EXERCICES

SUR LES ESPACES NORMES

ET LA CONVERGENCE UNIFORME

G.EGUETHER

21 février 2017

Table des matières

Avertissement

On trouvera dans ce qui suit un choix d'exercices sur les espaces vectoriels normés et la convergence uniforme. On proposera pour chaque exercice une démonstration, mais il peut, bien sûr, y avoir d'autres moyens de procéder.

En général on n'a vérifié que la propriété de séparation de la norme, les deux autres propriétés étant laissées aux bons soins du lecteur.

Notations

Les espaces vectoriels considérés sont des espaces sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Dans un espace métrique (E, d), on note respectivement $B(x, r)$ et $B'(x, r)$ la boule ouverte et la boule fermée de centre x et de rayon r.

2) Si f est une application linéaire continue d'un espace vectoriel normé dans un autre, on notera $|||f|||$ la norme de cette application.

3) Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ et p un entier plus grand que 1. On notera

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \quad \text{et} \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} .$$

Cela définit des normes sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.

4) Soit f est une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur un intervalle I non vide et p un entier plus grand que 1. On notera,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)| ,$$

qui définit une norme sur l'espace des fonctions bornées sur I, et

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} ,$$

qui définit une norme sur l'espaces vectoriel des fonctions continues de puissance $p-$ième intégrable sur I.

En particulier, lorsque I est compact, cela définit des normes sur l'espace $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{C}(I, \mathbb{C})$) des fonctions continues sur I à valeurs réelles (resp. complexes).

Cela définit également des normes sur les espaces de polynômes $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ car la nullité de $\|P\|_i$ entraine que $P(x)$ est nul pour tout x de I donc que P a une infinité de racines, c'est-à-dire que P est le polynôme zéro.

Chapitre 1

Espaces généraux

Exercice 1

1) Soit F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f une application linéaire de E dans F. Pour tout x de E, on pose

$$\|x\|_E = \|f(x)\|_F\,.$$

A quelle condition définit-on ainsi une norme sur E ?

2) Soit F et G deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f et g deux applications linéaires de E dans F et de E dans G respectivement. Pour tout x de E, on pose

$$\|x\|_E = \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_G\,.$$

A quelle condition définit-on ainsi une norme sur E ?

Solution

1) On a de manière évidente

$$\|\lambda x + \mu y\|_E = \|f(\lambda x + \mu y)\|_F = \|\lambda f(x) + \mu f(y)\|_F \leq |\lambda|\,\|f(x)\|_F + |\mu|\,\|f(y)\|_F = |\lambda|\,\|x\|_E + |\mu|\,\|y\|_E\,.$$

Il reste donc à étudier la propriété de séparation.

Si le nombre $\|x\|_E$ est nul, cela signifie que $\|f(x)\|_F$ est nul et donc que $f(x)$ est nul. Si l'on veut avoir la propriété de séparation, il faut que $f(x) = 0$ implique $x = 0$, c'est-à-dire que f soit injective et cette condition est suffisante.

2) Là aussi, seule la propriété de séparation n'est pas automatiquement vérifiée. Si le nombre $\|x\|_E$ est nul, cela signifie que $\|f(x)\|_F$ et $\|g(x)\|_G$ sont nuls et donc que $f(x)$ et $g(x)$ sont nuls. Si l'on veut

avoir la propriété de séparation, il faut que $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ impliquent $x = 0$, c'est-à-dire que

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}\,,$$

et cette condition est suffisante.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f une application linéaire surjective de E dans F. Pour tout x de F, on pose

$$\|x\|_F = \inf\{\|a\|_E \mid f(a) = x\}\,.$$

1) Montrer que l'on obtient de cette manière une norme sur F rendant f continue si et seulement si $\operatorname{Ker} f$ est fermé dans E.

2) On suppose dans cette question que $F = \mathbb{R}$ et donc que f est une forme linéaire non nulle sur E, de noyau H. Montrer que
– ou bien, pour tout x réel, $\|x\|_{\mathbb{R}} = 0$,
– ou bien il existe a_0 dans E tel que

$$|x| = \inf\{\|u + xa_0\|_E \mid u \in H\}\,,$$

et en déduire qu'alors $d(a_0, H) = 1$.

3) Soit H un sous-espace fermé de E et $F = E/H$. Définir une norme sur F.

Solution

1) Remarquons tout d'abord, puisque $f(0) = 0$, que

$$\|0\|_F \leq \|0\|_E = 0\,,$$

donc $\|0\|_F$ est nul.

En particulier, si λ est nul,

$$\|\lambda x\|_F = \|0\|_F = 0 = |\lambda|\,\|x\|_F\,.$$

Soit maintenant λ un nombre réel non nul et x un vecteur de F. Comme f est linéaire

$$\|\lambda x\|_F = \inf\{\|a\|_E \mid f(a) = \lambda x\} = \inf\{\|a\|_E \mid f(a/\lambda) = x\}\,.$$

En posant $a = \lambda b$, on a encore

$$\|\lambda x\|_F = \inf\{\|\lambda b\|_E \mid f(b) = x\} = |\lambda| \inf\{\|b\|_E \mid f(b) = x\} = |\lambda|\,\|x\|_F\,.$$

Enfin, si l'on a $f(a) = x$ et $f(b) = y$, donc $f(a+b) = x+y$, on obtient

$$\|x+y\|_F \leq \|a+b\|_E \leq \|a\|_E + \|b\|_E \,.$$

Fixons b, alors $\|x+y\|_F - \|b\|_E$ est un minorant de l'ensemble $\{\|a\|_E \mid f(a) = x\}$, donc

$$\|x+y\|_F - \|b\|_E \leq \inf\{\|a\|_E \mid f(a) = x\} = \|x\|_F \,,$$

puis $\|x+y\|_F - \|x\|_F$ est un minorant de l'ensemble $\{\|b\|_E \mid f(b) = y\}$, donc

$$\|x+y\|_F - \|x\|_F \leq \inf\{\|b\|_E \mid f(b) = y\} = \|y\|_F \,,$$

et finalement

$$\|x+y\|_F \leq \|x\|_F + \|y\|_F \,.$$

De plus, par construction,

$$\|f(a)\|_F \leq \|a\|_E \,. \tag{1}$$

Pour obtenir une norme, il faut encore que $\|x\|_F = 0$ implique $x = 0$.

Si c'est une norme, alors l'inégalité (1) montre que l'application linéaire f est continue et donc, puisque $\{0\}$ est fermé dans F, l'ensemble

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0)$$

est fermé dans E.

Réciproquement, supposons l'ensemble $\operatorname{Ker} f$ fermé, et soit x dans F tel que $\|x\|_F$ soit nul. Il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de E telle que, pour tout n,

$$f(a_n) = x \,,$$

et telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n\|_E = \|x\|_F = 0 \,.$$

Donc la suite (a_n) converge vers 0 dans E. Alors la suite $(a_0 - a_n)$ est une suite de $\operatorname{Ker} f$ qui converge vers a_0 dans E. Comme $\operatorname{Ker} f$ est fermé, le vecteur a_0 appartient à $\operatorname{Ker} f$ et

$$0 = f(a_0) = x \,.$$

2) Si b_0 est un élément de E tel que $f(b_0) = 1$, tout élément a de E peut s'écrire

$$a = v + xb_0 \,,$$

où v est dans H et x dans $\mathbb{R}$. Alors les éléments de E tels que

$$f(a) = x \,,$$

sont exactement les éléments de la forme précédente. Donc

$$\|x\|_{\mathbb{R}} = \inf\{\|a\|_E \mid f(a) = x\} = \inf\{\|v + xb_0\|_E \mid v \in H\} \,.$$

Si H n'est pas fermé, c'est un sous-espace dense de E et il existe une suite (v_n) de H de limite $-xb_0$. Alors, pour tout entier n,

$$\|x\|_{\mathbb{R}} \leq \|v_n + xb_0\|_E \,,$$

et, par passage à la limite, on en déduit que $\|x\|_{\mathbb{R}}$ est nul.

Si H est fermé, alors $\|.\|_{\mathbb{R}}$ est une norme sur $\mathbb{R}$ d'après 1). Les normes sur $\mathbb{R}$ étant des multiples de la valeur absolue, il existe un nombre k strictement positif tel que

$$\|x\|_{\mathbb{R}} = k|x| \,.$$

On en déduit que

$$|x| = \frac{1}{k} \inf\{\|v + xb_0\|_E \mid v \in H\} = \inf\{\|v/k + x(b_0/k)\|_E \mid v \in H\} \,.$$

En posant $a_0 = b_0/k$ et $u = v/k$, on obtient

$$|x| = \inf\{\|u + xa_0\|_E \mid u \in H\} \,.$$

En particulier, si $x = -1$

$$1 = \inf\{\|u - a_0\|_E \mid u \in H\} = d(a_0, H) \,.$$

3) L'application f qui à x associe sa classe $\dot{x}$ vérifie les conditions de 1). On obtient une norme sur F en posant

$$\|\dot{x}\|_F = \inf\{\|a\|_E \mid f(a) = \dot{x}\} = \inf\{\|a\|_E \mid \dot{a} = \dot{x}\} = \inf\{\|x + h\|_E \mid h \in H\} \,.$$

Exercice 3 *Jauge*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et B une partie de E convexe, vérifiant les propriétés suivantes

$$\begin{array}{ll} (1) & -B = B \\ (2) & \{\alpha > 0 \mid x \in \alpha B\} \neq \emptyset \\ (3) & \bigcap\limits_{\alpha > 0} \alpha B = \{0\} \end{array}$$

Pour tout x de E on pose

$$\|x\|_B = \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha B\} \,.$$

1) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E et que

$$B(0,1) \subset B \subset B'(0,1) \,.$$

2) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On prend $B = B(0,1)$ ou $B'(0,1)$. Montrer que $\|.\|_B$ n'est autre que la norme $\|.\|$.

Solution

1) Remarquons tout d'abord que B contient 0 d'après (3) en prenant $\alpha = 1$. D'autre part la convexité se traduit par le fait que, pour tout nombre réel α de $[0, 1]$, on a l'inclusion

$$\alpha B + (1-\alpha)B \subset B\,,$$

et implique donc que, l'ensemble αB est inclus dans B. Alors, puisque $(\alpha/\beta)B$ est inclus dans B si $0 \leq \alpha \leq \beta$, on en déduit que l'on a dans ce cas, en multipliant par β,

$$\alpha B \subset \beta B\,,$$

Montrons les propriétés de la norme.

a) Remarquons déjà que, puisque 0 appartient à αB pour tout α, on a alors $\|0\|_B = 0$.

Supposons que $\|x\|_B$ soit nul. Il existe une suite de nombres réels (α_n) décroisante et tendant vers 0 telle que, pour tout entier n le vecteur x appartienne à $\alpha_n B$. Alors x appartient à $\bigcap\limits_n \alpha_n B$. Mais comme tout nombre α strictement positif est compris entre deux termes de la suite, le vecteur x appartient aussi à $\bigcap\limits_{\alpha>0} \alpha B$ donc est nul d'après la propriété (3).

b) Tout d'abord, si λ est nul,

$$\|\lambda x\|_B = \|0\|_B = 0 = |\lambda|\,\|x\|_B\,.$$

Remarquons aussi que, pour tout nombre réel α, d'après (1),

$$\alpha B = -\alpha B = |\alpha|\,B\,.$$

Soit maintenant λ un nombre réel non nul. On a

$$\|\lambda x\|_B = \inf\{\alpha > 0 \mid \lambda x \in \alpha B\} = \inf\{\alpha > 0 \mid x \in (\alpha/\lambda)B\} = \inf\{\alpha > 0 \mid x \in (\alpha/|\lambda|)B\}\,.$$

En posant $\beta = \alpha/|\lambda|$, on a encore

$$\|\lambda x\|_B = \inf\{\beta|\lambda| > 0 \mid x \in \beta B\} = |\lambda|\,\inf\{\beta > 0 \mid x \in \beta B\} = |\lambda|\,\|x\|_B\,.$$

c) Si x et y sont dans E, soit α et β tels que

$$x \in \alpha B \quad \text{et} \quad y \in \beta B\,.$$

Alors, d'après la convexité de B,

$$\frac{1}{\alpha+\beta}(x+y) \in \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,B + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,B \subset B\,,$$

donc $x+y$ appartient à $(\alpha+\beta)B$ et

$$\|x+y\|_B \leq \alpha + \beta\,.$$

Fixons β. On a
$$\|x+y\|_B - \beta \leq \alpha\,,$$
donc $\|x+y\|_B - \beta$ minore l'ensemble $\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha B\}$, et il en résulte que
$$\|x+y\|_B - \beta \leq \|x\|_B\,.$$
Ensuite
$$\|x+y\|_B - \|x\|_B \leq \beta\,,$$
et $\|x+y\|_B - \|x\|_B$ minore l'ensemble $\{\beta > 0 \mid y \in \beta B\}$. Il en résulte que
$$\|x+y\|_B - \|x\|_B \leq \|y\|_B\,,$$
et l'on en déduit l'inégalité triangulaire
$$\|x+y\|_B \leq \|x\|_B + \|y\|_B\,.$$
Si x appartient à $B(0,1)$, on a donc
$$\|x\|_B < 1\,.$$
Il existe $\alpha < 1$ tel que x appartienne à αB. Mais alors αB est inclus dans B. Donc
$$B(0,1) \subset B\,.$$
Si x appartient à B, par définition $\|x\|_B$ est plus petit que 1 et
$$B \subset B'(0,1)\,.$$
2) Soit $\alpha > 0$. Dire que x appartient à $\alpha B(0,1)$ équivaut à dire que x appartient à $B(0,\alpha)$, et de même, dire que x appartient à $\alpha B'(0,1)$ équivaut à dire que x appartient à $B'(0,\alpha)$.

Si $B = B(0,1)$, alors le vecteur x appartient à la boule $B(0, \|x\| + 1/n)$ et n'appartient pas à la boule $B(0,\|x\|)$. Il en résulte que
$$\|x\| \leq \|x\|_B \leq \|x\| + \frac{1}{n}\,,$$
et par passage à la limite
$$\|x\| = \|x\|_B\,.$$
Si $B = B'(0,1)$, alors le vecteur x appartient à la boule $B'(0,\|x\|)$ mais pas à la boule $B'(0, \|x\| - 1/n)$. Il en résulte que
$$\|x\| - \frac{1}{n} \leq \|x\|_B \leq \|x\|\,,$$
et par passage à la limite
$$\|x\| = \|x\|_B\,.$$

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit F et G deux sous-espaces de E munis chacun de normes notées respectivement $\|.\|_F$ et $\|.\|_G$.

1) On suppose que ces deux normes sont équivalentes sur $F \cap G$ et que $F \cap G$ est fermé dans F pour $\|.\|_F$ et dans G pour $\|.\|_G$. Montrer que l'on définit une norme sur E en posant

$$\|x\|_E = \inf\{\|u\|_F + \|v\|_G \mid x = u + v \ , \ u \in F \ , \ v \in G\} \, ,$$

et que, sur $F \cap G$, cette norme est équivalente aux deux autres.

2) Montrer que la propriété du 1) est satisfaite en particulier si $F \cap G$ est de dimension finie. Que se passe-t-il si F et G sont supplémentaires ?

Solution

1) a) Tout d'abord,

$$\|0\|_E \leq \|0\|_F + \|0\|_G = 0 \, ,$$

donc $\|0\|_E$ est nul.

Si $\|x\|_E$ est nul, alors il existe deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ dans F et G respectivement, telles que, pour tout n

$$x = u_n + v_n \, ,$$

et telles que

$$\lim_{n\to\infty} (\|u_n\|_F + \|v_n\|_G) = 0 \, .$$

En raison de l'égalité

$$u_n + v_n = u_0 + v_0 = x \, ,$$

on a

$$u_n - u_0 = v_0 - v_n \, ,$$

et ce vecteur appartient à $F \cap G$. D'autre part la suite (u_n) converge vers 0 dans F. Donc la suite $(u_n - u_0)$ converge vers $-u_0$ dans F pour la norme $\|.\|_F$. Mais $u_n - u_0$ se trouve en fait dans $F \cap G$ qui est fermé dans F, donc $-u_0$ appartient à $F \cap G$. De même $(v_0 - v_n)$ converge vers v_0 dans G pour $\|.\|_G$ et en fait dans $F \cap G$. Comme les normes $\|.\|_F$ et $\|.\|_G$ sont équivalentes sur $F \cap G$ les limites sont les mêmes et l'on trouve

$$-u_0 = v_0 \, .$$

Alors

$$x = u_0 + v_0 = 0 \, .$$

b) Tout d'abord, si λ est nul,

$$\|\lambda x\|_E = \|0\|_E = 0 = |\lambda| \, \|x\|_E \, .$$

Soit maintenant λ un nombre réel non nul. On a

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_E &= \inf\{\|u\|_F + \|v\|_G \mid \lambda x = u + v \ , \ u \in F \ , \ v \in G\} \\ &= \inf\{\|u\|_F + \|v\|_G \mid x = (u/\lambda) + (v/\lambda) \ , \ u \in F \ , \ v \in G\} \ .\end{aligned}$$

En posant

$$u' = \frac{u}{\lambda} \quad \text{et} \quad v' = \frac{v}{\lambda} \, ,$$

on a encore

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_E &= \inf\{\|\lambda u'\|_F + \|\lambda v'\|_G \mid x = u' + v' \ , \ u' \in F \ , \ v' \in G\} \\ &= |\lambda| \inf\{\|u'\|_F + \|v'\|_G \mid x = u' + v' \ , \ u' \in F \ , \ v' \in G\} \\ &= |\lambda| \, \|x\|_E \ .\end{aligned}$$

c) Si x et y sont dans E, ils s'écrivent

$$x = u + v \quad \text{et} \quad y = u' + v'$$

avec u et u' dans F et v et v' dans G. Alors

$$x + y = (u + u') + (v + v')$$

avec $u + u'$ dans F et $v + v'$ dans G, donc

$$\|x + y\|_E \leq \|u + u'\|_F + \|v + v'\|_G \leq \|u\|_F + \|u'\|_F + \|v\|_G + \|v'\|_G \, .$$

Si u' et v' sont fixés, on obtient

$$\|x + y\|_E - (\|u'\|_F + \|v'\|_G) \leq \|u\|_F + \|v\|_G \, .$$

Alors $\|x+y\|_E-(\|u'\|_F+\|v'\|_G)$ est un minorant de l'ensemble $\{\|u\|_F+\|v\|_G \mid x = u+v \ , \ u \in F \ , \ v \in G\}$ donc

$$\|x + y\|_E - (\|u'\|_F + \|v'\|_G) \leq \inf\{\|u\|_F + \|v\|_G \mid x = u + v \ , \ u \in F \ , \ v \in G\} = \|x\|_E \, .$$

Ensuite

$$\|x + y\|_E - \|x\|_E \leq \|u'\|_F + \|v'\|_G \, .$$

Alors $\|x + y\|_E - \|x\|_E$ est un minorant de l'ensemble $\{\|u'\|_F + \|v'\|_G \mid y = u' + v' \ , \ u' \in F \ , \ v' \in G\}$, donc

$$\|x + y\|_E - \|x\|_E \leq \inf\{\|u'\|_F + \|v'\|_G \mid y = u' + v' \ , \ u' \in F \ , \ v' \in G\} = \|y\|_E \, .$$

Finalement on obtient bien l'inégalité triangulaire

$$\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E \, .$$

d) Si x appartient à $F \cap G$, on a en particulier la décomposition $x = x + 0$ donc

$$\|x\|_E \leq \|x\|_F \, .$$

Si $u+v$ est une autre décomposition de x, alors $x-u=v$ est dans $F\cap G$. Donc

$$\|x\|_F = \|u+v\|_F \leq \|u\|_F + \|v\|_F \,.$$

Mais puisque les normes $\|.\|_F$ et $\|.\|_G$ sont équivalentes sur $F\cap G$, il existe $k\geq 1$ tel que,

$$\|v\|_F \leq k\,\|v\|_G \,,$$

et, par suite,

$$\|x\|_F \leq \|u\|_F + k\,\|v\|_G \leq k(\|u\|_F + \|v\|_G)\,.$$

Alors

$$\|x\|_F \leq k\,\inf\{\|u\|_F + \|v\|_G \mid x = u+v\ ,\ u\in F\ ,\ v\in G\} = k\,\|x\|_E\,.$$

Les normes $\|.\|_F$ et $\|.\|_E$ sont équivalentes sur $F\cap G$ et par transitivité, les normes $\|.\|_G$ et $\|.\|_E$ également.

2) Si $F\cap G$ est de dimension finie, les normes $\|.\|_F$ et $\|.\|_G$ sont automatiquement équivalentes sur $F\cap G$ et $F\cap G$ est complet, donc fermé dans F et dans G pour les normes respectives.

