22. Soit $\| \ \|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}^3$ tels que $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$ et $x \neq y$. Montrer que la réflexion d'hyperplan $H = \{x - y\}^\perp$ échange x et y.
2. Montrer que tout $T \in \mathrm{SO}(3)$ est produit de deux réflexions.
3. Montrer que tout $T \in \mathrm{SO}(3)$ est produit de deux retournement.

Solution. 1. Soit S la réflexion d'hyperplan $H = \{x - y\}^\perp$. Posons $z = x - y$. On peut écrire $x = \frac{x+y}{2} + \frac{z}{2}$, avec $x + y \in H$ car $\langle x + y, z\rangle = \langle x + y, x - y\rangle = \|x\|_2^2 - \|y\|_2^2 = 0$. Donc $S(x) = \frac{x+y}{2} - \frac{z}{2} = y$.

2. Soit $T \in \mathrm{SO}(3)$. Si $T = I_3$, on a $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Supposons maintenant $T \neq I_3$. D'après le corollaire 11.4.1, on a $\dim(\ker(T - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})) = 1$. Soit $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\|v\|_2 = 1$ et $T(v) = v$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $\langle x, v\rangle = 0$ et $\|x\|_2 = 1$. Soit $y = T(x)$, alors $\langle y, v\rangle = 0$ car $\{v\}^\perp$ est stable par T, et on a $\|y\|_2 = 1$ et $x \neq y$. Soit S la réflexion d'hyperplan $H = \{x - y\}^\perp$. On a $S \circ T(v) = S(T(v)) = S(v) = v$ et $S \circ T(x) = S(T(x)) = S(y) = x$. Comme on a $S \circ T \in \mathrm{O}(3) \setminus \mathrm{SO}(3)$, on en déduit que $S \circ T$ est une réflexion. On a aussi $T = S \circ (S \circ T)$, d'où le résultat.

3. Soit $T \in \mathrm{SO}(3)$. D'après 2, il existe deux réflexions S_1, S_2 telles que $T = S_1 \circ S_2$, d'où on a $T = (-S_1) \circ (-S_2)$ et $-S_1, -S_2$ sont deux retournements.

Exercice 11.23. Le but de cet exercice est de démontrer que $\mathbb{RP}^3$ est homéomorphe à $\mathrm{SO}(3)$. Soit $E = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})\ ;\ A = A^* \text{ et } \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Toute matrice de E est de la forme $\begin{bmatrix} a & b + ic \\ b - ic & -a \end{bmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Donc E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. On pose :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\ ,\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}\ ,\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\ .$$

Alors (A_1, A_2, A_3) est une base de E. Pour tout $A, B \in E$, on pose $\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(AB)$, alors $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E et (A_1, A_2, A_3) est une base orthonormale de E. Donc on peut identifier E muni de $\langle\ ,\ \rangle$ à l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que pour tout $A \in E$, on a $A^2 = \|A\|^2 I_2$ et que pour tout $U \in \mathrm{SU}(2)$, on a $UAU^{-1} \in E$.
2. Montrer que pour tout $U \in \mathrm{SU}(2)$, l'application $\phi_U \ : A \longmapsto UAU^{-1}$ est un opérateur unitaire de E.
3. En identifiant $\mathscr{L}(E)$ à $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, montrer que l'application suivante
$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathrm{SU}(2) & \longrightarrow & \mathrm{O}(3) \\ & U & \longmapsto & \phi_U \end{array}$$
est un morphisme de groupes continue.
4. Montrer que pour tout $U \in \mathrm{SU}(2)$, on a $\phi_U \in \mathrm{SO}(3)$.
5. Montrer que $\ker(\phi) = \{I_2, -I_2\}$. Autrement dit, pour tout U_1, $U_2 \in \mathrm{SU}(2)$, on a $\phi_{U_1} = \phi_{U_2}$ si et seulement si $U_2 = \pm U_1$.
6. Montrer que l'application $\phi \ : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$ est surjective.
7. En déduire que $\mathrm{SU}(2)/\ker(\phi)$ est homéomorphe à $\mathrm{SO}(3)$ et qu'alors $\mathbb{RP}^3$ est homéomorphe à $\mathrm{SO}(3)$.

Solution. 1. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b+ic \\ b-ic & -a \end{bmatrix} \in E$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors on a :
$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2 \end{bmatrix} = (a^2+b^2+c^2)I_2\,.$$
D'autre part, on a $\|A\|^2 = \langle A, A\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A^2) = a^2+b^2+c^2$, d'où $A^2 = \|A\|^2 I_2$. Pour tout $U \in \mathrm{SU}(2)$, on a $(UAU^{-1})^* = (U^{-1})^* A^* U^* = UAU^{-1}$ et $\mathrm{tr}(UAU^{-1}) = \mathrm{tr}(U^{-1}UA) = \mathrm{tr}(A) = 0$, donc $UAU^{-1} \in E$.
2. Il est clair que ϕ_U est linéaire continue de E dans E. D'autre part, pour tout $A, B \in E$, on a :
$$\begin{aligned} \langle \phi_U(A), \phi_U(B)\rangle &= \langle UAU^{-1}, UBU^{-1}\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(UAU^{-1}UBU^{-1}) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(UABU^{-1}) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(U^{-1}UAB) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(AB) = \langle A, B\rangle\,. \end{aligned}$$
Donc ϕ_U est un opérateur unitaire de E.
3. Comme pour tout $A \in E$, l'application $U \longmapsto UAU^{-1} = \phi_U(A)$ est continue de $\mathrm{SU}(2)$ dans E, alors l'application ϕ est continue de $\mathrm{SU}(2)$ dans $\mathrm{O}(3)$. D'autre part, pour tout U_1, $U_2 \in \mathrm{SU}(2)$ et pour tout $A \in E$, on a $\phi_{U_1U_2}(A) = U_1U_2AU_2^{-1}U_1^{-1} = \phi_{U_1}(\phi_{U_2}(A)) = (\phi_{U_1} \circ \phi_{U_2})(A)$, donc $\phi_{U_1U_2} = \phi_{U_1} \circ \phi_{U_2}$. Autrement dit, ϕ est un morphisme de groupes.
4. Comme ϕ est continue et $\phi_{I_2} = I_3$ et comme $\mathrm{SU}(2)$ est connexe, alors $\phi(\mathrm{SU}(2))$ est une partie connexe de $\mathrm{O}(3)$ contenant I_3, d'où $\phi(\mathrm{SU}(2)) \subset \mathrm{SO}(3)$, voir proposition 11.4.7.
5. Soit $U \in \mathrm{SU}(2)$ tel que pour tout $A \in E$, on ait $\phi_U(A) = A$, alors pour tout $A \in E$, on a $UA = AU$. On a $U = \begin{bmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$ avec α, $\beta \in \mathbb{C}$ et $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. On déduit des équations $A_1U = UA_1$ et $A_2U = UA_2$ que l'on a $\beta = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha^2 = 1$, d'où $U = \pm I_2$. Autrement dit,

on a $\ker(\phi) = \{I_2, -I_2\}$.
6. Soit $A \in E$ tel que $\|A\| = 1$. Posons $U = iA$, alors on a $U^* = -iA^* = -iA = -U$. On a aussi $U^2 = -A^2$. D'après 1, on a $A^2 = \|A\|^2 I_2 = I_2$, d'où $U^2 = -I_2$. On en déduit que $U^{-1} = -U = U^*$, donc $U \in \mathrm{SU}(2)$. On a $\phi_U(A) = UAU^{-1} = -UAU = -(iA)A(iA) = A^3 = A$. D'autre part, de l'équation $U^2 = -I_2$, on déduit $\phi_U \circ \phi_U = \phi_{U^2} = \phi_{-I_2} = \phi_{I_2} = \mathrm{id}_E$. Comme on a $\phi_U \neq \mathrm{id}_E$, on en déduit que pour tout $B \in E$ tel que $\langle A, B\rangle = 0$, on a $\phi_U(B) = -B$. Autrement dit, ϕ_U est le renversement d'axe la droite passant par A. D'après l'exercice précédent, le groupe $\mathrm{SO}(3)$ est engendré par les renversements. Comme $\phi(\mathrm{SU}(2))$ est un sous-groupe de $\mathrm{SO}(3)$, on en déduit que l'on a $\phi(\mathrm{SU}(2)) = \mathrm{SO}(3)$. Autrement dit, l'application $\phi \; : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$ est surjective.
7. On déduit du corollaire 11.3.1 que $\mathrm{SU}(2)/\{-I_2, I_2\}$ est homéomorphe à $\mathrm{SO}(3)$. On déduit alors des exercices 11.17 et 11.19 que $\mathbb{RP}^3$ est homéomorphe à $\mathrm{SO}(3)$.

Exercice 11.24. Pour tout $n \geq 1$, on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $\| \; \|_2$. Soit :

$$\mathbb{S}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \; ; \; \|x\|_2 = 1\right\}.$$

1. Montrer que $\mathrm{O}(n+1)$ (*resp.* $\mathrm{SO}(n+1)$) opère transitivement sur $\mathbb{S}^n$.
2. Montrer que le stabilisateur de $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}^n$ est $\mathrm{O}(n)$ (*resp.* $\mathrm{SO}(n)$).
3. En déduire que $\mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ sont homéomorphes à $\mathbb{S}^n$.

Solution. 1. Rappelons d'abord, voir proposition 8.7.1, que pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et pour tout $A \in \mathrm{O}(n+1)$, on a $\|Ax\|_2 = \|x\|_2$. Par conséquent, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{O}(n+1) \times \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \mathbb{S}^n \\ (A, x) & \longmapsto & Ax \end{array}$$

est bien une action continue de $\mathrm{O}(n+1)$ sur $\mathbb{S}^n$.
Soit $x \in \mathbb{S}^n$. Alors x est le premier vecteur d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^{n+1}$. Quitte à changer le dernier vecteur de cette base en son opposé, on peut supposer que le déterminant de cette base est strictement positif. On déduit de la proposition 8.7.1 qu'il existe $A \in \mathrm{SO}(n+1)$ telle que $Ae_1 = x$. Par conséquent, l'action de $\mathrm{SO}(n+1)$ sur $\mathbb{S}^n$ est transitive.
2. Soit S_{e_1} le stabilisateur de e_1 par l'action de $\mathrm{SO}(n+1)$ sur $\mathbb{S}^n$. Il est clair que si $A \in \mathrm{SO}(n+1)$, alors on a $Ae_1 = e_1$ si et seulement si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$, avec $B \in \mathrm{SO}(n)$. Par conséquent, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}(n) & \longrightarrow & S_{e_1} \\ B & \longmapsto & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

est un morphisme de groupes et aussi un homéomorphisme. Donc on identifie S_{e_1} à $\mathrm{SO}(n)$.
3. On déduit du théorème 11.3.1 que $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.
On fait le même raisonnement pour montrer que $\mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.

Remarque 11.0.10. Pour tout $n \geq 1$, on munit $\mathbb{C}^n$ de la norme euclidienne $\| \; \|_2$. Soit :

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \left\{x \in \mathbb{R}^{2n+2} = \mathbb{C}^{n+1} \; ; \; \|x\|_2 = 1\right\}.$$

On montre exactement comme dans l'exercice précédent que l'on a les résultats suivants :

1. $\mathrm{U}(n+1)$ (*resp.* $\mathrm{SU}(n+1)$) opère transitivement sur $\mathbb{S}^{2n+1}$.
2. Le stabilisateur de $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^{2n+1}$ est $\mathrm{U}(n)$ (*resp.* $\mathrm{SU}(n)$).
3. $\mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n)$ sont homéomorphes à $\mathbb{S}^{2n+1}$.

Exercice 11.25. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **périodique** s'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $T \neq 0$ et $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Un tel T est appelée une **période** de f. Désormais, on suppose que f est continue et périodique.

1. Soit G la réunion de $\{0\}$ et de l'ensemble des périodes de f. Montrer que G est un sous-groupe additif fermé de $\mathbb{R}$, et que si f est non constante, alors G est discret.
2. Montrer que f est bornée et uniformément continue.

Solution. 1. On a $0 \in G$, et puisque f est périodique, alors $G \neq \{0\}$. Pour tous $T, S \in G$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+T-S) = f(x-S+T) = f(x-S) = f(x-S+S) = f(x)$, donc $T - S \in G$. Par conséquent, G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite de G convergeant vers un élément $T \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+T_n) = f(x)$. Comme f est continue, alors on a $f(x+T) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x+T_n) = f(x)$, donc $T \in G$. Par conséquent, G est fermé dans $\mathbb{R}$. Si f n'est pas constante, alors il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $T \notin G$, donc G n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. D'après l'exercice 11.1, il existe alors $\alpha > 0$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$, donc G est discret. Notons que α est la plus petite période strictement positive de f.
2. On a $f(x-T) = f(x-T+T) = f(x)$, donc il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $f(\mathbb{R}) = f([0, T])$ et f est continue, donc f est bornée. Puisque f est continue et $[-T, T]$ est compact, alors f est uniformément continue sur $[-T, T]$, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \eta < T$ tel que pour tous $x, y \in [-T, T]$ vérifiant $|x-y| < \eta$, on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Il s'agit maintenant de montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| < \eta$. On fait la division euclidienne de x et y par T, on obtient $p, q \in \mathbb{Z}$ et $r, s \in [0, T[$ tels que $x = pT + r$ et $y = qT + s$. On a $|x-y| < \eta < T$, d'où $q \in \{p-1, p, p+1\}$. On distingue trois cas :
Premier cas : $q = p$. Alors on a $|x-y| = |r-s|$, d'où $|r-s| < \eta$. Donc on a $|f(r) - f(s)| < \varepsilon$. Or on a $f(x) = f(pT+r) = f(r)$ et $f(y) = f(qT+s) = f(s)$, d'où $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Deuxième cas : $q = p-1$. Alors on a $y = qT+s = (p-1)T+s = pT+s-T$, d'où $x-y = r-(s-T)$ et $r, s-T \in [-T, T]$ et $|r-(s-T)| < \eta$. Donc on a $|f(r) - f(s-T)| < \varepsilon$. Or on a $f(x) = f(r)$ et $f(y) = f(s-T)$, d'où $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Troisième cas : $q = p+1$. Alors on a $x = pT + r = (p+1)T + r - T$ et $y = (p+1)T + s$, d'où $x - y = (r-T) - s$ et $r - T, s \in [-T, T]$ et $|(r-T) - s| < \eta$. Donc on a $|f(r-T) - f(s)| < \varepsilon$. Or on a $f(x) = f(r-T)$ et $f(y) = f(s)$, d'où $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x-y| < \eta$, on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.26. Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe fermé de G. Montrer que le normalisateur $N(H) = \{x \in G\ ;\ xHx^{-1} = H\}$ de H est un sous-groupe fermé de G.
Solution. Il est clair que $N(H)$ est un sous-groupe de G. Soit $h \in H$. Les applications

$$f_h : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & xhx^{-1} \end{array} \quad \text{et} \quad g_h : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & x^{-1}hx \end{array}$$

sont continues. Comme H est fermé dans G, alors $A_h = f_h^{-1}(H)$ et $B_h = g_h^{-1}(H)$ sont fermés dans G. Or on a $N(H) = \bigcap\limits_{h\in H} A_h \cap B_h$, donc $N(H)$ est fermé dans G.

Exercice 11.27. Soit G un groupe topologique séparé opérant continûment sur un espace topologique séparé X. Soient K une partie compacte de G et F une partie fermée de X. Montrer que $KF = \{gx\ ;\ g \in K \text{ et } x \in F\}$ est fermé dans X.
Solution. Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} f\ : & K \times X & \longrightarrow & X \\ & (g, x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

D'après la proposition 11.3.7, f est une application propre. Comme $K \times F$ est fermé dans $K \times X$, alors $KF = f(K \times F)$ est fermé dans X.

Exercice 11.28. Soit G un groupe topologique séparé opérant continûment et proprement sur un espace topologique séparé X. Soient F une partie fermée de G et K une partie compacte de X. Montrer que FK est une partie fermée de X.
Solution. D'après la proposition 11.3.5, l'application

$$\begin{array}{rccc} f_K\ : & G \times K & \longrightarrow & X \\ & (g, x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

est propre. Comme $F \times K$ est fermé dans $G \times K$, alors $FK = f_K(F \times K)$ est fermé dans X.

Exercice 11.29. Soient G un groupe topologique séparé, K une partie compacte de G et F une partie fermée de G. Montrer que $\bigcup\limits_{g \in K} gFg^{-1}$ est fermé dans G.
Solution. Le groupe G opérant continûment à gauche sur lui-même par l'action

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, x) & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

D'après la proposition 11.3.7, l'application

$$\begin{array}{rccc} f\ : & K \times G & \longrightarrow & G \\ & (g, x) & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

est propre. Or $K \times F$ est fermé dans $K \times G$, d'où $\bigcup\limits_{g \in K} gFg^{-1} = f(K \times F)$ est fermé dans G.

Exercice 11.30. Soient G un groupe topologique localement compact et H un sous-groupe discret de G tel que l'espace homogène G/H soit compact. Montrer que pour tout $h \in H$, l'ensemble $\{ghg^{-1}\ ;\ g \in G\}$ est fermé dans G.
Solution. Soit $q : G \longrightarrow G/H$ l'application quotient. Comme G/H est compact, d'après la proposition 11.3.1, il existe un compact K de G tel que $q(K) = G/H$, d'où $G = KH$. Soit $h \in H$. Soit $g \in G$, alors il existe $k \in K$ et $h_1 \in H$ tels que $g = kh_1$, d'où $ghg^{-1} = kh_1hh_1^{-1}k^{-1}$. Comme H est un sous-groupe discret de G, il résulte du théorème 11.2.1 que H est fermé dans G. Comme l'ensemble $F_q = \{h_1hh_1^{-1}\ ;\ h_1 \in H\}$ est fermé dans H car H est discret, alors F_q est fermé dans G. Comme on a $\{ghg^{-1}\ ;\ g \in G\} = \bigcup\limits_{k \in K} kF_dk^{-1}$, on déduit de l'exercice précédent que l'ensemble $\{ghg^{-1}\ ;\ g \in G\}$ est fermé dans G.

Exercice 11.31. Soit G un groupe topologique séparé opérant continûment et librement sur un espace topologique séparé X. Soit $G_{\mathcal{R}}$ le graphe de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur X dont les classes sont les orbites des points de X. Autrement dit, soit $(x, y) \in X \times X$, alors on a $(x, y) \in G_{\mathcal{R}}$ si et seulement si il existe $g \in G$ tel que $gy = x$. Soient $y \in Y$ et $g, h \in G$ tels que $gy = hy$, alors

$h^{-1}gy = y$. Comme G opère librement sur X, alors on a $h^{-1}g = e$, d'où $g = h$. Donc pour tout $(x, y) \in G_{\mathcal{R}}$, il existe un unique $g \in G$ tel que $gy = x$. Pour tout $(x, y) \in G_{\mathcal{R}}$, on pose $\varphi(x, y)$ l'unique élément de G tel que $\varphi(x, y)y = x$. Ainsi, on définit une application $\varphi : G_{\mathcal{R}} \longrightarrow G$, appelée **application canonique** de $G_{\mathcal{R}}$ dans G.
En utilisant les propositions 1.5.6 et 3.7.1, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) G opère proprement sur X.

(ii) L'espace des orbites X/G est séparé et l'application canonique $\varphi : G_{\mathcal{R}} \longrightarrow G$ est continue.

Solution. Puisque l'application quotient $q : X \longrightarrow X/G$ est ouverte, on déduit de la proposition 1.5.6 que l'espace des orbites X/G est séparé si et seulement si $G_{\mathcal{R}}$ est fermé dans $X \times X$. Par définition, G opère proprement sur X si l'application

$$\begin{array}{rccc} T: & G \times X & \longrightarrow & X \times X \\ & (g, y) & \longmapsto & (gy, y) \end{array}$$

est propre. Comme T est une application continue injective, d'après la proposition 3.7.1, T est propre si et seulement si $T(G \times X) = G_{\mathcal{R}}$ est fermé dans $X \times X$ et si on désigne par S l'application T considérée comme application de $G \times X$ dans $T(G \times X) = G_{\mathcal{R}}$, alors S est un homéomorphisme. Or S est une application continue bijective dont l'application réciproque est l'application $(x, y) \longmapsto (\varphi(x, y), y)$. Donc S est un homéomorphisme si et seulement si φ est une application continue de $G_{\mathcal{R}}$ dans G. Ainsi, on obtient l'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).

Exercice 11.32. Considérons l'action naturelle de $\mathrm{O}(n)$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (A, x) & \longmapsto & Ax \end{array}$$

Montrer que l'action de $\mathrm{O}(n)$ sur $\mathbb{R}^n$ est propre, mais n'est pas libre et que $\mathbb{R}^n/\mathrm{O}(n)$ est homéomorphe à $[0, +\infty[$.
Solution. Puisque $\mathrm{O}(n)$ est compact, il résulte du théorème 11.3.2 que l'action de $\mathrm{O}(n)$ sur $\mathbb{R}^n$ est propre. L'action de $\mathrm{O}(n)$ sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas libre car pour tout $A \in \mathrm{O}(n)$, on a $A0 = 0$, où 0 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$.
L'application

$$\begin{array}{rccc} N: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ & x & \longmapsto & \|x\|_2 \end{array}$$

est continue et surjective. D'après la proposition 3.7.3, N est aussi une application fermée. De plus, N est constante sur les orbites car si $x, y \in \mathbb{R}^n$ et si $A \in \mathrm{O}(n)$ tels que $Ax = y$, alors on a $\|y\|_2 = \|Ax\|_2 = \|x\|_2$. Notons aussi que d'après la proposition 8.7.1, si $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|y\|_2 = \|x\|_2$, alors il existe $A \in \mathrm{O}(n)$ telle que $Ax = y$. D'après le corollaire 1.4.1, il existe un homéomorphisme $\widetilde{N} : \mathbb{R}^n/\mathrm{O}(n) \longrightarrow [0, +\infty[$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[rr, "N"] \arrow[dr, "q"'] & & {[0, +\infty[} \\ & \mathbb{R}^n/\mathrm{O}(n) \arrow[ur, "\widetilde{N}"'] & \end{tikzcd}$$

Chapitre 12

ALGÈBRES DE BANACH

Proposition. Soient A une algèbre unitaire sur $\mathbb{C}$ et $x \in A$ tel que $\mathrm{Sp}_A(x) \neq \emptyset$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme, on a $\mathrm{Sp}_A(P(x)) = P(\mathrm{Sp}_A(x)) = \{P(\lambda)\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)\}$.
2. Si $x \in \mathrm{GL}(A)$, on a $\mathrm{Sp}_A(x^{-1}) = \{\lambda^{-1}\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)\}$.

Démonstration. 1. Ce résultat est trivial si P est constant, donc on peut supposer P non constant. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$, alors on a $x - \lambda \notin \mathrm{GL}(A)$ et $P(X) - P(\lambda) \in \mathbb{C}[X]$ admettant λ comme racine, donc $P(X) - P(\lambda) = (X - \lambda)Q(X, \lambda) = Q(X, \lambda)(X - \lambda)$. Supposons que $P(x) - P(\lambda) \in \mathrm{GL}(A)$, alors il existe $y \in A$ tel que $y(P(x) - P(\lambda)) = (P(x) - P(\lambda))y = 1$, d'où $yQ(x, \lambda)(x - \lambda) = (x - \lambda)Q(x, \lambda)y = 1$, ceci implique $x - \lambda \in \mathrm{GL}(A)$, d'où la contradiction. Donc on a bien $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}_A(P(x))$.

Réciproquement, soit $\mu \in \mathrm{Sp}_A(P(x))$, alors $P(x) - \mu \notin \mathrm{GL}(A)$. Comme on a $P(X) - \mu = \alpha \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, et les λ_i sont les racines du polynôme $P(X) - \mu$, alors $P(x) - \mu = \alpha \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)$. Si pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a $x - \lambda_i \in \mathrm{GL}(A)$, alors $P(x) - \mu \in \mathrm{GL}(A)$, d'où la contradiction. Donc il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x - \lambda_i \notin \mathrm{GL}(A)$, d'où $\lambda_i \in \mathrm{Sp}_A(x)$ et on a $P(\lambda_i) = \mu$.

2. Soit $x \in \mathrm{GL}(A)$. Alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x) \cup \mathrm{Sp}_A(x^{-1})$, on a $\lambda \neq 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda \neq 0$. On a $x^{-1} - \frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda}x^{-1}(x - \lambda)$. Comme $-\frac{1}{\lambda}x^{-1} \in \mathrm{GL}(A)$, on en déduit que $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$ si et seulement si $\lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}_A(x^{-1})$. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}_A(x^{-1}) = \{\lambda^{-1}\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)\}$. ■

Théorème. Soit B une sous-algèbre fermée unitaire d'une algèbre de Banach unitaire $(A, \| \|)$. On suppose de plus que l'on a $1_B = 1_A$. Alors on a :

1. $\mathrm{GL}(B)$ est ouvert et fermé dans $B \cap \mathrm{GL}(A)$.
2. Pour tout $x \in B$, on a $\mathrm{Sp}_A(x) \subset \mathrm{Sp}_B(x)$ et $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_B(x)$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$.
3. Pour tout $x \in B$, on a $\mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_B(x)) \subset \mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_A(x))$.
4. Soit $x \in B$. Si $\mathrm{Sp}_A(x) \neq \mathrm{Sp}_B(x)$, alors $\mathrm{Sp}_B(x)$ est la réunion de $\mathrm{Sp}_A(x)$ et de quelques composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$.
5. Soit $x \in B$. Si $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$ est connexe, alors on a $\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_B(x)$.
6. Soit $x \in B$. Si $\mathrm{Sp}_B(x)$ est d'intérieur vide, alors on a $\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_B(x)$.

Démonstration. 1. D'après le corollaire 12.1.1, $\mathrm{GL}(B)$ est ouvert dans B. On a aussi $\mathrm{GL}(B) \subset \mathrm{GL}(A)$, voir Appendice E. Donc $\mathrm{GL}(B)$ est ouvert dans $B \cap \mathrm{GL}(A)$. Montrons maintenant que $\mathrm{GL}(B)$ est fermé dans $B \cap \mathrm{GL}(A)$. Soient $x \in B \cap \mathrm{GL}(A)$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dans $\mathrm{GL}(B)$, qui converge vers x. Alors la suite $(x_n^{-1})_{n \geq 0}$ converge vers x^{-1} dans A. Comme B est fermée dans A,

alors on a $x^{-1} \in B$. Par conséquent, on a $x \in \mathrm{GL}(B)$. Donc $\mathrm{GL}(B)$ est fermé dans $B \cap \mathrm{GL}(A)$.
2. Soit $x \in B$. D'après le corollaire 12.3.2, on a $\mathrm{Sp}_A(x) \subset \mathrm{Sp}_B(x)$. Comme $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_B(x)$ est ouvert dans $\mathbb{C}$ et on a $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_B(x) \subset \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$, alors $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_B(x)$ est ouvert dans $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$. Montrons que $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_B(x)$ est fermé dans $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$. Soient $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_B(x)$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda$. Alors pour tout $n \geq 0$, on a $x - \lambda_n \in \mathrm{GL}(B)$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x - \lambda_n = x - \lambda \in B \cap \mathrm{GL}(A)$. Il résulte de 1 que l'on a $x - \lambda \in \mathrm{GL}(B)$, d'où $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_B(x)$. Donc $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_B(x)$ est aussi fermé dans $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$.
3. Soit $x \in B$. Soit $\lambda \in \mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_B(x))$. Comme on a $\mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_B(x)) = \mathrm{Sp}_B(x) \cap \overline{\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_B(x)}$, car $\mathrm{Sp}_B(x)$ est fermé dans $\mathbb{C}$, alors $\lambda \in \mathrm{Sp}_B(x)$ et il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_B(x)$ convergeant vers λ. Donc on a $x - \lambda \notin \mathrm{GL}(B)$, et pour tout $n \geq 0$, on a $x - \lambda_n \in \mathrm{GL}(B)$. Comme la suite $(x - \lambda_n)_{n\geq 0}$ converge vers $x - \lambda$, il résulte de 1 que $x - \lambda \notin \mathrm{GL}(A)$, donc on a $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$. Comme on a aussi $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_B(x) \subset \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$, alors $\lambda \in \mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_A(x))$. Par conséquent, on a $\mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_B(x)) \subset \mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_A(x))$.
4. Soit $x \in B$ tel que $\mathrm{Sp}_A(x) \neq \mathrm{Sp}_B(x)$. D'après 2, $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_B(x)$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$. Donc $\mathrm{Sp}_B(x) \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$ est non vide et à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$, donc $\mathrm{Sp}_B(x) \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$ est une réunion de quelques composantes connexes bornées de $C \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$.
5. Soit $x \in B$. D'après 2, $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_B(x)$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$. Donc, si $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$ est connexe, alors on a $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_B(x) = \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$, d'où $\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_B(x)$.
6. Soit $x \in B$. Si $\mathrm{Sp}_B(x)$ est d'intérieur vide, alors on a $\mathrm{Sp}_B(x) = \mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_B(x))$, d'où $\mathrm{Sp}_B(x) \subset \mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_A(x)) \subset \mathrm{Sp}_A(x)$. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_B(x)$. ■

Théorème (**Beurling**). Soient $(A, \| \ \|)$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in A$. La suite $\left(\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1}$ est convergente dans $\mathbb{R}$ et on a $r(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\limits_{n\geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Démonstration. On peut supposer $x \neq 0$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$. D'après la proposition 12.3.2, on a $\lambda^n \in \mathrm{Sp}_A(x^n)$, d'où $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$. Donc on a $|\lambda| \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Par conséquent, on a $|\lambda| \leq \inf\limits_{n\geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. On en déduit que l'on a $r(x) \leq \inf\limits_{n\geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Pour avoir le résultat, il reste à montrer que l'on a $\limsup\limits_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x)$. Soit $U = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ |\lambda| < \frac{1}{r(x)}\right\}$, si $r(x) \neq 0$. Si $r(x) = 0$, on prend $U = \mathbb{C}$. Alors pour tout $\lambda \in U$, $1 - \lambda x \in \mathrm{GL}(A)$. Soit f une forme linéaire continue sur A. D'après le corollaire 12.1.1, la fonction $\lambda \longmapsto f\big((1 - \lambda x)^{-1}\big)$ est holomorphe sur U. Donc il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{C}$ tel que pour tout $\lambda \in U$, on ait $f\big((1 - \lambda x)^{-1}\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \lambda^n$. Par ailleurs, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < \dfrac{1}{\|x\|}$, on a $\lambda \in U$ et $(1 - \lambda x)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n x^n$, voir théorème 12.1.1. Par conséquent, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < \dfrac{1}{\|x\|}$, on a $f\big((1 - \lambda x)^{-1}\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(x^n)\lambda^n$. On en déduit que pour tout $n \geq 0$, on a $f(x^n) = \alpha_n$, voir un cours sur les fonctions holomorphes. Finalement, pour tout $\lambda \in U$, on a $f\big((1 - \lambda x)^{-1}\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda^n x^n)$. En particulier, pour tout $\lambda \in U$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\lambda^n x^n) = 0$. Donc la suite $(f(\lambda^n x^n))_{n\geq 0}$ est bornée dans $\mathbb{C}$. On déduit du théorème de Banach-Steinhaus, voir exercice 7.8, que la suite $(\lambda^n x^n)_{n\geq 0}$ est bornée dans $(A, \| \ \|)$. Autrement dit, il existe une constante $0 < M_\lambda < +\infty$ telle que pour tout $n \geq 1$, on ait $\|\lambda^n x^n\| \leq M_\lambda$, d'où $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{M_\lambda^{\frac{1}{n}}}{|\lambda|}$, si $\lambda \neq 0$. Par conséquent, on a $\limsup\limits_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{1}{|\lambda|}$. Autrement dit, pour tout $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $r(x) < |\mu|$, on a $\limsup\limits_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\mu|$. Donc on a $\limsup\limits_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x)$. ■

Théorème. Soient X un espace compact et $A = C(X)$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$. C'est une algèbre de Banach commutative unitaire.

1. Pour tout fermé F de X, on pose $I_F = \big\{f \in A \ ; \ f(x) = 0\,, \text{ pour tout } x \in F\big\}$. Alors I_F est un idéal bilatère fermé de A.
2. L'application $T : F \longmapsto I_F$ est bijective de l'ensemble des fermés de X sur l'ensemble des idéaux bilatères fermés de A.
3. Tout idéal bilatère fermé de A est l'intersection des idéaux bilatères maximaux de A le contenant.
4. Pour tout $x \in X$, l'application suivante est un caractère de A.
$$\begin{array}{rccc} \delta_x : & A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
5. L'application suivante est un homéomorphisme.
$$\begin{array}{rccc} \delta : & X & \longrightarrow & \widehat{A} \\ & x & \longmapsto & \delta_x \end{array}$$

Démonstration. 1. Il est clair que pour tout fermé F de X, I_F est un idéal bilatère fermé de A.

2. Soient F et G deux fermés de X tels que $F \neq G$. Alors, on peut supposer qu'il existe $x \in X$ tel que $x \in F$ et $x \notin G$. D'après le théorème d'Urysohn, théorème 3.6.1, il existe $f \in A$ telle que $f(x) = 1$ et $f(y) = 0$, pour tout $y \in G$. Alors on a $f \in I_G$, mais $f \notin I_F$, d'où $I_F \neq I_G$. Donc l'application T est injective. Montrons que T est surjective. Soit I un idéal bilatère fermé de A. Soit $F = \bigcap\limits_{f\in I} f^{-1}(\{0\})$, alors F est fermé dans X et on a $I \subset I_F$. Montrons que l'on a $I_F \subset I$. Soit $f \in I_F$. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, et posons $K = \{x \in X \ ; \ |f(x)| \geq \varepsilon\}$, alors K est une partie compacte de X et on a $K \cap F = \emptyset$. Pour tout $x \in K$, il existe $f_x \in I$ tel que $|f_x(x)| > 2$, car $x \notin F$. Comme f_x est continue, il existe un voisinage ouvert V_x de x dans X tel que pour tout $y \in V_x$, on ait $|f_x(y)| > 1$. Comme $(V_x)_{x\in K}$ est un recouvrement ouvert de K, alors il existe $x_1, \dots, x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Soit $g = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{f_{x_i}} f_{x_i}$, alors $g \in I$. Soit $h = \sup(g, \varepsilon)$, alors h est continue et $h(y) \geq \varepsilon$, pour tout $y \in X$, donc on a $h \in \mathrm{GL}(A)$. Montrons que l'on a $\|f - gh^{-1}f\|_\infty \leq \varepsilon$. Soit $x \in K$, alors il existe i tel que $x \in V_{x_i}$, donc $|f_{x_i}(x)| > 1$, d'où $g(x) > 1 > \varepsilon$. Par conséquent, on a $h(x) = g(x)$, donc $|f(x) - g(x)h^{-1}(x)f(x)| = 0$. Soit $x \in X \setminus K$, alors on a $|f(x)| < \varepsilon$. Puisque $0 \leq g(x)h^{-1}(x) \leq 1$, alors on a $|f(x) - g(x)h^{-1}(x)f(x)| = |f(x)|\,|1 - g(x)h^{-1}(x)| \leq |f(x)| < \varepsilon$. Par conséquent, on a $\|f - gh^{-1}f\|_\infty \leq \varepsilon$. Comme on $gh^{-1}f \in I$ et ε est assez petit, alors on a $f \in \overline{I} = I$. Donc on a bien $I = I_F$. On en déduit que l'application T est surjective.

3. D'après 2, les idéaux bilatères maximaux de A sont de la forme $I_x = \{f \in A \ ; \ f(x) = 0\}$, avec $x \in X$. Soit I un idéal bilatère fermé de A. Il existe un fermé F de X tel que $I = I_F$. Comme on a $I_F = \bigcap\limits_{x\in F} I_x$, alors I est l'intersection des idéaux bilatères maximaux de A le contenant.

4. Il est clair que pour tout $x \in X$, δ_x est un caractère de A.
5. Il est clair que δ est une application continue. Comme X est un espace compact, pour avoir le résultat, il reste à vérifier que δ est bijective. Montrons d'abord que δ est injective. Soient $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. D'après le théorème d'Urysohn, 3.6.1, il existe $f \in A = C(X)$ telle que $f(x) \neq f(y)$. D'où on a $\delta_x(f) \neq \delta_y(f)$. Donc δ est injective. Montrons que δ est surjective. Soit χ un caractère de A. D'après la proposition 12.4.3, $\ker(\chi)$ est un idéal bilatère fermé maximal de A. D'après 2, il existe $x \in X$ tel que $\ker(\chi) = I_x = \{f \in A \; ; \; f(x) = 0\} = \ker(\delta_x)$. Une fois de plus, d'après la proposition 12.4.3, on a alors $\chi = \delta_x$. Donc δ est bien surjective. ■

Supplément d'exercices

Exercice 12.22. Soients $(A, \| \ \|)$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in A$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$, on pose $R(\lambda) = (x - \lambda)^{-1}$. L'ensemble $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$ est appelé l'**ensemble résolvant** de x et l'application $\lambda \longmapsto R(\lambda)$ est appelée la **résolvante** de x. Rappelons, théorème 12.1.1, que si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|x\|$, alors $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$ et on a $R(\lambda) = (x - \lambda)^{-1} = \frac{-1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\lambda^n} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$.
D'où on a $\|R(\lambda)\| \leq \dfrac{1}{|\lambda| - \|x\|}$.

1. Montrer que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$, on a $R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu) R(\lambda) R(\mu)$.
2. Montrer que $\lambda \longmapsto R(\lambda)$ est $\mathbb{C}$-différentiable et que l'on a $R'(\lambda) = (R(\lambda))^2$.

Solution. 1. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$, on a :

$$\begin{aligned}
(\lambda - \mu) R(\lambda) R(\mu) &= (\lambda - \mu)(x - \lambda)^{-1}(x - \mu)^{-1} \\
&= ((x - \mu) - (x - \lambda))(x - \lambda)^{-1}(x - \mu)^{-1} \\
&= (x - \mu)(x - \lambda)^{-1}(x - \mu)^{-1} - (x - \lambda)(x - \lambda)^{-1}(x - \mu)^{-1} \\
&= (x - \lambda)^{-1} - (x - \mu)^{-1} = R(\lambda) - R(\mu) .
\end{aligned}$$

2. Rappelons d'abord que $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$, avec $\mu \neq \lambda$, on a $\dfrac{R(\mu) - R(\lambda)}{\mu - \lambda} = R(\lambda) R(\mu)$. D'après le corollaire 12.1.1, l'application $\lambda \longmapsto R(\lambda)$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$, donc on a $\lim\limits_{\substack{\mu \to \lambda \\ \mu \neq \lambda}} \dfrac{R(\mu) - R(\lambda)}{\mu - \lambda} = (R(\lambda))^2$. Par conséquent, $\lambda \longmapsto R(\lambda)$ est $\mathbb{C}$-différentiable et l'on a $R'(\lambda) = (R(\lambda))^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$.

Exercice 12.23. Soient $(H, \langle \ , \ \rangle)$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie et $(e_p)_{p \geq 1}$ une base hilbertienne de H. Soit $T \in A = \mathscr{L}(H)$ tel que $T(e_p) = \frac{1}{2^p} e_{p+1}$, pour tout $p \geq 1$. Montrer que l'on a $r(T) = 0$, mais que T n'est pas nilpotent.
Solution. On montre par récurrence que pour tout $p, n \geq 1$, on a $T^n(e_p) = \frac{1}{2^p} \frac{1}{2^{p+1}} \cdots \frac{1}{2^{p+n-1}} e_{p+n}$.
Par conséquent, T n'est pas nilpotent. Soient $x \in H$ et $\varepsilon > 0$. On a $x = \sum_{p=1}^{+\infty} \lambda_p e_p$, avec $\|x\|^2 =$

$\sum_{p=1}^{+\infty} |\lambda_p|^2$, et il existe $q \geq 1$ tel que $\frac{q+1}{2^{2q}} < \varepsilon$ et $\sum_{p=q+1}^{+\infty} |\lambda_p|^2 < 1$. On a :

$$T^n(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \lambda_p T^n(e_p) = \sum_{p=1}^{+\infty} \lambda_p \tfrac{1}{2^p} \tfrac{1}{2^{p+1}} \cdots \tfrac{1}{2^{p+n-1}} e_{p+n}\,,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \|T^n(x)\|^2 &= \sum_{p=1}^{+\infty} |\lambda_p|^2 \big[\tfrac{1}{2^p} \tfrac{1}{2^{p+1}} \cdots \tfrac{1}{2^{p+n-1}}\big]^2 \\ &= \sum_{p=1}^{q} |\lambda_p|^2 \big[\tfrac{1}{2^p} \tfrac{1}{2^{p+1}} \cdots \tfrac{1}{2^{p+n-1}}\big]^2 + \sum_{p=q+1}^{+\infty} |\lambda_p|^2 \big[\tfrac{1}{2^p} \tfrac{1}{2^{p+1}} \cdots \tfrac{1}{2^{p+n-1}}\big]^2 . \end{aligned}$$

Pour tout $p \geq q+1$, on a $\frac{1}{2^p} \frac{1}{2^{p+1}} \cdots \frac{1}{2^{p+n-1}} \leq \left(\frac{1}{2^p}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{p(n-1)}} \leq \frac{1}{2^{q(n-1)}}$. Pour tout $1 \leq p \leq q$ et pour tout $n \geq q$, on a $\frac{1}{2^p} \frac{1}{2^{p+1}} \cdots \frac{1}{2^{p+n-1}} \leq \frac{1}{2^q} \frac{1}{2^{q+1}} \cdots \frac{1}{2^n} \leq \left(\frac{1}{2^q}\right)^{n-q} = \frac{1}{2^{q(n-q)}}$. Par conséquent, on a $\|T^n(x)\|^2 \leq \frac{1}{2^{2q(n-q)}} \sum_{p=1}^{q} |\lambda_p|^2 + \frac{1}{2^{2q(n-1)}}$, pour tout $n \geq q$. Comme pour tout $s, t \geq 0$, on a $(s+t)^{\frac{1}{n}} \leq s^{\frac{1}{n}} + t^{\frac{1}{n}}$, on déduit que l'on a $\|T^n(x)\|^{\frac{2}{n}} \leq \frac{2^{\frac{2q^2}{n}}}{2^{2q}} \sum_{p=1}^{q} |\lambda_p|^{\frac{2}{n}} + \frac{2^{\frac{2q}{n}}}{2^{2q}} = \alpha_n$. Puisque l'on a $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{q+1}{2^{2q}} < \varepsilon$, il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\|T^n(x)\|^{\frac{2}{n}} < \varepsilon$. Par conséquent, on a $\lim_{n\to+\infty} \|T^n(x)\|^{\frac{1}{n}} = 0$. On déduit de l'exercice 12.10 que l'on a $r(T) = 0$.

Exercice 12.24. Soient A une algèbre de Banach unitaire et $M > 0$ une constante.

1. Montrer que si pour tout $x, y \in A$, on a $\|xy\| \leq M\|yx\|$, alors A est commutative.
2. Montrer que si pour tout $x \in A$, on a $\|x\| \leq Mr(x)$, alors A est commutative.
3. Montrer que si pour tout $x \in A$, on a $\|x\|^2 \leq M\|x^2\|$, alors A est commutative.

Solution. 1. Puisque pour tout $x, y \in A$, on a $\|xy\| \leq M\|yx\|$, alors pour tout $u \in \mathrm{GL}(A)$, on a $\|u^{-1}yu\| \leq M\|y\|$. En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\|e^{-\lambda x} y e^{\lambda x}\| \leq M\|y\|$. Soit f une forme linéaire continue sur A. Alors l'application $\lambda \longmapsto f(e^{-\lambda x} y e^{\lambda x})$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée. Par le théorème de Liouville, cette application est constante, donc on a $f(e^{-\lambda x} y e^{\lambda x}) = f(y)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Ceci étant vrai, pour toute forme linéaire continue sur A, alors on a $e^{-\lambda x} y e^{\lambda x} = y$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Par conséquent, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $ye^{\lambda x} = e^{\lambda x} y$. On en déduit que l'on a $yx = xy$. Autrement dit, A est commutative.
2. Pour tout tout $x, y \in A$, on a $\|xy\| \leq Mr(xy) = Mr(yx) \leq M\|yx\|$. On déduit de 1 qu'alors A est commutative.
3. Par hypothèse, pour tout $x \in A$, on a $\|x\|^2 \leq M\|x^2\|$. On en déduit, par récurrence, que pour tout $n \geq 0$, on a $\|x\|^{2^n} \leq M^{2^n-1}\|x^{2^n}\|$, d'où $\|x\| \leq M^{1-2^{-n}}\|x^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}}$. Par conséquent, on a $\|x\| \leq Mr(x)$. Il résulte de 2 que A est commutative.

Exercice 12.25. Soient $(A, \|\ \|)$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in A$. On dit que x est un **diviseur de zéro topologique** s'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans A telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|x_n\| = 1$ et telle que $\lim_{n\to+\infty} \|x_n x\| = \lim_{n\to+\infty} \|x x_n\| = 0$.

1. Montrer que si x est diviseur de zéro topologique, alors $x \notin \mathrm{GL}(A)$.
2. Montrer que tout élément de $\mathrm{Fr}(\mathrm{GL}(A))$ est un diviseur de zéro topologique.
3. En déduire que si $x \in A$ et si $\lambda \in \mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_A(x))$, alors $x-\lambda$ est un diviseur de zéro topologique.
4. En déduire que si $x \in A$ tel que $r(x) = 0$, alors x est un diviseur de zéro topologique.
5. En déduire que si $A \neq \mathbb{C}$, alors A contient un diviseur de zéro topologique non nul.