Si F et G sont supplémentaires, alors il existe une seule décomposition d'un vecteur x sous la forme $u+v$, et donc

$$\|x\|_E = \|u\|_F + \|v\|_G\,.$$

Exercice 5 *Semi-norme*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une semi-norme N, c'est-à-dire d'une application à valeurs réelles vérifiant les propriétés d'une norme sauf la propriété de séparation.

1) Montrer que l'ensemble F des éléments x de E tels que $N(x)$ soit nul, est un sous-espace vectoriel de E.

2) Montrer que si x et y sont deux vecteurs de E tels que $x-y$ appartienne à F, alors $N(x)$ est égal à $N(y)$. En déduire que l'on peut définir une norme sur l'espace E/F en posant

$$\|\dot{x}\| = N(x)\,.$$

Solution

1) L'ensemble F contient 0. Si $N(x)$ est nul, et si λ est un nombre réel, on a

$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x) = 0\,.$$

Si $N(x)$ et $N(y)$ sont nuls

$$0 \leq N(x+y) \leq N(x) + N(y) = 0\,,$$

donc $N(x+y)$ est nul. Il en résulte que F est table par combinaisons linéaires. C'est bien un sous-espace de E.

2) Si $x-y$ est dans F, alors
$$N(x) \leq N(x-y)+N(y) = N(y)\,.$$
Comme $y-x$ est aussi dans F, on a également, en inversant les rôles de x et y,
$$N(y) \leq N(x)\,,$$
d'où l'égalité.

Alors $N(x)$ ne dépend pas de l'élément choisi dans la classe de x, et l'on définit une application de E/F dans $\mathbb{R}$ en posant
$$\|\dot{x}\| = N(x)\,.$$
Cette application conserve les propriétés de la semi-norme N, mais de plus, dire que $\|\dot{x}\|$ est nul signifie que $N(x)$ est nul, donc que x appartient à F, et finalement que $\dot{x}$ est nul. On obtient bien une norme.

Exercice 6

Soit E une algèbre sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de neutre I. On suppose que E est munie d'une norme N possédant la propriété suivante : il existe une constante K telle que, quels que soient A et B dans E,
$$N(AB) \leq KN(A)N(B)\,.$$
1) Montrer que l'on définit une application linéaire continue sur E en posant
$$\varphi_A(B) = AB\,.$$
2) On pose
$$\|A\| = |||\varphi_A|||\,.$$
Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E équivalente à N. Quelles sont les propriétés de cette norme pour le produit et l'élément I ?

Solution

1) L'application φ_A est clairement linéaire et l'on a
$$N(\varphi_A(B)) = N(AB) \leq KN(A)N(B)\,,$$
ce qui montre que φ_A est continue de norme plus petite que $KN(A)$.

2) D'après ce qui précède,
$$\|A\| = |||\varphi_A||| \leq KN(A)\,.$$

Par ailleurs, comme I est le neutre de E,

$$\|A\| = \sup_{M\neq 0} \frac{N(AM)}{N(M)} \geq \frac{N(A)}{N(I)}\,.$$

On a donc,

$$\frac{N(A)}{N(I)} \leq \|A\| \leq KN(A)\,,$$

et les normes N et $\|.\|$ sont équivalentes. (On remarquera que si $K = N(I) = 1$, on obtient la même norme).

Alors, puisque

$$\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}\,,$$

on a, en raison des propriétés des normes d'opérateurs,

$$\|AB\| = |||\varphi_A \circ \varphi_B||| \leq |||\varphi_A|||\,|||\varphi_B||| = \|A\|\,\|B\| \quad \text{et} \quad \|I\| = |||\mathrm{Id}||| = 1\,.$$

Exercice 7

Soit f une application d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ dans un espace métrique (M, d), et x_0 un point de E. Montrer que f est continue en x_0 si et seulement si, pour toute application g de $[\,0,\,1\,]$ dans E continue en 0 et valant x_0 en ce point, l'application $f \circ g$ est continue en 0.

Solution

Par composition des fonctions continues, si f est continue en x_0 et g continue en 0 et valant x_0 en ce point alors $f \circ g$ est continue en 0.

Pour démontrer l'application réciproque, démontrons sa contraposée.

Soit f une fonction qui n'est pas continue en x_0. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, il existe y dans E tel que

$$\|y - x_0\| \leq \alpha \quad \text{et} \quad d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon\,.$$

On prend $\alpha = 2^{-n}$ il existe donc y_n dans E tel que

$$\|y_n - x_0\| \leq 2^{-n} \quad \text{et} \quad d(f(y_n), f(x_0)) \geq \varepsilon\,.$$

On peut alors construire une fonction g sur $[\,0,\,1\,]$ de la manière suivante. Elle est affine sur chaque intervalle $[\,2^{-(n+1)},\,2^{-n}\,]$ et pour tout $n \geq 0$

$$g(2^{-n}) = y_n\,,$$

c'est-à-dire, sur $[2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$,

$$g(x) = (2^{n+1}x - 1)y_n + (2 - 2^{n+1}x)y_{n+1}\,.$$

Cela défini une fonction continue sur $]0, 1]$ que l'on complète par

$$g(0) = x_0\,.$$

Alors, si x appartient à $[2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$, on a

$$\begin{array}{rcl}\|g(x) - g(0)\| & = & \|(2^{n+1}x - 1)y_n + (2 - 2^{n+1}x)y_{n+1} - x_0\| \\ & = & \|(2^{n+1}x - 1)(y_n - x_0) + (2 - 2^{n+1}x)(y_{n+1} - x_0)\| \\ & \leq & (2^{n+1}x - 1)\,\|y_n - x_0\| + (2 - 2^{n+1}x)\,\|y_{n+1} - x_0\| \\ & \leq & \|y_n - x_0\| + \|y_{n+1} - x_0\| \\ & \leq & 2^{-n} + 2^{-n-1} = 3 \cdot 2^{-n-1}\,.\end{array}$$

Il en résulte que la fonction g est continue en 0, donc sur $[0, 1]$. Mais

$$d(f \circ g(2^{-n}), f \circ g(0)) = d(f(y_n), f(x_0)) \geq \varepsilon\,,$$

et $f \circ g$ n'est pas continue en 0.

Exercice 8 *Théorème du point fixe*

Soit I une partie fermée non vide d'un espace vectoriel E complet, et f une application contractante de I dans I.

1) Montrer que f possède un point fixe et un seul, et que toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de I définie par récurrence par la relation

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

à partir d'un point x_0 de I, converge vers le point fixe ℓ. Donner une majoration de $\|x_n - \ell\|$.

2) Soit F l'ensemble des fonctions continues sur I, muni de la norme infinie. Montrer que si $f - \mathrm{Id}$ est bornée sur I, la suite (f^n) converge vers la fonction constante ℓ dans F.

Solution

On a donc, quels que soient x et y dans I

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\,\|x - y\|\,,$$

où $0 \leq k < 1$. Donc f est continue (et même uniformément continue) sur I.

Tout d'abord, il existe au plus un point fixe pour f. En effet, si x et y sont deux points fixes, on a

$$\|x-y\| = \|f(x)-f(y)\| \leq k\,\|x-y\|\,,$$

ce qui implique que $\|x-y\|$ est nul et donc que $x=y$.

On montre ensuite que la suite (x_n) est une suite de Cauchy. C'est évident si $x_1 = x_0$ car la suite (x_n) est constante (et x_0 est un point fixe). Tout d'abord,

$$\|x_{n+1}-x_n\| = \|f(x_n)-f(x_{n-1})\| \leq k\,\|x_n-x_{n-1}\|\,,$$

et une récurrence immédiate montre que

$$\|x_{n+1}-x_n\| \leq k^n\|x_1-x_0\|\,.$$

Alors

$$\|x_{n+p}-x_n\| \leq \sum_{i=0}^{p-1}\|x_{n+i+1}-x_{n+i}\| \leq \sum_{i=0}^{p-1}k^{n+i}\|x_1-x_0\|\,.$$

En calculant la somme géométrique, on obtient

$$\sum_{i=0}^{p-1}k^{n+i} = k^n\sum_{i=0}^{p-1}k^i = k^n\,\frac{1-k^p}{1-k} = \frac{k^n-k^{n+p}}{1-k} \leq \frac{k^n}{1-k}\,,$$

et donc

$$\|x_{n+p}-x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k}\,\|x_1-x_0\|\,. \tag{1}$$

Comme la suite (k^n) converge vers 0 puisque $0 \leq k < 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N, tel que, si $n \geq N$, on ait,

$$k^n \leq \frac{\varepsilon(1-k)}{\|x_1-x_0\|}\,,$$

et donc, pour tout entier p

$$\|x_{n+p}-x_n\| \leq \varepsilon\,,$$

ce qui montre que la suite (x_n) est une suite de Cauchy de I. Comme I est fermé dans E complet, il est lui-même complet et la suite (x_n) possède une limite ℓ dans I.

Puisque f est continue, la suite $(f(x_n))$ converge alors vers $f(\ell)$, et par passage à la limite dans l'égalité

$$f(x_n) = x_{n+1}\,,$$

on obtient

$$f(\ell) = \ell\,,$$

donc ℓ est un point fixe de f ce qui montre l'existence du point fixe.

En faisant tendre p vers l'infini dans la relation (1), on trouve alors

$$\|\ell - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\| .$$

2) Soit x quelconque dans I. Alors, d'après la relation précédente

$$\|f^n(x) - \ell\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|f(x) - x\| .$$

Si la fonction $f - \mathrm{Id}$ est bornée, soit M un majorant. Alors

$$\|f^n(x) - \ell\| \leq \frac{Mk^n}{1-k} ,$$

donc

$$\|f^n - \ell\|_\infty \leq \frac{Mk^n}{1-k} ,$$

Ce qui montre que la suite (f^n) converge vers la fonction constante ℓ dans F.

Chapitre 2

Espace $\mathbb{R}^2$

Exercice 9

1) Montrer que pour tout couple (a, b) de nombres réels

$$|a| + |b| = \max(|a+b|, |a-b|)\,.$$

2) Dans $\mathbb{R}^2$ montrer que l'on définit une norme en posant

$$\|(x, y)\| = |x+y| + |x|\,,$$

et déterminer la boule unité fermée.
3) Même problème avec

$$\|(x, y)\|' = |x+y| + |2x-y|\,.$$

Solution

1) Si a et b sont de même signe, c'est aussi le signe de $a+b$. Alors

$$|a-b| \leq |a| + |b| = |a+b|\,,$$

donc

$$|a| + |b| = \max(|a+b|, |a-b|)\,.$$

Si a et b sont de signes contraires, alors a et $-b$ sont de même signe et

$$|a| + |-b| = |a| + |b| = \max(|a-b|, |a+b|)\,.$$

2) Si la norme $\|(x, y)\|$ est nulle, cela implique $x + y = x = 0$, d'où $x = y = 0$.

Soit λ un nombre réel. Alors

$$\|\lambda(x, y)\| = \|(\lambda x, \lambda y)\| = |\lambda x + \lambda y| + |\lambda x| = |\lambda|\,(|x+y| + |x|) = |\lambda|\,\|(x, y)\|\,.$$

Enfin

$$\|(x,y)+(x',y')\| = \|(x+x',y+y')\| = |x+x'+y+y'| + |x+x'| \le |x+y| + |x'+y'| + |x| + |x'|\,,$$

et donc

$$\|(x,y)+(x',y')\| \le \|(x,y)\| + \|(x',y')\|\,.$$

On a donc bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Si (x,y) appartient à la boule unité fermée, on a d'après 1),

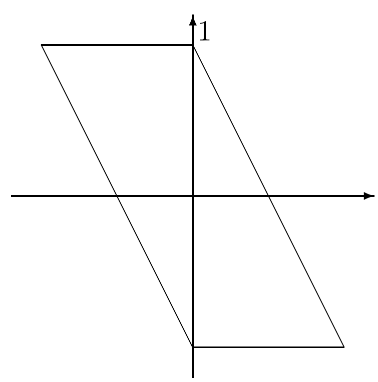
$$|x+y| + |x| = \max(|2x+y|, |y|) \le 1\,,$$

et donc

$$-1 \le 2x+y \le 1 \quad \text{et} \quad -1 \le y \le 1\,.$$

La boule est limitée par les droites d'équation

$$y = 1 \quad , \quad y = -1 \quad , \quad y = -2x-1 \quad \text{et} \quad y = -2x+1\,.$$



3) Si le norme $\|(x,y)\|'$ est nulle, cela implique $x+y = 2x-y = 0$, d'où $x = y = 0$. Les autres propriétés se démontrent comme dans 2).

Si (x,y) appartient à la boule unité fermée, on a d'après 1),

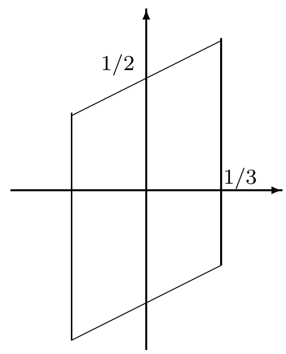
$$|x+y| + |2x-y| = \max(|3x|, |x-2y|) \le 1\,,$$

et donc

$$-1 \le 3x \le 1 \quad \text{et} \quad -1 \le x-2y \le 1\,.$$

La boule est limitée par les droites d'équation

$$x = -1/3 \quad , \quad x = 1/3 \quad , \quad y = \frac{x+1}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{x-1}{2}\,.$$



Exercice 10

1) Déterminer les nombres α positifs tels que, quel que soit (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, le nombre

$$N_\alpha(x, y) = \sup_{t \geq 0} \frac{|x + ty|}{1 + t^\alpha}$$

soit fini, et montrer que dans ce cas N_α est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que si $\alpha = 1$, alors

$$N_1(x, y) = \max(|x|, |y|) .$$

3) Déterminer la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ pour les valeurs de α qui conviennent. Représenter graphiquement les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$. (N.B. *La question nécessite de savoir trouver l'enveloppe d'une famille de droites*).

Solution

1) Pour (x, y) fixé dans $\mathbb{R}^2$ posons

$$\varphi(t) = \frac{x + ty}{1 + t^\alpha} .$$

Si $\alpha < 1$, alors pour tout couple (x, y) fixé où y est non nul, on a, lorsque t tend vers l'infini,

$$\varphi(t) \sim yt^{1-\alpha} ,$$

et cette expression tend vers l'infini à $+\infty$, donc $N_\alpha(x, y)$ est infinie.

Si $\alpha \geq 1$, alors

$$\varphi(t) \sim \begin{cases} \dfrac{y}{t^{\alpha-1}} & \text{si } y \neq 0 \\ \\ \dfrac{x}{t^{\alpha}} & \text{si } y = 0 \end{cases} ,$$

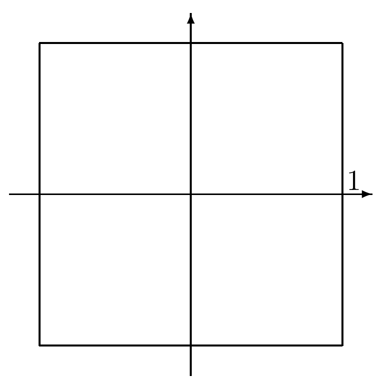
et la limite est nulle en l'infini. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une limite finie à l'infini. Elle est donc bornée et $N_\alpha(x, y)$ est fini.

Si $N_\alpha(x, y)$ est nul, alors $x + ty$ est nul pour tout t. En particulier, si $t = 0$ on en déduit que x est nul, puis, si $t = 1$, on en déduit que y est nul. Donc (x, y) est nul. Les autres propriétés de la norme se vérifient facilement à partir de celles de la borne supérieure.

2) Si $\alpha = 1$, la fonction φ est une fonction homographique. Elle est donc monotone sur $\mathbb{R}^+$. Alors

$$N_\alpha(x, y) = \max(|\varphi(0)|, \lim_{t\to+\infty} |\varphi(t)|) = \max(|x|, |y|) .$$

3) Lorsque $\alpha = 1$, la boule unité fermée est le carré $\{(x, y) \mid |x| \leq 1\,,\ |y| \leq 1\}$.



Supposons maintenant $\alpha > 1$. Si (x, y) appartient à la boule unité $B'_\alpha(0, 1)$, on a, quel que soit $t \geq 0$,

$$-1 \leq \frac{x + ty}{1 + t^\alpha} \leq 1 ,$$

ou encore

$$-(1 + t^\alpha) \leq x + ty \leq 1 + t^\alpha .$$

La boule est limitée par les familles de droites d'équations

$$x + ty - (1 + t^\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad x + ty + (1 + t^\alpha) = 0 .$$

En particulier, si $t = 0$, on trouve

$$-1 \leq x \leq 1 .$$

Comme la boule est symétrique par rapport à l'origine. il suffit de considérer les points d'ordonnée positive. On est amené à chercher l'enveloppe des familles de droites.

Pour la première famille, on dérive par rapport à t, ce qui donne

$$y - \alpha t^{\alpha-1} = 0\,.$$

Le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + ty - (1+t^\alpha) & = & 0 \\ y - \alpha t^{\alpha-1} & = & 0 \end{array}\right.$$

donne un paramétrage de l'enveloppe

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 - (\alpha-1)t^\alpha \\ y & = & \alpha t^{\alpha-1} \end{array}\right. ,$$

d'où l'on tire

$$y = \alpha\left(\frac{1-x}{\alpha-1}\right)^{1-1/\alpha}\,.$$

L'autre famille de droites a pour enveloppe, par symétrie par rapport à O, la courbe d'équation

$$y = -\alpha\left(\frac{1+x}{\alpha-1}\right)^{1-1/\alpha}\,.$$

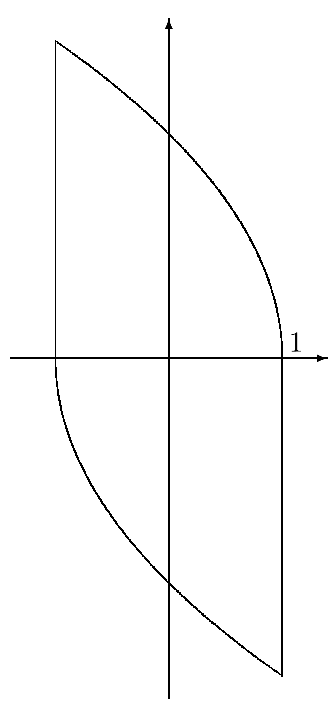
Donc la boule unité fermée est l'ensemble des couples (x,y) tels que

$$|x| \leq 1 \quad \text{et} \quad -\alpha\left(\frac{1+x}{\alpha-1}\right)^{1-1/\alpha} \leq y \leq \alpha\left(\frac{1-x}{\alpha-1}\right)^{1-1/\alpha}\,.$$

En particulier, si $\alpha = 2$,

$$|x| \leq 1 \quad \text{et} \quad -2\sqrt{1+x} \leq y \leq 2\sqrt{1-x}\,.$$

La boule est limitée par deux morceaux de paraboles.



Exercice 11

1) Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f et g deux fonctions continues sur $[\,a,\,b\,]$ à valeurs réelles non colinéaires. Si (x,y) appartient à $\mathbb{R}^2$, on pose

$$N(x,y) = \sup_{a\leq t\leq b} |xf(t)+yg(t)|\,.$$

Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) Que vaut N lorsque $a = 0$, $b = 1$, $f(t) = t$, $g(t) = 1-t$?

3) Déterminer et représenter graphiquement la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ lorsque $a = 0$, $b = 1$, $f(t) = t$, $g(t) = t^2$. (N.B. *La question nécessite de savoir trouver l'enveloppe d'une famille de droites*).

Solution

1) Tout d'abord la fonction $xf+yg$ est continue sur $[\,a,\,b\,]$, donc la borne supérieure est finie. Supposons que $N(x,y)$ soit nul. On a, pour tout t de $[\,a,\,b\,]$,

$$xf(t)+yg(t) = 0\,.$$

Comme f et g ne sont pas colinéaires, il existe t_1 et t_2 tels que le déterminant $\begin{vmatrix} f(t_1) & g(t_1)\\ f(t_2) & g(t_2)\end{vmatrix}$ soit non nul. Alors le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} xf(t_1)+yg(t_1) & = & 0\\ xf(t_2)+yg(t_2) & = & 0\end{array}\right.$$

a comme unique solution $x = y = 0$.

Les autres propriétés de la norme résultent de celles de la borne supérieure.

2) Ici

$$N(x,y) = \sup_{0\leq t\leq 1} |tx+(1-t)y|\,.$$

Comme la fonction qui à t associe $tx+(1-t)y$ est affine, la borne supérieure de la valeur absolue est atteinte soit au point 0 soit au point 1 et alors

$$N(x,y) = \max(|x|,|y|)\,.$$

3) Dans ce cas

$$N(x,y) = \sup_{0\leq t\leq 1} |tx+t^2y|\,.$$

La boule unité est l'ensemble des couples (x,y) tels que, pour tout t de $[\,0,\,1\,]$, on ait

$$-1 \leq tx+t^2y \leq 1\,.$$

En particulier, pour $t = 1$

$$-1 \leq x + y \leq 1\,.$$

La boule est comprise entre les droites d'équation

$$y = 1 - x \quad \text{et} \quad y = -1 - x\,.$$

Les points (x, y) doivent également se trouver en-dessous de l'enveloppe des droites d'équation

$$tx + t^2 y = 1\,,$$

lorsque t décrit l'intervalle $]\,0,\,1\,]$. En dérivant par rapport à t, on trouve

$$x + 2ty = 0\,,$$

et l'enveloppe est l'ensemble des couples (x, y) vérifiant le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} tx + t^2 y & = & 1 \\ x + 2ty & = & 0 \end{array}\right.\,.$$

En résolvant ce système, on obtient un paramétrage de l'enveloppe

$$x = \frac{2}{t} \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{t^2}\,,$$

où $0 < t \leq 1$, et donc

$$y = -\frac{x^2}{4}\,,$$

lorsque $x \geq 2$.

Un point (x, y) de la boule se trouve donc sous la courbe définie par

$$y = \left\{\begin{array}{ll} 1 - x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ -x^2/4 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{array}\right.\,.$$

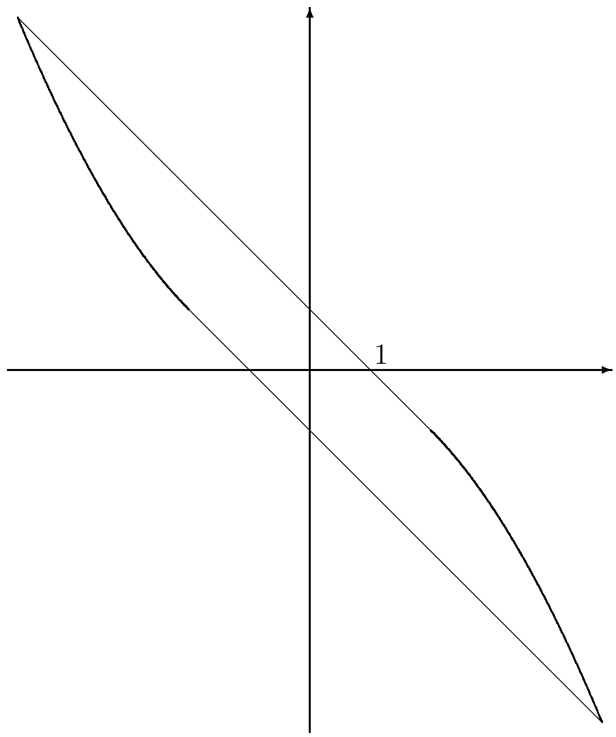
Comme la boule est symétrique par rapport à l'origine, elle se trouve aussi au-dessus de la courbe définie par

$$y = \left\{\begin{array}{ll} -1 - x & \text{si} \quad x \geq -2 \\ x^2/4 & \text{si} \quad x \leq -2 \end{array}\right.\,.$$

La courbe d'équation $y = -x^2/4$ coupe la droite d'équation $y = -x - 1$ lorsque

$$x^2 - 4x - 4 = 0\,.$$

Lorsque $x \geq 2$, on trouve le point de coordonnées $(2(1 + \sqrt{2}), -(3 + 2\sqrt{2}))$.



Exercice 12

Soit N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E.

1) Montrer que l'on a, pour tout u de E,

$$N_1(u) \leq kN_2(u)$$

si et seulement si

$$B'_2(0,1) \subset B'_1(0,k)\,.$$

En déduire que l'on a, pour tout u de E,

$$KN_1(u) \leq N_2(u) \leq LN_1(u)$$

si et seulement si

$$B'_1(0,1/L) \subset B'_2(0,1) \subset B'_1(0,1/K)\,.$$

2) Soit a un nombre réel. A quelle condition, définit-on une norme sur $\mathbb{R}^2$ en posant

$$N_2(x,y) = \max(|x+3y|, |x-ay|)\ ?$$

3) On prend $a = 1$ et $N_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Trouver les meilleurs constantes K et L telles que

$$KN_1(x,y) \leq N_2(x,y) \leq LN_1(x,y)\,.$$

Solution

1) Supposons que, pour tout u de E,
$$N_1(u) \le kN_2(u)\,,$$
et soit u appartenant à $B_2'(0,1)$. On a alors
$$N_1(u) \le kN_2(u) \le k\,,$$
donc u appartient à $B_1'(0,k)$, ce qui donne l'inclusion
$$B_2'(0,1) \subset B_1'(0,k)\,.$$
Réciproquement, si l'on a cette inclusion, soit u non nul, alors $u/N_2(u)$ est dans $B_2'(0,1)$ donc dans $B_1(0,k)$, c'est-à-dire
$$N_1(u/N_2(u)) \le k\,.$$
On en déduit que
$$N_1(u) \le kN_2(u)\,.$$
Alors $B_2'(0,1)$ est inclus dans $B_1'(0,1/K)$ si et seulement si
$$N_1(u) \le \frac{1}{K}\,N_2(u)\,.$$
D'autre part, dire que $B_1'(0,1/L)$ est inclus dans $B_1'(0,1)$ équivaut à dire par homothétie que $B_1'(0,1)$ est inclus dans $B_2'(0,L)$ donc à
$$N_2(u) \le L\,N_1(u)\,.$$
Finalement, dire que, pour tout u de E,
$$KN_1(u) \le N_2(u) \le LN_1(u)\,,$$
équivaut aux inclusions
$$B_1'(0,1/L) \subset B_2'(0,1) \subset B_1'(0,1/K)\,.$$
2) Seule la propriété de séparation pose problème. Le nombre $N_2(x,y)$ est nul, si et seulement si on a le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y & = & 0 \\ x-ay & = & 0 \end{array}\right.\,,$$
et ceci implique que x et y sont nuls si et seulement si c'est un système de Cramer, c'est-à-dire si et seulement si le déterminant $-a-3$ n'est pas nul. Donc N_2 est une norme si et seulement si a est différent de -3.

3) Déterminons la boule $B_2'(0,1)$. Un vecteur (x,y) appartient à cette boule si et seuilement si
$$\max(|x+3y|,|x-y|) \le 1\,,$$
c'est-à-dire si et seulement si
$$-1 \le x-y \le 1 \quad \text{et} \quad -1 \le x+3y \le 1\,.$$

La boule est le domaine limité par les quatre droites d'équation

$$y = x - 1 \quad , \quad y = x + 1 \quad , \quad y = \frac{1}{3}(1 - x) \quad , \quad y = \frac{1}{3}(-1 - x)\,,$$

c'est donc le domaine limité par le parallélogramme formé par ces droites.

Pour obtenir K et L, il suffit de trouver les cercles de centre O circonscrit et inscrit dans ce parallélogramme. On remarque tout d'abord que les droites d'équation $y = x - 1$ et $y = (1 - x)/3$ se coupent au point $(1, 0)$. Le cercle circonscrit est de rayon 1 et donc

$$B_2'(0, 1) \subset B_1'(0, 1)\,.$$

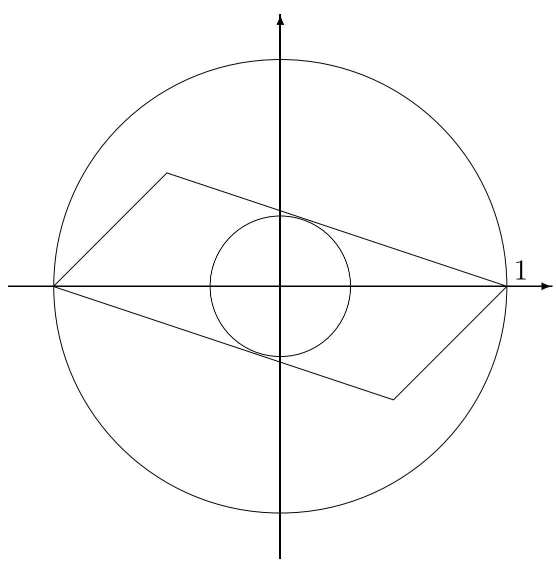
On en déduit que $1/K = 1$, donc $K = 1$.

Le cercle inscrit est le cecle tangent à la droite d'équation $y = (1 - x)/3$ ou encore $x + 3y - 1 = 0$. La distance de l'origine à la droite vaut $1/\sqrt{10}$. Alors

$$B_1'(0, 1/\sqrt{10}) \subset B_2'(0, 1)\,,$$

On en déduit que $L = \sqrt{10}$ et donc

$$N_1(x, y) \le N_2(x, y) \le \sqrt{10}\, N_1(x, y)\,.$$



Exercice 13

1) Soit a, b, c , d des nombres réels. A quelle condition, définit-on une norme sur $\mathbb{R}^2$ en posant

$$N(x,y) = |ax+by| + |cx+dy| \ ?$$

2) Trouver les meilleurs constantes K et L telles que

$$K\|(x,y)\|_1 \leq N(x,y) \leq L\|(x,y)\|_1 \, .$$

Solution

1) Seule la propriété de séparation pose problème. Le nombre $N(x,y)$ est nul, si et seulement si on a le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax+by & = & 0 \\ cx+dy & = & 0 \end{array} \right. ,$$

et ceci implique que x et y sont nuls si et seulement si c'est un système de Cramer, c'est-à-dire si et seulement si le déterminant $ad-bc$ n'est pas nul.

2) On a

$$N(x,y) \leq |a|\,|x| + |b|\,|y| + |c|\,|x| + |d|\,|y| = (|a|+|c|)|x| + (|b|+|d|)\,|y| \, .$$

D'où

$$N(x,y) \leq \max(|a|+|c|, |b|+|d|)(|x|+|y|) = \max(|a|+|c|, |b|+|d|)\,\|(x,y)\|_1 \, .$$

Si $|a|+|c| \geq |b|+|d|$, en prenant $(x,y) = (1,0)$, on a

$$N(x,y) = |a|+|c| \quad \text{et} \quad \|(x,y)\|_1 = 1 \, .$$

Si $|a|+|c| \leq |b|+|d|$, en prenant $(x,y) = (0,1)$, on a

$$N(x,y) = |b|+|d| \quad \text{et} \quad \|(x,y)\|_1 = 1 \, .$$

Donc on obtient l'égalité dans les deux cas. Alors

$$L = \max(|a|+|c|, |b|+|d|) \, .$$

Posons

$$X = ax+by \quad \text{et} \quad Y = cx+dy \, ,$$

et donc

$$x = \frac{1}{ad-bc}\,(dX - bY) \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{ad-bc}\,(-cX+aY) \, .$$

Alors

$$N(x,y) = |X|+|Y| = \|(X,Y)\|_1 \quad \text{et} \quad \|(x,y)\|_1 = \frac{1}{|ad-bc|}(|dX-bY| + |-cX+aY|) \, .$$

On a alors, en inversant les rôles des deux normes,

$$\|(x,y)\|_1 \leq \frac{\max(|a|+|b|,|c|+|d|)}{|ad-bc|}\,N(x,y)\,,$$

et

$$K = \frac{|ad-bc|}{\max(|a|+|b|,|c|+|d|)}\,.$$

Exercice 14

Soit a et b deux nombres réels. A quelle condition, définit-on une norme sur $\mathbb{R}^2$ en posant

$$N(x,y) = \sqrt{x^2+2axy+by^2}\ ?$$

De quelle nature est alors la boule unité ?

Solution

Il faut déjà que le nombre $x^2+2ax+by^2$ soit toujours positif ce qui signifie que le discriminant $4(a^2-4b)$ doit être négatif. Dans ce cas, on peut écrire

$$N(x,y) = \sqrt{(x+ay)^2+(b-a^2)y^2}\,.$$

Si l'on note f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par

$$f(x,y) = (x+ay, \sqrt{b-a^2}\,y)\,,$$

on a alors

$$N(x,y) = \|f(x,y)\|_2\,.$$

Dire que $N(x,y)$ est nul, sigifie que $f(x,y)$ est nul. Donc si l'on veut que la nullité de $N(x,y)$ implique celle de (x,y) il faut et il suffit que f soit injective, c'est-à-dire que $b-a^2$ soit non nul. Les autres propriétés de la norme se vérifient facilement.

Finalement N est une norme si et seulement si

$$b > a^2\,.$$

La boule unité est l'ensemble des couples (x,y) tels que

$$x^2+2axy+by^2 \leq 1\,,$$

c'est donc une ellipse.

Chapitre 3

Espaces de polynômes

On notera de la même manière un polynôme P et sa fonction polynomiale associée.

Exercice 15

Dans l'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels on considère les normes définies, si $P(X) = aX^2 + bX + c$, par

$$\|P\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |P(x)| \quad \text{et} \quad \|P\| = \max(|a|, |b|, |c|)\,.$$

Montrer que ce sont des normes équivalentes et trouver les normes de l'identité de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $(E, \|.\|)$ et de $(E, \|.\|)$ dans $(E, \|.\|_\infty)$.

Solution

Puisque E est de dimension finie les normes sont équivalentes.

Tout d'abord, si $0 \leq x \leq 1$, on a

$$|ax^2 + bx + c| \leq |a|x^2 + |b|x + |c| \leq |a| + |b| + |c| \leq 3\,\|P\|\,.$$

donc

$$\|P\|_\infty \leq 3\,\|P\|\,.$$

En prenant

$$P(X) = X^2 + X + 1\,,$$

la fonction P est croissante positive sur $[\,0,\,1\,]$, donc

$$\|P\|_\infty = P(1) = 3 = 3\,\|P\|\,.$$

La norme de l'identité de $(E, \|.\|)$ dans $(E, \|.\|_\infty)$ vaut donc 3.

On a d'autre part le système

$$\left\{\begin{array}{ccc} P(0) & = & c \\ P(1/2) & = & a/4+b/2+c \\ P(1) & = & a+b+c \end{array}\right. .$$

En résolvant ce système, on trouve

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & = & -4P(1/2)+2P(1)+2P(0) \\ b & = & 4P(1/2)-P(1)-3P(0) \\ c & = & P(0) \end{array}\right. ,$$

donc

$$|a| \leq 8\,\|P\|_\infty \quad , \quad |b| \leq 8\,\|P\|_\infty \quad , \quad |c| \leq \|P\|_\infty\,,$$

et finalement

$$\|P\| \leq 8\,\|P\|_\infty\,.$$

(On peut aussi utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$P(X) = 2P(0)(X-1)(X-1/2) - 4P(1/2)X(X-1) + 2P(1)X(X-1/2)\,.$$

ce qui redonne les valeurs de a, b, c obtenues).

En prenant le polynôme

$$P(X) = X^2 - X + \frac{1}{8}\,,$$

on a

$$\|P\| = 1\,.$$

D'autre part la fonction P décroît sur $[\,0,\,1/2\,]$ et varie de $1/8$ à $-1/8$, puis croît sur $[\,1/2,\,1\,]$ et varie de $-1/8$ à $1/8$. Il en résulte que

$$\|P\|_\infty = \frac{1}{8}\,.$$

On a donc

$$\|P\| = 1 = 8\,\|P\|_\infty\,.$$

La norme de l'identité de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $(E, \|.\|)$ vaut donc 8.

Exercice 16

1) Dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels on considère les normes définies, par

$$\|P\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |P(x)| \quad \text{et} \quad \|P\|_1 = \int_0^1 |P(x)|\,dx\,.$$

Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes.

2) Calculer

$$K = \sup_{P\in\mathbb{R}_1[X]} \frac{\|P\|_\infty}{\|P\|_1}\,.$$

Solution

1) Si l'on a toujours

$$\|P\|_1 \leq \|P\|_\infty \,,$$

on obtient par contre pour $P(X) = X^n$

$$\|P\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|P\|_1 = \frac{1}{n+1} \,,$$

et il ne peut pas exister de constante K telle que, pour tout polynôme P,

$$\|P\|_\infty \leq K\|P\|_1 \,.$$

Les normes ne sont donc pas équivalentes.

2) Par contre, sur $\mathbb{R}_1[X]$, qui est de dimension finie, les normes sont équivalentes. On cherche la constante

$$K = \sup_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \frac{\|P\|_\infty}{\|P\|_1} \,,$$

qui est la plus petite constante telle que, pour tout P de $\mathbb{R}_1[X]$,

$$\|P\|_\infty \leq K\|P\|_1 \,.$$

Pour des raisons de symétrie et d'homogénéité, on peut se contenter de regarder les polynômes

$$P(X) = X - t$$

où t est réel. La fonction P est alors croissante sur $[\,0,\,1\,]$ et

$$\|P\|_\infty = \max(|P(0)|, |P(1)|) \,.$$

On distingue deux cas.

$\boxed{t \in [\,0,\,1\,]}$

On a alors

$$\|P\|_\infty = \max(|P(0)|, |P(1)|) = \max(t, 1-t) \,,$$

et

$$\|P\|_1 = \int_0^1 |P(x)|\, dx = \int_0^t (t-x)\, dx + \int_t^1 (x-t)\, dx = \frac{1}{2}(t^2 + (1-t)^2) \,.$$

On cherche une constante K telle que, pour tout nombre t de $[\,0,\,1\,]$,

$$t \leq \frac{K}{2}\,(2t^2 - 2t + 1) \,,$$

ou encore

$$2Kt^2 - 2(K+1)t + K \geq 0\,.$$

Le discriminant de ce trinôme vaut

$$4(K+1)^2 - 8K^2 = 4(K+1-\sqrt{2}\,K)(K+1+\sqrt{2}\,K) = 4(1-(\sqrt{2}-1)K)(K+1+\sqrt{2}\,K)\,.$$

Il admet une racine positive

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1\,.$$

Pour cette valeur de K, le trinôme est un carré. Il s'écrit

$$K(2t^2 - 2(1+1/K)t + 1) = K(2t^2 - 2\sqrt{2}\,t + 1) = K(\sqrt{2}\,t - 1)^2\,,$$

et s'annule pour $t = 1/\sqrt{2}$. Alors

$$|P(0)| = t \leq (\sqrt{2}+1)\|P\|_1\,.$$

et on a égalité si $t = 1/\sqrt{2}$.

Par symétrie du problème (en changeant t en $1-t$), on a aussi

$$|P(1)| = 1 - t \leq (\sqrt{2}+1)\|P\|_1\,,$$

et donc

$$\|P\|_\infty \leq (\sqrt{2}+1)\|P\|_1\,.$$

$\boxed{t \notin [\,0,\,1\,]}$

La fonction P est de signe constant sur $[\,0,\,1\,]$. En particulier $P(0)$ et $P(1)$ ont le même signe, donc

$$\|P\|_\infty = \max(|P(0)|, |P(1)|) \leq |P(0)| + |P(1)| = |P(0) + P(1)| = |1 - 2t|\,,$$

et aussi

$$\|P\|_1 = \int_0^1 |P(x)|\,dx = \left|\int_0^1 (x-t)\,dt\right| = \left|\frac{1}{2} - t\right|\,.$$

Donc

$$\|P\|_\infty \leq 2\|P\|_1 \leq (\sqrt{2}+1)\|P\|_1\,.$$

Finalement la constante K cherchée vaut $1+\sqrt{2}$.

Exercice 17

Dans $\mathbb{R}[X]$ on considère les quatre normes suivantes :

$$\|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)|\, dt \quad , \quad \|P\|_\infty = \sup_{0\leq t\leq 1} |P(t)|\,,$$

et, si le coefficient de X^n dans P vaut a_n,

$$\|P\|'_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad , \quad \|P\|'_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\,.$$

Pour tout couple (N_1, N_2) formé de deux distinctes de ces normes, étudier si l'application identité de $(\mathbb{R}[X], N_1)$ dans $(\mathbb{R}[X], N_2)$ est continue.

Solution

Tout d'abord, de manière évidente

$$\|P\|_1 \leq \|P\|_\infty \leq \|P\|'_1 \quad \text{et} \quad \|P\|'_\infty \leq \|P\|'_1\,.$$

Ce sont les seuls comparaisons possibles comme le montre le tableau suivant dans lequel on donne pour chaque couple (N_i, N_j) une suite P_n de polynômes tels que le rapport $N_i(P_n)/N_j(P_n)$ tende vers l'infini.