Solution. 1. Soient x un diviseur de zéro topologique et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans A telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|x_n\| = 1$ et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n x\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|x x_n\| = 0$. Si $x \in \mathrm{GL}(A)$, alors on a $1 = \|x_n\| = \|x_n x x^{-1}\| \leq \|x_n x\|\,\|x^{-1}\|$, d'où $1 \leq 0$, ce qui est impossible. Donc on a bien $x \notin \mathrm{GL}(A)$.
2. Soit $y \in \mathrm{Fr}(\mathrm{GL}(A))$. Comme $\mathrm{GL}(A)$ est un ouvert dans A, alors $y \notin \mathrm{GL}(A)$ et il existe une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathrm{GL}(A)$ convergeant vers y. D'après l'exercice 12.13, quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|y_n^{-1}\| = +\infty$. Pour tout $n \geq 0$, soit $x_n = \dfrac{y_n^{-1}}{\|y_n^{-1}\|}$. Alors on a $\|x_n\| = 1$ et $x_n y = x_n y - x_n y_n + x_n y_n = x_n(y - y_n) + \dfrac{1_A}{\|y_n^{-1}\|}$, donc $\|x_n y\| \leq \|y - y_n\| + \dfrac{1}{\|y_n^{-1}\|}$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n y\| = 0$. De même, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|y x_n\| = 0$. Donc y est un diviseur de zéro topologique.
3. Soient $x \in A$ et $\lambda \in \mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_A(x)) = \mathrm{Sp}_A(x) \cap \overline{\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)}$. Alors on a $x - \lambda \notin \mathrm{GL}(A)$ et il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Sp}_A(x)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda$. Alors pour tout $n \geq 0$, $x-\lambda_n \in \mathrm{GL}(A)$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x - \lambda_n = x - \lambda$. Donc on a $x - \lambda \in \mathrm{Fr}(\mathrm{GL}(A))$. Il résulte de 2 que $x - \lambda$ est un diviseur de zéro topologique.
4. Soit $x \in A$. Si $r(x) = 0$, alors on a $\mathrm{Sp}_A(x) = \{0\}$, d'où $\mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_A(x)) = \{0\}$. Il résulte de 3 que $x = x - 0$ est un diviseur de zéro topologique.
5. Supposons que $A \neq \mathbb{C}$. D'après le théorème de Mazur, théorème 12.3.2, il existe $x \in A$ tel que $x \neq 0$ et $x \notin \mathrm{GL}(A)$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $x - \lambda \neq 0$. Soit $\lambda \in \mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_A(x))$. D'après 3, $x - \lambda$ est un diviseur de zéro topologique.

Exercice 12.26. Soient X un espace compact et $A = C(X)$ munie de la norme $\|\ \|_\infty$. Soit $f \in A$. Montrer que f est un diviseur de zéro topologique si et seulement si f n'est pas inversible.
Solution. D'après l'exercice précédent, si f est un diviseur de zéro topologique, alors f n'est pas inversible.
Réciproquement, supposons que f n'est pas inversible. Alors il existe $x \in X$ tel que $f(x) = 0$. Si $f = 0$, il est clair que f est un diviseur de zéro topologique. Supposons donc $f \neq 0$, d'où $\|f\|_\infty \neq 0$. Comme on a $0 \in \mathrm{Sp}_A\big(\overline{f}f\big) = \big\{|f(x)|\ ;\ x \in X\big\} \subset [0, +\infty[$, alors on a $0 \in \mathrm{Fr}\big(\mathrm{Sp}_A\big(\overline{f}f\big)\big)$. Il résulte de l'exercice précédent que $\overline{f}f$ est un diviseur de zéro topologique. Soit $(g_n)_{n\geq 0}$ une suite dans A telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|g_n\|_\infty = 1$ et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g_n\overline{f}f\|_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} \|\overline{f}fg_n\|_\infty = 0$. On pose $h_n = g_n\dfrac{\overline{f}}{\|f\|_\infty}$, alors pour tout $n \geq 0$, on a $\|g_n\|_\infty = 1$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|h_n f\|_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} \|f h_n\|_\infty = 0$. Donc f est un diviseur de zéro topologique.

Exercice 12.27. Soient X un espace compact, $(B, \|\ \|)$ une algèbre de Banach unitaire et $\varphi : C(X) \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbres unitaires isométrique. Montrer que pour tout $f \in C(X)$, on a $\mathrm{Sp}_B(\varphi(f)) = \mathrm{Sp}_{C(X)}(f)$.
Solution. D'après la proposition 12.3.3, on a $\mathrm{Sp}_B(\varphi(f)) \subset \mathrm{Sp}_{C(X)}(f)$. Réciproquement, soit

$\lambda \in \mathrm{Sp}_{C(X)}(f)$. Alors $f-\lambda$ n'est pas inversible dans $C(X)$. D'après l'exercice précédent, $f-\lambda$ est un diviseur de zéro topologique. Soit $(g_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $C(X)$ telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|g_n\|_\infty = 1$ et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g_n(f-\lambda)\|_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} \|(f-\lambda)g_n\|_\infty = 0$. Comme φ est un morphisme d'algèbres unitaires isométrique, alors pour tout $n \geq 0$, on a $\|\varphi(g_n)\| = 1$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\varphi(g_n)(\varphi(f)-\lambda)\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|(\varphi(f)-\lambda)\varphi(g_n)\| = 0$. Donc $\varphi(f)-\lambda$ est un diviseur de zéro topologique dans B. D'après l'exercice 12.25, $\varphi(f)-\lambda$ n'est pas inversible dans B. Donc on a $\lambda \in \mathrm{Sp}_B(\varphi(f))$. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}_B(\varphi(f)) = \mathrm{Sp}_{C(X)}(f)$.

Exercice 12.28. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert complexe et $T \in A = \mathscr{L}(H)$.

1. Montrer que si T n'est pas injectif ou si $T(H)$ n'est pas fermé dans H, alors il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans H telle que $\|x_n\| = 1$, pour tout $n \geq 0$ et telle que l'on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T(x_n)\| = 0$.
2. Montrer que si $T(H)$ n'est pas fermé dans H, alors T et T^* sont des diviseurs de zéro topologiques.
3. Montrer que si T et T^* ne sont pas injectifs, alors T et T^* sont des diviseurs de zéro topologiques.

Solution. 1. Ceci résulte de la proposition 7.1.4.
2. Comme $T(H)$ n'est pas fermé dans H, d'après la proposition 7.10.7, $T^*(H)$ n'est pas fermé dans H. D'après 1, il existe deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ dans H telles que $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, pour tout $n \geq 0$ et telles que l'on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T(x_n)\| = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T^*(y_n)\| = 0$. Pour tout $x, y \in H$, soit $\Theta_{x,y} \in \mathscr{L}(H)$ défini par $\Theta_{x,y}(z) = \langle z, y\rangle x$, pour tout $z \in H$. Alors on a $\|\Theta_{x,y}\| = \|x\|\,\|y\|$ et $\Theta_{x,y}^* = \Theta_{y,x}$. Pour tout $n \geq 0$, soit $T_n = \Theta_{x_n,y_n} \in \mathscr{L}(H)$. Alors on a $\|T_n\| = 1$. Montrons que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T \circ T_n\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|T_n \circ T\| = 0$. Soit $x \in H$ tel que $\|x\| \leq 1$. On a $x = \lambda_n y_n + z_n$, avec $\lambda_n \in \mathbb{C}$ et $z_n \in H$ tels que $\langle z_n, y_n\rangle = 0$ et $\|x\|^2 = |\lambda_n|^2 + \|z_n\|^2$, d'où $|\lambda_n| \leq \|x\| \leq 1$. On a $T_n(x) = \lambda_n x_n$, d'où $T \circ T_n(x) = \lambda_n T(x_n)$. Donc on a $\|T \circ T_n(x)\| \leq |\lambda_n|\,\|T(x_n)\| \leq \|T(x_n)\|$. On en déduit que l'on a $\|T \circ T_n\| \leq \|T(x_n)\|$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T \circ T_n\| = 0$. On a $\|T_n \circ T\| = \|T^* \circ T_n^*\|$ et comme précédemment, on vérifie que l'on a $\|T^* \circ T_n^*\| \leq \|T^*(y_n)\|$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_n \circ T\| = 0$. Donc T est un diviseur de zéro topologique. Comme on a $(T^*)^* = T$, on déduit de ce qui précède que T^* est aussi un diviseur de zéro topologique.
3. Si T et T^* ne sont pas injectifs, on déduit de 1, qu'il existe deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ dans H telles que $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, pour tout $n \geq 0$ et telles que l'on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T(x_n)\| = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T^*(y_n)\| = 0$. On fait le même raisonnement comme dans 2 pour montrer que T et T^* sont des diviseurs de zéro topologiques.

Exercice 12.29. Soit $(A, \|\ \|)$ une algèbre normée unitaire.

1. Soient $x, y \in A$ tels que $xy - yx = 1_A$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a
$$xy^{n+1} - y^{n+1}x = (n+1)y^n\,.$$
2. En déduire qu'il n'existe aucun $x, y \in A$ tels que $xy - yx = 1_A$.
3. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé non réduit à 0. En déduire que pour tout $A, B \in \mathscr{L}(E)$, on a $A \circ B - B \circ A \neq \mathrm{id}_E$.

Solution. 1. On va montrer par récurrence l'égalité :
$$xy^{n+1} - y^{n+1}x = (n+1)y^n\,. \tag{12.1}$$

On a $xy - yx = 1_A$, d'où $(xy - yx)y = y$ et $y(xy - yx) = y$. On additionne les deux égalités, on obtient $xy^2 - y^2x = 2y$. Donc l'égalité (12.1) est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons que l'égalité (12.1) est vraie à l'ordre $n-1$ et à l'ordre n et montrons qu'alors l'égalité (12.1) est vraie à l'ordre $n+1$. On a, par hypothèse de récurrence, $xy^n - y^nx = ny^{n-1}$ et $xy^{n+1} - y^{n+1}x = (n+1)y^n$. D'où on a $(xy^{n+1} - y^{n+1}x)y = (n+1)y^{n+1}$ et $y(xy^{n+1} - y^{n+1}x) = (n+1)y^{n+1}$. On additionne les deux égalités, on obtient :

$$xy^{n+2} + yxy^{n+1} - y^{n+1}xy - y^{n+2}x = (2n+2)y^{n+1}\,.$$

On regroupe les termes, on obtient :

$$xy^{n+2} + y(xy^n - y^nx)y - y^{n+2}x = (2n+2)y^{n+1}\,.$$

Par conséquent, on a $xy^{n+2} - y^{n+2}x = (n+2)y^{n+1}$. Autrement dit, l'égalité (12.1) est vraie à l'ordre $n+1$.

2. Supposons qu'il existe $x, y \in A$ tels que $xy - yx = 1_A$. D'après 1, pour tout $n \geq 0$, on a $xy^{n+1} - y^{n+1}x = (n+1)y^n$. Montrons d'abord que pour tout $n \geq 1$, on a $y^n \neq 0$. S'il existe $n \geq 1$ tel que $y^n = 0$, on déduit de l'égalité $xy^n - y^nx = ny^{n-1}$ que $y^{n-1} = 0$, et ainsi de suite, on obtient $y = 0$, ce qui est impossible. Donc, pour tout $n \geq 0$, on a $y^n \neq 0$, d'où $\|y^n\| \neq 0$. De l'égalité $xy^{n+1} - y^{n+1}x = (n+1)y^n$, on déduit que l'on a $(n+1)\|y^n\| \leq 2\|x\|\,\|y\|\,\|y^n\|$. Donc, pour tout $n \geq 0$, on a $(n+1) \leq 2\|x\|\,\|y\|$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $+\infty \leq 2\|x\|\,\|y\|$, ce qui est impossible. Donc, pour tout $x, y \in A$, on a $xy - yx \neq 1_A$.

3. Comme $\mathscr{L}(E)$ est une algèbre normée unitaire, on déduit de 2 que si $E \neq 0$, pour tout $A, B \in \mathscr{L}(E)$, on a $A \circ B - B \circ A \neq \mathrm{id}_E$.

Exercice 12.30. Soit $E = C^\infty([0,\,1], \mathbb{C})$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$. Pour tout $f \in E$, on pose $D(f) = f'$ et $M(f)(t) = tf(t)$ pour tout $t \in [0,\,1]$.

1. Montrer que $M \in \mathscr{L}(E)$ et que l'on a $D \circ M - M \circ D = \mathrm{id}_E$.
2. En déduire que D n'est pas continue.

Solution. 1. Il est clair que D et M sont linéaires de E dans E. Pour tout $f \in E$ et pour tout $t \in [0,\,1]$, on a $|M(f)(t)| = t|f(t)| \leq |f(t)| \leq \|f\|_\infty$, donc on a $\|M(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Par conséquent, M est continue. On a aussi $(D \circ M - M \circ D)(f)(t) = f(t) + tf'(t) - tf'(t) = f(t)$, pour tout $t \in [0,\,1]$, d'où $D \circ M - M \circ D = \mathrm{id}_E$.

2. On déduit de l'exercice précédent que D n'est pas continue.

Exercice 12.31. Soit $A = C^1([0,\,1], \mathbb{C}) = \big\{f : [0,\,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $C^1\big\}$ munie de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

1. Montrer que A est une algèbre de Banach unitaire.
2. Pour tout $t \in [0,\,1]$, soit $f_0(t) = t$. Montrer que la sous-algèbre engendrée par f_0 et 1_A est dense dans A.
3. Pour tout $t \in [0,\,1]$, soit $\delta_t \in \widehat{A}$, défini par $\delta_t(f) = f(t)$, pour tout $f \in A$. Montrer que l'on a $\widehat{A} = \big\{\delta_t\ ;\ t \in [0,\,1]\big\}$ et que l'application $t \longmapsto \delta_t$ est un homéomorphisme de $[0,\,1]$ sur $\widehat{A}$.
4. En déduire que pour tout $f \in A$, on a $r(f) = \|f\|_\infty$ et que la transformation de Gelfand est l'injection canonique de $(A, \|\ \|)$ dans $(C([0,\,1]), \|\ \|_\infty)$.
5. En déduire que la transformation de Gelfand n'est ni isométrique ni surjective.

6. Montrer que tout idéal bilatère fermé de A n'est pas l'intersection des idéaux bilatères maximaux de A le contenant.

Solution. 1. Il est clair que $\| \ \|$ est une norme sur l'algèbre unitaire A. Pour tout $f, g \in A$, on a $(fg)' = f'g + fg'$, d'où :

$$\begin{aligned}
\|fg\| &= \|fg\|_\infty + \|f'g + fg'\|_\infty \\
&\leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \|g'\|_\infty \\
&\leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \|g'\|_\infty + \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty \\
&= \big(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\big)\big(\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty\big) \ = \ \|f\| \, \|g\| \,.
\end{aligned}$$

Donc $(A, \| \ \|)$ est une algèbre normée unitaire. Il reste à montrer que $(A, \| \ \|)$ est de Banach. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(A, \| \ \|)$. Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(f'_n)_{n\geq 0}$ sont des suites de Cauchy dans l'espace de Banach $(C([0,\, 1]), \| \ \|_\infty)$. Par conséquent, il existe $f, g \in C([0,\, 1])$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f'_n - g\|_\infty = 0$, voir proposition 2.6.8. Comme pour tout $n \geq 0$ et pour tout $t \in [0,\, 1]$, on a $f_n(t) - f_n(0) = \displaystyle\int_0^t f'_n(s)\, ds$, alors on a $f(t) - f(0) = \displaystyle\int_0^t g(s)\, ds$. Donc f est dérivable sur l'intervalle $[0,\, 1]$ et on a $f' = g$, d'où $f \in A$. De plus, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty + \lim\limits_{n\to+\infty} \|f'_n - f'\|_\infty = 0$, donc $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans $(A, \| \ \|)$. Par conséquent, $(A, \| \ \|)$ est une algèbre de Banach unitaire.

2. Soit B la sous-algèbre de A engendrée par f_0 et 1_A. Soit $f \in A$. On a $f - f(0)1_A \in A$ et $(f - f(0)1_A)(0) = 0$, et comme $f(0)1_A \in B$, on peut supposer que $f(0) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, théorème 5.4.2, il existe $g \in B$ tel que $\|f' - g\|_\infty < \varepsilon$. Comme $g \in B$, alors il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que $g = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k f_0^k$. Soit $h = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} f_0^{k+1}$, alors $h \in B$, $h(0) = 0$ et on a $\|f' - h'\|_\infty < \varepsilon$. Pour tout $t \in [0,\, 1]$, on a $f(t) - h(t) = \displaystyle\int_0^t (f'(s) - h'(s))\, ds$, d'où $|f(t) - h(t)| \leq \displaystyle\int_0^t |f'(s) - h'(s)|\, ds \leq t\|f' - h'\|_\infty \leq \|f' - h'\|_\infty < \varepsilon$. Donc on a $\|f - h\|_\infty \leq \|f' - h'\|_\infty$. Par conséquent, on a $\|f - h\| < 2\varepsilon$. On en déduit que B est dense dans $(A, \| \ \|)$.

3. Notons d'abord que pour tout $f \in A$, on a $\mathrm{Sp}_A(f) = \big\{f(t) \ ; \ t \in [0,\, 1]\big\}$. Soit $\chi \in \widehat{A}$. Alors on a $\chi(f_0) \in \mathrm{Sp}_A(f_0) = [0,\, 1]$, donc il existe $t \in [0,\, 1]$ tel que $\chi(f_0) = t = \delta_t(f_0)$. On a aussi $\chi(1_A) = \delta_t(1_A)$, donc pour tout $b \in B$, on a $\chi(b) = \delta_t(b)$. Comme B est dense dans A, alors on a $\chi = \delta_t$. Par conséquent, on a $\widehat{A} = \big\{\delta_t \ ; \ t \in [0,\, 1]\big\}$. Comme l'application $t \longmapsto \delta_t$ est bijective et continue de $[0,\, 1]$ dans $\widehat{A}$ et comme $[0,\, 1]$ est compact, alors $t \longmapsto \delta_t$ est un homéomorphisme de $[0,\, 1]$ sur $\widehat{A}$.

4. Pour tout $f \in A$, on a $r(f) = \sup\big\{|\lambda| \ ; \ \lambda \in \mathrm{Sp}_A(f)\big\}$. Comme on a $\mathrm{Sp}_A(f) = \big\{f(t) \ ; \ t \in [0,\, 1]\big\}$, alors $r(f) = \|f\|_\infty$. Pour tout $f \in A$, on a $\hat{f}(\delta_t) = \delta_t(f) = f(t)$. Donc, après avoir identifié $[0,\, 1]$ à $\widehat{A}$, la transformation de Gelfand n'est autre que l'injection canonique de $(A, \| \ \|)$ dans $(C([0,\, 1]), \| \ \|_\infty)$.

5. On déduit de 4 que la transformation de Gelfand n'est ni isométrique ni surjective.

6. Soit $I = \big\{f \in A \ ; \ f(0) = f'(0) = 0\big\}$, alors I est un idéal bilatère fermé de A. D'après 3, les idéaux bilatères maximaux de A sont les $\ker(\delta_t)$. Par conséquent, il existe un unique idéal bilatère maximal de A contenant I, à savoir $\ker(\delta_0)$. Comme on a $f_0 \in \ker(\delta_0)$ et $f_0 \notin I$, alors I

n'est pas l'intersection des idéaux bilatères maximaux de A le contenant.

Exercice 12.32. Soit $(A, \| \|)$ une algèbre de Banach unitaire. Soient $x \in A$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow A$ une application différentiable telle que $f(0) = 1$ et $f'(t) = xf(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) = e^{tx}$.

Solution. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $g(t) = e^{tx}$. Alors on a $g(0) = 1$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \neq t_0$, on a :

$$\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \frac{e^{tx} - e^{t_0 x}}{t - t_0} = \frac{e^{(t-t_0)x} - 1_A}{t - t_0} e^{t_0 x} = xe^{t_0 x} + S(t) .$$

Avec $S(t) = (t - t_0)\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(t - t_0)^{n-2} x^n}{n!}\right) e^{t_0 x}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t - t_0| < 1$, on a alors $\|S(t)\| \leq |t - t_0| e^{\|x\|} \|e^{t_0 x}\|$. Donc on a $\lim_{t \to t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = xe^{t_0 x}$. Par conséquent, l'application g est différentiable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g'(t) = xe^{tx} = xg(t) = g(t)x$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $h(t) = e^{-tx} f(t)$. Alors h est différentiable sur $\mathbb{R}$ et on a $h'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $h(0) = 1$. Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $h(t) = 1$. Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) = e^{tx}$.

Appendice A

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

Le principal concept de la théorie des ensembles est celui d'appartenance ; si X est un ensemble, la relation $x \in X$ signifie que x est un **élément** de l'ensemble X, ou encore qu'il **appartient** à X ; la négation de cette relation s'écrit $x \notin X$.
Si X et Y sont deux ensembles, la relation $Y \subset X$ signifie que chaque élément de Y est un élément de X. Dans ce cas, on dit que Y est **inclus** dans X, ou que Y est **un sous-ensemble** ou **une partie** de X ; la négation de $Y \subset X$ s'écrit $Y \not\subset X$.
Deux ensembles X et Y sont dits **égaux**, noté $X = Y$, si et seulement si $X \subset Y$ et $Y \subset X$. En d'autres termes, deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils possèdent les mêmes éléments. Ainsi, la notion d'ensemble ne comporte pas autre chose que ce qui est spécifié par la donnée des éléments. Dans la pratique, lorsque l'on veut démontrer l'égalité de deux ensembles, il faut prouver les deux inclusions.
L'ensemble dont les éléments sont exactement les objets $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se note $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. En particulier, si x est un objet, l'ensemble $\{x\}$ est appelé le **singleton** d'élément x.

A.1 Opérations sur les ensembles

Partie d'un ensemble définie par une relation. Étant donné un ensemble X et une propriété P, il existe un sous-ensemble unique de X dont les éléments sont tous les éléments $x \in X$ pour lesquels $P(x)$ est vraie ; ce sous-ensemble s'écrit $\big\{x \in X \ ; \ P(x)\big\}$. Par exemple on a $X = \big\{x \in X \ ; \ x = x\big\}$. L'ensemble $\emptyset_X = \big\{x \in X \ ; \ x \neq x\big\}$ est appelé le **sous-ensemble vide** de X ; il ne possède aucun élément. Si X et Y sont deux ensembles, on a $\emptyset_X = \emptyset_Y$, en d'autres termes tous les ensembles vides sont donc égaux et, pour cette raison, ils seront tous représentés par $\emptyset$. Donc pour tout ensemble X, on a $\emptyset \subset X$.
Notez que l'on doit distinguer entre un élément et un sous-ensemble d'un ensemble donné. Par exemple, l'ensemble $\{\emptyset\}$ est non vide, car $\emptyset \in \{\emptyset\}$, et donc on a $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Ensemble des parties d'un ensemble. Si X est un ensemble, il existe un unique ensemble dont les éléments sont tous les sous-ensembles de X ; on le note $\mathscr{P}(X)$. On a donc $\emptyset \in \mathscr{P}(X)$, $X \in \mathscr{P}(X)$ et

$$A \subset X \iff A \in \mathscr{P}(X).$$

En particulier, on a :

$$a \in X \iff \{a\} \subset X \iff \{a\} \in \mathscr{P}(X).$$

Différence de deux ensembles ; complémentaire d'une partie. Si X et A sont deux ensembles, l'ensemble $\{x \in X \;;\; x \notin A\}$ s'appelle la **différence** de l'ensemble X et de l'ensemble A, on le note $X \setminus A$. Si, de plus, $A \subset X$, alors $X \setminus A$ s'appelle le **complémentaire** de A dans X, et peut aussi se noter $\complement_X A$.