$\|P_n\|_\infty \not\leq k\,\|P\|_1$	$P_n(X) = X^n$	$\|P_n\|_\infty = 1$	$\|P_n\|_1 = 1/(n+1)$
$\|P_n\|'_1 \not\leq k\,\|P\|_\infty$	$P_n(X) = (1-X)X^n$	$\|P_n\|'_1 = 2$	$\|P_n\|_\infty \leq 1/(n+1)$
$\|P_n\|'_1 \not\leq k\,\|P\|'_\infty$	$P_n(X) = 1 + X + \cdots + X^n$	$\|P_n\|'_1 = n+1$	$\|P_n\|'_\infty = 1$
$\|P_n\|'_1 \not\leq k\,\|P\|_1$	$P_n(X) = X^n$	$\|P_n\|'_1 = 1$	$\|P_n\|_1 = 1/(n+1)$
$\|P_n\|'_\infty \not\leq k\,\|P\|_\infty$	$P_n(X) = (1-X)X^n$	$\|P_n\|'_\infty = 1$	$\|P_n\|_\infty \leq 1/(n+1)$
$\|P_n\|'_\infty \not\leq k\,\|P\|_1$	$P_n(X) = X^n$	$\|P_n\|'_\infty = 1$	$\|P_n\|_1 = 1/(n+1)$
$\|P_n\|_1 \not\leq k\,\|P\|'_\infty$	$P_n(X) = 1 + X + \cdots + X^n$	$\|P_n\|_1 = 1 + \cdots + 1/(n+1)$	$\|P_n\|'_\infty = 1$
$\|P_n\|_\infty \not\leq k\,\|P\|'_\infty$	$P_n(X) = 1 + X + \cdots + X^n$	$\|P_n\|_\infty = n+1$	$\|P_n\|'_\infty = 1$

On utilise le fait que la suite $(1 + \cdots + 1/(n+1))$ admet $+\infty$ pour limite.

Le seul calcul non trivial est celui du maximum de

$$P_n(x) = (1-x)x^n = x^n - x^{n+1}$$

dont la dérivée vaut

$$P'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$$

et s'annule en $n/(n+1)$. Alors

$$\|P_n\|_\infty = P_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq \frac{1}{n+1}\,.$$

L'application identité est donc continue si et seulement si l'on se trouve dans un des quatre cas suivants :

$$\begin{array}{llll} \text{de} & (\mathbb{R}[X], \|.\|_\infty) & \text{dans} & (\mathbb{R}[X], \|.\|_1) \\ \text{de} & (\mathbb{R}[X], \|.\|'_1) & \text{dans} & (\mathbb{R}[X], \|.\|_1) \\ \text{de} & (\mathbb{R}[X], \|.\|'_1) & \text{dans} & (\mathbb{R}[X], \|.\|_\infty) \\ \text{de} & (\mathbb{R}[X], \|.\|'_1) & \text{dans} & (\mathbb{R}[X], \|.\|'_\infty) \end{array} .$$

Exercice 18

1) Dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels on considère les normes définies, par

$$\|P\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |P(x)| \quad \text{et} \quad \|P\|'_\infty = \sup_{-1\leq x\leq 1} |P(x)| .$$

Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes.

2) Pour tout entier naturel n, on pose

$$K_n = \sup_{P\in\mathbb{R}_n[X]} \frac{\|P\|'_\infty}{\|P\|_\infty} .$$

Montrer que la suite (K_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

3) Calculer K_1 et K_2 en exprimant un polynôme P en fonction de ses valeurs en des points convenables de l'intervalle $[0, 1]$.

Solution

1) On a de manière évidente

$$\|P\|_\infty \leq \|P\|'_\infty .$$

Par contre si l'on prend

$$P(X) = (2X-1)^n ,$$

on a, sur $[0, 1]$,

$$-1 \leq 2x-1 \leq 1 ,$$

donc

$$\|P\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|P\|'_\infty \geq |P(-1)| = 3^n ,$$

et donc il n'existe pas de constante K telle que, pour tout polynôme P,

$$\|P\|'_\infty \leq K\|P\|_\infty .$$

2) Sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie, les normes sont équivalentes, donc K_n est un nombre réel. De plus, puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est inclus dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, on aura $K_n \leq K_{n+1}$ et la suite (K_n) est croissante. Elle

ne peut tendre vers une limite finie K, sinon on aurait

$$\|P\|'_\infty \leq K\|P\|_\infty \,,$$

pour tout polynôme.

3) Pour $\mathbb{R}_1[X]$, écrivons un polynôme P en fonction de $P(0)$ et $P(1)$. On a

$$P(X) = P(0)(1-X) + P(1)X = (P(1) - P(0))X + P(0)\,.$$

Alors, si x appartient à $[-1, 1]$,

$$|P(x)| \leq (|P(0)| + |P(1)|) + |P(0)| \leq 3\|P\|_\infty\,.$$

Donc

$$\|P\|'_\infty \leq 3\,\|P\|_\infty\,,$$

et l'on a égalité pour le polynôme $2X - 1$ car

$$\|P\|'_\infty = -P(-1) = 3 \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = -P(0) = P(1) = 1\,.$$

Il en résulte que $K_1 = 3$.

Pour $\mathbb{R}_2[X]$, en utilisant le calcul de l'exercice 15, on peut écrire P en fonction de $P(0)$, $P(1/2)$ et $P(1)$. On a

$$P(X) = (-4P(1/2) + 2P(1) + 2P(0))X^2 + (4P(1/2) - P(1) - 3P(0))X + P(0)\,.$$

Alors, si x appartient à $[-1, 1]$,

$$|P(x)| \leq (4|P(1/2)| + 2|P(1)| + 2|P(0)|) + (4|P(1/2)| + |P(1)| + 3|P(0)|) + |P(0)| \leq 17\,\|P\|_\infty\,.$$

Donc

$$\|P\|'_\infty \leq 17\,\|P\|_\infty\,,$$

et l'on a égalité pour le polynôme $2(2X-1)^2 - 1$, car

$$\|P\|'_\infty = |P(-1)| = 17 \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = P(1) = P(0) = -P(1/2) = 1\,.$$

Il en résulte que $K_2 = 17$.

Exercice 19

Dans l'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels on pose

$$\|P\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |P(x)| \quad \text{et} \quad \|P\| = \max(|P(0)|, |P(1)|, |P(2)|)\,.$$

Montrer que ce sont des normes équivalentes et trouver les normes de l'identité de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $(E, \|.\|)$ et de $(E, \|.\|)$ dans $(E, \|.\|_\infty)$..

Solution

On s'assure tout d'abord que $\|.\|$ est une norme. En effet, si $\|P\|$ est nul, alors $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ sont nuls et le polynôme P a au moins trois racines. Comme il est de degré au plus 2, c'est le polynôme zéro. Les autres propriétés se vérifient facilement.

Puisque E est de dimension finie les normes sont équivalentes.

En utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange, on a

$$P(X) = P(0)\,\frac{(X-1)(X-2)}{2} - P(1)X(X-2) + P(2)\,\frac{X(X-1)}{2}\,,$$

donc

$$|P(x)| \leq |P(0)|\,\frac{|(x-1)(x-2)|}{2} + |P(1)|\,|x(x-2)| + |P(2)|\,\frac{|x(x-1)|}{2}\,.$$

Sur l'intervalle $[\,0,\,1\,]$, on obtient facilement le maximum des trois polynômes qui interviennent ci-dessus :

$$\frac{|(x-1)(x-2)|}{2} \leq 1 \quad , \quad |x(x-2)| \leq 1 \quad , \quad \frac{|x(x-1)|}{2} \leq \frac{1}{8}\,,$$

donc

$$|P(x)| \leq |P(0)| + |P(1)| + \frac{1}{8}\,|P(2)| \leq \|P\|\,.$$

Il en résulte que

$$\|P\|_\infty \leq \|P\|\,.$$

L'égalité est obtenue pour le polynôme $X(X-2)$ par exemple. Il en résulte que la norme de l'identité de $(E, \|.\|)$ dans $(E, \|.\|_\infty)$ vaut 1.

Dans l'autre sens

$$P(X) = 2P(0)(X-1)(X-1/2) - 4P(1/2)X(X-1) + 2P(1)X(X-1/2)\,.$$

Donc

$$P(2) = 3P(0) - 8P(1/2) + 6P(1)\,,$$

et

$$|P(2)| = 3|P(0)| + 8|P(1/2)| + 6|P(1)| \leq 17\|P\|_\infty\,.$$

Alors

$$\|P\|' = |P(0)| + |P(1)| + |P(2)| \leq 19\,\|P\|_\infty\,.$$

L'égalité a lieu pour $8X(X-1)+1$ pour lequel

$$\|P\|_\infty = P(0) = P(1) = -P(1/2) = 1 \quad \text{et} \quad P(2) = 17\,.$$

Il en résulte que la norme de l'identité de $(E_\infty, \|.\|)$ dans $(E, \|.\|)$ vaut 19.

Exercice 20

Dans l'espace $E = \mathbb{R}_1[X]$ des polynômes de degré au plus 1 à coefficients réels on définit deux normes
$$\|P\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1} |P(x)| \quad \text{et} \quad \|P\|'_\infty = \sup_{0\le x\le 1} |xP(x)|\,.$$
Montrer que ce sont des normes équivalentes et trouver la norme de l'identité de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $(E, \|.\|'_\infty)$ et de $(E, \|.\|'_\infty)$ dans $(E, \|.\|_\infty)$.

Solution

L'espace étant de dimension finie, les normes sont équivalentes. On a bien sûr
$$\|P\|'_\infty \le \|P\|_\infty$$
et l'égalité a lieu si P est constant. Donc la norme de l'identité de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $(E, \|.\|'_\infty)$ vaut 1.

Si P est un polynôme de degré 1 au plus, on a
$$\|P\|_\infty = \max(|P(0)|, |P(1)|)\,.$$
Cherchons maintenant la norme $\|.\|'_\infty$ d'un polynôme P de degré 1. Pour cela étudions le polynôme $XP(X)$ qui est de degré 2. Pour des raisons d'homogénîté on peut se contenter de regarder les polynômes
$$P_t(X) = X - t\,,$$
et l'on cherche le maximum sur $[\,0,\,1\,]$ de la valeur absolue de
$$Q_t(x) = xP_t(x) = x(x-t)\,.$$
Le polynôme ayant un extremum en $t/2$, on étudie différents cas possibles.

a) Si $t \le 0$ ou $t \ge 2$, la fonction Q est monotone sur $[\,0,\,1\,]$ et nulle en 0, donc
$$\|P_t\|'_\infty = \|Q_t\|_\infty = |Q_t(1)| = |1-t|\,.$$
b) Si $0 \le t \le 2$, alors
$$\|P_t\|'_\infty = \|Q\|_\infty = \max(|Q(1)|, |Q(t/2)|) = \max(|1-t|, t^2/4)\,.$$
b1) Lorsque $1 \le t \le 2$, on a
$$\frac{t^2}{4} - |1-t| = \frac{t^2}{4} + 1 - t = \left(\frac{t}{2} - 1\right)^2 \ge 0\,,$$
donc
$$\|P_t\|'_\infty = \frac{t^2}{4}\,.$$

b2) Lorsque $0 \leq t \leq 1$, cette fois

$$\frac{t^2}{4} - |1-t| = \frac{t^2}{4} + t - 1\,,$$

et cette expression est positive sur $[\,2(\sqrt{2}-1),\,1\,]$, donc de nouveau

$$\|P_t\|'_\infty = \frac{t^2}{4}\,,$$

et négative sur $[\,0,\,2(\sqrt{2}-1)\,]$, et alors

$$\|P_t\|'_\infty = 1 - t\,.$$

Par ailleurs

$$\|P_t\|_\infty = \max(|t|, |1-t|) = \left\{\begin{array}{ccc} t & \text{si} & t \geq 1/2 \\ 1-t & \text{si} & t \leq 1/2 \end{array}\right.\,,$$

et l'on peut former le tableau suivant

t	$1/2$	$2(\sqrt{2}-1)$	2	
$\|P_t\|_\infty$	$1-t$	t	t	t
$\|P_t\|'_\infty$	$1-t$	$1-t$	$t^2/4$	$t-1$
$\dfrac{\|P_t\|_\infty}{\|P_t\|'_\infty}$	1	$\dfrac{t}{1-t}$	$\dfrac{4}{t}$	$\dfrac{t}{t-1}$
	$\longrightarrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Ce tableau montre que la borne supérieure du quotient $\dfrac{\|P_t\|_\infty}{\|P_t\|'_\infty}$ est atteinte en $t = 2(\sqrt{2}-1)$ et vaut $\dfrac{4}{2(\sqrt{2}-1)} = 2(\sqrt{2}+1)$. Il en résulte que, pour tout P de E, on a

$$\|P\|_\infty \leq 2(\sqrt{2}+1)\,\|P\|'_\infty\,,$$

l'égalité étant obtenue pour le polynôme

$$P(X) = X - 2(\sqrt{2}-1)\,.$$

Donc la norme de l'identité de $(E, \|.\|'_\infty)$ dans $(E, \|.\|_\infty)$ vaut $2(\sqrt{2}+1)$.

Exercice 21

Soit A une partie fermée non vide de $\mathbb{R}$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'on définisse une norme sur $\mathbb{R}[X]$ en posant
$$\|P\|_A = \sup_{x\in A} |P(x)|\,.$$

2) Soit a un nombre réel. Si la condition de 1) est réalisée, donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application δ_a qui à P associe $P(a)$ soit une forme linéaire continue sur $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|.\|_A$.

Solution

1) Il faut déjà que l'ensemble A soit borné, donc compact, pour que la borne supérieure soit finie quel que soit le polynôme P. Ensuite pour obtenir la séparation, il faut que la nullité de $\|P\|_A$ implique celle de P. Si l'ensemble A contient une infinité de points, alors P a une infinité de racines et c'est bien le polynôme zéro. Si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, alors le polynôme $(X - a_1)\cdots(X - a_n)$ est nul sur A et $\|P\|_A$ est nul sans que P soit nul.

La condition cherchée est donc : « l'ensemble A est un compact contenant une infinité de points ».

2) Si a appartient à A, alors
$$|\delta_a(P)| = |P(a)| \leq \|P\|_A\,.$$
Donc δ_a est continue, et de norme 1 car on a égalité pour les polynômes constants.

Soit maintenant un nombre a n'appartenant pas à A. Puisque A est compact, la distance de a à A n'est pas nulle, et il existe un intervalle $I = [\,a - \alpha,\, a + \alpha\,]$ qui n'est pas inclus dans A. D'autre part, puisque A est borné, il existe un intervalle compact J contenant $A \cup I$. Pour tout entier naturel n non nul, on définit alors une fonction f_n continue sur J en posant
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in J \setminus I \\ n & \text{si } x = n \end{cases}$$
et qui soit affine sur $[\,a - \alpha,\, a\,]$ et $[\,a,\, a + \alpha\,]$. En particulier f_n est nulle sur A.

D'après le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme P_n tel que
$$\sup_{x\in J} |f_n(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{n}\,.$$
Alors
$$|\delta_a(P_n)| = |P_n(a)] \geq |f_n(a)| - |f_n(a) - P_n(a)| \geq n - \frac{1}{n}\,.$$
D'autre part
$$\|P_n\|_A \leq \sup_{x\in A} |f_n(x) - P_n(x)| + \sup_{x\in A} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n}\,.$$

Alors
$$\frac{\delta_a(P_n)}{\|P_n\|_A} \geq n^2 - 1\,.$$
La limite du membre de gauche est donc infinie et la forme δ_a n'est pas continue.

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc : « a appartient à A ».

Exercice 22

Dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ on pose
$$\|P\| = \sum_{k=0}^{\infty} |P^{(k)}(k)|\,.$$
Montrer que l'on obtient une norme sur $\mathbb{R}[X]$ et que cet espace n'est pas complet.

Solution

Tout d'abord la somme est finie, puisque si P est de degré k, le polynôme $P^{(k+1)}$ est nul.

La seule propriété non évidente est la séparation. Soit P un polynôme de degré $n \geq 0$. Alors le polynôme $P^{(n)}$ est un polynôme constant non nul et donc $P^{(n)}(n)$ est non nul. Mais
$$|P^{(n)}(n)| \leq \|P\|\,,$$
et il en résulte que $\|P\|$ n'est pas nul. Le seul polynôme P tel que $\|P\|$ soit nul est le polynôme zéro.

Pour tout entier n, il existe un polynôme P_n de degré au plus n et un seul tel que, si $0 \leq k \leq n$,
$$P_n^{(k)}(k) = 2^{-k}\,.$$
En effet, si l'on pose
$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k\,,$$
on est amené, pour déterminer P_n à résoudre un système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues dont la matrice est triangulaire supérieure avec éléments diagonaux non nuls. C'est donc un système de Cramer qui a une solution et une seule.

Si $n < m$ on a alors
$$\|P_n - P_m\| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}\,.$$
La suite (P_n) est donc une suite de Cauchy.

La forme linéaire qui à P associe $P^{(k)}(k)$ est continue puisque

$$|P^{(k)}(k)| \leq \|P\|\,.$$

Si la suite (P_n) convergeait vers une limite P, la suite $(P_n^{(k)}(k))$ convergerait vers $P^{(k)}(k)$. Mais, si $n \geq k$, on a

$$P_n^{(k)}(k) = 2^{-k}\,,$$

donc on devrait avoir $P^{(k)}(k) = 2^{-k}$ pour tout entier k et aucune dérivée de P ne serait le polynôme zéro, d'où une contradiction. Il en résulte que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet pour la norme ainsi définie.

Exercice 23

Dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ on pose

$$N_1(P) = \sup_{-1\leq x\leq 1} |P(x)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{0\leq x\leq 1} |P(x)|\,.$$

Etudier, pour $i = 1$ et $i = 2$, la continuité de l'application linéaire δ de $(\mathbb{R}[X], N_i)$ dans lui-même, qui au polynôme $P(X)$ associe $P(-X)$.

Solution

De manière évidente, δ est une involution de $\mathbb{R}[X]$, et pour tout x de $[-1,\,1]$, $-x$ est aussi dans $[-1,\,1]$, donc

$$N_1(\delta(P)) = N_1(P)\,,$$

et δ est une isomètrie dans ce cas. Elle est donc continue et de norme N_1.

On remarque que

$$N_2(\delta(P)) = \sup_{0\leq x\leq 1} |P(-x)| = \sup_{-1\leq u\leq 0} |P(u)|\,.$$

Considérons l'application continue f définie sur $[-1,\,1]$ qui vaut $-x$ sur $[-1,\,0]$ et 0 sur $[0,\,1]$. Le théorème de Weierstrass montre qu'il existe une suite (P_n) de polynômes qui converge dans $\mathscr{C}([-1,\,1])$ pour la norme infinie. Alors, la suite $(N_2(P_n))$ converge vers $N_2(f) = 0$. D'autre part, la suite

$$(N_2(\delta(P_n))) = (\sup_{-1\leq u\leq 0} |P_n(u)|)$$

converge vers

$$\sup_{-1\leq u\leq 0} |u| = 1\,.$$

Il ne peut donc exister de constante K telle que, pour tout polynôme P,

$$N_2(\delta(P)) \leq K N_2(P)\,,$$

et δ n'est pas continue dans ce cas.

Exercice 24

Dans l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la norme

$$\|P\| = \sup_{0\leq x\leq 1} |P(x)|\,,$$

trouver la norme des applications linéaires $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$, qui à P associent respectivement sa partie paire et sa partie impaire.

Solution

On a donc

$$\mathscr{P}(P)(X) = \frac{P(X)+P(-X)}{2} \quad \text{et} \quad \mathscr{I}(P)(X) = \frac{P(X)-P(-X)}{2}\,.$$

En utilisant le calcul de l'exercice 15,

$$P(X) = (-4P(1/2) + 2(P(1) + 2P(0))X^2 + (4P(1/2) - P(1) - 3P(0))X + P(0)\,,$$

et donc

$$\mathscr{P}(X) = (-4P(1/2) + 2(P(1) + 2P(0))X^2 + P(0) \quad \text{et} \quad \mathscr{I}(P) = (4P(1/2) - P(1) - 3P(0))X\,.$$

Alors

$$\|\mathscr{I}(P)\| = |4P(1/2) - P(1) - 3P(0)| \leq 4|P(1/2)| + |P(1)| + 3|P(0)| \leq 8\,\|P\|\,,$$

l'égalité étant obtenue pour le polynôme $P_0(X) = 8X^2 - 8X + 1$ qui est tel que

$$P_0(0) = P_0(1) = -P_0(1/2) = 1\,,$$

et pour lequel

$$\|P\| = 1\,.$$

On a aussi

$$\|\mathscr{P}(P)\| = \|(-4P(1/2)+2(P(1)+2P(0))X^2+P(0)\| \leq 4|P(1/2)|+2|P(1)|+2|P(0)|+|P(0)| \leq 9\,\|P\|\,,$$

avec égalité pour le même polynôme P_0. Donc

$$|||\mathscr{P}||| = 9 \quad \text{et} \quad |||\mathscr{I}||| = 8\,.$$

Chapitre 4

Espaces de suites

Exercice 25

1) Soit l'espace ℓ_∞ des suites bornées de nombres réels, muni de la norme infinie. Montrer que cet espace est complet.