Intersection et réunion de deux ensembles. L'**intersection** de deux ensembles X et Y, notée $X \cap Y$, est l'ensemble formé de tous les éléments qui appartiennent à la fois à X et Y. En d'autres termes, on a :

$$x \in X \cap Y \iff x \in X \text{ et } x \in Y.$$

Deux ensembles dont l'intersection est $\emptyset$ sont dits **disjoints**.
La **réunion** de deux ensembles X et Y, notée $X \cup Y$, est l'ensemble formé de tous les éléments qui appartiennent à l'un au moins des deux ensembles X, Y. En d'autres termes, on a :

$$x \in X \cup Y \iff x \in X \text{ ou } x \in Y.$$

Produit cartésien. Le produit cartésien est un de plus importante construction en théorie des ensembles. Il nous permet d'exprimer plusieurs concepts en termes d'ensembles. A deux objets a, b, est associé un nouvel objet que l'on note (a, b) et que l'on appelle le couple (a, b). L'opération consistant à former des couples est soumise à une seule règle d'emploi, que voici : pour que l'on ait $(a, b) = (c, d)$ il faut et il suffit que l'on ait $a = c$ et $b = d$. En particulier, on a $(a, b) = (b, a)$ si et seulement si $a = b$. Ne pas confondre le couple (a, b) avec l'ensemble à deux éléments $\{a, b\}$.
Soient X et Y deux ensembles, le **produit cartésien** (ou simplement **produit**) de X et Y, noté $X \times Y$, est l'ensemble des couples (x, y), où x décrit X et y décrit Y. Autrement dit, on a :

$$X \times Y = \big\{(x, y) \;;\; x \in X \text{ et } y \in Y\big\}.$$

On définit de façon analogue le produit de n ensembles :
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n ensembles, on a :

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;;\; \text{pour tout } i, \text{ on ait } \; x_i \in X_i\big\}.$$

Un élément $z = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ est appelé un n-uples et x_i s'appelle la i$^{\text{ième}}$ coordonnée de z. Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux éléments de $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, alors on a $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $x_i = y_i$. Si X est un ensemble, on notera X^n le produit cartésien de X par lui-même n fois.

Proposition A.1.1. *Soient X, Y et Z des ensembles.*

1. *On a $X \cap Y \subset X \subset (X \cup Y)$, $X \cap \emptyset = \emptyset$, $X \cup \emptyset = X$, $X \setminus X = \emptyset$ et $X \setminus \emptyset = X$.*
2. *On a $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$, $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$,*
$$(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z), \quad (X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z).$$
3. *Soient A et B deux parties de X, alors on a :*
$$X \setminus (X \setminus A) = A, \quad A \setminus B = A \cap (X \setminus B)\,,$$
$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B), \quad X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B).$$
4. *Soient A et B deux parties de X, alors $A \subset B$ si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :*
$$A \cap B = A, \quad A \cup B = B, \quad X \setminus B \subset X \setminus A, \quad A \cap (X \setminus B) = \emptyset, \quad (X \setminus A) \cup B = X.$$

A.2 Applications

Soient X et Y deux ensembles. Se donner une **application** f de X dans Y, que l'on note $f : X \longrightarrow Y$, c'est faire correspondre, à chaque élément x de X, un unique élément de Y, que l'on note $f(x)$. Si $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $y = f(x)$, on dit que y est la **valeur** de f en x, ou que y est l'**image** de x par f et x est un **antécédent** de y. L'ensemble X s'appelle l'ensemble **de départ** et l'ensemble Y s'appelle l'ensemble **d'arrivée** de f. Le **graphe** de l'application f, noté Γ_f, est le sous-ensemble de $X \times Y$, défini par :

$$\Gamma_f = \big\{(x,y) \in X \times Y \ ; \ y = f(x)\big\} = \big\{(x, f(x)) \in X \times Y \ ; \ x \in X\big\}.$$

Notons qu'un sous-ensemble G de $X \times Y$ est le graphe d'une application de X dans Y si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe un unique $y \in Y$ tel que $(x, y) \in G$. D'ailleurs, c'est ainsi que la plupart des auteurs définit une application de X dans Y.
Le mot **fonction** est synonyme du mot application. En général, on emploie le mot fonction lorsque l'ensemble d'arrivée est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient X, Y deux ensembles et f une application de X dans Y. Lorsque pour tout $x \in X$, $f(x)$ est donné explicitement, pour désigner f, on utilise la notation $x \longmapsto f(x)$ ou

$$f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Égalité de deux applications. Si X, Y, X', Y' sont des ensembles et si $f : X \longrightarrow Y$, $g : X' \longrightarrow Y'$ sont des applications, on a $f = g$ si et seulement si on a $X = X'$, $Y = Y'$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in X$.

Composition des applications. Soient X, Y, Z des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ des applications. La **composée** de f et g, notée $g \circ f$, est l'application de X dans Z définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in X$.
Soient T un ensemble et $h : Z \longrightarrow T$ une application. Alors on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ et cette application est notée $h \circ g \circ f$.

Restriction et prolongement. Soient X, Y des ensembles et A un sous-ensemble de X. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application. On appelle **restriction** de f à A l'application $f_{|A} : A \longrightarrow Y$ telle que pour tout $x \in A$, on ait $f_{|A}(x) = f(x)$.
Soient $h : A \longrightarrow Y$ et $g : X \longrightarrow Y$ des applications. On dit que g est un **prolongement** de h si pour tout $x \in A$, on a $g(x) = h(x)$. Autrement dit, g est un **prolongement** de h si la restriction de g à A est égale à h.

Notation. Soient X et Y deux ensembles. Les applications de X dans Y constituent un ensemble que l'on note $\mathscr{F}(X,Y)$, et parfois Y^X, notation particulièrement commode quand X est un ensemble fini. L'ensemble $\mathscr{F}(X,Y)$ s'identifie à un sous-ensemble de $\mathscr{P}(X \times Y)$.

Exemple A.2.1.
1. Pour tout ensemble X, l'application $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ qui à tout élément x associe x s'appelle l'**application identique**, ou **identité**, de X.
2. Si A est une partie d'un ensemble X, on appelle **injection canonique** de A dans X, l'application $\jmath$ de A dans X, notée parfois $\jmath : A \hookrightarrow X$, définie par $\jmath(x) = x$ pour tout $x \in A$.

3. Si A est une partie d'un ensemble X, on appelle **fonction indicatrice**, ou **caractéristique** de A, la fonction de A dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$, notée χ_A ou $\mathbf{1}_A$, donnée par :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A\,, \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A\,. \end{cases}$$

4. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est **constante** s'il existe $y_0 \in Y$ tel que pour tout $x \in X$, on ait $f(x) = y_0$.
5. Soient X et Y deux ensembles. Les applications

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & X \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & Y \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

sont appelées respectivement les **projections canoniques** sur X et Y.

A.3 Images directes et réciproques

Soient X, Y des ensembles et f une application de X dans Y. Pour tout $A \subset X$ et $B \subset Y$, on pose :

$$f(A) = \big\{y \in Y \;;\; \text{il existe } x \in A, \text{ avec } y = f(x)\big\} = \big\{f(x) \;;\; x \in A\big\}\,,$$

$$f^{-1}(B) = \big\{x \in X \;;\; f(x) \in B\big\}.$$

L'ensemble $f(A)$ est appelé l'**image directe** de A par f ; $f(X)$ est appelé simplement l'**image** de f et noté $\mathrm{Im}(f)$. L'ensemble $f^{-1}(B)$ est appelé l'**image réciproque** de B par f. On a $f(A) \subset \mathrm{Im}(f) \subset Y$ et $f^{-1}(B) \subset X$. Ainsi, on obtient les deux applications suivantes :

$$\begin{array}{cccc} \hat{f}: & \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(Y) \\ & A & \longmapsto & f(A) \end{array}, \qquad \begin{array}{cccc} \check{f}: & \mathcal{P}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ & B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array}$$

Proposition A.3.1. *Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On a les propriétés suivantes :*

1. *On a $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(Y) = X$.*
2. *Pour tout $A \subset X$, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.*
3. *Pour tout $B \subset Y$, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.*
4. *Pour $A \subset X$ et $B \subset Y$, on a $f(A) \subset B \iff A \subset f^{-1}(B)$.*
5. *Pour tous $B_1 \subset Y$ et $B_2 \subset Y$, on a :*

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \quad \textit{et} \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

6. *Pour tous $A_1 \subset X$ et $A_2 \subset X$, on a :*

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \quad \textit{et} \quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

7. *Pour tous $B_1 \subset Y$ et $B_2 \subset Y$ tels que $B_1 \subset B_2$, on a $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.*
8. *Pour tous $A_1 \subset X$ et $A_2 \subset X$ tels que $A_1 \subset A_2$, on a $f(A_1) \subset f(A_2)$.*
9. *Pour tout $B \subset Y$, on a $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.*
10. *En général, si $A \subset X$, on a $f(X \setminus A) \neq Y \setminus f(A)$.*
11. *Soient Z un ensemble et $g : Y \longrightarrow Z$ une application. Pour tous $A \subset X$ et $D \subset Z$, on a $(g \circ f)(A) = g(f(A))$ et $(g \circ f)^{-1}(D) = f^{-1}(g^{-1}(D))$.*

A.4 Applications injectives, surjectives et bijectives

Définition A.4.1. Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application de X dans Y.

1. On dit que f est **injective** ou que c'est une **injection**, si toutes les fois deux éléments distincts de X ont pour images par f deux éléments distincts de Y. Autrement dit, f est injective si pour tout $x, x' \in X$, on a :
$$x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')\,.$$
Ou ce qui revient au même :
Pour tout $x, x' \in X$, on a :
$$f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\,.$$
2. On dit que f est **surjective** ou que c'est une **surjection**, si tout élément de Y est l'image par f d'au moins un élément de X. Autrement dit, f est surjective si pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Donc f est surjective si l'on a $f(X) = Y$.
3. On dit que f est **bijective** ou que c'est une **bijection**, si tout élément de Y est l'image par f d'un élément et d'un seul de X. Autrement dit, f est bijective si pour tout $y \in Y$, il existe un unique $x \in X$ tel que $y = f(x)$.

Notons qu'une application f est bijective si et seulement si f est injective et surjective.

Proposition A.4.1. *Soient X, Y, Z des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ des applications. On a les propriétés suivantes :*

1. *Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*
2. *Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*
3. *S'il existe une application $h : Y \longrightarrow X$ telle que $h \circ f = id_X$, alors f est injective et h est surjective.*

Proposition A.4.2. *Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est bijective.*

(ii) *Il existe une application $g : Y \longrightarrow X$ telle que $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_Y$.*

Dans ce cas, l'application g est unique et elle est bijective. On l'appelle ***application réciproque*** *de f et on la note f^{-1}.*

Proposition A.4.3. *Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est injective.*

(ii) *Pour tout $A \subset X$, on a $A = f^{-1}(f(A))$.*

(iii) *Pour tout $A \subset X$, on a $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$.*

(iv) *Pour tous $A_1 \subset X$ et $A_2 \subset X$, on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.*

Proposition A.4.4. *Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est surjective.*

(ii) *Pour tout $B \subset Y$, on a $A = f(f^{-1}(B)) = B$.*

(iii) Pour tout $A \subset X$, on a $Y \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)$.

Corollaire A.4.1. *Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f est bijective.

(ii) Pour tout $A \subset X$, on a $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$.

A.5 Familles

Soit I un ensemble non vide. Une **famille d'ensembles** indexée par I, est la donnée pour chaque $i \in I$ un ensemble A_i. On note une telle famille par $(A_i)_{i\in I}$. S'il existe un ensemble X tel que pour tout $i \in I$, on ait $A_i \subset X$, on dit alors que l'on a une **famille de parties** de X, indexée par I. Donc se donner une famille de parties d'un ensemble X, indexée par I, revient à se donner une application $f : I \longrightarrow \mathscr{P}(X)$; on prend $A_i = f(i)$.

Soient X un ensemble et $\mathcal{T}$ une partie de $\mathscr{P}(X)$, alors on peut considérer $\mathcal{T}$ comme une famille de parties de X, à l'aide de l'injection canonique $\jmath : A \longmapsto A$ de $\mathcal{T}$ dans $\mathscr{P}(X)$. Chaque élément de $\mathcal{T}$ est alors indexée par lui-même.

Soient I et E deux ensembles non vides. Une **famille d'éléments** de E, indexée par I, est une application de I dans E. Si f est une famille d'éléments de E, indexée par I, l'élément $f(i)$ se note usuellement x_i et la famille f elle-même se note $(x_i)_{i\in I}$. Il faut prendre soin de distinguer la famille $(x_i)_{i\in I}$ du sous-ensemble de E de ses valeurs $\{x_i \ ; \ i \in I\}$.

Notons que si A est une partie non vide de E, on peut considérer A comme une famille d'éléments de E, à l'aide de l'injection canonique $\jmath : a \longmapsto a$ de A dans E. Chaque élément de A est alors indexée par lui-même. Dans la suite, on identifiera souvent une partie A d'un ensemble E à la famille qu'elle définit.

Soit X un ensemble, alors se donner une famille de parties de X, indexée par I, revient à se donner une famille d'éléments de $\mathscr{P}(X)$, indexée par I.

Intersection et réunion d'une famille d'ensembles. Soient I un ensemble non vide et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles, il existe un unique ensemble dont les éléments sont exactement ceux qui appartiennent à chacun des ensembles A_i. Cet ensemble, noté $\bigcap_{i\in I} A_i$, est appelé **intersection** de la famille $(A_i)_{i\in I}$. En d'autres termes, on a :

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall\, i \in I,\ x \in A_i.$$

Il existe aussi un unique ensemble dont les éléments sont exactement ceux qui appartiennent à l'un au moins des ensembles A_i. Cet ensemble, noté $\bigcup_{i\in I} A_i$, est appelé **réunion** (ou **union**) de la famille $(A_i)_{i\in I}$. En d'autres termes, on a :

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists\, i \in I \text{ tel que } x \in A_i.$$

Soient X un ensemble et $\mathcal{T}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$. On définit l'intersection et la réunion des ensembles de $\mathcal{T}$, comme étant l'intersection et la réunion de la famille que $\mathcal{T}$ définit. Cette intersection et cette réunion se notent respectivement $\bigcap_{A\in\mathcal{T}} A$ et $\bigcup_{A\in\mathcal{T}} A$.

Notons que si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de X, alors on a

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in X \ ; \text{ pour tout } i \in I,\ x \in A_i\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in X \ ; \text{ il existe } i \in I, \text{ avec } x \in A_i\}.$$

Exemple A.5.1. Soit X un ensemble non vide et considérons l'application $x \longmapsto \{x\}$ de X dans $\mathscr{P}(X)$, alors $(\{x\})_{x\in X}$ est une famille de parties de X et on a $\underset{x\in X}{\cup}\{x\} = X$ et $\underset{x\in X}{\cap}\{x\} = \emptyset$ si X a au moins deux éléments.

Remarque A.5.1. Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles et $A = \underset{i\in I}{\cup} A_i$. Alors on peut considérer la famille $(A_i)_{i\in I}$ comme une famille de parties de A car pour tout $i \in I$, on a $A_i \subset A$.

Il y a plusieurs résultats concernant l'intersection et la réunion d'une famille d'ensembles. On se contente de donner la proposition suivante :

Proposition A.5.1. *Soient I, X deux ensembles non vides et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X.*

1. *On a $X \setminus \big(\underset{i\in I}{\cup} A_i\big) = \underset{i\in I}{\cap}(X \setminus A_i)$ et $X \setminus \Big(\underset{i\in I}{\cap} A_i\Big) = \underset{i\in I}{\cup}(X \setminus A_i)$.*
2. *Si J est un sous-ensemble non vide de I, on a $\underset{i\in J}{\cup} A_i \subset \underset{i\in I}{\cup} A_i$ et $\underset{i\in I}{\cap} A_i \subset \underset{i\in J}{\cap} A_i$.*
3. *Si $(D_i)_{i\in I}$ est une autre famille de parties de X telle que pour pour tout $i \in I$, on ait $A_i \subset D_i$, alors on a :*
$$\big(\underset{i\in I}{\cup} A_i\big) \subset \big(\underset{i\in I}{\cup} D_i\big) \quad \text{et} \quad \big(\underset{i\in I}{\cap} A_i\big) \subset \big(\underset{i\in I}{\cap} D_i\big).$$
4. *Si D est une partie de X, on a :*
$$\big(\underset{i\in I}{\cup} A_i\big) \cap D = \underset{i\in I}{\cup}(A_i \cap D) \quad \text{et} \quad \big(\underset{i\in I}{\cap} A_i\big) \cup D = \underset{i\in I}{\cap}(A_i \cup D).$$
5. *Soient J, Y des ensembles non vides, $(B_j)_{j\in J}$ une famille de parties de Y et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Alors on a*
$$f^{-1}\big(\underset{j\in J}{\cup} B_j\big) = \underset{j\in J}{\cup} f^{-1}(B_j) \quad , \quad f^{-1}\big(\underset{j\in J}{\cap} B_j\big) = \underset{j\in J}{\cap} f^{-1}(B_j)$$
$$f\big(\underset{i\in I}{\cup} A_i\big) = \underset{i\in I}{\cup} f(A_i) \quad , \quad f\big(\underset{i\in I}{\cap} A_i\big) \subset \underset{i\in I}{\cap} f(A_i) \ .$$
En général l'inclusion précédente est stricte et qu'il y a égalité si f est injective.

Remarque. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties d'un ensemble X. Alors il existe une suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ de parties de X telle que

1. $Y_n \subset X_n$ pour tout $n \geq 0$.
2. Les Y_n sont deux à deux disjoints.
3. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} X_n = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} Y_n$.

En effet, il suffit de prendre $Y_0 = X_0$, et pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n \setminus \Big(\overset{n-1}{\underset{k=0}{\cup}} X_k\Big)$.

Axiome du choix. Soit I un ensemble non vide, et pour tout $i \in I$, soit A_i un ensemble non vide. Alors il existe une application $f : I \longrightarrow \underset{i\in I}{\cup} A_i$ telle que pour tout $i \in I$, on ait $f(i) \in A_i$.

Une autre manière d'énoncer l'axiome du choix est la suivante :
Pour tout ensemble non vide X, il existe une application $f : \mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow X$ telle que pour toute partie $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, on ait $f(A) \in A$.

Produit d'une famille d'ensembles. Étant donné deux ensembles A_1 et A_2, le produit cartésien $A_1 \times A_2$ peut être considéré comme l'ensemble des applications f de $\{1, 2\}$ dans $A_1 \cup A_2$ telles que $f(1) \in A_1$ et $f(2) \in A_2$. Cette observation nous permet d'étendre la notion du produit cartésien à une famille d'ensembles.

Définition A.5.1. Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles et $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. On appelle **produit** de la famille $(A_i)_{i\in I}$, et on note $\prod_{i\in I} A_i$, l'ensembles des applications $f : I \longrightarrow A$ telles que pour tout $i \in I$, on ait $f(i) \in A_i$. Autrement dit, le produit $\prod_{i\in I} A_i$ est l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de A telles que tout $i \in I$, on ait $x_i \in A_i$.
Si pour tout $i \in I$, on a $A_i \neq \emptyset$, alors $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Cette propriété est un axiome équivalent à l'axiome du choix.
Si pour tout $i \in I$, on a $A_i = E$, l'ensemble E étant fixé, le produit $\prod_{i\in I} A_i$ se note E^I et dans ce cas, E^I n'est autre que l'ensemble $\mathscr{F}(I, E)$ des applications de I dans E.
Revenons au produit général $\prod_{i\in I} A_i$. Pour tout $j \in I$, l'application

$$\begin{array}{rccc} p_j : & \prod_{i\in I} A_i & \longrightarrow & A_j \\ & (x_i)_{i\in I} & \longmapsto & x_j \end{array}$$

est appelée la $\mathbf{j^{ième}}$ **projection canonique**. De manière générale, si J est une partie non vide de I, l'application

$$\begin{array}{rccc} p_J : & \prod_{i\in I} A_i & \longrightarrow & \prod_{i\in J} A_i \\ & (x_i)_{i\in I} & \longmapsto & (x_i)_{i\in J} \end{array}$$

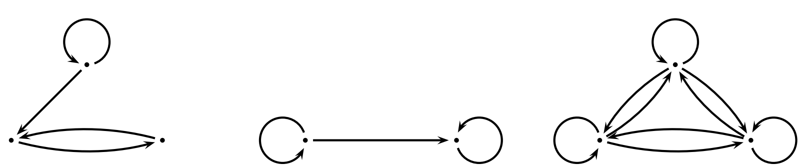
qui, à toute famille $(x_i)_{i\in I}$ fait correspondre sa restriction à J, s'appelle la **projection d'indice** J. En vertu de l'axiome du choix, p_J est une application surjective si tous les A_i sont non vides.

A.6 Relations d'équivalence

Soit X un ensemble. Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur X est une partie $\Gamma_{\mathcal{R}}$ de $X \times X$. Au lieu d'écrire $(x, y) \in \Gamma_{\mathcal{R}}$, on écrit $x\,\mathcal{R}\,y$. L'ensemble $\Gamma_{\mathcal{R}}$ s'appelle aussi le **graphe** de $\mathcal{R}$. On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur X est :

- **réflexive** si pour tout $x \in X$, on a $x\,\mathcal{R}\,x$. Autrement dit, $\mathcal{R}$ est réflexive si $\Gamma_{\mathcal{R}}$ contient la diagonale $\{(x, x)\ ;\ x \in X\}$ de $X \times X$;
- **symétrique** si pour tout $x, y \in X$ tels que $x\,\mathcal{R}\,y$, on a $y\mathcal{R}x$. Autrement dit, $\mathcal{R}$ est symétrique si $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est une partie invariante par l'application $(x, y) \longmapsto (y, x)$ de $X \times X$ dans lui-même ;
- **antisymétrique** si pour tout $x, y \in X$, on a l'implication $(x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,x) \Longrightarrow x = y$;
- **transitive** si pour tout $x, y, z \in X$, on a l'implication $(x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,z) \Longrightarrow x\,\mathcal{R}\,z$.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble fini X, dont le graphe est $\Gamma_{\mathcal{R}}$. Les éléments de X s'appellent les **sommets** de $\Gamma_{\mathcal{R}}$. Les couples $(x, y) \in \Gamma_{\mathcal{R}}$ s'appellent les **arcs** de $\Gamma_{\mathcal{R}}$; x est l'**origine** de l'arc (x, y), et y son extrémité. Un arc $(x, x) \in \Gamma_{\mathcal{R}}$ s'appelle une **boucle** de $\Gamma_{\mathcal{R}}$. Cette terminologie correspond à la **représentation géométrique** usuelle des graphes, dont les figures ci-dessous donne trois exemples.



Le graphe de gauche est non réflexif, non symétrique et non transitif sur un ensemble à trois éléments. Le graphe du milieu est réflexif, antisymétrique et transitif sur un ensemble à deux éléments. Le graphe de droite est réflexif, symétrique et transitif sur un ensemble à trois éléments.

Définition A.6.1. On appelle **relation d'équivalence** sur un ensemble X toute relation binaire sur X qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Définition A.6.2. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble X. Pour tout $x \in X$, on appelle **classe d'équivalence** de x suivant $\mathcal{R}$, ou modulo $\mathcal{R}$, l'ensemble $\mathcal{C}_x = \big\{y \in X \ ; \ x \,\mathcal{R}\, y\big\}$. On appelle **quotient** de X par $\mathcal{R}$, et on le note $X/\mathcal{R}$, l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{R}$. Autrement dit, on a $X/\mathcal{R} = \big\{\mathcal{C}_x \ ; \ x \in X\big\} \subset \mathscr{P}(X)$. L'application $q : x \longmapsto \mathcal{C}_x$ de X dans $X/\mathcal{R}$ s'appelle l'**application quotient**, ou la **projection canonique** de X sur $X/\mathcal{R}$.

Exemple A.6.1.

1. Soit X un ensemble, la relation $x = y$, dont le graphe est la diagonale $\big\{(x, x) \ ; \ x \in X\big\}$ de $X \times X$, est une relation d'équivalence. Dans ce cas, pour tout $x \in X$, on a $\mathcal{C}_x = \{x\}$.
2. Soit X un ensemble d'individus, et $\mathcal{R}$ la relation sur X définie par $x \,\mathcal{R}\, y \iff x$ et y ont même âge. Alors $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X.
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $m, m' \in \mathbb{Z}$, on dit que m est **congru à** m' **modulo** n et on écrit $m \equiv m' \ [n]$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m - m' = kn$. C'est une relation d'équivalence. Lorsque $n \geq 1$, l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation de **congruence modulo** n est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et l'application de $\{0, 1, \cdots, n-1\}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui à m associe $\mathcal{C}_m$ est bijective. En particulier, l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a n éléments.
4. La relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :
$$x \,\mathcal{R}\, y \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}, \ x - y = 2k\pi$$
est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$, appelée **relation de congruence modulo** 2π. L'ensemble quotient de $\mathbb{R}$ par la relation de congruence modulo 2π est noté $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et l'application de $[0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ qui à x associe $\mathcal{C}_x$ est bijective.
5. Soit $F = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Pour tous (a, b), $(a', b') \in F$, on pose :
$$(a, b) \,\mathcal{R}\, (a', b') \iff ab' = ba'$$
Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur F.

Exemple A.6.2. Soient X, Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On peut définir sur X la relation d'équivalence $\mathcal{R}_f$ donnée par : pour $x, y \in X$, on a :
$$x \,\mathcal{R}_f\, y \iff f(x) = f(y).$$
Dans ce cas, pour tout $x \in X$, on a $\mathcal{C}_x = f^{-1}\big(\{f(x)\}\big)$.
Notons que si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble X et $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ est l'application quotient. Alors on a $q(x) = q(y)$ si et seulement si $x \,\mathcal{R}\, y$. Donc on a $\mathcal{R} = \mathcal{R}_q$, c'est-à-dire, $\Gamma_{\mathcal{R}} = \Gamma_{\mathcal{R}_q}$.

Exemple A.6.3. Soient X un ensemble et $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Soit F une partie de X et $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathscr{P}(X)$ par :
$$A \,\mathcal{R}\, B \iff A \cap F = B \cap F\,.$$
Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(X)$.

Définition A.6.3. On appelle **partition** d'un ensemble non vide X toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X vérifiant les trois conditions suivantes :

1. Pour tout $i \in I$, on a $A_i \neq \emptyset$.
2. Pour tout $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, on ait $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.
3. On a $\underset{i\in I}{\cup} A_i = X$.

Remarque A.6.1. Soient X, Y des ensembles et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X telle que $\underset{i\in I}{\cup} A_i = X$. Supposons que pour tout $i \in I$, il existe une application $f_i : A_i \longrightarrow Y$ telle que pour tout $i, j \in I$, on ait $f_{i_{|A_i \cap A_j}} = f_{j_{|A_i \cap A_j}}$. Alors il existe une unique application $f : X \longrightarrow Y$ telle que pour tout $i \in I$, f soit un prolongement de f_i.
Cas particulier : supposons $(A_i)_{i\in I}$ une partition de X et que pour tout $i \in I$, il existe une application $f_i : A_i \longrightarrow Y$. Alors il existe une unique application $f : X \longrightarrow Y$ telle que pour tout $i \in I$, on ait $f_{|A_i} = f_i$.

Lemme A.6.1. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble non vide X. Pour tout $x, y \in X$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $x \,\mathcal{R}\, y$.

(ii) $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$.

(iii) $\mathcal{C}_x \subset \mathcal{C}_y$.

(iv) $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset$.

Proposition A.6.1. *Soit X un ensemble non vide.*

1. *Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur X, alors $X/\mathcal{R}$ est une partition de X. Autrement dit, $X/\mathcal{R}$ possède les propriétés suivantes :*

   (i) Pour tout $A \in X/\mathcal{R}$, on a $A \neq \emptyset$.

   (ii) Pour tout $A, B \in X/\mathcal{R}$ tels que $A \neq B$, on a $A \cap B = \emptyset$.

   (iii) On a $\underset{A\in X/\mathcal{R}}{\cup} A = X$.

   De plus, on a $\Gamma_{\mathcal{R}} = \underset{A\in X/\mathcal{R}}{\cup} A \times A \subset X \times X$.

2. *Réciproquement, si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de X, on peut définir sur X la relation d'équivalence $\mathcal{R}'$ donnée par : pour $x, y \in X$, on a*

$$x \,\mathcal{R}'\, y \iff \text{il existe } i \in I \text{ tel que } x, y \in A_i.$$

   Dans ce cas, on a :

   (i) Pour $x \in X$ et $i \in I$, on a $\mathcal{C}_x = A_i \iff x \in A_i$.

   (ii) $X/\mathcal{R}' = \{A_i \,;\, i \in I\}$.

   (iii) $\Gamma_{\mathcal{R}'} = \underset{i\in I}{\cup} A_i \times A_i \subset X \times X$.

Donc, se donner une relation d'équivalence sur un ensemble X revient à se donner une partition de X.

Proposition A.6.2 (propriété universelle de l'application quotient). *Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble X et $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient. Soient Y un ensemble et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Si f est constante sur les classes d'équivalences suivant $\mathcal{R}$, autrement dit, pour tout $x, y \in X$ vérifiant $x \,\mathcal{R}\, y$, on a $f(x) = f(y)$, alors il existe une* *unique application $g : X/\mathcal{R} \longrightarrow Y$ telle que $f = g \circ q$. Autrement dit le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \\ & X/\mathcal{R} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

De plus on a :

1. *L'application g est surjective si f l'est.*
2. *L'application g est injective si les relations d'équivalences $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_f$ sont égales.*

L'application g est construite de la manière suivante : soit $a \in X/\mathcal{R}$, il existe $x \in X$ tel que $a = \mathcal{C}_x$; l'élément $f(x)$ ne dépend pas du choix de x dans la classe a ; on pose $g(a) = f(x)$.

A.7 Relations d'ordre

Définition A.7.1. On appelle **relation d'ordre** sur un ensemble X toute relation binaire sur X qui est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

Un ensemble muni d'une relation d'ordre est appelé un **ensemble ordonné**. Le plus souvent, une relation d'ordre sera notée $\leq$. Lorsqu'il en est ainsi, la relation $x \leq y$ et $x \neq y$ se note $x < y$. Un ensemble X muni d'une relation d'ordre $\leq$ sera souvent noté $(X, \leq)$. Deux éléments x et y d'un ensemble ordonné $(X, \leq)$ sont dits **comparables** si l'on a $x \leq y$ ou $y \leq x$. On dit qu'un ensemble X, muni d'une relation d'ordre $\leq$, est **totalement ordonné** par $\leq$, ou que $\leq$ est une relation d'ordre **total**, si pour tout $x, y \in X$, on a soit $x \leq y$, soit $y \leq x$.

Exemple A.7.1. 1. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont totalement ordonnés pour l'ordre usuel.

2. Sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels la relation « divise », notée $|$ et définie par :

$$m \,|\, n \iff \exists\, k \in \mathbb{N},\ n = km$$

est une relation d'ordre non totale.

3. Sur l'ensemble $X = \{a, b, c, d\}$, la relation dont le graphe est :

$$\Gamma_{\mathcal{R}} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (a, c), (d, c)\}$$

est une relation d'ordre.

4. Soit X un ensemble, sur l'ensemble $\mathscr{P}(X)$, la relation d'inclusion $A \subset B$ est une relation d'ordre. Si X a au moins deux éléments, $\mathscr{P}(X)$ n'est pas totalement ordonné par $\subset$.

5. Soient X un ensemble quelconque et $(Y, \leq)$ un ensemble ordonné. Sur l'ensemble $\mathscr{F}(X, Y)$ des applications de X dans Y, on peut définir la relation d'ordre suivante : pour $f, g \in \mathscr{F}(X, Y)$, on a :

$$f \preceq g \iff \text{pour tout } x \in X, \text{ on a } f(x) \leq g(x).$$

6. Soient $(E, \leq)$ et $(F, \preceq)$ des ensembles ordonnés. On définit sur $E \times F$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(x, y)\, \mathcal{R}\, (x', y') \iff \big(x \leq x' \text{ et } x \neq x'\big) \text{ ou } \big(x = x' \text{ et } y \preceq y'\big).$$

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $E \times F$, appelée **ordre lexicographique**.

Définition A.7.2. Soient $(X, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de X.

1. S'il existe $M \in X$ tel que pour tout $x \in A$, on ait $x \leq M$, on dit que A est **majorée**, et que M est un **majorant** de A.
2. S'il existe $m \in X$ tel que pour tout $x \in A$, on ait $m \leq x$, on dit que A est **minorée**, et que m est un **minorant** de A.
3. On dit que A est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.
4. S'il existe un élément $a \in A$ tel que pour tout $x \in A$, on ait $x \leq a$, cet élément est unique, à cause de l'antisymétrie de $\leq$; on l'appelle le **plus grand élément** de A, il est aussi appelé l' **élément maximum** de A et on le note $\max A$.
5. S'il existe un élément $a \in A$ tel que pour tout $x \in A$, on ait $a \leq x$, cet élément est unique ; on l'appelle le **plus petit élément** de A, il est aussi appelé l'**élément minimum** de A et on le note $\min A$.
6. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, qui est alors unique, cet élément est appelé la **borne supérieure** de A et se note $\sup A$. Autrement dit, $\sup A$ est un majorant de A et pour tout majorant M de A, on a $\sup A \leq M$.
7. Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, qui est alors unique, cet élément est appelé la **borne inférieure** de A et se note $\inf A$. Autrement dit, $\inf A$ est un minorant de A et pour tout minorant m de A, on a $m \leq \inf A$.
8. Un élément x de X est dit **maximal** s'il n'existe pas d'élément $y \in X$ tel que $x \leq y$ et $x \neq y$. Autrement dit, un élément x de X est maximal si pour tout $z \in X$ vérifiant $x \leq z$, on a $x = z$.
9. Un élément x de X est dit **minimal** s'il n'existe pas d'élément $y \in X$ tel que $y \leq x$ et $x \neq y$. Autrement dit, un élément x de X est minimal si pour tout $z \in X$ vérifiant $z \leq x$, on a $x = z$.

Notons que tout élément maximum est maximal, mais la réciproque est fausse ; de même tout élément minimum est minimal, mais la réciproque est fausse. Dans un ensemble totalement ordonné, les notions d'éléments maximum et maximal (*resp.* minimum et minimal) coïncident.

Exemple A.7.2. Soit X un ensemble non vide. On munit $\mathscr{P}(X)$ de la relation d'ordre $\subset$ (inclusion). Alors l'ensemble $\emptyset$ est le plus petit élément et l'ensemble X est le plus grand élément de $\mathscr{P}(X)$. Si $\mathcal{T}$ est une partie non vide de $\mathscr{P}(X)$, alors $\mathcal{T}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure et on a $\sup \mathcal{T} = \bigcup_{A \in \mathcal{T}} A$ et $\inf \mathcal{T} = \bigcap_{A \in \mathcal{T}} A$.

Proposition A.7.1. *Soient $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné et A une partie de X.*

1. *Pour qu'un élément $b \in X$ soit la borne supérieure de A, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*
   (i) Pour tout $x \in A$, on a $x \leq b$.
   (ii) Pour tout élément $c \in X$ tel que $c < b$, il existe un élément $a \in A$ tel que $c < a$.
2. *Pour qu'un élément $b \in X$ soit la borne inférieure de A, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*
   (i) Pour tout $x \in A$, on a $b \leq x$.
   (ii) Pour tout élément $c \in X$ tel que $b < c$, il existe un élément $a \in A$ tel que $a < c$.

Applications à valeurs dans un ensemble ordonné. Soient $(X, \leq)$ un ensemble ordonné, A un ensemble non vide quelconque et $f : A \longrightarrow X$ une application. Considérons la partie $f(A)$ de X. Si $\max f(A)$ existe, on l'appelle **maximum** de f et on le note $\max\limits_{x\in A} f(x)$. Si $\sup f(A)$ existe, on l'appelle **borne supérieure** de f et on le note $\sup\limits_{x\in A} f(x)$. On introduit de même $\min\limits_{x\in A} f(x)$ et $\inf\limits_{x\in A} f(x)$.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de X, alors $A = \{x_i \ ; \ i \in I\}$ est une partie de X. Si $\max A$ existe, on l'appelle **maximum** de la famille $(x_i)_{i\in I}$ et on le note $\max\limits_{i\in I} x_i$. On définit de même $\min\limits_{i\in I} x_i$, $\sup\limits_{i\in I} x_i$ et $\inf\limits_{i\in I} x_i$.

Définition A.7.3. Soit $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné.

1. Un sous-ensemble I de X est un **intervalle** si, pour tous $x, z \in I$ et $y \in X$ tels que $x \leq y \leq z$, on ait $y \in I$.
2. Pour tout $a, b \in X$ tels que $a \leq b$, on définit les ensembles suivants, appelés :

$$[a,\, b] = \big\{x \in X \ ; \ a \leq x \leq b\big\} \quad (\textbf{intervalle fermé}),$$

$$]a,\, b] = \big\{x \in X \ ; \ a < x \leq b\big\} \quad (\textbf{intervalle semi-ouvert}),$$

$$[a,\, b[= \big\{x \in X \ ; \ a \leq x < b\big\} \quad (\textbf{intervalle semi-ouvert}),$$

$$]a,\, b[= \big\{x \in X \ ; \ a < x < b\big\} \quad (\textbf{intervalle ouvert}).$$

Parfois l'ensemble $[a,\, b]$ est appelé **segment**.
On définit de même, pour $a \in X$,

$$[a, \rightarrow [= \{x \in X \ ; \ a \leq x\} \quad \text{et} \quad]a, \rightarrow [= \{x \in X \ ; \ a < x\},$$

et de façon analogue

$$] \leftarrow, a] = \{x \in X \ ; \ x \leq a\} \quad \text{et} \quad] \leftarrow, a[= \{x \in X \ ; \ x < a\}.$$

On parle alors de **demi-droites** (**fermées** ou **ouvertes**).

Définition A.7.4. Soient $(X, \leq)$, $(Y, \preceq)$ deux ensembles ordonnés et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1. On dit que f est **croissante** si pour tout $a, b \in X$ tels que $a \leq b$, on ait $f(a) \preceq f(b)$.
2. On dit que f est **strictement croissante** si pour tout $a, b \in X$ tels que $a < b$, on ait $f(a) \prec f(b)$.
3. On dit que f est **décroissante** si pour tout $a, b \in X$ tels que $a \leq b$, on ait $f(b) \preceq f(a)$.
4. On dit que f est **strictement décroissante** si pour tout $a, b \in X$ tels que $a < b$, on ait $f(b) \prec f(a)$.
5. On dit que f est **monotone** si f est croissante ou décroissante.
6. On dit que f est **strictement monotone** si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemple A.7.3. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On munit $\mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{P}(Y)$ de la relation d'ordre $\subset$ (inclusion). Alors on a :

1. L'application
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ A & \longmapsto & X \setminus A \end{array}$$
est strictement décroissante.

2. Les applications
$$\begin{array}{cccc} \hat{f}: & \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(Y) \\ & A & \longmapsto & f(A) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} \check{f}: & \mathcal{P}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ & B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array}$$
sont croissantes.

Proposition A.7.2. *On a les propriétés suivantes.*

1. *Toute application monotone et injective est strictement monotone.*
2. *Toute application strictement monotone f d'un ensemble totalement ordonné $(X, \leq)$ dans un ensemble ordonné $(Y, \preceq)$ est injective.*

Définition A.7.5. Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné.

1. On dit qu'une partie A de X est **totalement ordonnée** si A munie de la restriction de $\leq$ est totalement ordonnée, *i.e.* si pour tout $x, y \in A$, on a soit $x \leq y$, soit $y \leq x$.
2. On dit que X est **inductif** si toute partie totalement ordonnée de X est majorée.

Théorème A.7.1 (lemme de Zorn). *Tout ensemble ordonné inductif possède un élément maximal.*

Corollaire A.7.1. *On a les conséquences suivantes du lemme de Zorn.*

1. *Dans un ensemble ordonné inductif, tout élément est majoré par un élément maximal.*
2. *Tout espace vectoriel admet une base.*
3. *Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel admet un supplémentaire.*

Définition A.7.6. Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit que X est **bien ordonné** ou que $\leq$ est un **bon ordre** si toute partie non vide de X admet un plus petit élément.

Notez que tout ensemble bien ordonné est totalement ordonné, et que toute partie non vide et majorée d'un ensemble bien ordonné possède une borne supérieure.

Théorème A.7.2 (Zermelo). *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'axiome du choix.*

(ii) *Le lemme de Zorn.*

(iii) *Tout ensemble peut être muni d'une relation de bon ordre.*

A.8 Ensembles dénombrables

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, *i.e.*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

On suppose connues toutes les propriétés élémentaires de $\mathbb{N}$, surtout les propriétés de l'addition et de la multiplication sur $\mathbb{N}$. Rappelons simplement que l'ensemble $\mathbb{N}$ est totalement ordonné par la relation d'ordre naturel suivante : pour $n, m \in \mathbb{N}$, on a :

$$n \leq m \iff \text{il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que } m = n + p.$$

Théorème A.8.1. *L'ensemble $\mathbb{N}$ possède les propriétés fondamentales suivantes :*

1. *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément, et toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.*
2. *Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, on a $n < m \iff n + 1 \leq m$.*

Le théorème ci-dessus entraîne le théorème de la récurrence qui est un des plus importants moyens du raisonnement mathématique.

Théorème A.8.2 (**principe de récurrence**)**.** *Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété (égalité, inégalité, etc.) dépendant d'un entier naturel $n \geq n_0$. Si $P(n_0)$ est vraie et si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, l'implication $P(n) \Longrightarrow P(n_0)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.*

Exemple A.8.1. Pour tout entier naturel n, on a l'inégalité $2^n > n$. En effet, soit $P(n)$ l'inégalité : $2^n > n$. On a $2^0 = 1$ et $1 > 0$, donc $P(0)$ est vraie. Soit n un entier naturel. Supposons $P(n)$ est vraie et démontrons que $P(n+1)$ est vraie. On a $2^{n+1} = 2^n \times 2 = 2^n + 2^n$. Par hypothèse de récurrence, on a l'inégalité $2^n > n$. On en déduit l'inégalité $2^{n+1} > n + 2^n$. Puisque l'on a $2^n \geq 1$, il vient $2^{n+1} > n + 1$. On a ainsi démontré que pour tout entier naturel n, l'implication $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie. Le principe de récurrence affirme que l'inégalité $2^n > n$ est alors vraie pour tout entier naturel n.

Définition A.8.1. Soit X un ensemble. Une **suite d'éléments** de X est une famille d'éléments de X indexée par l'ensemble $\mathbb{N}$.

Comme pour les familles, si $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ est une suite d'éléments de X, l'image $f(n)$ d'un $n \in \mathbb{N}$ par f sera notée x_n et sera appelée **terme d'ordre** n de la suite f ; la suite elle-même f sera représentée par la notation $(x_n)_{n \geq 0}$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (x_n).

Théorème A.8.3. *Soient X un ensemble non vide, $a \in X$ et f une application de X dans X. Alors il existe une unique suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de X telle que $x_0 = a$ et pour tout $n \geq 1$, on ait $x_{n+1} = f(x_n)$.*

On désigne par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, *i.e.*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

En tant qu'ensemble, $\mathbb{Z}$ est le quotient de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par la relation d'équivalence suivante :

$$(n, m)\, \mathcal{R}\, (p, q) \iff n + q = p + m.$$

La classe dont $(n, 0)$ est un représentant est identifié à n et la classe dont $(0, n)$ est un représentant est identifié à $-n$. L'ensemble $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{Z}$ auquel on prolonge l'addition et le multiplication. La relation d'ordre total dont $\mathbb{N}$ est muni se prolonge à $\mathbb{Z}$. Pour $p, q \in \mathbb{Z}$, on a :

$$p \leq q \iff q - p \in \mathbb{N}.$$

Théorème A.8.4 (**division euclidienne**). *Soit* $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, *alors il existe un unique couple* $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ *tel que* $a = bq + r$ *et* $0 \leq r < b$.

On note $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. L'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ est appelé l'ensemble des **fractions**. On considère sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ la relation d'équivalence suivante : pour $(p,q), (p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$,

$$(p,q)\,\mathcal{R}\,(p',q') \iff pq' = p'q\,.$$

On appelle ensemble des **nombres rationnels** l'ensemble quotient $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\mathcal{R}$, on le note $\mathbb{Q}$. La classe d'une fraction $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ est noté $\dfrac{p}{q}$. On a donc $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'}$ si et seulement si $pq' = p'q$. On peut considérer l'ensemble $\mathbb{Z}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ en identifiant tout $n \in \mathbb{Z}$ à $\frac{n}{1} \in \mathbb{Q}$. Si les fractions (a,b) et (a',b') (*resp.* (c,d) et (c',d')) sont équivalentes, alors les fractions $(ad+cb, bd)$ et $(a'd' + c'b', b'd')$ sont équivalentes. Il en est de même des fractions (ac,bd) et $(a'c', b'd')$. Cela permet de définir la somme et le produit de deux rationnels en posant :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}\,.$$

Notons que la somme et le produit sur $\mathbb{Q}$ prolongent ceux sur $\mathbb{Z}$. La relation d'ordre total sur $\mathbb{Z}$ se prolonge aussi à $\mathbb{Q}$. Pour $\dfrac{p}{q}, \dfrac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}$, on pose :

$$\frac{p}{q} \leq \frac{p'}{q'} \iff pq' \leq qp' \iff qp' - pq' \in \mathbb{N}.$$

Notons que l'ensemble $\mathbb{Q}$ muni de l'ordre ci-dessus est totalement ordonné, mais il n'est pas bien ordonné car l'ensemble $A = \big\{x \in \mathbb{Q}\ ;\ 0 < x < 1\big\}$ n'a pas de plus petit élément. En effet, si $r = \dfrac{p}{q} \in A$, alors $s = \dfrac{p}{q+1} < r$ et $s \in A$.

Définition A.8.2. Deux ensembles X et Y sont dits **équipotents** s'il existe une bijection de X sur Y.