2) Montrer que le sous-espace ℓ_C des suites convergentes est fermé dans E, et que l'application lim qui à une telle suite associe sa limite est continue.

3) Montrer que le sous-espace ℓ_0 des suites de limite nulle est fermé dans le précédent et que le sous-espace ℓ_{00} des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans ℓ_0.

4) Trouver les formes linéaires continues sur ℓ_0 ainsi que leur norme.

Solution

1) Si l'on note $u = (u_n)_{n\geq 0}$ un élément de ℓ_∞ on a donc

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |u_n| \, ,$$

et, quel que soit n, l'application qui à u associe u_n est continue.

Soit $(u(p))_{p\geq 0}$ une suite de Cauchy de ℓ_∞. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier P tel que, si $q \geq p \geq P$, on ait, quel que soit n entier,

$$|u_n(p) - u_n(q)| \leq \|u(p) - u(q)\|_\infty \leq \varepsilon \, .$$

Alors pour tout n, la suite $(u_n(p))_{p\geq 0}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ et possède donc une limite u_n.

En faisant tendre q vers l'infini, on obtient

$$|u_n - u_n(p)| \leq \varepsilon \, ,$$

donc, d'une part,

$$|u_n| \leq |u_n(p)| + |u_n - u_n(p)| \leq |u_n(p)| + \varepsilon \leq \|u(p)\|_\infty + \varepsilon\,,$$

ce qui montre que la suite u est bornée, d'autre part, si $p \geq P$,

$$\|u(p) - u\|_\infty \leq \varepsilon\,,$$

ce qui montre que la suite $(u(p))_{p\geq 0}$ converge vers u dans ℓ_∞. L'espace ℓ_∞ est donc complet.

2) Une suite convergente étant bornée, elle se trouve bien dans ℓ_∞. De plus, puisque, pour tout entier n positif,

$$|u_n| \leq \|u\|_\infty\,,$$

on obtient par passage à la limite

$$|\lim(u)| \leq \|u\|_\infty\,,$$

et l'application lim est continue et de norme 1 puisque l'on a égalité pour les suites constantes.

Remarque : d'après le théorème de Hahn-Banach, la forme linéaire lim se prolonge à ℓ_∞ en une forme linéaire continue de même norme.

Soit une suite $(u(p))_{p\geq 0}$ de ℓ_C qui converge vers u dans ℓ_∞. Montrons que u appartient à ℓ_C. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe P tel que $p \geq P$ implique

$$\|u(p) - u\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

Soit $q > p > P$. La suite $(u_n(p))_{n\geq 0}$ converge vers $\lim(u(p))$. Il existe donc N_1 tel que $n \geq N_1$ implique

$$|u_n(p) - \lim(u(p))| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

De même la suite $(u_n(q))_{n\geq 0}$ converge vers $\lim(u(q))$. Il existe donc N_2 tel que $n \geq N_2$ implique

$$|u_n(q) - \lim(u(q))| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Alors, si $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a

$$|\lim(u(p)) - \lim(u(q))| \leq |\lim(u(p)) - u_n(p)| + |u_n(p) - u_n(q)| + |u_n(q) - \lim(u(q))| \leq \varepsilon\,,$$

ce qui montre que la suite $(\lim(u(p)))_{p\geq 0}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Elle converge donc. Soit ℓ sa limite. Il reste à montre que la suite u converge vers ℓ.

Il existe P_1 tel que $p \geq P_1$ implique

$$|u_n - u_n(p)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Il existe P_2 tel que $p \geq P_2$ implique

$$|\lim(u(p)) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Soit $p \geq \max(P_1, P_2)$. Il existe N tel que $n \geq N$ implique

$$|u_n(p) - \lim(u(p))| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Alors

$$|u_n - \ell| \leq |u_n - u_n(p)| + |u_n(p) - \lim(u(p))| + |\lim(u(p)) - \ell| \leq \varepsilon\,,$$

ce qui montre que u a pour limite ℓ.

3) Le sous-espace ℓ_0 est l'image réciproque de 0 par l'application lim. Comme lim est continue, on en déduit que ℓ_0 est fermé dans ℓ_C.

Enfin, soit $u(p)$ la suite dont les termes sont ceux de u jusqu'au rang p et nuls ensuite. C'est un élément de ℓ_{00} On a alors

$$\|u - u(p)\|_\infty = \sup_{n \geq p+1} |u_n|\,.$$

Comme u converge vers 0, il existe N tel que $n \geq N$ implique

$$|u_n| \leq \varepsilon\,.$$

Alors, si $p + 1 \geq N$, on a

$$\|u - u(p)\|_\infty \leq \varepsilon\,,$$

ce qui montre que la suite $(u(p))_{p \geq 0}$ converge vers u, et que ℓ_{00} est dense dans ℓ_0.

4) Soit Φ une forme linéaire continue sur ℓ_0. Il existe une constante K telle que, pour tout u de ℓ_0,

$$|\Phi(u)| \leq K\,\|u\|_\infty\,.$$

Soit $e(p)$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf le $p-$ième qui vaut 1. Posons

$$v_p = \Phi(e(p))$$

et soit ε_p le signe de v_p. On considère la suite

$$v(p) = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_p, 0, \ldots) = \sum_{n=0}^{p} \varepsilon_n e(n)\,.$$

C'est un élément de ℓ_{00} de norme 1 et l'on a, pour tout entier p positif,

$$\sum_{n=0}^{p} |v_n| = \sum_{n=0}^{p} \varepsilon_n v_n = |\Phi(v(p))| \leq K\,.$$

Il en résulte que la série de terme général v_n est absolument convergente. Notons ℓ_1 l'ensemble des telles suites.

Réciproquement, si v est un élément de ℓ_1. On note

$$\|v\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n| \,,$$

ce qui définit une norme sur ℓ_1. Soit u un élément de ℓ_∞, alors

$$|v_n u_n| \leq \|u\|_\infty |v_n| \,,$$

et la série de terme général $v_n u_n$ converge absolument. On définit une forme linéaire Φ_v sur ℓ_∞ en posant

$$\Phi_v(u) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n u_n \,,$$

et alors

$$|\Phi_v(u)| \leq \|v\|_1 \|u\|_\infty \,,$$

ce qui montre que Φ_v est continue sur ℓ_∞, et donc aussi sur ℓ_0, et que, sur cet espace,

$$|||\Phi_v||| \leq \|v\|_1 \ .$$

En prenant la suite $v(p) = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_p, 0, \ldots)$ où ε_n est le signe de v_n on a de nouveau

$$|\Phi_v(v(p))| = \sum_{n=0}^{p} |v_n| \,,$$

et puisque la limite de la suite $(|\Phi_v(v(p))|)$ vaut $\|v\|_1$, on en déduit que

$$|||\Phi_v||| = \|v\|_1 \ .$$

L'application qui à v dans ℓ_1 associe Φ_v est donc une bijection isométrique de ℓ_1 sur le dual topologique de ℓ_0.

Exercice 26

1) Soit l'espace ℓ_1 des suites $u = (u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels telles que la série de terme général u_n soit absolument convergente. On le munit de la norme

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \,.$$

Montrer que cet espace est complet.

2) Montrer que sur ℓ_1 les normes 1 et ∞ ne sont pas équivalentes.

3) Montrer que le sous-espace ℓ_{00} des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans ℓ_1.

4) Déterminer l'ensemble des formes linéaires continues sur ℓ_1 ainsi que leur norme.

Solution

1) On remarque déjà que, pour tout entier n,

$$|u_n| \leq \|u\|_1 \,,$$

Soit $(u(p))_{p\geq 0}$ une suite de Cauchy de ℓ_1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier P tel que, si $q \geq p \geq P$, on ait, quel que soit n entier,

$$|u_n(p) - u_n(q)| \leq \|u(p) - u(q)\|_1 \leq \varepsilon \,.$$

Alors pour tout n, la suite $(u_n(p))_{p\geq 0}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ et possède donc une limite u_n.

On a également, pour tout entier m,

$$\sum_{n=0}^{m} |u_n(p) - u_n(q)| \leq \|u(p) - u(q)\|_1 \leq \varepsilon \,.$$

En faisant tendre q vers l'infini, on obtient

$$\sum_{n=0}^{m} |u_n(p) - u_n| \leq \varepsilon \,.$$

Donc, d'une part,

$$\sum_{n=0}^{m} |u_n| \leq \sum_{n=0}^{m} |u_n(p)| + \sum_{n=0}^{m} |u_n - u_n(p)| \leq \sum_{n=0}^{m} |u_n(p)| + \varepsilon \leq \|u(p)\|_1 + \varepsilon \,,$$

ce qui montre que la suite u appartient à ℓ_1, d'autre part, si $p \geq P$,

$$\|u(p) - u\|_1 \leq \varepsilon \,,$$

ce qui montre que la suite $(u(p))_{p\geq 0}$ converge vers u dans ℓ_1. L'espace ℓ_1 est donc complet.

2) On a toujours

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_1 \,,$$

mais si $u(p)$ est la suite qui vaut 1 jusqu'au rang p et 0 ensuite, on obtient

$$\|u(p)\|_1 = p + 1 \quad \text{et} \quad \|u(p)\|_\infty = 1 \,,$$

et il ne peut exister de constante K telle que, pour tout u de ℓ_1

$$\|u\|_1 \leq K\|u\|_\infty \,.$$

Les deux normes ne sont pas équivalentes.

3) Si u appartient à ℓ_1, soit $u(p)$ la suite dont les termes sont ceux de u jusqu'au rang p et nuls ensuite. C'est un élément de ℓ_{00}. On a alors

$$\|u - u(p)\|_1 = \sum_{n=p+1}^{\infty} |u_n| \,.$$

Comme la série de terme général u_n converge absolument, il existe N tel que $n \geq N$ implique

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} |u_n| \leq \varepsilon \,.$$

c'est-à-dire

$$\|u - u(p)\|_\infty \leq \varepsilon \,,$$

ce qui montre que la suite $(u(p))_{p\geq 0}$ converge vers u, et que ℓ_{00} est dense dans ℓ_1.

4) Soit Φ une forme linéaire continue. Il existe une constante K telle que, pour tout u de ℓ_1,

$$|\Phi(u)| \leq K \,\|u\|_1 \,.$$

Soit $e(p)$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf le $p-$ième qui vaut 1. Alors

$$|\Phi(e(p))| \leq K \,,$$

et la suite $(\Phi(e(p)))_{p\geq 0}$ est bornée.

Soit u un élément de ℓ_1. Si l'on pose

$$u(p) = \sum_{k=0}^{p} u_k e(k) \,,$$

on a alors, par linéarité,

$$\Phi(u(p)) = \sum_{k=0}^{p} \Phi(e(k)) u_k \,.$$

Mais la suite $(u(p))_{p\geq 0}$ converge vers u, donc $(\Phi(u(p)))_{p\geq 0}$ converge vers $\Phi(u)$. Alors

$$\Phi(u) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \Phi(e(k)) u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi(e(k)) u_k \,.$$

Réciproquement, si v est un élément de ℓ_∞ et u un élément de ℓ_1, alors

$$|v_n u_n| \leq \|v\|_\infty |u_n|$$

et la série de terme général $v_n u_n$ converge absolument. On définit une forme linéaire sur ℓ_1 en posant

$$\Phi_v(u) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n u_n \,,$$

et
$$|\Phi_v(u)| \leq \|v\|_\infty \|u\|_1 \,,$$
ce qui montre que Φ_v est continue et que
$$|||\Phi_v||| \leq \|v\|_\infty \ .$$
Si le maximum $\|v\|_\infty$ est atteint pour un entier n_0, alors
$$|\Phi_v(e(n_0))| = |v_{n_0}| = \|v\|_\infty \,.$$
Dans le cas contraire, il existe une suite $(v_{\varphi(n)})$ extraite de v telle que
$$\|v\|_\infty = \lim_{n\to\infty} |v_{\varphi(n)}| \,.$$
Alors
$$\lim_{n\to\infty} |\Phi_v(e(\varphi(n)))| = \lim_{n\to\infty} |v_{\varphi(n)}| = \|v\|_\infty \,.$$
Dans les deux cas
$$|||\Phi_v||| = \|v\|_\infty \ .$$
L'application qui à v dans ℓ_∞ associe Φ_v est donc une bijection isométrique de ℓ_∞ sur le dual topologique de ℓ_1.

Exercice 27

Soit l'espace vectoriel E des suites $u = (u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels telles que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ soit bornée
1) Montrer que l'on définit une norme sur E en posant
$$\|u\| = |u_0| + \sup_{n\geq 0} |u_{n+1} - u_n| \,.$$
et que l'espace E est complet.

2) Montrer que l'espace ℓ_∞ des suites bornées est inclus dans E et comparer les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ sur ce sous-espace.

Solution

1) Si $\|u\|$ est nul, cela implique que $u_{n+1} - u_n$ est nul pour tout n, donc que u est constante. Mais on a également $u_0 = 0$ et la suite est nulle. Les autres propriétés de la norme s'obtiennent facilement.

Soit $(u(p))$ une suite de Cauchy de E. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe P tel que $q > p \geq P$ implique
$$\begin{aligned}\|u(q) - u(p)\| &= |u_0(q) - u_0(p)| + \sup_{n\geq 0} |(u_{n+1}(q) - u_{n+1}(p)) - (u_n(q) - u_n(p))| \\ &= |u_0(q) - u_0(p)| + \sup_{n\geq 0} |(u_{n+1}(q) - u_n(q)) - (u_{n+1}(p) - u_n(p))| \leq \varepsilon \,.\end{aligned}$$

Donc, quel que soit n,

$$|u_0(q) - u_0(p)| + |(u_{n+1}(q) - u_n(q)) - (u_{n+1}(p) - u_n(p))| \leq \varepsilon\,. \tag{1}$$

Alors $(u_0(p))$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ et converge vers un nombre u_0, et, pour tout n, la suite $(u_{n+1}(p) - u_n(p))_p$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ et converge vers un nombre a_n. On considère la suite $u = (u_n)$ définie par

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,,$$

qui est telle que

$$u_{n+1} - u_n = a_n\,.$$

En faisant tendre q vers l'infini dans l'inégalité (1) , on obtient, si $p \geq P$,

$$|u_0 - u_0(p)| + |a_n - (u_{n+1}(p) - u_n(p))| = |u_0 - u_0(p)| + |(u_{n+1} - u_n) - (u_{n+1}(p) - u_n(p))| \leq \varepsilon\,.$$

Alors

$$|u_0 - u_0(p)| + \sup_{n\geq 0} |(u_{n+1} - u_n) - (u_{n+1}(p) - u_n(p))| \leq \varepsilon\,,$$

d'où l'on déduit

$$|u_{n+1} - u_n| \leq |(u_{n+1} - u_n) - (u_{n+1}(p) - u_n(p))| + |(u_{n+1}(p) - u_n(p))| \leq \varepsilon + \|u(p)\|\,,$$

ce qui montre que la suite u est dans E. Par ailleurs, si $p \geq P$,

$$\|u - u(p)\| \leq \varepsilon$$

et la suite $(u(p))$ converge vers u. Il en résulte que E est complet.

2) Tout d'abord

$$\|u\| \leq |u_0| + \sup_{n\geq 0}(|u_{n+1}| + |u_n|) \leq 3\,\|u\|_\infty\,,$$

(avec égalité pour la suite $(-1, 1, 0, \cdots)$), ce qui montre que ℓ_∞ est inclus dans E.

Considérons la suite $u(p) = (\inf(n, p))_{n\geq 0}$. On a alors

$$\|u(p)\|_\infty = p \quad \text{et} \quad \|u(p)\| = 1\,.$$

Il ne peut pas exister de constante K telle que, pour toute suite u de ℓ_∞,

$$\|u\|_\infty \leq K\,\|u\|\,.$$

Les normes ne sont pas équivalentes sur ℓ_∞.

Chapitre 5

Espaces de fonctions

Exercice 28

Dans l'espace $E = \mathscr{C}^1([0,\, 1\,], \mathbb{R})$ des applications de classe C^1 sur $[0,\, 1\,]$ à valeurs réelles on définit

$$\|f\|_1' = \int_0^1 x|f(x)|\,dx \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty' = \sup_{0\leq x\leq 1} |xf(x)|\,.$$

1) Montrer que ce sont des normes sur E et comparer $\|.\|_i'$ et $\|.\|_i$ lorsque $i = 1$ et $i = \infty$.

2) Trouver la norme de l'identité de $\|.\|_i$ dans $\|.\|_i'$.

Solution

1) La seule propriété qui ne soit pas évidente est la séparation. Si la norme $\|f\|_i'$ est nulle alors $xf(x)$ est nul sur $[0,\, 1\,]$. Il en résulte que $f(x)$ est nul sur $]\,0,\, 1\,]$ et, par continuité, que $f(0)$ est nul. Donc f est la fonction nulle.

Puisque $0 \leq x \leq 1$, on a

$$x|f(x)| \leq |f(x)|\,,$$

d'où

$$\|f\|_i' \leq \|f\|_i\,.$$

Considérons la fonction f_n de E définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [0,\, 1/n\,] \\ 1/x & \text{si } x \in [1/n,\, 1\,] \end{cases} \qquad \text{donc} \quad xf_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in [0,\, 1/n\,] \\ 1 & \text{si } x \in [1/n,\, 1\,] \end{cases}\,.$$

On a alors

$$\|f_n\|_\infty = n \quad \text{et} \quad \|f_n\|_\infty' = 1\,,$$

donc, il n'existe pas de constante K telle que, pour tout f de E,

$$\|f\|_\infty \leq K\,\|f\|'_\infty\,,$$

ce qui montre que les normes $\|.\|'_\infty$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Avec la même fonction f_n, on a

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{1/n} n\,dx + \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x} = 1 + \ln n\,,$$

et

$$\|f_n\|'_1 = \int_0^{1/n} xn\,dx + \int_{1/n}^1 dx = \frac{1}{2n} + 1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n}\,.$$

La suite $(\|f_n\|'_1)$ converge vers 1 alors que $(\|f_n\|)_1)$ n'est pas bornée. Donc, il n'existe pas de constante K telle que, pour tout f de E,

$$\|f\|_1 \leq K\,\|f\|'_1\,,$$

ce qui montre que les normes $\|.\|'_1$ et $\|.\|_1$ ne sont pas équivalentes.

2) On montre que dans les deux cas la norme de l'application identique vaut 1.

Pour les normes ∞, si f est la fonction constante 1, on a

$$\|f\|'_\infty = \|f\|_\infty = 1\,,$$

donc, la norme de l'identité de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $(E, \|.\|'_\infty)$ vaut 1.

Pour les normes 1 considérons la fonction f_n de E définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,\, 1-1/n\,] \\ n^2(x-1+1/n) & \text{si } x \in [\,1-1/n,\, 1\,] \end{cases}\,.$$

C'est une fonction positive. Tout d'abord, $\|f_n\|_1$ est l'aire d'un triangle de hauteur n et de base $1/n$ donc

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{2}\,.$$

Ensuite, en écrivant, si $1 - 1/n \leq x \leq 1$,

$$xf_n(x) = n^2x(x-1+1/n) = n^2\left[(x-1+1/n)^2 + (1-1/n)(x-1+1/n)\right]\,,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\|f_n\|'_1 &= n^2 \int\limits_{1-1/n}^{1} \left[(x-1+1/n)^2 + (1-1/n)(x-1+1/n)\right]\, dx \\
&= n^2 \left[\frac{(x-1+1/n)^3}{3} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{(x-1+1/n)^2}{2}\right]_{1-1/n}^{1} \\
&= n^2 \left[\frac{1}{3n^3} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2n^2}\right] \\
&= \frac{1}{3n} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6n}\,.
\end{aligned}$$

Alors la suite $(\|f_n\|'_1/\|f_n\|_1)$ converge vers 1, donc, la norme de l'identité de $(E, \|.\|_1)$ dans $(E, \|.\|'_1)$ vaut 1.

Remarque : si f n'est pas la fonction nulle, on a toujours

$$\|f\|'_1 < \|f\|_1\,,$$

car la fonction $(1-x)|f(x)|$ est une fonction positive qui n'est pas la fonction nulle sur $[\,0,\,1\,]$.