Théorème A.8.5 (**Zermelo-Cantor-Bernstein**). *Soient X et Y deux ensembles. On a :*

1. *Ou bien il existe une injection de X dans Y, ou bien il existe une injection de Y dans X.*
2. *S'il existe à la fois une injection de X dans Y et une injection de Y dans X, alors X et Y sont équipotents.*

Remarque A.8.1. Soit X un ensemble.

1. L'application $x \longmapsto \{x\}$ est une injection de X dans $\mathscr{P}(X)$.
2. Les ensembles X et $\mathscr{P}(X)$ ne sont pas équipotents.
3. L'application $A \longmapsto \chi_A$ de $\mathscr{P}(X)$ dans l'ensemble $\mathscr{F}(X, \{0,1\})$ des applications de X dans $\{0,1\}$ est une bijection. Donc $\mathscr{P}(X)$ et $\mathscr{F}(X,\{0,1\})$ sont équipotents.
4. Si Y est un ensemble et $f : X \longrightarrow Y$ est une application surjective, comme conséquence de l'axiome du choix, il existe une application $g : Y \longrightarrow X$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. En particulier, Y est équipotent à une partie de X.

Définition A.8.3. 1. Un ensemble non vide X est dit **fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que X est équipotent à l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Par convention l'ensemble vide est fini. Un ensemble non fini est dit **infini**.

2. Un ensemble X est dit **dénombrable** s'il est équipotent à l'ensemble $\mathbb{N}$.
3. Un ensemble X est dit **au plus dénombrable** s'il est fini ou s'il est dénombrable.

Proposition A.8.1. *Soient X un ensemble fini et $f : X \longrightarrow X$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f est injective.

(ii) f est surjective.

(iii) f est bijective.

On en déduit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est infini.

Proposition A.8.2. *On a les propriétés suivantes :*

1. *Pour qu'un ensemble X soit infini, il faut et il suffit qu'il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans X.*
2. *Si A est une partie infinie de $\mathbb{N}$, alors la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par :*

$$a_0 = \min A \quad \textit{et} \quad a_n = \min A \setminus \{a_0, \ldots, a_{n-1}\} \quad \textit{pour } n \geq 1\,.$$

est une bijection de $\mathbb{N}$ sur A. On en déduit qu'une partie quelconque de $\mathbb{N}$ est soit finie, soit dénombrable.

3. *Si B est un ensemble et $f : \mathbb{N} \longrightarrow B$ est une surjection, alors B est fini ou dénombrable.*
4. *L'application suivante est une bijection*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (n,m) & \longmapsto & \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m \end{array}$$

donc $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est dénombrable. On en déduit que tout produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

5. *Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.*
6. *Toute réunion d'une famille au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*
7. *Si X est un ensemble infini et D est un ensemble au plus dénombrable, alors $X \cup D$ et X sont équipotents.*
8. *Soit $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}_f(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in A} 2^n \end{array}$$

est une bijection. Donc $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ est dénombrable.

9. *L'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ est infini et non dénombrable.*

Appendice B

QUELQUES STRUCTURES ALGÉBRIQUES

B.1 Groupes, anneaux, corps

Une **loi de composition interne** sur un ensemble non vide G est une application de $G \times G$ dans G que l'on note généralement $(x, y) \longmapsto x \star y$. Au lieu du signe $\star$, on utilise aussi $+$, $\times$, $.$, $\circ$, etc.

Définition B.1.1. Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $\star$. On dit que $(G, \star)$, ou G, est un **groupe** si l'on a les propriétés suivantes :

1. La loi $\star$ est **associative** : pour tout $x, y, z \in G$, on a $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.
2. La loi $\star$ possède un **élément neutre** : il existe un élément $e \in G$, appelé élément neutre, tel que pour tout $x \in G$, on ait $x \star e = e \star x = x$.
3. Tout élément de G possède un **inverse** : pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $x \star y = y \star x = e$. Dans ce cas, on dit que y est un inverse de x.

Un groupe G est **commutatif** ou **abélien** si pour tout $x, y \in G$, on a $x \star y = y \star x$.

On montre que dans un groupe G, l'élément e qui vérifie, pour tout $x \in G$, $x \star e = e \star x = x$, est unique ; il est appelé l'élément neutre de G. On montre aussi que pour tout $x \in G$, l'élément y de G tel que $x \star y = y \star x = e$ est unique ; il est noté x^{-1} et appelé l'inverse de x.
Dans un groupe abélien, la loi de composition interne est souvent notée additivement, on écrit $x + y$ au lieu $x \star y$; l'élément neutre est alors noté 0, l'inverse d'un élément x est noté $-x$ et appelé **opposé** de x, et on écrit $x - y$ pour $x + (-y)$.

Exemple B.1.1.

1. Si $G = \{e\}$ et $\star$ définie par $e \star e = e$, alors $(G, \star)$ est un groupe abélien, appelé **groupe trivial**.
2. Si $G = \{e, a\}$ et $\star$ définie par $e \star e = e$, $e \star a = a \star e = a$ et $a \star a = e$, alors $(G, \star)$ est un groupe abélien.
3. L'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de l'addition est un groupe abélien.
4. Soit X un ensemble non vide et $\mathscr{S}_X$ l'ensemble des applications bijectives de X sur X. On munit $\mathscr{S}_X$ de la loi de composition des applications $(f, g) \longmapsto f \circ g$. Alors $\mathscr{S}_X$ devient un groupe dont l'élément neutre est l'application identité de X. Lorsque X est un ensemble fini de cardinal n, par exemple $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, le groupe $\mathscr{S}_X$ se note S_n et s'appelle le **groupe symétrique** d'ordre n.

Définition B.1.2. Soient $(G, \star)$ un groupe et H un sous-ensemble non vide de G. On dit que H est un **sous-groupe** de G si l'on a les propriétés suivantes :

1. Pour tout $x, y \in H$, on a $x \star y \in H$.
2. Pour tout $x \in H$, on a $x^{-1} \in H$.

Si de plus, pour tout $x \in G$ et tout $h \in H$, on a $x \star h \star x^{-1} \in H$, on dit que H est un **sous-groupe distingué** ou **normal** de G. Dans ce cas, on note $H \lhd G$.

Notons que les conditions 1 et 2 ci-dessus sont équivalentes à la condition suivante :
Pour tout $x, y \in H$, on a $x \star y^{-1} \in H$.

Définition B.1.3. Soient $(G, \star)$, $(G', \star')$ deux groupes et $f : G \longrightarrow G'$ une application. On dit que f est un **morphisme de groupes** de G dans G' si pour tout $x, y \in G$, on a $f(x \star y) = f(x) \star' f(y)$. Si e' est l'élément neutre de G', l'ensemble $f^{-1}(e') = \{x \in G\ ;\ f(x) = e\}$ est appelé **noyau** de f. On le note $\ker(f)$.

Notation. Soit $(G, \star)$ un groupe d'élément neutre e. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in G$, on définit par récurrence :

$$x^0 = e,\ x^n = x^{n-1} \star x,\ \text{pour } n \geq 1\ ;\ \text{et si } n < 0,\ x^n = \left(x^{-1}\right)^{-n}.$$

Lorsque la loi sur G est notée additivement, on définit :

$$nx = 0 \text{ si } \ n = 0,\ \ nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ fois}} \ \text{ si } \ n \geq 1, \ \text{ et } \ nx = (-n)(-x) \ \text{ si } \ n < 0\,.$$

dans ce cas, l'application $n \longmapsto x^n$ (*resp.* $n \longmapsto nx$) est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(G, \star)$ (*resp.* $(G, +)$).

Exemple B.1.2.
1. Si G est un groupe d'élément neutre e, alors $\{e\}$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Tout sous-groupe d'un groupe abélien est distingué.
3. Si $f : G \longrightarrow G'$ est un morphisme de groupes, alors $\ker(f)$ est un sous-groupe distingué de G.

Groupe quotient. Soient $(G, \star)$ un groupe et H sous-groupe distingué de G. On définit sur G la relation d'équivalence suivante : pour tout $x, y \in G$, $x \mathcal{R} y \iff x^{-1} \star y \in H$. Notons que la classe d'équivalence d'un élément $x \in G$ est l'ensemble $xH = \{x \star h\ ;\ h \in H\}$. On note G/H l'ensemble quotient de G par $\mathcal{R}$. On va définir une structure de groupe sur G/H. Pour tout $x, y \in G$, on pose $xH \cdot yH = (x \star y)H$. Puisque H est un sous-groupe distingué de G, l'opération $\cdot$ est bien définie, et on obtient ainsi une loi de composition interne sur G/H. On vérifie sans peine que l'ensemble G/H muni de la loi $\cdot$ est un groupe, appelé **groupe quotient** de G par H. Notons que l'élément neutre de G/H est l'ensemble H, et l'inverse d'un élément xH est l'élément $x^{-1}H$. Notons enfin que la surjection canonique

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G/H \\ x & \longmapsto & xH \end{array}$$

est un morphisme de groupes.

Définition B.1.4. Soit A un ensemble non vide muni de deux lois de composition interne, une loi appelée **addition** ou **somme** et notée $(x, y) \longmapsto x + y$, et une loi appelée **multiplication** ou **produit** et notée $(x, y) \longmapsto x \cdot y$. On dit que A ou $(A, +, \cdot)$ est un **anneau** si l'on a les propriétés suivantes :

1. $(A, +)$ est un groupe abélien, dont l'élément neutre est noté 0.
2. Le produit est associatif, *i.e.* pour tout $x, y, z \in A$, on a $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
3. Le produit est distributif par rapport à l'addition, *i.e.* pour tout $x, y, z \in A$, on a :

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{et} \quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

Si le produit est commutatif, autrement dit si pour tout $x, y \in A$, on a $x \cdot y = y \cdot x$, on dit que l'anneau A est commutatif. S'il existe un élément de A, noté 1_A ou 1, tel que pour tout $x \in A$, on ait $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, on dit que l'anneau A est **unitaire** ou **unifère**. L'élément 1 s'il existe, il est unique et il est appelé l'**unité** de A.

Exemple B.1.3.

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de l'addition et de la multiplication est un anneau commutatif et unitaire.
2. L'ensemble $A = \{0, 1\}$ muni des lois :

$$1 + 0 = 0 + 1 = 0, \;\; 0 + 0 = 1 + 1 = 0, \;\; 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \;\; \text{et} \;\; 1 \cdot 1 = 1$$

est un anneau commutatif unitaire.

Remarque B.1.1. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. Alors on a :

1. Pour tout $x \in A$, on a $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.
2. Pour tout $x, y \in A$, on a $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x, y \in A$, on a $x \cdot (ny) = (nx) \cdot y = n(x \cdot y)$.
4. Pour tout $x, y \in A$, on a $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Le symbole de la multiplication dans l'anneau A sera en général omis, et on écrit xy pour $x \cdot y$.

Notation. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. Si $a \in A$ et n est un entier positif, on définit a^n par récurrence :

$$a^1 = a \;\; \text{et} \;\; a^n = a^{n-1}a \;\; \text{si} \;\; n \geq 2.$$

Proposition B.1.1 (**formule du binôme**)**.** *Soit A un anneau. Pour tout $a, b \in A$ tels que $ab = ba$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$(a + b)^n = a^n + \sum_{p=1}^{n-1} C_n^p a^{n-p} b^p + b^n\,.$$

Définition B.1.5. Soient A, A' deux anneaux. On appelle **morphisme d'anneaux** de A dans A' toute application $f : A \longrightarrow A'$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tout $x, y \in A$, on a $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. Pour tout $x, y \in A$, on a $f(xy) = f(x)f(y)$.

Si A et A' sont unitaires, on exige aussi que l'on a $f(1_A) = 1_{A'}$.

Définition B.1.6. Soient $(A, +, \cdot)$ un anneau et I une partie non vide de A. On dit que I est un **idéal bilatère** de A si l'on a les propriétés suivantes :

1. I est un sous-groupe de $(A, +)$.
2. Pour tout $x \in I$ et tout $a \in A$, on a $ax \in I$ et $xa \in I$.

Soient A un anneau et I un idéal bilatère de A. Soit A/I l'ensemble quotient de A par la relation d'équivalence suivante : pour tout $x, y \in A$, on a :

$$x \mathcal{R} y \iff x - y \in I.$$

Notons que la classe d'équivalence d'un élément $x \in A$ est l'ensemble $x + I = \{x + a \; ; \; a \in I\}$. Pour tout $x, y \in A$, on pose :

$$(x + I) + (y + I) = x + y + I \quad \text{et} \quad (x + I) \cdot (y + I) = xy + I\,.$$

On vérifie que l'on définit ainsi sur A/I deux lois de composition interne.

Théorème B.1.1. *Soient A un anneau et I un idéal bilatère de A. Alors l'ensemble quotient A/I muni des lois définies ci-dessus est un d'anneau, appelé* **anneau quotient** *de A par I. De plus, on a :*

1. *La surjection canonique $\pi : A \longrightarrow A/I$ est un morphisme d'anneaux.*
2. *Si A est commutatif, alors A/I est commutatif.*
3. *Si A est unitaire, pour que A/I soit un corps il faut et il suffit que l'idéal bilatère I soit maximal dans l'ensemble des idéaux bilatères de A autres que A, ordonné par inclusion.*

Définition B.1.7. Un **corps** est un anneau unitaire $\mathbb{K}$ non nul dans lequel tout élément x autre que 0 admet un inverse pour la multiplication, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{K}$ tel que $x \neq 0$, il existe $y \in \mathbb{K}$ tel que $xy = yx = 1$.

Notons que si $\mathbb{K}$ est un corps, alors $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ est un groupe pour la multiplication.
On dit qu'un corps $\mathbb{K}$ est commutatif s'il l'est en tant qu'anneau. Autrement dit si pour tout $x, y \in \mathbb{K}$, on a $xy = yx$.
On appelle **morphisme de corps** tout morphisme des anneaux sous-jacents.

Exemple B.1.4. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un corps commutatif.

Définition B.1.8. Soient $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps et $\mathbb{K}'$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{K}$. On dit que $\mathbb{K}'$ est un **sous-corps** de $\mathbb{K}$ si l'on a les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{K}'$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}, +)$.
2. Pour tout $x, y \in \mathbb{K}'$, on a $xy \in \mathbb{K}'$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{K}' \setminus \{0\}$, on a $x^{-1} \in \mathbb{K}'$.
4. On a $1 \in \mathbb{K}'$.

Définition B.1.9. On dit qu'un corps $\mathbb{K}$ est de **caractéristique nulle** si pour tout $n \geq 1$, on a $n1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} \neq 0$.

Proposition B.1.2. *Soit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps de caractéristique nulle. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \dfrac{p}{q} & \longmapsto & (q1)^{-1}(p1) \end{array}$$

est un morphisme de corps injectif. Donc on peut considérer que $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$.

APPENDICE C

LE CORPS DES NOMBRES RÉELS $\mathbb{R}$

C.1 Corps commutatifs totalement ordonnés

Définition C.1.1. On appelle **corps commutatif totalement ordonné** tout corps commutatif $\mathbb{K}$ muni d'une relation d'ordre total $\leq$ qui vérifie les conditions de compatibilité suivantes :

1. Pour tout $x, y \in \mathbb{K}$ tels que $x \leq y$ et pour tout $z \in \mathbb{K}$, on a $z + x \leq z + y$.
2. Pour tout $x, y \in \mathbb{K}$ tels que $x \leq y$ et pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $0 \leq z$, on a $zx \leq zy$.

On pose :

$$\mathbb{K}_+ = \{x \in \mathbb{K}\ ;\ 0 \leq x\} \quad \text{et} \quad \mathbb{K}_+^* = \{x \in \mathbb{K}\ ;\ 0 < x\}.$$

Un élément de $\mathbb{K}_+$ est dit **positif** et un élément de $\mathbb{K}_+$ est dit **strictement positif**.

Remarque C.1.1. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné et $x, y \in \mathbb{K}$.

1. On a $x \leq y \iff -y \leq -x$. En particulier, on a $0 \leq x \iff -x \leq 0$.
2. Si $0 \leq x$ et $0 \leq y$, alors on a $0 \leq x + y$ et $0 \leq xy$.
3. Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors on a $0 \leq xy$.
4. Si $x \leq 0$ et $0 \leq y$, alors on a $xy \leq 0$.
5. On a $0 \leq x^2$.
6. On a $0 < x \iff 0 < x^{-1}$.

Si P est une partie non vide d'un corps commutatif $\mathbb{K}$, on note :

$$-P = \{-x\ ;\ x \in P\} \quad , \quad P + P = \{x + y\ ;\ x, y \in P\} \quad \text{et} \quad PP = \{xy\ ;\ x, y \in P\}.$$

Théorème C.1.1. *1. Dans un corps commutatif totalement ordonné $\mathbb{K}$, l'ensemble $\mathbb{K}_+$ des éléments positifs vérifie :*

$$\mathbb{K}_+ + \mathbb{K}_+ \subset \mathbb{K}_+ \quad , \quad \mathbb{K}_+\mathbb{K}_+ \subset \mathbb{K}_+ \quad , \quad \mathbb{K}_+ \cap (-\mathbb{K}_+) = \{0\} \quad \textit{et} \quad \mathbb{K}_+ \cup (-\mathbb{K}_+) = \mathbb{K}.$$

2. Réciproquement, soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et P une partie de $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$P + P \subset P \quad , \quad PP \subset P \quad , \quad P \cap (-P) = \{0\} \quad \textit{et} \quad P \cup (-P) = \mathbb{K}.$$

Alors il existe une unique relation d'ordre total sur $\mathbb{K}$ qui en fasse un corps commutatif totalement ordonné et dont l'ensemble des éléments positifs soit P.

La preuve de la première partie du théorème est triviale. Dans la deuxième partie du théorème, la relation que l'on considère est la suivante : $x \leq y \iff y - x \in P$.

Définition C.1.2. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné. On pose :

$$x^+ = \max(x, 0) \quad , \quad x^- = \max(-x, 0) \quad \text{et} \quad |x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x\,, \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0\,. \end{cases}$$

L'élément $|x|$ est dit **valeur absolue** de x.

Théorème C.1.2. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné. Alors on a :*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$ et $|-x| = |x|$.*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a $0 \leq |x|$, et $|x| = 0 \iff x = 0$.*
3. *Pour tout $x, y \in \mathbb{K}$, on a $|\,|x| - |y|\,| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.*
4. *Pour tout $x, y \in \mathbb{K}$, on a $|xy| = |x|\,|y|$.*

Définition C.1.3. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné.

1. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est **convergente** dans $\mathbb{K}$ ou qu'elle **converge** dans $\mathbb{K}$ s'il existe un élément $l \in \mathbb{K}$ vérifiant la condition suivante :
   Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq N$, on ait l'inégalité $|x_n - l| < \varepsilon$.
   On vérifie alors que si un tel élément $l \in \mathbb{K}$ existe, il est unique ; on l'appelle la **limite** de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on dit que la suite converge vers l ou a **pour limite** l ou encore **tend vers** l, et on écrit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
2. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est **majorée** (*resp.* **minorée**) s'il existe $M \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $x_n \leq M$ (*resp.* $M \leq x_n$). Une suite à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.
   On vérifie facilement qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{K}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|x_n| \leq M$.
3. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est une suite **de Cauchy** si :
   Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ vérifiant $p \geq N$ et $q \geq N$, on ait l'inégalité $|x_p - x_q| < \varepsilon$.
   On vérifie facilement que toute suite convergente est de Cauchy et que toute suite de Cauchy est bornée.
4. On dit que $\mathbb{K}$ est **complet** si toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Définition C.1.4. Un corps commutatif totalement ordonné $\mathbb{K}$ est dit **archimédien** si pour tout $x \in \mathbb{K}_+^*$ et tout $y \in \mathbb{K}_+$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \leq nx$.

Proposition C.1.1. *Le corps $\mathbb{Q}$ est un corps commutatif totalement ordonné, archimédien, mais il n'est pas complet.*

Démonstration. Par construction $\mathbb{Q}$ est un corps commutatif totalement ordonné. Vérifions que $\mathbb{Q}$ est archimédien. Soient $x \in \mathbb{Q}_+^*$ et $y \in \mathbb{Q}_+$, on a $x = \dfrac{a}{p}$ et $y = \dfrac{b}{q}$ avec $b \in \mathbb{N}$, $a, p, q \in \mathbb{N}_+^*$.

On a $y \leq nx \iff bp \leq naq$, donc il suffit de prendre $n = bp$, puisque $aq \geq 1$. Pour montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet, on considère les suites d'éléments de $\mathbb{Q}$ définies par :

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\ ,\ y_n = x_n + \frac{1}{nn!}\ \text{ si }\ n \geq 1\ \text{ et }\ y_0 = y_1\,.$$

Alors pour tout $n \geq 1$, on a $x_n < x_{n+1}$, $y_{n+1} < y_n$ et $0 \leq y_n - x_n \leq \frac{1}{n}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est archimédien, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 < N\varepsilon$, d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$, on ait $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. Par conséquent, la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 dans $\mathbb{Q}$.
Si $n \geq p \geq N$, on a $x_N \leq x_p \leq x_n \leq y_n \leq y_p \leq y_N$, d'où $|x_n - x_p| \leq |y_N - x_N| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Il s'agit maintenant de montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. On a $y_n = y_n - x_n + x_n$ et la suite $(y_n - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on en déduit que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. On montre facilement que pour tout $n \geq 1$, on a $x_n < \frac{p}{q} < x_n + \frac{1}{nn!} = y_n$, d'où $q!x_q < q!\frac{p}{q} < q!x_q + \frac{1}{q} < q!x_q + 1$, ce qui est impossible car $q!x_q, q!\frac{p}{q} \in \mathbb{N}$. Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, et par conséquent $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. ■

Proposition C.1.2. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné. Alors on a :*

1. *$\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. Donc $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$ comme un sous-corps.*
2. *Si $\mathbb{K}$ est archimédien, on a*
   - *(i) Pour tout $x \in \mathbb{K}$, il existe un unique élément $[x] \in \mathbb{Z}$ tel que $[x] \leq x < [x] + 1$. Un tel élément $[x]$ est appelé **la partie entière** de x.*
   - *(ii) Pour tout $a \in \mathbb{K}$ et tout $b \in \mathbb{K}_+^*$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{K}$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.*
3. *$\mathbb{K}$ est archimédien si et seulement si $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$, i.e. pour tout $x, y \in \mathbb{K}$ tels que $x < y$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.*

Démonstration. 1. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a $0 \leq x^2$. Compte tenu de $1^2 = 1$, on en déduit que l'on a $0 \leq 1$, et même $0 < 1$, puisque le corps $\mathbb{K}$ est non nul. On en déduit par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a $n1 \neq 0$. Donc $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. Le fait que $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$ comme un sous-corps résulte de la proposition B.1.2.
2(i). Soit $x \in \mathbb{K}$. Puisque $\mathbb{K}$ est archimédien, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \leq p1 = p$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x$, on a $n \leq p$. De même, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $-x \leq q$, d'où on a $-q \leq x$. Ainsi l'ensemble $\{n \in \mathbb{Z}\ ;\ n \leq x\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$; elle admet un plus grand élément que l'on note $[x]$. Alors on a $[x] \leq x < [x] + 1$. L'unicité de $[x]$ est triviale.
2(ii). Soient $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}_+^*$. Soit $q = [\frac{a}{b}] \in \mathbb{Z}$ la partie entière de $\frac{a}{b}$, alors on a $q \leq \frac{a}{b} < q + 1$, d'où on a $bq \leq a < bq + 1$. Soit $r = a - bq$, alors on a $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. Vérifions l'unicité du couple (q, r). Soient $(q, r), (q', r') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{K}$ tels que $a = bq + r = bq' + r'$, $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$. Si $q > q'$, on a $q - q' \in \mathbb{N}^*$. Or $0 \leq r$, on en déduit que l'on a $r' = b(q - q') + r > b$, ce qui est impossible, donc on a $q \leq q'$. De même on a $q' \leq q$, d'où on a $q = q'$, et par conséquent, on a $r = r'$.
3. Supposons d'abord que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$. Soient $a \in \mathbb{K}_+^*$ et $b \in \mathbb{K}_+$, alors il existe $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$ tels que $0 < x < a$ et $b < y < b + 1$. $\mathbb{Q}$ étant archimédien, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \leq nx$, d'où $b < y \leq nx \leq na$. Par conséquent, $\mathbb{K}$ est archimédien.
Réciproquement, supposons $\mathbb{K}$ archimédien. Soient $x, y \in \mathbb{K}$ tels que $x < y$. Alors on a $0 < y - x$. Donc il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < 1 < m(y - x)$, d'où on a $1 + mx < my$. Soient $n = [mx] \in \mathbb{Z}$ la

partie entière de mx et $p = n+1 \in \mathbb{Z}$. Alors on a $p-1 \leq mx < p$, d'où $x < \frac{p}{m}$ et $p \leq 1+mx < my$. Par conséquent, on a $x < \frac{p}{m} < y$. Or $\frac{p}{m} \in \mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$. ■

Définition C.1.5. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné.

1. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit qu'un élément $l \in \mathbb{K}$ est une **valeur d'adhérence** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq N$ tel que l'on ait l'inégalité $|x_n - l| < \varepsilon$.
2. On dit que $\mathbb{K}$ possède la **propriété de Bolzano-Weierstrass** si toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$ admet au moins une valeur d'adhérence.
3. Deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ sont dites **adjacentes** si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et si la suite $(y_n - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
4. On dit que $\mathbb{K}$ possède la **propriété des intervalles emboîtés** si pour toute suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles fermés dans $\mathbb{K}$ vérifiant
   (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.
   (ii) La suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

   Alors l'intersection $\bigcap_{n\geq 0} [a_n, b_n]$ est réduite à un seul élément.

Théorème C.1.3. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) Toute partie majorée et non vide de $\mathbb{K}$ admet une borne supérieure.
(ii) Toute partie minorée et non vide de $\mathbb{K}$ admet une borne inférieure.
(iii) Toute suite d'éléments de $\mathbb{K}$ croissante et majorée converge.
(iv) Toute suite d'éléments de $\mathbb{K}$ décroissante et minorée converge.
(v) Deux suites adjacentes d'éléments de $\mathbb{K}$ convergent vers la même limite.
(vi) $\mathbb{K}$ est archimédien et complet.
(vii) $\mathbb{K}$ est archimédien et possède la propriété des intervalles emboîtés.
(viii) $\mathbb{K}$ est archimédien et possède la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Le théorème suivant montre qu'il existe, à isomorphisme algébrique près, au plus une structure de corps commutatif totalement ordonné archimédien complet.

Théorème C.1.4. *Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ deux corps commutatifs totalement ordonnés archimédiens complets. Alors il existe un isomorphisme de corps de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{K}'$ prolongeant l'identité de $\mathbb{Q}$ et cet isomorphisme est strictement croissante.*

C.2 Une construction de $\mathbb{R}$

Il y a bien des façons de construire $\mathbb{R}$ à partir du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, mais une telle construction n'a qu'un intérêt purement théorique, car deux corps commutatifs totalement ordonnés archimédiens complets sont isomorphes. Dans ce paragraphe, on va esquisser une construction de $\mathbb{R}$ en utilisant les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de $\mathcal{C}$, on pose :

$$x + y = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad xy = (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Alors on vérifie facilement que $x+y$ et xy sont aussi des éléments de $\mathcal{C}$ et que l'ensemble $\mathcal{C}$ muni de l'addition et de la multiplication définies ci-dessus est un anneau commutatif unitaire dont l'élément neutre pour l'addition est la suite constante dont tous les termes sont égaux à 0, et l'élément unité pour la multiplication est la suite constante dont tous les termes sont égaux à 1.

On note $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des suites dans $\mathbb{Q}$ qui convergent vers 0. Alors $\mathcal{C}_0$ est un idéal bilatère maximal dans $\mathcal{C}$. D'après le théorème B.1.1, l'anneau quotient $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ est un corps commutatif. Par définition, ce corps est le corps des nombres réels $\mathbb{R}$. Notons aussi que la surjection canonique $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R} = \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ est un morphisme d'anneaux.

Avant de définir une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, notons que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans un corps commutatif totalement ordonné $\mathbb{K}$, qui ne converge pas vers 0, alors il existe un élément $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$ et un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que ou bien pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq N$, on ait $x_n \geq \varepsilon$, ou bien pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq N$, on ait $x_n \leq -\varepsilon$.

Soit $\mathcal{C}_+ = \mathcal{C}_0 \cup \big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}\ ;\ \text{il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_n > 0 \text{ pour tout } n \geq N\big\}$. On appelle réels positifs les éléments de l'ensemble $\mathbb{R}_+ = \pi(\mathcal{C}_+)$. Notons que si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$, on a $\pi(x) \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $x \in \mathcal{C}_+$. On vérifie que l'on a :

$$\mathbb{R}_+ + \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+ \quad , \quad \mathbb{R}_+\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+ \quad , \quad \mathbb{R}_+ \cap (-\mathbb{R}_+) = \{0\} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}_+ \cup (-\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}\,.$$

On définit alors une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ en décrétant que pour tout $t, r \in \mathbb{R}$, on a $t \leq r \iff r - t \in \mathbb{R}_+$. On vérifie alors facilement que $\mathbb{R}$ muni de cette relation d'ordre est un corps commutatif totalement ordonné.

Montrons que $\mathbb{R}$ est archimédien. Soient t et r des éléments strictement positifs de $\mathbb{R}$. Notons $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des éléments de $\mathcal{C}_+$ tels que $\pi(x) = t$ et $\pi(y) = r$. Puisque $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, elle est bornée. Donc il existe $M \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $-M \leq y_n \leq M$. D'autre part, comme la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq N$, on ait $x_n > \varepsilon$. Puisque $\mathbb{Q}$ est archimédien, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p\varepsilon > M$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq N$, on a $px_n - y_n \geq p\varepsilon - M > 0$. Cela signifie que l'on a $pt > r$ et donc $\mathbb{R}$ est archimédien.

Plongement de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Considérons l'application $\phi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{C}$ qui à tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$ associe la suite constante $n \longmapsto r$. C'est un morphisme d'anneaux, alors $\psi = \pi \circ \phi$ est un morphisme de corps de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, injectif et strictement croissante. De plus le morphisme de corps ψ est le même que celui défini dans la proposition B.1.2. Notons que si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $\psi(\varepsilon) \leq \alpha$. En effet, soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_+$ tel que $\pi(x) = \alpha$, alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n \geq \varepsilon$, ce qui implique $\psi(\varepsilon) \leq \alpha$.
On en déduit les deux résultats suivants :
1. Si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathbb{R}$; alors $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|t_n - a| < \psi(\varepsilon)$.
2. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers un élément $a \in \mathbb{Q}$, alors la suite $(\psi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\psi(a)$ dans $\mathbb{R}$.
Désormais, on identifie $\mathbb{Q}$ au sous-corps $\psi(\mathbb{Q})$ de $\mathbb{R}$. On a montré ci-dessus que $\mathbb{R}$ est archimédien, alors il résulte de la proposition C.1.2 que $\mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$.

Il reste à montrer que $\mathbb{R}$ est complet. Auparavant, on montre le résultat suivant qui dit entre autre que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{C}$, et on pose $t = \pi(x) \in \mathbb{R}$. Alors la suite $(\psi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers t dans $\mathbb{R}$. En effet, puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n \geq N$ et $p \geq N$, on ait $|x_n - x_p| < \varepsilon$. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq N$. On a $t - \psi(x_m) = \pi(x - \phi(x_m))$ et pour tout $n \geq N$, on a $|x_n - x_m| < \varepsilon$. On en déduit que $|t - \psi(x_m)| \leq \psi(\varepsilon)$. Par conséquent, la suite $(\psi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers t dans $\mathbb{R}$.

On peut maintenant achever la démonstration de la complétude. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. D'après ce qui précède, chaque t_n est limite d'une suite de rationnels. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $r_n \in \mathbb{Q}$ tel que $|t_n - r_n| < \frac{1}{n+1}$. En fait, on devrait noter $\psi(r_n)$ au lieu de r_n et de même avec $\frac{1}{n+1}$, mais on ne le fait pas pour ne pas alourdir inutilement les choses. Alors on vérifie que la suite $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, donc $r \in \mathcal{C}$ et on montre alors que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\pi(r) \in \mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R}$ est complet.

Dorénavant on n'aura plus à utiliser la définition de $\mathbb{R}$ comme anneau quotient, et on peut maintenant énoncer le résultat central de ce paragraphe.

Théorème C.2.1. *Il existe un unique, à isomorphisme près, corps commutatif totalement ordonné archimédien complet, appelé corps des nombres réels et noté $\mathbb{R}$. De plus, on a :*

1. *Le corps $\mathbb{Q}$ est un sous-corps dense dans $\mathbb{R}$.*
2. *Le corps $\mathbb{R}$ possède toutes les propriétés citées dans le théorème* C.1.3.

C.3 Autres propriétés de $\mathbb{R}$

Définition C.3.1. $\mathbb{Q}$ étant identifié à un sous-corps de $\mathbb{R}$, les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont dits **nombres irrationnels**.

Proposition C.3.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $u \in \mathbb{Q}$ et $v \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que $|u - x| < \varepsilon$ et $|v - x| < \varepsilon$. Autrement dit, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. On a vu, preuve de la proposition C.1.1, que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et non convergente dans $\mathbb{Q}$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément irrationnel e. Si $x \in \mathbb{Q}$, il suffit de prendre $u = x$ et $v = x + \frac{e}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{e}{n} < \varepsilon$.
Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on prend $v = x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $nx = q_n + r_n$, avec $q_n \in \mathbb{Z}$ et $r_n \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq r_n < 1$. D'où on a $x = \dfrac{q_n}{n} + \dfrac{r_n}{n}$, avec $0 \leq \dfrac{r_n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$. Par conséquent, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{r_n}{n} = 0$, on en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|x - \dfrac{q_N}{N}\right| < \varepsilon$, on prend alors $u = \dfrac{q_N}{N}$. ■

Théorème C.3.1. *L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas dénombrable.*

Rappelons aussi les deux théorèmes fondamentaux suivants :

Théorème C.3.2. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $c \leq d$ et $f([a, b]) = [c, d]$.*

Théorème C.3.3 (théorème des accroissements finis). *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Si f est dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)\,.$$

APPENDICE D

LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES $\mathbb{C}$

D.1 Construction du corps des nombres complexes

On définit dans $\mathbb{R}^2$ une addition et une multiplication (ou un produit) de la manière suivante : Pour tout $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \,,$$
$$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y) \,.$$

On vérifie facilement que $\mathbb{R}^2$ muni l'addition et du produit est un corps commutatif dont l'élément neutre pour l'addition est $(0, 0)$ et l'élément neutre pour le produit est $(1, 0)$. De plus l'inverse, pour le produit, de tout élément $(x, y) \neq (0, 0)$ est donné par $\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\right)$.

Définition D.1.1. Le corps $\mathbb{R}^2$, muni de l'addition et du produit ci-dessus, est appelé **corps des nombres complexes** et il est noté $\mathbb{C}$. Ses éléments $z = (x, y)$ sont appelés des **nombres complexes**.

Proposition D.1.1. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & (x, 0) \end{array}$$

est un morphisme de corps injectif.

L'injection φ permet d'identifier le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels à son image $\varphi(\mathbb{R}) = \{(x, 0) \; ; \; x \in \mathbb{R}\}$ dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Autrement dit, on peut considérer que $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Pour cette raison, et par abus de notations, on écrit les nombres complexes qui sont de la forme $(x, 0)$ simplement x. Grâce à cette identification, on va donner une nouvelle représentation, ou écriture, des nombres complexes :

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$$

où $i = (0, 1)$. De plus, on a $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1$. Ainsi, dans ce nouveau corps $\mathbb{C}$, l'élément -1 possède une racine carrée.
Le produit s'écrit dans cette représentation :

$$(x + iy)(x' + iy') = xx' + xiy' + iyx' + i^2yy' = xx' - yy' + i(xy' + x'y) \,.$$

De même, l'inverse d'un nombre complexe $z \neq 0$ sera désigné simplement z^{-1} ou $\frac{1}{z}$, alors que zz'^{-1}, lorsque $z' \neq 0$, sera représenté par $\frac{z}{z'}$. Autrement dit, on a par définition, $\frac{z}{z'} = z\frac{1}{z'}$.

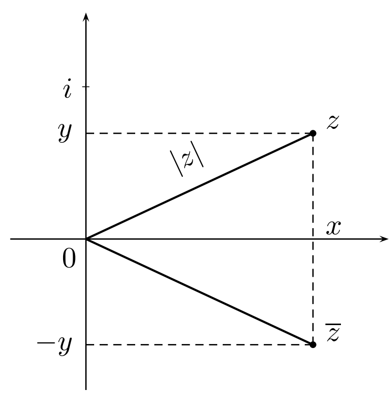
Remarque D.1.1. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tel que $z' \neq 0$. Alors pour tout $a \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$, on a $\frac{z}{z'} = \frac{az}{az'}$. En effet, on a :

$$\frac{az}{az'} = (az)(az')^{-1} = aza^{-1}z'^{-1} = zz'^{-1} = \frac{z}{z'}\,.$$

Définition D.1.2. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors x, que l'on note $\mathrm{Re}(z)$, est appelé **partie réelle** de z et y, que l'on note $\mathrm{Im}(z)$, est appelé **partie imaginaire** de z.

D.2 Conjugué et module d'un nombre complexe

Définition D.2.1. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$ est appelé le **conjugué** de z. Le **module** de z, noté $|z|$, est le nombre réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Notons que le module d'un nombre complexe généralise la notion de valeur absolue d'un nombre réel.

Proposition D.2.1. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :*

1. *$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ et $Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$;*
2. *$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$;*
3. *$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$, si $z' \neq 0$;*
4. *$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$.*

Démonstration. 1. On a $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, d'où $z + \overline{z} = 2x = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2iy = 2i\mathrm{Im}(z)$. Donc on a $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$.
2. On a $z' = x' + iy'$, avec $x', y' \in \mathbb{R}$, d'où $z + z' = x + x' + i(y + y')$ et $zz' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$. Donc on a :

$$\overline{z + z'} = x + x' - i(y + y') = x - iy + x' - iy' = \overline{z} + \overline{z'}\,,$$

$$\overline{zz'} = xx' - yy' - i(xy' + x'y) = (x - iy)(x' - iy') = \overline{z}\,\overline{z'}\,.$$

3. On suppose $z' \neq 0$. Comme on a $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z}\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}$, il suffit de montrer que l'on a $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$. Or on a $\frac{1}{z'} = \frac{x'}{x'^2+y'^2} - i\frac{y'}{x'^2+y'^2}$, d'où $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{x'}{x'^2+y'^2} + i\frac{y'}{x'^2+y'^2} = \frac{x'+iy'}{x'^2+y'^2} = \frac{z'}{z'\overline{z'}} = \frac{1}{\overline{z'}}$.
4. Supposons d'abord $z \in \mathbb{R}$, alors $z = x + i0$, avec $x \in \mathbb{R}$, d'où $\overline{z} = x - i0 = x = z$. Réciproquement, supposons que $z = \overline{z}$, alors on a $z = x + iy = x - iy$, d'où $2iy = 0$, donc $y = 0$. Par conséquent, on a $z = x \in \mathbb{R}$. ∎

Proposition D.2.2. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :*

1. $|Re(z)| \leq |z|$ *et* $|Im(z)| \leq |z|$ *;*
2. $|z| = 0 \iff z = 0$ *;*
3. $z\overline{z} = |z|^2$ *et* $|z| = |\overline{z}|$ *;*
4. $|zz'| = |z|\,|z'|$ *;*
5. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, *si* $z' \neq 0$ *;*
6. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ *;*
7. $\big|\,|z| - |z'|\,\big| \leq |z + z'|$.

Démonstration. 1. On a $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, d'où $|\mathrm{Re}(z)| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| = |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|$.
2. On a $z = 0 \iff x = 0$ et $y = 0 \iff \sqrt{x^2+y^2} = 0 \iff |z| = 0$.
3. On a $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$ et $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(-y)^2} = |\overline{z}|$.
4. On a $z' = x' + iy'$, avec $x', y' \in \mathbb{R}$, d'où $zz' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$. Donc on a :

$$\begin{aligned}
|zz'|^2 &= (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2 \\
&= x^2x'^2 - 2xx'yy' + y^2y'^2 + x^2y'^2 + 2xx'yy' + x'^2y^2 \\
&= x^2x'^2 + y^2y'^2 + x^2y'^2 + x'^2y^2 \\
&= (x^2+y^2)(x'^2+y'^2) \\
&= |z|^2\,|z'|^2.
\end{aligned}$$

D'où on a $|zz'| = |z|\,|z'|$.
5. On suppose $z' \neq 0$. Comme on a $\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z\frac{1}{z'}\right| = |z|\left|\frac{1}{z'}\right|$, il suffit de montrer que l'on a $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$. On a $\frac{1}{z'} = \frac{x'}{x'^2+y'^2} - i\frac{y'}{x'^2+y'^2}$, d'où $\left|\frac{1}{z'}\right|^2 = \frac{x'^2}{(x'^2+y'^2)^2} + \frac{y'^2}{(x'^2+y'^2)^2} = \frac{1}{x'^2+y'^2} = \frac{1}{|z'|^2}$. Donc on a $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$.

6. On a :

$$\begin{aligned}
|z+z'|^2 &= (z+z')(\overline{z+z'}\,) \\
&= (z+z')(\,\overline{z}+\overline{z'}\,) \\
&= z\overline{z}+z\overline{z'}+z'\overline{z}+z'\overline{z'} \\
&= |z|^2+|z'|^2+z\overline{z'}+\overline{z\overline{z'}} \\
&= |z|^2+|z'|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{z'}\,) \\
&\le |z|^2+|z'|^2+2|\mathrm{Re}(z\overline{z'}\,)| \\
&\le |z|^2+|z'|^2+2|z\overline{z'}| \\
&= |z|^2+|z'|^2+2|z|\,|\overline{z'}| \\
&= |z|^2+|z'|^2+2|z|\,|z'| \\
&= \big(|z|+|z'|\big)^2.
\end{aligned}$$

D'où on a $|z+z'| \le |z|+|z'|$.
7. On a $z = z+z'+(-z')$. D'après 6, on a $|z| = |z+z'+(-z')| \le |z+z'|+|-z'| = |z+z'|+|z'|$, d'où $|z|-|z'| \le |z+z'|$. De même, on a $-(|z|-|z'|) = |z'|-|z| \le |z'+z| = |z+z'|$. Par conséquent, on a $\big|\,|z|-|z'|\,\big| \le |z+z'|$. ■

D.3 Représentation géométrique des nombres complexes

Rappels de trigonométrie. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\sin(\theta), \cos(\theta) \in [-1,\,1]$ et on a $(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1$. Réciproquement, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2+y^2=1$, alors il existe un unique $\theta \in [0,\,2\pi[$ tel que $x=\cos(\theta)$ et $y=\sin(\theta)$.
Pour tout $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$, on a $(\cos(\theta),\sin(\theta)) = (\cos(\alpha),\sin(\alpha))$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta-\alpha = 2k\pi$. On a les formules utiles suivantes :

$$\cos(-\theta)=\cos(\theta) \quad , \quad \sin(-\theta) = -\sin(\theta)\,,$$

$$\cos(\theta+\theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')\,,$$

$$\sin(\theta+\theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')\,.$$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

On déduit de ce qui précède les formules suivantes :

$$\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta) \quad , \quad \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)\,,$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta) \quad , \quad \sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)\,,$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) \quad , \quad \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)\,,$$

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta) = (\cos(\theta))^2 - (\sin(\theta))^2 = 2(\cos(\theta))^2 - 1 = 1 - 2(\sin(\theta))^2\,,$$

$$\sin(2\theta) = \sin(\theta + \theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)\,.$$

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, tel que $z \neq 0$. Alors on a :

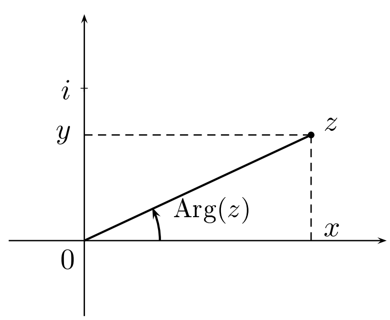
$$z = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = |z|\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Comme on a :

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1$$

alors il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Autrement dit, il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Définition D.3.1. Pour tout nombre complexe non nul z, l'unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ est appelé **l'argument principal** de z et se note $\mathrm{Arg}(z)$.



Notation. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$$

Proposition D.3.1. *On a les propriétés suivantes :*

1. $\left|e^{i\theta}\right| = 1$;
2. $\overline{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)}$;
3. $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$;
4. $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff$ *il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\theta - \theta' = 2k\pi$.

Démonstration. 1. On a $\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2} = \sqrt{1} = 1$.
2. On a $\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{i(-\theta)}$.
3. On a :

$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\theta'} &= \big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)\big(\cos(\theta') + i\sin(\theta')\big) \\ &= \big(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')\big) + i\big(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')\big) \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &= e^{i(\theta+\theta')}. \end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} = e^{i\theta'} &\iff \cos(\theta) + i\sin(\theta) = \cos(\theta') + i\sin(\theta') \\ &\iff \cos(\theta) = \cos(\theta') \text{ et } \sin(\theta) = \sin(\theta') \\ &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta - \theta' = 2k\pi. \end{aligned}$$

■

Proposition D.3.2. *On a les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$, on a $z = |z|e^{iArg(z)}$.*
2. *Soit $z = re^{i\alpha}$, avec $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $|z| = r$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $Arg(z) - \alpha = 2k\pi$.*
3. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $z \neq 0$ et $z' \neq 0$. Alors $z = z'$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $Arg(z) - Arg(z') = 2k\pi$.*
4. *Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, avec $r, r', \theta, \theta' \in \mathbb{R}$, alors on a $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ et $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$, si $r' \neq 0$.*

Démonstration. 1. On a :

$$z = x+iy = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = |z|\big(\cos(\mathrm{Arg}(z)) + i\sin(\mathrm{Arg}(z))\big) = |z|e^{i\mathrm{Arg}(z)}$$

2. Soit $z = re^{i\alpha}$, avec $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, d'où $z = r\cos(\alpha) + ir\sin(\alpha)$, donc on a $|z| = \sqrt{(r^2\cos(\theta))^2 + r^2(\sin(\theta))^2} = \sqrt{r^2} = r$. Par conséquent, on a $z = |z|e^{i\alpha} = |z|e^{i\mathrm{Arg}(z)}$, d'où $e^{i\alpha} = e^{i\mathrm{Arg}(z)}$. On déduit de la proposition précédente qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{Arg}(z) - \alpha = 2k\pi$.
3. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $z \neq 0$ et $z' \neq 0$. Si $z = z'$, alors on a $|z| = |z'|$ et $\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(z')$.
Réciproquement, supposons que $|z| = |z'|$ et qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z') = 2k\pi$. Alors on a $z = |z|e^{i\mathrm{Arg}(z)} = |z'|e^{i\mathrm{Arg}(z')} = z'$.
4. Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$. Alors on a $zz' = rr'e^{i\theta}e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$. D'autre part, si $z' \neq 0$, alors on a :

$$\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{re^{i\theta}\overline{e^{i\theta'}}}{r'e^{i\theta'}\overline{e^{i\theta'}}} = \frac{re^{i\theta}e^{i(-\theta')}}{r'|e^{i\theta'}|^2} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}.$$

■

Définition D.3.2. Soit z un nombre complexe. L'écriture $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, est appelée **la forme algébrique** ou aussi **la forme cartésienne** de z. Si $z \neq 0$, l'écriture $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$, est appelée **la forme polaire** ou aussi **la forme trigonométrique** de z.