Exercice 29

Dans l'espace $E = \mathscr{C}^1([\,0,\,1\,], \mathbb{R})$ des applications de classe C^1 sur $[\,0,\,1\,]$ à valeurs réelles on définit

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f\|' = \|f'\|_\infty + |f(0)|\,.$$

Montrer que ce sont des normes équivalentes et que l'espace est complet, puis trouver la norme de l'identité de $(E, \|.\|)$ dans $(E, \|.\|')$ et de $(E, \|.\|')$ dans $(E, \|.\|)$,

Solution

La seule propriété qui ne soit pas évidente est la séparation pour la norme $\|.\|'$. Si la norme $\|f\|'$ est nulle alors $\|f'\|_\infty$ est nul, donc f' est nulle et f est constante, mais aussi $f(0)$ est nul, donc f est nulle. Par ailleurs

$$\|f\|' = \|f'\|_\infty + |f(0)| \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|\,,$$

et l'égalité a lieu si f est constante. La norme de l'identité de $(E, \|.\|)$ dans $(E, \|.\|')$ est donc égale à 1.

Dans l'autre sens, en partant lorsque $0 \leq x \leq 1$, de l'égalité

$$f(x) = \int\limits_0^x f'(t)\, dt + f(0)\,,$$

on obtient,

$$|f(x)| \leq \int_0^x |f'(t)|\,dt + |f(0)| \leq \|f'\|_\infty \int_0^x dt + |f(0)| \leq \|f'\|_\infty + |f(0)|\,,$$

et donc

$$\|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + |f(0)|\,.$$

Alors

$$\|f\| \leq 2\|f'\|_\infty + |f(0)| \leq 2\|f\|'\,,$$

et l'égalité a lieu pour la fonction f telle que $f(x) = x$. Donc les normes sont équivalentes et la norme de l'identité de $(E, \|.\|')$ dans $(E, \|.\|)$ est égale à 2.

Maintenant, si (f_n) est une suite de Cauchy de E, alors $(f_n(0))$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ et converge vers un nombre α, et (f'_n) est une suite de Cauchy dans l'espace $\mathscr{C}([0,\,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie, qui est complet, et converge vers une fonction continue g. Pour tout x de $[0,\,1]$ posons

$$f(x) = \alpha + \int_0^x g(t)\,dt\,.$$

La fonction f est alors un élément de E tel que

$$f(0) = \alpha \quad \text{et} \quad f' = g\,,$$

d'où

$$\|f_n - f\|' = |f_n(0) - \alpha| + \|f'_n - g\|_\infty\,,$$

et l'on en déduit que (f_n) converge vers f. Il en résulte que E est complet.

Exercice 30

Dans l'espace $E = \mathscr{C}^1([0,\,1], \mathbb{R})$ des applications de classe C^1 sur $[0,\,1]$ à valeurs réelles on définit

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f\|' = \|f + f'\|_\infty + |f(0)|\,.$$

Montrer que ce sont des normes équivalentes et trouver la norme de l'identité de $(E, \|.\|)$ dans $(E, \|.\|')$ et de $(E, \|.\|')$ dans $(E, \|.\|)$.

Solution

La seule propriété qui ne soit pas évidente est la séparation pour la norme $\|.\|'$. Si la norme $\|f\|'$ est nulle alors

$$f + f' = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0\,.$$

En résolvant l'équation différentielle, on trouve pour tout x de $[\,0,\,1\,]$,

$$f(x) = f(0)e^{-x} = 0\,.$$

Par ailleurs

$$\|f\|' \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + |f(0)| \leq 2\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq 2\|f\|\,,$$

et l'égalité a lieu si f est constante. La norme de l'identité de $(E, \|.\|)$ dans $(E, \|.\|')$ est donc égale à 2.

Dans l'autre sens, posons

$$f + f' = h\,.$$

Cette équation différentielle se résout en fonction de h. On obtient

$$f(x) = f(0)e^{-x} + e^{-x}\int_0^x h(t)e^t dt\,.$$

donc, si x appartient à $[\,0,\,1\,]$,

$$|f(x)| \leq |f(0)|e^{-x} + e^{-x}\int_0^x |h(t)|\,e^t dt \leq |f(0)|e^{-x} + e^{-x}\|h\|_\infty \int_0^x e^t dt\,,$$

puis

$$|f(x)| \leq |f(0)|e^{-x} + e^{-x}(e^x - 1)\|h\|_\infty = |f(0)|e^{-x} + (1 - e^{-x})\|h\|_\infty\,,$$

et finalement

$$|f(x)| \leq (|f(0)| - \|f + f'\|_\infty)e^{-x} + \|f + f'\|_\infty\,.$$

Si l'on note $g(x)$ le membre de droite, on obtient une fonction monotone g. Alors

$$\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty = \max(\,|g(0)|, |g(1)|\,) = \max\Big[\,|f(0)|\;,\; |f(0)|e^{-1} + (1 - e^{-1})\|f + f'\|_\infty\Big]\,.$$

D'autre part

$$\|f'\|_\infty = \|(f + f') - f\|_\infty \leq \|f + f'\|_\infty + \|f\|_\infty\,,$$

donc

$$\|f\| \leq \|f + f'\|_\infty + 2\|f\|_\infty \leq \max\Big[\,2|f(0)| + \|f + f'\|_\infty\;,\; 2|f(0)|e^{-1} + (3 - 2e^{-1})\|f + f'\|_\infty\,\Big]\,.$$

Comme $e > 2$, on en déduit que

$$3 - 2e^{-1} > 2 > 1 > 2e^{-1}\,,$$

puis que

$$\|f\| \leq (3 - 2e^{-1})\|f\|'\,.$$

Les deux normes sont donc équivalentes et

$$|||\mathrm{Id}||| = \sup_{f\in E} \frac{\|f\|}{\|f\|'} \leq 3 - 2e^{-1}\,.$$

Pour montrer que la norme de l'identité de $(E, \|.\|')$ dans $(E, \|.\|)$ vaut $3 - 2e^{-1}$, introduisons la suite de fonctions h_n définies par

$$h_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [\,0,\, 1 - 1/n\,] \\ 2nx - 2n + 1 & \text{si } x \in [\,1 - 1/n,\, 1\,] \end{cases} .$$

La fonction h_n est continue croissante sur $[\,0,\, 1\,]$ et varie de -1 à $+1$, donc $\|h_n\|_\infty$ vaut 1. Soit alors f_n la solution, nulle en 0, de l'équation différentielle

$$f_n + f_n' = h_n\,.$$

On a donc

$$\|f_n\|' = \|h_n\|_\infty + |f_n(0)| = 1\,.$$

La fonction f_n est de classe C^1 et s'obtient par la formule

$$f_n(x) = e^{-x} \int_0^x h_n(t) e^t dt\,.$$

Si x appartient à l'intervalle $[\,0,\, 1 - 1/n\,]$, on obtient

$$f_n(x) = -e^{-x} \int_0^x e^t dt = e^{-x} - 1\,.$$

Si x appartient à l'intervalle $[\,1 - 1/n,\, 1\,]$, on obtient cette fois

$$f_n(x) = e^{-x} \left[-\int_0^{1-1/n} e^t dt + \int_{1-1/n}^x (2nt - 2n + 1) e^t dt \right] .$$

La deuxième intégrale se calcule facilement par parties et l'on trouve finalement

$$f_n(x) = e^{-x} \left[\left(1 - e^{1-1/n}\right) + \left((2nx - 4n + 1)e^x + (2n + 1)e^{1-1/n}\right) \right] ,$$

ou encore

$$f_n(x) = 2nx - 4n + 1 + e^{-x} + 2ne^{1-x-1/n}\,.$$

En particulier

$$\|f_n\|_\infty \geq |f_n(1 - 1/n)| = 1 - e^{-1+1/n}\,.$$

On a également sur $[\,1 - 1/n,\, 1\,]$

$$f_n'(x) = h_n(x) - f_n(x) = 2n - 2ne^{1-x-1/n} - e^{-x}\,,$$

donc

$$\|f_n'\|_\infty \geq |f_n'(1)| = 2n(1 - e^{-1/n}) - e^{-1}\,.$$

Alors, en utilisant un développement limité, on obtient

$$\|f_n\| \geq 1 - e^{-1+1/n} + 2n(1 - e^{-1/n}) - e^{-1} = 1 - e^{-1+1/n} + 2n(1/n + \circ(1/n)) - e^{-1}\,.$$

Le membre de droite définit une suite qui converge vers $3-2e^{-1}$. Il en résulte que

$$\sup_{f\in E}\frac{\|f\|}{\|f\|'}\geq\frac{\|f_n\|}{\|f_n\|'}=\|f_n\|\,,$$

et quand n tend vers l'infini

$$|||\mathrm{Id}|||=\sup_{f\in E}\frac{\|f\|}{\|f\|'}\geq 3-2e^{-1}\,.$$

Comme on a l'inégalité inverse, on obtient bien l'égalité.

Exercice 31

Dans l'espace $E=\mathscr{C}^1([\,0,\,1\,],\mathbb{R})$ des applications de classe C^1 sur $[\,0,\,1\,]$ à valeurs réelles montrer que l'on définit une norme en posant

$$\|f\|=|f(0)|+\|f'\|_2\,.$$

Montrer que l'on a les inégalités

$$\|f'\|_1\leq\|f'\|_2\quad\text{et}\quad\|f\|_\infty\leq\|f\|\,.$$

En utilisant la fonction f_n définie sur $[\,0,\,1\,]$ par $f_n(x)=\dfrac{\sin(n\pi x)}{n}$, montrer que $\|.\|_\infty$ et $\|f\|$ ne sont pas équivalentes.

Solution

La seule propriété qui ne soit pas évidente est la séparation. Si la norme $\|f\|$ est nulle alors $\|f'\|_2$ est nulle, donc f' est nulle et f est constante, mais aussi $f(0)$ est nul, donc f est nulle.

En utilisant l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\left(\int_0^1|f'(x)|\times 1\,dx\right)^2\leq\left(\int_0^1|f'(x)|^2\,dx\right)\left(\int_0^1 dx\right)\,,$$

ce qui donne

$$\|f'\|_1^2\leq\|f'\|_2^2\,.$$

Alors

$$|f(x)-f(0)|=\left|\int_0^x f'(t)\,dt\right|\leq\int_0^x|f'(t)|\,dt\leq\int_0^1|f'(t)|\,dt=\|f'\|_1\leq\|f'\|_2\,,$$

puis

$$|f(x)|\leq|f(x)-f(0)|+|f(0)|\leq|f(0)|+\|f'\|_2\,,$$

d'où l'on déduit que

$$\|f\|_\infty \leq \|f\| .$$

Avec la fonction f_n, on calcule

$$\|f_n'\|_2^2 = \int_0^1 (f_n')^2(x)\,dx = \pi^2 \int_0^1 \cos^2(n\pi x)\,dx = \frac{\pi^2}{2} \int_0^1 (1+\cos(2n\pi x))\,dx = \frac{\pi^2}{2} .$$

On a alors

$$\|f_n\| = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \|f_n\|\|_\infty = \frac{1}{n} .$$

Donc

$$\frac{\|f_n\|}{\|f_n\|_\infty} = \frac{n\pi}{\sqrt{2}} ,$$

et cette suite n'est pas bornée. Il n'existe pas de constante K telle que, pour tout f de E,

$$\|f\| \leq K\,\|f\|_\infty ,$$

ce qui montre que les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 32

Dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, on considère les sous-espaces suivants :
(a) E_∞ est l'espace vectoriel des fonctions bornées, muni de la norme $\|.\|_\infty$.
(b) E_1 est l'espace des fonctions intégrables, muni de la norme $\|.\|_1$.
(c) E_2 est l'espace des fonctions de carré sommable, muni de la norme $\|.\|_2$.

1) Montrer que l'intersection E de ces trois sous-espaces n'est pas réduite à 0, mais qu'aucun d'entre eux n'est inclus dans l'un des deux autres.

2) Montrer que, quels que soient i et j distincts dans $\{1, 2, \infty\}$, il n'existe pas de constante K telle que, pour tout f de E,

$$\|f\|_i \leq K\,\|f\|_j .$$

Solution

1) La fonction f définie par

$$f(x) = e^{-|x|}$$

appartient à E. En effet

$$\|f\|_\infty = |f(0)| = 1 \quad , \quad \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = 2 \quad \text{et} \quad \|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|}dx = 1 .$$

Etudions les inclusions.

a) Tout d'abord une fonction constante se trouve dans E_∞ mais ni dans E_1, ni dans E_2. Donc E_∞ n'est inclus, ni dans E_1, ni dans E_2.

b) Considérons la fonction continue f qui est telle que, pour tout entier $n \geq 2$, on ait

$$f(n - 1/n^3) = f(n + 1/n^3) = 0 \quad \text{et} \quad f(n) = n$$

et qui soit affine sur les intervalles $[\, n - 1/n^3,\, n\,]$ et $[\, n,\, n + 1/n^3\,]$ et nulle ailleurs. C'est une fonction positive qui n'est pas bornée. L'intégrale est alors la somme des aires des triangles composant le graphe de cette fonction et

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\,.$$

Donc E_1 n'est pas inclus dans E_∞. Egalement, la fonction $g = \sqrt{f}$ appartient à E_2 mais pas à E_∞, donc E_2 n'est pas inclus dans E_∞.

c) Si l'on modifie la fonction f précédente en imposant $f(n) = n^2$ on trouve cette fois,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty\,.$$

L'intégrale $\|g\|_1$ est la somme des aires I_n de triangles curvilignes construits sur $[\, n - 1/n^3,\, n + 1/n^3\,]$. On a alors, par symétrie,

$$I_n = 2 \int_{n-1/n^3}^{n} \sqrt{f(x)}\, dx\,,$$

mais sur l'intervalle $[\, n - 1/n^3,\, n\,]$, puisque f est affine, on a

$$f(x) = n^5 \left(x - \left(n - \frac{1}{n^3} \right) \right)\,,$$

et en intégrant

$$I_n = 2n^{5/2}\, \frac{2}{3} \left[\left(x - \left(n - \frac{1}{n^3} \right) \right)^{3/2} \right]_{n-1/n^3}^{n} = \frac{4}{3}\, \frac{1}{n^2}\,.$$

Finalement

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx = \frac{4}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\,.$$

La fonction g se trouve dans E_1 mais pas dans E_2, donc E_1 n'est pas inclus dans E_2.

Enfin, la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{|x| + 1}$$

est dans E_2 mais pas dans E_1, donc E_2 n'est pas inclus dans E_1.

2) On remarque que des fonctions continues nulles en dehors d'un intervalle compact sont nécessairement dans E. Pour tout entier naturel non nul n, on construit des suites de fonctions positives f_n de ce type, donnant une contradiction.

a) Soit f_n la fonction continue positive telle que

$$f_n(n-1/n) = f(n+1/n) = 0 \quad \text{et} \quad f_n(n) = 1\,,$$

qui soit affine sur les intervalles $[\,n-1/n,\, n\,]$ et $[\,n,\, n+1/n\,]$ et nulle ailleurs.

On a alors ($\|f_n\|_1$ est l'aire d'un triangle),

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n}\,,$$

ainsi que

$$\|\sqrt{f_n}\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|\sqrt{f_n}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Il en résulte que l'on ne peut avoir, pour tout f de E

$$\|f\|_\infty \leq K\,\|f\|_1 \quad \text{ou} \quad \|f\|_\infty \leq K\,\|f\|_2\,.$$

b) Soit f_n la fonction continue positive telle que

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \quad \text{sur} \quad [\,-n,\, n\,]\,,$$

qui soit affine sur les intervalles $[\,-n-1,\, -n\,]$ et $[\,n,\, n+1\,]$ et nulle ailleurs.

On a alors ($\|f_n\|_1$ est l'aire d'un trapèze),

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_1 = \frac{2n+1}{n}\,,$$

ainsi que

$$\|\sqrt{f_n}\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \|\sqrt{f_n}\|_2 = \sqrt{\frac{2n+1}{n}}\,.$$

Il en résulte que l'on ne peut avoir, pour tout f de E

$$\|f\|_1 \leq K\,\|f\|_\infty \quad \text{ou} \quad \|f\|_2 \leq K\,\|f\|_\infty\,.$$

c) Soit f_n la fonction continue positive telle que

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \quad \text{sur} \quad [\,1,\, n\,]\,,$$

qui soit affine sur les intervalles $[0,\,1]$ et $[n,\,n+1]$ et nulle ailleurs. Alors, puisque $f_n(x)$ est majoré par 1 sur $[0,\,1]$ et par $1/x$ sur $[n,\,\infty[$,

$$\|f_n\|_1 \geq \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n \quad \text{et} \quad \|f_n\|_2^2 \leq \int_0^1 f_n(x)^2 dx + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \leq 1 + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 2\,.$$

Il en résulte que l'on ne peut avoir, pour tout f de E

$$\|f\|_1 \leq K\,\|f\|_2\,.$$

d) Soit f_n la fonction continue positive telle que

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{sur} \quad [-1/n^2,\,1/n^2\,] \\ 1/\sqrt{x} & \text{sur} \quad [-1/n^2,\,-1\,] \cup [\,1,\,1/n^2\,] \end{cases}$$

qui soit affine sur les intervalles $[-2,\,-1]$ et $[1,\,2]$ et nulle ailleurs. Comme $f_n(x)$ est majoré par $1/\sqrt{|x|}$, on a

$$\|f_n\|_1 \leq 2\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_2^2 \geq 2\int_{1/n^2}^1 \frac{dx}{x} = 4\ln n\,.$$

Il en résulte que l'on ne peut avoir, pour tout f de E

$$\|f\|_2 \leq K\,\|f\|_1\,.$$

Exercice 33

1) Soit a un nombre réel strictement positif. Soit E l'espace vectoriel des applications de classe C^1 sur $[0,\,a]$ à valeurs réelles, nulles en 0. Montrer que l'on définit une norme sur E en posant

$$\|f\| = \|f'\|_\infty\,.$$

2) Montrer qu'il existe une constante K telle que, pour tout f de E

$$\|f\|_\infty \leq K\,\|f\|\,,$$

et trouver la plus petite constante K possible.

3) Montrer que les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

4) On pose

$$\|f\|' = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\,.$$

Montrer que les normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sont équivalentes et trouver les meilleurs constantes k et K telles que, pour tout f de E,

$$k\,\|f\| \leq \|f\|' \leq K\,\|f\|\,.$$

Solution

1) Si la norme $\|f\|$ est nulle, alors la fonction f' est nulle donc f est constante et, puisque $f(0)$ est nul, la fonction f est nulle. Les autres propriétés résultent du fait que $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{C}([0,\ a],\mathbb{R})$.

2) On écrit

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt\,.$$

Alors

$$|f(x)| \leq \int_0^x |f'(t)|\,dt \leq \|f'\|_\infty \int_0^x dt = x\,\|f\| \leq a\|f\|\,,$$

et finalement

$$\|f\|_\infty \leq a\|f\|\,.$$

On a égalité si l'on prend la fonction f qui à x associe x, car on a alors

$$\|f\|_\infty = a \quad \text{et} \quad \|f\| = \|f'\|_\infty = 1\,.$$

La plus petite constante est donc a.

3) Pour tout entier naturel non nul n soit f_n la fonction de E définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin\frac{nx\pi}{a}\,.$$

On a alors

$$f_n'(x) = \frac{\pi}{a}\cos\frac{nx\pi}{a}\,.$$

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|f_n'\|_\infty = \frac{\pi}{a}\,.$$

Il ne peut donc pas exister de constante K telle que pour tout f de E

$$\|f\| \leq K\,\|f\|_\infty\,,$$

et les normes ne sont pas équivalentes.

4) Puisque

$$\|f\|_\infty \leq a\,\|f\|\,,$$

on a donc

$$\|f\|' = \|f\|_\infty + \|f\| \leq (1+a)\,\|f\|\,.$$

La plus petite constante K vaut $1+a$ puisque l'on a égalité pour la fonction qui à x associe x.

Par contre, si f n'est pas la fonction nulle, on a toujours

$$\|f\| < \|f\|' .$$

Cependant en reprenant la fonction f_n définie dans 3),

$$\|f_n\| = \|f_n'\|_\infty = \frac{\pi}{a} \quad \text{et} \quad \|f_n\|' = \frac{\pi}{a} + \frac{1}{n} .$$

Donc, la limite du rapport $\|f_n\|/\|f_n\|'$ vaut 1. Alors la plus grande constante k telle que, pour tout f de E

$$k\,\|f\| \leq \|f\|'$$

vaut 1.

Exercice 34

Soit deux réels a, et b tels que $a < b$. On note E l'espace $\mathscr{C}([\,a,\,b\,]),\mathbb{R})$.

1) Montrer que, si p et q sont dans $[\,0,\,\infty\,]$ tels que $p < q$, on a, pour tout f de E,

$$\|f\|_p \leq (b-a)^{1/p-1/q}\,\|f\|_q .$$

2) Montrer que les normes ne sont pas équivalentes.

Solution

1) Soit p dans $[\,1,\,\infty\,[$. Tout d'abord

$$\|f\|_p^p = \int_a^b |f(t)|^p dt \leq (b-a)\,\|f\|_\infty^p ,$$

donc

$$\|f\|_p \leq (b-a)^{1/p}\,\|f\|_\infty ,$$

avec égalité si f est constante.

Soit maintenant p et q dans $[\,0,\,\infty\,[$ tels que $p < q$. Puisque $q/p > 1$, on obtient en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \leq \left(\int_a^b (|f(t)|^p)^{q/p} dt\right)^{p/q} \left(\int_a^b 1\,dt\right)^{1-p/q} = \left(\int_a^b |f(t)|^q dt\right)^{p/q} (b-a)^{1-p/q} .$$

On en déduit bien

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^q dt\right)^{1/q} (b-a)^{1/p-1/q} ,$$

avec égalité si f est constante.

2) Considérons la fonction positive f_n de E définie par

$$f_n(x) = (x-a)^n\,.$$

On a alors

$$\|f_n\|_\infty = (b-a)^n\,,$$

puis, si p est fini,

$$\|f_n\|_p^p = \int_a^b (x-a)^{np}\,dx = \frac{(b-a)^{np+1}}{np+1}\,,$$

et donc

$$\|f_n\|_p = \frac{(b-a)^{n+1/p}}{(np+1)^{1/p}}\,.$$

Alors

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_p} = \frac{(np+1)^{1/p}}{(b-a)^{1/p}}\,,$$

et, si $p<q$,

$$\frac{\|f_n\|_q}{\|f_n\|_p} = (b-a)^{1/q-1/p}\,\frac{(np+1)^{1/p}}{(nq+1)^{1/q}} \sim (b-a)^{1/q-1/p}\,\frac{p^{1/p}}{q^{1/q}}\,n^{1/p-1/q}\,.$$

Dans les deux cas la limite est infinie et les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 35 *Fonctions lipschitziennes*

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Une fonction à valeurs réelles définie sur I est dite lipschitzienne de rapport k, si, quels que soient x et y dans I, on a

$$|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|\,.$$

On note

$$k(f) = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\,.$$

1) Soit a dans I. Dans l'espace vectoriel $\mathscr{L}(I)$ des fonctions lipschitziennes sur I, montrer que l'on définit une norme en posant

$$\|f\|_a = |f(a)| + k(f)\,,$$

et que, si a et b sont dans I, les normes $\|.\|_a$ et $\|.\|_b$ sont équivalentes.

2) Montrer que $\mathscr{L}(I)$ est complet.

3) Montrer que le sous-espace des fonctions contractantes est une partie ouverte de $\mathscr{L}(I)$.

4) Montrer que si I est compact, l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur I est un sous-espace de $\mathscr{L}(I)$ et que, pour tout f de $\mathscr{C}^1(I)$, on a

$$\|f\|_a = |f(a)| + \|f'\|_\infty .$$

En déduire que $\mathscr{C}^1(I)$ est fermé.

Solution

Remarquons que l'on a en particulier, quels que soient x et y dans I,

$$|f(x) - f(y)| \leq k(f)\,|x-y| \leq \|f\|_a\,|x-y| .$$

1) Si $\|f\|_a$ est nul, alors d'une part $f(x)-f(y)$ est nul quels que soient x et y, donc f est constante et d'autre part $f(a)$ est nul donc f est la fonction nulle. Les autres propriétés de la norme résultent de celles de la borne supérieure.

On a en particulier

$$|f(b) - f(a)| \leq k(f)\,|a-b| ,$$

donc

$$|f(b)| \leq |f(a)| + |a-b|\,k(f) ,$$

puis

$$\|f\|_b \leq |f(a)| + (|a-b|+1)\,k(f) \leq (|a-b|+1)\|f\|_a .$$

Comme on peut inverser les rôles de a et b, les deux normes sont équivalentes.

2) On déduit également du calcul précédent que

$$|f(b)| \leq \max(1, |a-b|)\,\|f\|_a .$$

Soit alors (f_n) une suite de Cauchy. On a donc

$$\text{(L)} \qquad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \max(1, |x-a|)\,\|f_n - f_m\|_a ,$$

et il en résulte que la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy réelle et converge donc vers une limite notée $f(x)$.

La suite de Cauchy (f_n) étant bornée, soit K une constante qui la majore. Alors, pour tout entier n et tout couple (x,y) d'éléments de I,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \|f_n\|_a\,|x-y| \leq K\,|x-y| ,$$

et, par passage à la limite,

$$|f(x) - f(y)| \leq K\,|x-y| ,$$

donc f est lipschitzienne.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que, si $m > n > N$ on ait

$$\|f_n - f_m\|_a \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Alors

$$|f_n(a) - f_m(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

et, en faisant tendre m vers l'infini,

$$|f_n(a) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

D'autre part

$$|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_m(y))| \leq |x-y|\,\|f_n - f_m\|_a \leq |x-y|\,\frac{\varepsilon}{2}\,,$$

et de nouveau, en faisant tendre m vers l'infini,

$$|(f_n(x) - f(x)) - (f_n(y) - f(y))| \leq |x-y|\,\frac{\varepsilon}{2}\,,$$

donc

$$k(f_n - f) \leq \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

Alors

$$\|f_n - f\|_a = |f_n(a) - f(a)| + k(f_n - f) \leq \varepsilon\,,$$

ce qui prouve que la suite (f_n) converge vers f. L'espace $\mathscr{L}(I)$ est donc complet.

3) Une fonction contractante est une fonction lipschitzienne telle que

$$k(f) < 1\,.$$

L'application k étant continue de $\mathscr{L}(I)$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions lipschitziennes est l'image réciproque par k de l'intervalle ouvert $\,]-\infty, 1\,[$. C'est donc un ouvert de $\mathscr{L}(I)$.

4) Si f est de classe C^1 sur I, la fonction dérivée f' est bornée sur I. Il résulte du théorème des accroissements finis que

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{t\in I} |f'(t)|\,|x-y|\,,$$

et donc que f est lipschitzienne. On a dans ce cas

$$k(f) \leq \|f'\|_\infty\,.$$

Réciproquement, puisque I est compact, la fonction $|f'|$ atteint son maximum en un point x_0 de I, alors

$$\|f'\|_\infty = |f'(x_0)| = \lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq k(f)\,,$$

et il en résulte que
$$\|f'\|_\infty = k(f)\,.$$
Pour montrer que $\mathscr{C}^1(I)$ est fermé, il suffit de montrer qu'il est complet. Soit $(f_n - f_m)$ une suite de Cauchy de $\mathscr{C}^1(I)$. Alors $(f_n(a))$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ et converge vers un nombre λ, et (f_n') est une suite de Cauchy de $\mathscr{C}(I)$ pour la norme infinie, et converge pour cette norme vers une fonction g. Pour tout x de I posons
$$f(x) = \lambda + \int\limits_a^x g(t)\,dt\,,$$
On définit ainsi une fonction f de classe C^1 et
$$\|f_n - f\|_a = |f_n(a) - \lambda| + \|f_n' - g\|_\infty\,,$$
ce qui montre que la suite (f_n) converge vers f. Il en résulte que $\mathscr{C}^1(I)$ est complet, donc fermé dans l'espace $\mathscr{L}(I)$.

Exercice 36

1) Soit E l'espace des applications de classe C^1 sur $[\,0,\,1\,]$ à valeurs réelles, nulles en 0. Montrer que
$$\|f\| = \|f'\|_2$$
est une norme sur E.

2) Trouver la norme de la forme linéaire Φ définie par
$$\Phi(f) = \int\limits_0^1 f(t)\,dt\,.$$

3) Soit F le sous-espace de E formé des fonctions qui s'annulent aussi en 1. Trouver la norme de la restriction de Φ à F.

Solution

1) Si la norme $\|f\|$ est nulle, alors la fonction f' est nulle donc f est constante, et puisque $f(0)$ est nul, la fonction f est nulle. Les autres propriétés résultent du fait que $\|.\|_2$ est une norme sur $\mathscr{C}([\,0,\,1\,],\mathbb{R})$.

2) En intégrant par parties
$$\Phi(f) = \int\limits_0^1 f(t)\,dt = \Big[(t-1)f(t)\Big]_0^1 - \int\limits_0^1 (t-1)f'(t)\,dt = \int\limits_0^1 (1-t)f'(t)\,dt\,.$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Schwarz,

$$|\Phi(f)| \leq \left(\int_0^1 (1-t)^2 dt\right)^{1/2} \|f'\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\, \|f'\|_2\,.$$

L'égalité a lieu dans l'inégalité de Schwarz lorsque f' est un multiple de l'application $t \mapsto 1-t$. Alors en prenant

$$f(t) = 2t - t^2\,,$$

on obtient égalité. Donc

$$|||\Phi|||_E = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

3) On intègre par parties cette fois de la façon suivante

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt = \left[\left(t-\frac{1}{2}\right) f(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(t-\frac{1}{2}\right) f'(t)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}-t\right) f'(t)\,dt\,.$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Schwarz,

$$|\Phi(f)| \leq \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{2}-t\right)^2 dt\right)^{1/2} \|f'\|_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}\, \|f'\|_2\,.$$

L'égalité a lieu dans l'inégalité de Schwarz lorsque f' est un multiple de l'application $t \mapsto 1/2 - t$. Alors en prenant

$$f(t) = t - t^2\,,$$

on obtient égalité. Donc

$$|||\Phi|||_F = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,.$$

Exercice 37

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[\,a,\,b\,]$ à valeurs réelles. Soit x_0 un point de $[\,a,\,b\,]$ et L la forme linéaire définie par

$$L(f) = f(x_0)\,.$$

Etudier la continuité de L pour les normes ∞, 1 et 2.

Solution

Norme infinie

Dans ce cas
$$|L(f)| = |f(x_0)| \leq \|f\|_\infty\,,$$
et on a égalité pour les fonctions constantes. Donc L est continue et de norme 1 dans ce cas.

$\boxed{\text{Norme 1}}$

Supposons tout d'abord que x_0 se trouve dans l'intervalle ouvert $]\,a,\, b\,[$. Soit n un entier tel que
$$n \geq \max\left(\frac{1}{x_0 - a}, \frac{1}{b - x_0}\right).$$
Pour une telle valeur de n, soit f_n la fonction continue sur $[\,a,\, b\,]$ qui vaut 1 en x_0, s'annule sur $[\,a,\, x_0 - 1/n\,] \cup [\,x_0 + 1/n,\, b\,]$ et est affine sur les deux intervalles $[\,x_0 - 1/n,\, x_0\,]$ et $[\,x_0,\, x_0 + 1/n\,]$. Alors $|L(f_n)|$ vaut 1 et $\|f_n\|_1$ est l'aire d'un triangle de hauteur 1 et de base $2/n$ donc vaut $1/n$. Il en résulte que la suite (f_n) converge vers 0 pour la norme 1 alors que $(L(f_n))$ ne converge pas vers 0. La forme linéaire L n'est pas continue dans ce cas.

Si $x_0 = a$, soit n un entier tel que
$$n \geq \frac{1}{b - x_0}.$$
On prend cette fois la fonction f_n qui vaut 1 en x_0, s'annule sur $[\,x_0 + 1/n,\, b\,]$ et est affine sur l'intervalle $[\,x_0,\, x_0 + 1/n\,]$. Alors $|L(f_n)|$ vaut 1 et $\|f_n\|_1$ est l'aire d'un triangle de hauteur 1 et de base $1/n$ donc vaut $1/(2n)$. La conclusion subsiste.

Démonstration analogue lorsque $x_0 = b$.

$\boxed{\text{Norme 2}}$

Pour la norme 2, on utilise la suite $(\sqrt{f_n})$, et l'on a encore
$$L(\sqrt{f_n}) = 1 \quad \text{et} \quad \|\sqrt{f_n}\|_2 = \sqrt{\|f_n\|_1}\,,$$
avec la même conclusion.

Exercice 38

Soit φ une fonction non nulle appartenant à l'espace vectoriel $\mathscr{C}([\,0,\, 1\,], \mathbb{C})$. On munit cet espace de la norme infinie et l'on définit la forme linéaire T_φ en posant
$$T_\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx\,.$$

Montrer que T_φ est continue et trouver sa norme.

Solution

Tout d'abord

$$|T_\varphi(f)| \leq \int_0^1 |f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |\varphi(x)|\,dx\,.$$

Donc T_φ est continue et

$$|||T_\varphi||| \leq \int_0^1 |\varphi(x)|\,dx\,.$$

Pour tout entier naturel non nul n, posons

$$f_n = \frac{\overline{\varphi}}{|\varphi| + 1/n}\,.$$

On a donc

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[\,0,1\,]} \frac{|\varphi(x)|}{|\varphi(x)| + 1/n} \leq 1\,.$$

Alors

$$|||T_\varphi||| \geq \frac{|T_\varphi(f_n)|}{\|f_n\|_\infty} \geq \int_0^1 \frac{|\varphi(x)|^2}{|\varphi(x)| + 1/n}\,dx\,,$$

et, par passage à la limite,

$$|||T_\varphi||| \geq \int_0^1 |\varphi(x)|\,dx\,,$$

d'où l'égalité

$$|||T_\varphi||| = \int_0^1 |\varphi(x)|\,dx\,.$$

Exercice 39

Soit D l'opérateur de dérivation de l'espace $E = \mathscr{C}^1([\,0,\,1\,],\mathbb{R})$ dans $F = \mathscr{C}([\,0,\,1\,],\mathbb{R})$. On munit F de la norme infinie.

1) Montrer que si E est muni de la norme $\|.\|$ définie par

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

l'application D est continue et trouver sa norme.

2) Montrer que D n'est pas continue si E est muni de la norme infinie.

Solution

1) On a de manière évidente

$$\|D(f)\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\| \, .$$

Donc D est continue et

$$|||D||| \leq 1 \, .$$

Soit la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \, .$$

On a

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n\pi} \quad \text{et} \quad \|f_n'\|_\infty = 1 \, .$$

Donc

$$\|D(f_n)\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|f_n\| = 1 + \frac{1}{n\pi} \, .$$

Alors

$$|||D||| \geq \frac{1}{1 + 1/(n\pi)} \, ,$$

et par passage à la limite

$$|||D||| \geq 1 \, .$$

Finalement on obtient

$$|||D||| = 1 \, .$$

2) Avec la même suite de fonctions (f_n) on ne peut pas avoir pour tout n

$$1 = \|D(f_n)\|_\infty \leq K \, \|f_n\|_\infty = \frac{K}{n\pi} \, .$$

Donc D n'est pas continue dans ce cas.

Exercice 40

On considère les espaces $E = \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Soit T l'application de E dans E où $T(f)$ est la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$T(f)(x) = xf(x) \, .$$

Enfin, soit $\|.\|$ la norme définie sur F par

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \, .$$

Etudier la continuité et la norme de T considérée comme application

1) de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $(E, \|.\|_\infty)$, 2) de $(F, \|.\|)$ dans $(F, \|.\|)$,
3) de $(F, \|.\|)$ dans $(F, \|.\|_\infty)$, 4) de $(F, \|.\|_\infty)$ dans $(F, \|.\|)$.

Solution

1) Soit f dans E. Pour tout x de $[\,0,\,1\,]$, on a

$$|T(f)(x)| = |xf(x) \ \ \leq |f(x)|\,,$$

donc

$$\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty\,,$$

et on a égalité pour une fonction constante. Alors T est continue et

$$|||T||| = 1\,.$$

2) Soit f dans F. Alors

$$T(f)'(x) = f(x) + xf'(x)\,,$$

donc, pour tout x de $[\,0,\,1\,]$,

$$|T(f)'(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)|$$

et

$$\|T(f)'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\,,$$

puis

$$\|T(f)\| = \|T(f)\|_\infty + \|T(f)'\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq 2\,\|f\|\,,$$

avec égalité pour une fonction constante. Alors T est continue et

$$|||T||| = 2\,.$$

3) On a

$$\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|\,,$$

avec égalité pour une fonction constante. Alors T est continue et

$$|||T||| = 1\,.$$

4) Soit la fonction qui à x associe x^n oú n est entier. On a

$$T(f_n)(x) = x^{n+1} \quad \text{et} \quad T(f_n)'(x) = (n+1)x^n\,.$$

Alors

$$\|T(f_n)\| = n+2 \quad \text{et} \quad \|f_n\|_\infty = 1\,,$$

et il ne peut pas exister de constante K telle que, pour tout f de F,

$$\|T(f)\| \leq K\|f\|_\infty\,.$$

Donc T n'est pas continue.

Exercice 41

Soit (X, d) un espace métrique compact, $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Si x appartient à X et f à $\mathscr{C}(X, E)$, on pose

$$\delta_x(f) = f(x)\,.$$

1) Montrer que δ_x est une application linéaire continue de norme 1 de $(\mathscr{C}(X, E), \|.\|_\infty)$ dans $(E, \|.\|)$.

2) Montrer que, si X possède un point d'accumulation, l'application qui à x associe δ_x n'est pas continue de (X, d) dans $(L(\mathscr{C}(X, E), E), |||.|||)$.

Solution

1) On a

$$\|\delta_x(f)\| = \|f(x)\| \leq \|f\|_\infty\,,$$

avec égalité si f est constante, donc δ_x est continue et de norme 1.

2) Soit x et y deux points distincts de X et e un vecteur de E de module 1. Evaluons $\|\delta_x(f) - \delta_y(f)\|$ lorsque f est définie par

$$f(z) = \frac{d(z, x) - d(z, y)}{d(z, x) + d(z, y)}\, e\,.$$

On a

$$\delta_x(f) = f(x) = -e \quad \text{et} \quad \delta_y(f) = f(y) = e\,,$$

et puisque

$$\|f(z)\| = \left|\frac{d(z, x) - d(z, y)}{d(z, x) + d(z, y)}\right| \|e\| \leq 1\,,$$

on obtient

$$\|f\|_\infty = 1\,.$$

On a également

$$\|\delta_x(f) - \delta_y(f)\| = \|e + e\| = 2\,.$$

Par ailleurs, en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|||\delta_x - \delta_y||| \leq |||\delta_x||| + |||\delta_y||| = 2\,,$$

et l'on a, pour toute fonction g,

$$\|\delta_x(g) - \delta_y(g)\| \leq 2\,\|g\|_\infty\,.$$

Alors puisque l'on a égalité dans le cas de la fonction f, on obtient finalement

$$|||\delta_x - \delta_y||| = 2\,.$$

Si X possède un point d'accumulation x, alors lorsque y tend vers x, la différence $\delta_x - \delta_y$ ne tend pas vers 0 et l'application qui à x associe δ_x n'est pas continue de (X, d) dans $(L(\mathscr{C}(X, E), E), |||.|||)$.

Exercice 42

Soit a un nombre réel strictement positif. Dans l'espace $\mathscr{C}([0, a], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie, on considère l'endomorphisme Φ où $\Phi(f)$ est défini par

$$\Phi(f)(x) = f(x) - \int_0^x f(t)\, dt\,.$$

Montrer que Φ est continue et trouver sa norme.

Solution

On a

$$|\Phi(f)(x)| \leq |f(x)| + \int_0^x |f(t)|\, dt \leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty \int_0^x dx \leq (1+a)\|f\|_\infty\,,$$

donc

$$\|\Phi(f)\|_\infty \leq (1+a)\|f\|_\infty\,,$$

et l'application Φ est continue. De plus

$$|||\Phi||| \leq 1 + a\,.$$

Pour tout nombre s tel que $a/2 < s < a$, soit f_s la fonction continue définie par

$$f_s(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2s - a \\ \dfrac{x-s}{a-s} & \text{si} \quad 2s - a \leq x \leq a \end{cases}\,.$$

Alors, l'intégrale de f_s sur l'intervalle $[2s - a, a]$ est nulle et

$$\int_0^a f_s(t)\, dt = \int_0^{2s-a} f_s(t)\, dt = a - 2s\,,$$

puis

$$\|\Phi(f_s)\|_\infty \geq |\Phi(f_s)(a)| = 1 + 2s - a\,.$$

Alors, puisque $\|f_s\|_\infty$ vaut 1, on a

$$|||\Phi||| \geq \|\Phi(f_s)\|_\infty\,,$$

et donc

$$|||\Phi||| \geq \lim_{s \to a}(1 + 2s - a) = 1 + a\,.$$

Finalement

$$|||\Phi||| = 1 + a\,.$$

Exercice 43

1) Soit la fonctions f_n définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2(\ln x)^n & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases} .$$

Calculer

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\, dt\, .$$

2) Dans $\mathscr{C}^1(\,[0,\,1\,]\,, \mathbb{R})$ muni de l'une des normes 1 ou infinie, montrer que la forme linéaire Φ définie par

$$\Phi(f) = \int_0^1 f'(t^2)\, dt\, .$$

n'est pas continue.