Notons que ces deux écritures sont reliées par les relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos(\theta) \\ & & \\ y & = & r\sin(\theta) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ccc} r & = & \sqrt{x^2+y^2} \\ & & \\ \cos(\theta) & = & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ & & \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right.$$

Insistons sur le fait que θ est seulement défini modulo 2π, sauf si on précise que $\theta = \mathrm{Arg}(z)$.

Proposition D.3.3 (formules d'Euler). *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{i(-\theta)}}{2} \quad et \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{i(-\theta)}}{2i}.$$

Démonstration. 1. Comme on a $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et $e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$, on en déduit que l'on a $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{i(-\theta)}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{i(-\theta)}}{2i}$. ■

Proposition D.3.4 (formule de Moivre). *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

Autrement dit, on a $\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Démonstration. 1. On démontre cette formule par récurrence sur n. La formule est évidemment vraie pour $n = 0$. Supposons la formule vraie à l'ordre $n-1$, *i.e.* que l'on a $(e^{i\theta})^{n-1} = e^{i(n-1)\theta}$. On en déduit que $(e^{i\theta})^n = e^{i\theta}(e^{i\theta})^{n-1} = e^{i(1+n-1)\theta} = e^{in\theta}$. Par conséquent, la formule de Moivre est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

D.4 Racines carrées et équations de second ordre dans $\mathbb{C}$

Définition D.4.1. Soit $a \in \mathbb{C}$. On appelle **racine carrée** de a tout nombre complexe z tel que $z^2 = a$.
Ainsi, le nombre complexe $a = 0$ possède une unique racine carrée $z = 0$.

Proposition D.4.1. *Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$. Alors a possède exactement deux racines carrées $\{z_0, -z_0\}$.*

Démonstration. Supposons que z_0 est une racine carrée de a, *i.e.* $z_0^2 = a$. Alors on a $(-z_0)^2 = z_0^2 = a$, donc $-z_0$ est aussi une racine carrée de a. Soit z une racine carrée de a, *i.e.* $z^2 = a$, alors on a $z^2 - z_0^2 = 0$, d'où $(z-z_0)(z+z_0) = 0$. Donc on a $z = z_0$ ou $z = -z_0$. Pour compléter la preuve, il reste à déterminer une racine carrée de a. Si on connaît a sous forme polaire $a = re^{i\theta}$, avec $r > 0$, alors il suffit de prendre $z_0 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$. Supposons que a est donné sous forme cartésienne $a = \mathrm{Re}(a) + i\mathrm{Im}(a)$. Soit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors on a $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Donc on a :

$$z^2 = a \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x^2 - y^2 & = & \mathrm{Re}(a) \\ & & \\ 2xy & = & \mathrm{Im}(a) \end{array}\right.$$

Par ailleurs, on a $x^2+y^2=|z|^2=|z^2|=|a|$, d'où :

$$z^2=a \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2 & = & \mathrm{Re}(a) \\ x^2+y^2 & = & |a| \\ 2xy & = & \mathrm{Im}(a) \end{array}\right.$$

Donc on a $x^2=\dfrac{|a|+\mathrm{Re}(a)}{2}$ et $y^2=\dfrac{|a|-\mathrm{Re}(a)}{2}$. Comme on a $\dfrac{|a|+\mathrm{Re}(a)}{2}\geq 0$ et $\dfrac{|a|-\mathrm{Re}(a)}{2}\geq 0$, car on a toujours $|\mathrm{Re}(a)|\leq |a|$, on trouve alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \pm\sqrt{\dfrac{|a|+\mathrm{Re}(a)}{2}} \\ y & = & \pm\sqrt{\dfrac{|a|-\mathrm{Re}(a)}{2}} \end{array}\right.$$

La condition $2xy=\mathrm{Im}(a)$ permet de déterminer les signes $\pm$.
Ainsi, si $\mathrm{Im}(a)\geq 0$, alors $xy\geq 0$ et par conséquent x et y sont de même signe. Les racines sont alors z_0 et $-z_0$, avec :

$$z_0=\sqrt{\frac{|a|+\mathrm{Re}(a)}{2}}+i\sqrt{\frac{|a|-\mathrm{Re}(a)}{2}}\,.$$

Par contre, si $\mathrm{Im}(a)\leq 0$, alors $xy\leq 0$ et par conséquent x et y sont de signe opposé. Les racines sont alors z_0 et $-z_0$, avec :

$$z_0=\sqrt{\frac{|a|+\mathrm{Re}(a)}{2}}-i\sqrt{\frac{|a|-\mathrm{Re}(a)}{2}}\,.$$

■

Exemple D.4.1. Calculons les racines carrées de $a=3-4i$. Soit $z=x+iy\in\mathbb{C}$, on résout le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2-y^2 & = & \mathrm{Re}(a)=3 \\ x^2+y^2 & = & |a|=5 \\ 2xy & = & \mathrm{Im}(a)=-4 \end{array}\right.$$

On trouve $x=\pm 2$ et $y=\pm 1$ avec $xy<0$. Donc les racines carrées de a sont $z_0=2-i$ et $-z_0=-2+i$.

Définition D.4.2. Une équation de degré 2 dans $\mathbb{C}$ est une équation de la forme $az^2+bz+c=0$, avec $a,b,c\in\mathbb{C}$ et $a\neq 0$.

Il s'agit de déterminer tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $az^2 + bz + c = 0$. On a :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\Big[z^2 + \frac{b}{a}z\Big] + c \\ &= a\Big[z^2 + 2\frac{b}{2a}z\Big] + c \\ &= a\Big[\Big(z + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\Big] + c \\ &= a\Big[\Big(z + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \Big(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, alors on a $az^2 + bz + c = a\Big[\Big(z + \dfrac{b}{2a}\Big)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\Big]$. Soit δ une racine carrée de Δ, *i.e.* $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Alors on a :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\Big[\Big(z + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \Big(\frac{\delta}{2a}\Big)^2\Big] \\ &= a\Big[z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\Big]\Big[z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\Big] \\ &= a\Big[z - \Big(\frac{-b + \delta}{2a}\Big)\Big]\Big[z - \Big(\frac{-b - \delta}{2a}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Donc les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}\,.$$

Exemple D.4.2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. Dans cet exemple, on a $a = b = c = 1$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac = -3 = 3i^2$, alors $\delta = i\sqrt{3}$ est une racine carrée de Δ. Les solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\,.$$

D.5 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition D.5.1. Soient n un entier ≥ 1 et $a \in \mathbb{C}$. On appelle **racine n-ième** de a tout nombre complexe z tel que $z^n = a$.
Ainsi, le nombre complexe $a = 0$ possède une unique racine n-ième $z = 0$.

Proposition D.5.1. *Soient n un entier ≥ 1 et $a \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$. L'équation $z^n = a$ a exactement n solutions distinctes dans $\mathbb{C}$. Ce sont les nombres complexes :*

$$z_k = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{Arg(a)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad , \quad k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}\,.$$

Démonstration. Comme $a \neq 0$, on a $a = |a|e^{i\mathrm{Arg}(a)}$ et toute solution z de l'équation $z^n = a$ est forcément non nul, donc z aura une forme trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho > 0$. On a $z^n = \rho^n e^{in\theta}$, d'où :

$$z^n = a \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho^n &= |a| \\ n\theta &= \mathrm{Arg}(a) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho &= |a|^{\frac{1}{n}} \\ \theta &= \dfrac{\mathrm{Arg}(a)}{n} + \dfrac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc les solutions de l'équation $z^n = a$ sont :

$$z_k = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\mathrm{Arg}(a)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Pour compléter la preuve, il reste à montrer les deux propriétés suivantes :

1. Les solutions $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$ sont deux à deux distinctes.
2. Si $k \in \mathbb{Z}$, alors il existe $r \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ tel que $z_k = z_r$.

1. Soient $p, q \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ tels que $z_p = z_q$. Alors on a $e^{i\left(\frac{\mathrm{Arg}(a)}{n} + \frac{2p\pi}{n}\right)} = e^{i\left(\frac{\mathrm{Arg}(a)}{n} + \frac{2q\pi}{n}\right)}$, d'où il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{\mathrm{Arg}(a)}{n} + \dfrac{2p\pi}{n} = \dfrac{\mathrm{Arg}(a)}{n} + \dfrac{2q\pi}{n} + 2m\pi$. Donc on a $p - q = mn$, on en déduit que $m = 0$, d'où $p = q$.
2. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On fait la division euclidienne de k par n, on obtient $p \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ tels que $k = pn + r$, d'où on a :

$$z_k = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\mathrm{Arg}(a)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\mathrm{Arg}(a)}{n} + \frac{2pn\pi + 2r\pi}{n}\right)} = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\mathrm{Arg}(a)}{n} + \frac{2r\pi}{n}\right)} e^{i2p\pi} = z_r\,.$$

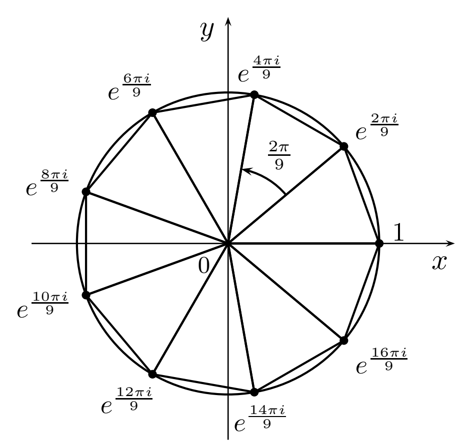
■

Exemple D.5.1. Cherchons les solutions de l'équation $z^4 = 8(-1 + i\sqrt{3})$.
On a $z^4 = 16\left(\dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^4 e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Donc les solutions sont :

$$z_k = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)} \quad , \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}\,.$$

Définition D.5.2. On appelle **racine n-ième de l'unité** toute solution de l'équation $z^n = 1$. Ce sont donc les nombres complexes :

$$z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \quad , \quad k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}\,.$$



Disposition des racines 9-ièmes de l'unité sur le cercle-unité

Ce sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle-unité.

Remarque D.5.1. Soient $a \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$ et z, z' deux racines de l'équation $z^n = a$. Alors on a $z^n = z'^n$, d'où $\left(\frac{z'}{z}\right)^n = 1$. Donc il existe $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ tel que $\frac{z'}{z} = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, d'où on a $z' = ze^{\frac{2k\pi i}{n}}$. Ainsi, on obtient les racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul a en multipliant l'une d'entre elles par les racines n-ièmes de l'unité.

Théorème D.5.1 (d'Alembert). *Soient n un entier ≥ 1 et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ tel que $a_n \neq 0$. Alors l'équation $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Autrement dit, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

Ce théorème a été démontré au chapitre 3 de ce supplément.

Appendice E

ALGÈBRES

Dans cet Appendice, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif quelconque.

Définition E.0.3. Une **algèbre** A sur le corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une application bilinéaire, appelée multiplication et notée

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

telle que pour tout x, y, $z \in A$, on ait $x(yz) = (xy)z$ (associativité) †.

On dit qu'une algèbre A est **unitaire** ou **unifère** s'il existe un élément non nul noté 1_A dans A tel que pour tout $x \in A$, on ait $x1_A = 1_A x = x$. Un tel élément est alors unique, et appelé **l'unité** de A. Dans certains cas, on convient, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, de noter λ l'élément $\lambda 1_A$ de A. Cette convention est justifiée par le fait que l'application $\lambda \longmapsto \lambda 1_A$ de $\mathbb{K}$ dans A est injective, et par la relation $\lambda x = (\lambda 1_A)x$.
Soit A une algèbre unitaire. Un élément a de A est dit **inversible** s'il existe un élément b de A tel que $ab = ba = 1_A$. Dans ce cas, b est unique, appelé **l'inverse** de a et noté a^{-1}. On note $\mathrm{GL}(A)$ l'ensemble des éléments inversibles de A. C'est un groupe pour la multiplication, dont l'élément neutre est l'unité de A.
On dit qu'une algèbre A est **commutative** si pour tout $x, y \in A$, on a $xy = yx$.

Définition E.0.4. Soient A une algèbre et B, I des sous-espaces vectoriels de A.

1. On dit que B est une **sous-algèbre** de A si pour tous $x, y \in B$, on a $xy \in B$.
2. On dit que I est un **idéal bilatère** de A si pour tout $a \in A$ et pour tout $x \in I$, on a $ax \in I$ et $xa \in I$.

Il est clair que tout idéal bilatère de A est une sous-algèbre de A. Notons aussi que $\{0\}$ et A sont des idéaux bilatères de A.

Remarque E.0.2. Soit A une algèbre.

1. Si $(B_j)_{j \in J}$ est une famille de sous-algèbres de A, alors $\bigcap_{j \in J} B_j$ est une sous-algèbre de A. Par conséquent, pour tout sous-ensemble non vide S de A, il existe une plus petite sous-algèbre de A contenant S, à savoir l'intersection des sous-algèbres de A contenant S. Une telle sous-algèbre est appelée la sous-algèbre de A **engendrée** par S. Par exemple, si $S = \{a\}$ est un singleton, la sous-algèbre de A engendrée par S est le sous-espace vectoriel de A engendré par les a^n, où $n \in \mathbb{N}^*$.

†. En général l'associativité ne fait pas partie de la définition d'une algèbre, mais dans cet Appendice on ne considère que des algèbres associatives.

2. Si $(I_j)_{j\in J}$ est une famille d'idéaux bilatères de A, alors $\bigcap\limits_{j\in J} I_j$ est un idéal bilatère de A. Par conséquent, pour tout sous-ensemble non vide S de A, il existe un plus petit idéal bilatère de A contenant S, à savoir l'intersection des idéaux bilatères de A contenant S. Un tel idéal bilatère est appelé l'idéal bilatère de A **engendré** par S.

Définition E.0.5. Soient A et B deux algèbres et $\varphi : A \longrightarrow B$ une application $\mathbb{K}$-linéaire de A dans B. On dit que φ est un **morphisme** ou **homomorphisme d'algèbres** de A dans B si l'on a $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pour tous $x,\, y \in A$. Si de plus A et B sont unitaires et $\varphi(1_A) = 1_B$, on dit que φ est un **morphisme d'algèbres unitaires**. Un **isomorphisme d'algèbres** est un morphisme d'algèbres bijectif.

Proposition E.0.2. *Soient A et B deux algèbres unitaires et $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbres.*

1. *Si φ est unitaire, alors on a $\varphi(GL(A)) \subset GL(B)$.*
2. *Si $B = \mathbb{K}$ et si φ est non nul, alors φ est unitaire. En particulier, pour tout $x \in GL(A)$, on a $\varphi(x) \neq 0$.*

Démonstration. 1. Soit $x \in \mathrm{GL}(A)$. Alors on a $xx^{-1} = x^{-1}x = 1_A$. Comme φ est unitaire, on en déduit que l'on a $\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(x^{-1})\varphi(x) = \varphi(1_A) = 1_B$. Donc $\varphi(x)$ est inversible et on a $(\varphi(x))^{-1} = \varphi(x^{-1})$.
2. Supposons que $B = \mathbb{K}$ et que φ est non nul. Alors il existe $a \in A$ tel que $\varphi(a) \neq 0$. Comme on a $\varphi(a) = \varphi(a1_A) = \varphi(a)\varphi(1_A)$, alors $\varphi(1_A) = 1$. Donc φ est unitaire. ■

Corollaire E.0.1. *Soit B une sous-algèbre unitaire d'une algèbre unitaire A telle que $1_B = 1_A$, alors l'injection canonique $i : B \hookrightarrow A$ est un morphisme algèbres unitaires. Ceci implique que l'on a $GL(B) \subset GL(A)$.*

Algèbre quotient

Soient A une algèbre et I un idéal bilatère de A. Soient A/I l'espace vectoriel quotient et $\pi : A \longrightarrow A/I$ l'application quotient, c'est une application linéaire. Pour tous $a, b \in A$ et pour tous $x, y \in I$, on a $(a+x)(b+y) = ab+ay+xb+xy$, avec $ay+xb+xy \in I$. Par conséquent, si on pose $\pi(a)\pi(b) = \pi(ab)$, c'est un produit bien défini sur A/I. On vérifie facilement que A/I muni de ce produit est une algèbre, appelée **l'algèbre quotient** de A par I, et π est un morphisme d'algèbres.

Décomposition canonique d'un morphisme

Soient A, B deux algèbres et φ un morphisme d'algèbres de A dans B. Alors $\varphi(A)$ est une sous-algèbre de B, $\ker(\varphi)$ est un idéal bilatère de A et il existe un unique morphisme d'algèbres $\overline{\varphi}$ de $A/\ker\varphi$ dans B tel que $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$, *i.e.* le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\ & A/\ker\varphi \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

De plus $\overline{\varphi}$ est injectif. Cette décomposition est appelée la **décomposition canonique** de φ.
De manière générale, si I est un idéal bilatère de A tel que $I \subset \ker(\varphi)$, alors il existe un unique

morphisme d'algèbres $\overline{\varphi} : A/I \longrightarrow B$ tel que $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$, *i.e.* le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\ & A/I \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Produit fini d'algèbres

Soit $(A_i)_{1\leq\ i\leq n}$ une suite finie d'algèbres, alors $\prod_{i=1}^{n} A_i$ muni du produit $(a_i)_{1\leq\ i\leq n}(b_i)_{1\leq\ i\leq n} = (a_ib_i)_{1\leq\ i\leq n}$ est une algèbre, appelée l'**algèbre produit** des algèbres $(A_i)_{1\leq\ i\leq n}$. Si toutes les A_i sont unitaires, $\prod_{i=1}^{n} A_i$ l'est aussi.

Adjonction d'une unité à une algèbre

Soit A une algèbre sur $\mathbb{K}$. Soit $A^+ = A\times\mathbb{K}$, comme espace vectoriel. Pour tous (x, α), $(y, \beta) \in A^+$, on pose :

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta)\,.$$

Alors A^+ muni de ce produit est une algèbre unitaire avec $(0,\,1)$ comme unité, et l'application $a \longmapsto i(a) = (a,\,0)$ est un morphisme d'algèbres injectif de A dans A^+, donc on identifie A à son image dans A^+. De plus A est un idéal bilatère de A^+ et l'algèbre quotient A^+/A est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{K}$. L'algèbre A^+ est dite l'algèbre obtenue par **adjonction d'une unité** à A, A avec ou sans unité. On a aussi la propriété universelle suivante :
Si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'algèbres et si B est unitaire, alors il existe un unique morphisme d'algèbres unitaires $\varphi^+ : A^+ \longrightarrow B$ tel que $\varphi = \varphi^+ \circ i$, *i.e.* le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "i"'] & & B \\ & A^+ \arrow[ur, "\varphi^+"'] & \end{tikzcd}$$

Remarque E.0.3. Si A est une algèbre unitaire, alors l'application $\varphi : (a, \lambda) \longmapsto (a - \lambda\,1_A, \lambda)$ est un isomorphisme d'algèbres unitaires de $A \times \mathbb{K}$ sur A^+.

Bibliographie

[1] V. Avanissian, *Initiation à l'analyse fonctionnelle*, Puf, 1996.

[2] H. Boualem et R. Brouzet, *La Planète $\mathbb{R}$, voyage au pays des nombres réels*, Dunod, 2002.

[3] N. Bourbaki, *Topologie Générale, Chapitres 5 à 10*, Diffusion C.C.L.S, nouvelle édition, 1974.

[4] N. Bourbaki, *Espaces Vectoriels Topologiques, Chapitres 1 à 5*, Masson, 1981.

[5] N. Bourbaki, *Topologie Générale, Chapitres 1 à 4*, Masson, nouvelle édition, 1990.

[6] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, 1973.

[7] N.L. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory*, Cambridge University Press, 2005. London Mathematical Society, Student Texts 64.

[8] G. Christol, A. Cot et C-M. Marle, *Topologie*, Ellipses, 1997.

[9] G. Choquet, *Cours de Topologie*, Masson, 1969, deuxième édition, 1992.

[10] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse 1*, Gauthier-Villars, 1979, troisième édition, traduit du livre intitulé, *Foundations of Modern Analysis*, 1960.

[11] Ronald G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Academic Press, 1972, seconde édition, Springer-Verlag, 1998.

[12] J. Dugundji, *Topology*, Allyn et Bacon, 1966, réédition, Wn.C. Browpublishers, 1989.

[13] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, 1976, réédition, 1989.

[14] M. Fabian, P. Habala et P. Hájek, *Functional analysis and infinite-Dimensional geometry*, Springer-Verlag, 2001, Canadian Mathematical Society.

[15] L. Gillman et M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Van Nostrand, 1960.

[16] C. Godbillon, *Élément de Topologie Algébrique*, Hermann, 1971.

[17] J.L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, 1955, réédition, Springer-Verlag, 1975.

[18] John M. Lee, *Intoduction to Topological Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, 2000.

[19] J-P. Marco, *Analyse pour la licence*, Dunod, deuxième édition, 2002.

[20] Y. Matsushima, *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker, 1972. Titre original *Tayotai Nyumon*, 1965.

[21] R.E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, 1998.

[22] J.R. Munkres, *Topology*, Prentice-Hall, 1975, seconde édition, 2000.

[23] Gerard J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990.

[24] R. Meise and D. Vogt, *Introduction to Functional analysis*, Oxford University Press, 1997.

[25] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux, *Topologie et éléments d'analyse*, Masson, 1976, deuxième édition, 1988.

[26] H.L. Royden, *Real Analysis*, Prentice-Hall, 1963, troisième édition, 1988.

[27] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 1953, troisième édition, 1976.

[28] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1973, seconde édition, 1991.

[29] L. Schwartz, *Analyse I*, Hermann, 1991.

[30] L. Schwartz, *Analyse II*, Hermann, 1992, nouvelle édition, 1997.

[31] G. Skandalis, *Topologie et analyse*, Dunod, 2001.

Index