Solution

1) Remarquons que f_n est continue sur $[\,0,\,1\,]$.

En intégrant par parties, on obtient, si $n \geq 1$

$$I_n = \left[\frac{t^3}{3}\,(\ln t)^n\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{3}\, n(\ln t)^{n-1} dt = -\frac{n}{3}\, I_{n-1}\, .$$

Comme de plus $I_0 = 1/3$, on obtient par récurrence,

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}\, .$$

2) Tout d'abord, on a

$$f_n'(x) = 2x(\ln x)^n + nx(\ln x)^{n-1} = 2x(\ln x)^{n-1}(\ln x + n/2)\, ,$$

donc

$$\Phi(f_n) = \int_0^1 2t^2(2\ln t)^n\, dt + \int_0^1 nt^2(2\ln t)^{n-1}\, dt = 2^{n+1} I_n + n2^{n-1} I_{n-1}\, ,$$

c'est-à-dire

$$\Phi(f_n) = 2^{n+1}(-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}} + n2^{n-1}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{3^n} = (-1)^n 2^{n-1}\frac{n!}{3^{n+1}}\, .$$

Norme infinie

La fonction f_n' s'annule en $e^{-n/2}$ et, puisque f_n est négative sur $[0, 1]$, elle possède un minimum en ce point. De plus, $f_n(0)$ et $f_n(1)$ sont nuls, et on aura

$$\|f_n\|_\infty = |f_n(e^{-n/2})| = \left(\frac{n}{2e}\right)^n,$$

donc, d'aprés la formule de Stirling,

$$\|f_n\|_\infty \sim \frac{n!}{2^n\sqrt{2n\pi}}.$$

Alors

$$\frac{|\Phi(f_n)|}{\|f_n\|_\infty} \sim \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^n\sqrt{2n\pi}.$$

Comme cette expression tend vers l'infini, il en résulte que Φ n'est pas continue.

Norme 1

Cette fois

$$\|f_n\|_1 = |I_n| = \frac{n!}{3^{n+1}},$$

donc

$$\frac{|\Phi(f_n)|}{\|f_n\|_1} = 2^{n-1},$$

et là aussi l'expression tend vers l'infini, il en résulte que Φ n'est pas continue.

Exercice 44

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Si g appartient à $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$, on définit une application linéaire T_g de $\mathscr{C}(I,E)$, dans lui-même en posant

$$T_g(f) = g\cdot f.$$

Montrer que T_g est continue et trouver sa norme lorsque $\mathscr{C}(I,E)$ est muni de la norme infinie. Qu'en déduit-on pour l'application linéaire de $(\mathscr{C}(I,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ dans $L(\mathscr{C}(I,E), |||.|||)$ qui à g associe T_g ?

Solution

Pour tout x de I et toute fonction f de $\mathscr{C}(I,E)$, on a

$$\|T_g(f)(x)\| = \|g(x)f(x)\| = |g(x)|\,\|f(x)\|,$$

donc

$$\|T_g(f)\|_\infty \le \|g\|_\infty\|f\|_\infty.$$

Il en résulte que l'application T_g est continue.

Si maintenant f est la fonction constante valant e où e est un vecteur de norme 1 de E, alors

$$T_g(f) = g\,e\,,$$

et

$$\|T_g(f)\|_\infty = \|g\|_\infty\,.$$

Il en résulte que

$$|||T_g||| = \|g\|_\infty\,.$$

On constate que l'application linéaire de $(\mathscr{C}(I,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ dans $L(\mathscr{C}(I,E), |||.|||)$ qui à g associe T_g est une isométrie.

Exercice 45

Soit deux réels a et b tels que $a < b$. On note E l'espace $\mathscr{C}([\,a,\,b\,]), \mathbb{R})$.

1) Montrer que, pour tout p dans $[\,1,\,\infty\,]$, il existe des constantes k et K telles que, quel que soit f dans $\mathscr{C}([\,a,\,b\,]$,

$$k\,\|f\|_1 \leq \|f\|_p \leq K\,\|f\|_\infty\,.$$

2) On considère l'application linéaire T de $(E, \|.\|_p)$ dans $(E, \|.\|_q)$ qui à f associe sa primitive nulle en a. Etudier la continuité de T. Calculer sa norme $|||T|||_{p,q}$ lorsque p ou q est infini, puis lorsque $p = 1$.

Solution

1) Soit p dans $]\,1,\,\infty\,[$. Tout d'abord

$$\|f\|_p^p = \int_a^b |f(t)|^p dt \leq (b-a)\,\|f\|_\infty^p\,,$$

donc

$$\|f\|_p \leq (b-a)^{1/p}\,\|f\|_\infty\,,$$

avec égalité si f est constante.

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\|f\|_1 = \int_a^b 1 \times |f(t)|\,dt \leq \left(\int_a^b dt\right)^{1-1/p} \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} = (b-a)^{1-1/p}\,\|f\|_p\,,$$

avec égalité si f est constante. Donc

$$(b-a)^{1/p-1}\,\|f\|_1 \leq \|f\|_p \leq (b-a)^{1/p}\,\|f\|_\infty\,,$$

ce qui reste vrai si $p=1$ ou $p=\infty$.

2) On a donc

$$T(f)(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Alors

$$|T(f)(x)| \leq \int_a^x |f(t)|\,dt \leq \|f\|_1\,,$$

puis

$$\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_1\,,$$

avec égalité si f est constante, donc

$$|||T|||_{1,\infty} = 1\,.$$

Alors, d'après 1), l'application T est continue quels que soient p et q et, puisque

$$\|T(f)\|_q \leq (b-a)^{1/q}\,\|T(f)\|_\infty \leq (b-a)^{1/q}\,\|f\|_1 \leq (b-a)^{1-1/p+1/q}\,\|f\|_p\,,$$

on en déduit que

$$|||T|||_{p,q} \leq (b-a)^{1-1/p+1/q}\,.$$

a) Si q est infini et p dans $[\,1,\,\infty\,]$, on a en particulier

$$\|T(f)\|_\infty \leq (b-a)^{1-1/p}\,\|f\|_p\,,$$

avec égalité si f est constante. Donc

$$|||T|||_{p,\infty} = (b-a)^{1-1/p}\,.$$

b) Si p est infini et q dans $[\,1,\,\infty\,[$, on a cette fois

$$|T(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \int_a^x dt = (x-a)\|f\|_\infty\,,$$

puis

$$\int_a^b |T(f)(t)|^q\,dt \leq \|f\|_\infty^q \int_a^b (t-a)^q dt = \|f\|_\infty^q\,\frac{(b-a)^{q+1}}{q+1}\,.$$

Alors

$$\|T(f)\|_q \leq \frac{(b-a)^{1+1/q}}{(q+1)^{1/q}}\,\|f\|_\infty\,,$$

avec égalité si f est constante, donc

$$|||T|||_{\infty,q} = \frac{(b-a)^{1+1/q}}{(q+1)^{1/q}}\,.$$

Ce qui reste vrai si q est infini.

c) Si $p = 1$, on sait déjà que

$$|||T|||_{1,q} \leq (b-a)^{1/q}\,.$$

Soit un entier n tel que $n \geq 1/(b-a)$. Soit la fonction f_n de E, qui vaut 1 en a, qui est nulle sur $[\,a+1/n,\, b\,]$ et affine sur $[\,a,\, a+1/n\,]$, c'est-à-dire , sur cet intervalle,

$$f_n(x) = 1 - n(x-a)\,.$$

Sur l'intervalle $[\,a,\, a+1/n\,]$, on a

$$T(f_n)(x) = \int_a^x (1-n(t-a))\,dt = (x-a) - \frac{n}{2}\,(x-a)^2 = (x-a)\left(1 - \frac{n}{2}\,(x-a)\right)\,.$$

En particulier

$$T(f_n)(a+1/n) = \frac{1}{2n}\,,$$

et $T(f_n)$ est constante sur $[\,a+1/n,\, b\,]$, ce qui donne, puisque f_n est positive,

$$\|f_n\|_1 = T(f_n)(b) = \frac{1}{2n}\,.$$

Si q est fini, calculons maintenant

$$\|T(f_n)\|_q^q = \int_a^{a+1/n} (x-a)^q \left(1 - \frac{n}{2}\,(x-a)\right)^q dx + \int_{a+1/n}^{b} \left(\frac{1}{2n}\right)^q dx\,.$$

En faisant, dans la première intégrale, le changement de variable $n(x-a) = t$, on trouve

$$\begin{aligned}
\|T(f_n)\|_q^q &= \int_0^1 \left(\frac{t}{n}\right)^q \left(1 - \frac{t}{2}\right)^q \frac{dt}{n} + \left(b - a - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2n}\right)^q \\
&= \left(\frac{1}{2n}\right)^q \left(\frac{2^q}{n}\int_0^1 \left(t^q\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)^q dt + \left(b-a-\frac{1}{n}\right)\right)\,,
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\|T(f_n)\|q = \frac{1}{2n}\left(\frac{2^q}{n}\int_0^1 \left(t^q\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)^q dt + \left(b-a-\frac{1}{n}\right)\right)^{1/q}\,,$$

et

$$\frac{\|T(f_n)\|_q}{\|f_n\|_1} = \left(\frac{2^q}{n}\int\limits_0^1 \left(t^q\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)^q dt + \left(b-a-\frac{1}{n}\right)\right)^{1/q} .$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|T(f_n)\|_q}{\|f_n\|_1} = (b-a)^{1/q} ,$$

ce qui montre que

$$|||T|||_{1,q} \geq (b-a)^{1/q} ,$$

d'où l'égalité

$$|||T|||_{1,q} = (b-a)^{1/q} ,$$

qui est encore vraie si $q=\infty$.

Exercice 46

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[\,a,\,b\,]$ à valeurs réelles. Pour tout f de E on pose

$$\Phi(f) = \inf_{x\in[\,a,\,b\,]} f(x) .$$

Etudier la continuité de Φ lorsque E est muni de la norme infinie, puis de la norme 1.

Solution

Si f et g sont dans E et x dans $[\,a,\,b\,]$, on a

$$f(x) = f(x) - g(x) + g(x) \leq |f(x)-g(x)| + g(x) ,$$

donc

$$\inf_{x\in[\,a,\,b\,]} f(x) \leq \sup_{x\in[\,a,\,b\,]} |f(x)-g(x)| + g(x) .$$

Alors

$$\Phi(f) - \|f-g\|_\infty \leq g(x) .$$

Donc $\Phi(f) - \|f-g\|_\infty$ est un minorant de g et l'on en déduit que

$$\Phi(f) - \|f-g\|_\infty \leq \Phi(g)$$

c'est-à-dire

$$\Phi(f) - \Phi(g) \leq \|f-g\|_\infty .$$

En permutant les rôles de f et g, on a aussi

$$\Phi(g) - \Phi(f) \leq \|f-g\|_\infty ,$$

et finalement
$$|\Phi(f) - \Phi(g)| \leq \|f - g\|_\infty \,,$$
ce qui montre la continuité, et même l'uniforme continuité, de Φ pour la norme infinie.

Soit n un entier tel que
$$n \geq \frac{1}{b-a} \,.$$
Prenons la fonction f_n qui vaut -1 en a, s'annule sur $[\,a + 1/n,\, b\,]$ et est affine sur l'intervalle $[\,a,\, a+1/n\,]$. Alors $\Phi(f_n)$ vaut -1 et $\|f_n\|_1$ est l'aire d'un triangle de hauteur 1 et de base $1/n$ donc vaut $1/(2n)$. Il en résulte que la suite (f_n) converge vers 0 pour la norme 1 alors que $(\Phi(f_n))$ ne converge pas vers 0. La fonction Φ n'est pas continue pour la norme 1.

Exercice 47

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[\,a,\, b\,]$ à valeurs réelles muni de la norme infinie.

1) Montrer que les applications $f \mapsto e^f$ et $f \mapsto f^2$ sont continues de E dans E.

2) Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble des fonctions de E qui ne s'annulent pas. Montrer que $\mathscr{U}$ est ouvert et que l'application $f \mapsto 1/f$ de $\mathscr{U}$ dans E est continue sur $\mathscr{U}$.

3) Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions positives de E. Montrer que $\mathscr{F}$ est fermé et que l'application $f \mapsto \sqrt{f}$ est continue sur $\mathscr{F}$.

Solution

1) Soit f fixé dans E et g dans la boule fermée de centre f et de rayon 1.

Fonction exponentielle

Il existe, d'après le théorème des accroissements finis, un nombre $\xi(x)$ compris entre $f(x)$ et $g(x)$ tel que
$$e^{f(x)} - e^{g(x)} = (f(x) - g(x))e^{\xi(x)} \,.$$
Donc
$$|\xi(x) - f(x)| \leq |f(x) - g(x)| \leq \|f - g\|_\infty \leq 1 \,,$$
et
$$|\xi(x)| \leq |f(x)| + \|f - g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + 1 \,.$$
On a alors
$$e^{\xi(x)} \leq e^{|\xi(x)|} \leq e^{1+\|f\|_\infty} \,,$$
et
$$\|e^f - e^g\|_\infty \leq e^{1+\|f\|_\infty} \|f - g\|_\infty \,,$$

ce qui montre la continuité en f de l'application qui à g associe e^g.

$\boxed{\text{Fonction carré}}$

On a cette fois

$$|f(x)^2 - g(x)^2| \leq |f(x) - g(x)|\,(|f(x)| + |g(x)|)\,.$$

et

$$|g(x)| \leq |f(x)| + |f(x) - g(x)| \leq \|f\|_\infty + 1\,,$$

d'où

$$|f(x)^2 - g(x)^2| \leq (2\|f\|_\infty + 1)\|f - g\|_\infty\,,$$

et finalement

$$\|f^2 - g^2\|_\infty \leq (2\|f\|_\infty + 1)\|f - g\|_\infty\,,$$

ce qui montre la continuité en f de l'application qui à g associe g^2.

2) La fonction f ne s'annule pas. Elle est donc de signe constant. Comme $|f|$ atteint son minimum sur $[\,a,\,b\,]$, il existe x_0 tel que

$$\inf_{a\leq x\leq b} |f(x)| = |f(x_0)| > 0\,.$$

Notons α ce minimum.

Alors si g est telle que

$$\|g - f\|_\infty < \frac{\alpha}{2}\,,$$

on aura

$$|g(x)| \geq |f(x)| - |f(x) - g(x)| \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} > 0\,,$$

et g appartient à $\mathscr{U}$ qui est donc un ouvert de E.

Alors

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}\right| = \frac{|f(x) - g(x)|}{|f(x)|\,|g(x)|} \leq \frac{\|f - g\|_\infty}{\alpha^2/2}\,.$$

Finalement

$$\|1/f - 1/g\|_\infty \leq \frac{2}{\alpha^2}\,\|f - g\|_\infty\,,$$

ce qui montre la continuité en f de l'application qui à g associe $1/g$.

3) Pour tout x l'application δ_x qui à f associe $f(x)$ est continue. Alors $\delta_x^{-1}(\,[\,0,\,\infty\,[\,)$ est une partie fermée de E et $\mathscr{F}$ est l'intersection de ces parties fermées quand x décrit $[\,a,\,b\,]$, donc est fermé.

Montrons tout d'abord l'inégalité suivante, valable pour deux nombres réels tels que $a \geq b \geq 0$:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a - b}\,.$$

En partant de

$$\sqrt{b} \leq \sqrt{a}$$

et en multipliant par $2\sqrt{b}$, on trouve

$$2b \leq 2\sqrt{ab}\,,$$

puis

$$-2\sqrt{ab} \leq -2b\,,$$

et enfin

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \leq a - b\,,$$

d'où le résultat. Il en résulte que quels que soient a et b positifs

$$|\sqrt{a}-\sqrt{b}\,| \leq \sqrt{|a-b|}\,.$$

Alors, si f et g sont dans $\mathscr{F}$,

$$\|\sqrt{f}-\sqrt{g}\,\|_\infty \leq \sqrt{\|f-g\|_\infty}\,,$$

ce qui montre la continuité de la racine carrée.

Exercice 48

Soit la fonction continue f_n définie sur $[-1,\,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq -1/n \\ nx & \text{si} \quad -1/n \leq x \leq 1/n \\ 1 & \text{si} \quad 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}\,.$$

Montrer que la suite (f_n) est une suite de Cauchy dans l'espace $\mathscr{C}([-1,\,1])$ muni de la norme $\|.\|_2$ mais n'a pas de limite. Qu'en déduit-on pour cet espace ? La suite (f_n) est-elle une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_\infty$?

Solution

Remarquons que les fonctions f_n sont impaires. D'autre part, en posant

$$N(f) = \left(\int_0^1 (f(x))^2\,dx\right)^{1/2}$$

on obtient une norme sur $\mathscr{C}([0,\,1])$. Donc, si $n > m$, on a

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = 2\int_0^1 (f_n(x)-f_m(x))^2\,dx = 2N(f_n-f_m)^2\,.$$

Alors, en utilisant l'inégalité triangulaire pour N, on obtient

$$\|f_n - f_m\|_2 = \sqrt{2}\,N(f_n-f_m) \leq \sqrt{2}\,(N(f_n-1)+N(1-f_m))\,.$$

Or
$$\int_0^1 (f_n-1)^2\,dx = \int_0^{1/n} (nx-1)^2\,dx = \Big[\frac{(nx-1)^3}{3n}\Big]_0^{1/n} = \frac{1}{3n}\,,$$
d'où
$$\|f_n - f_m\|_2 \le \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}} + \frac{1}{\sqrt{3m}}\right) \le \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3m}}\,.$$
Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, si $n > m > N > 8/(3\varepsilon^2)$, on a
$$\|f_n - f_m\|_2 < \varepsilon$$
et la suite (f_n) est de Cauchy.

Supposons que la suite (f_n) converge vers une fonction f. Soit $\alpha > 0$. Alors si $n > 1/\alpha$, on a
$$\int_\alpha^1 (f_n - f)^2 + \int_{-1}^{-\alpha} (f_n - f)^2 \le \|f_n - f\|_2^2\,,$$
donc
$$\int_\alpha^1 (1 - f)^2 + \int_{-1}^{-\alpha} (1 + f)^2 \le \|f_n - f\|_2^2\,,$$
et quand n tend vers l'infini, on en déduit que
$$\int_\alpha^1 (1 - f)^2 + \int_{-1}^{-\alpha} (1 + f)^2 = 0\,,$$
c'est-à-dire que f vaut 1 sur $[\,\alpha,\,1\,]$ et -1 sur $[\,-1,\,-\alpha\,]$. Comme ceci a lieu pour tout nombre $\alpha > 0$, on en déduit que f vaut 1 sur $]\,0,\,1\,]$ et -1 sur $[\,-1,\,0\,[$. La fonction f ne peut pas être continue en 0. Donc la suite (f_n) n'a pas de limite. Il en résulte que l'espace $\mathscr{C}(\,[\,-1,\,1\,]\,)$ n'est pas complet pour la norme $\|.\|_2$.

Si $n > m$, on a
$$\|f_n - f_m\|_\infty \ge |f_n(1/n) - f_m(1/n)| = |1 - m/n| = \frac{n-m}{n}\,.$$
Alors, si $n = 2m$
$$\|f_{2m} - f_m\|_\infty \ge \frac{1}{2}\,,$$
et l'on ne peut pas rendre la norme plus petite qu'un nombre $\varepsilon < 1/2$. La suite (f_n) n'est pas une suite de Cauchy pour la norme infinie.

On peut raisonner d'une autre manière. Comme l'espace $\mathscr{C}(\,[\,-1,\,1\,]\,)$ est complet pour la norme infinie, si la suite (f_n) était de Cauchy pour la norme infinie elle convergerait vers une fonction f. Mais, puisque, pour toute fonction f de $\mathscr{C}(\,[\,-1,\,1\,]\,)$
$$\|f\|_2 \le \sqrt{2}\,\|f\|_\infty\,,$$

la suite (f_n) serait de Cauchy et convergerait vers f pour la norme $\|.\|_2$ ce qui n'est pas le cas.

Exercice 49

Soit α un nombre réel. Dans l'espace $\mathscr{C}([0,\, 1], \mathbb{R})$, soit la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^{1-\alpha}x + n & \text{si} \quad 0 \leq x \leq n^\alpha \\ 0 & \text{si} \quad n^\alpha \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

1) Déterminer α pour que la suite (f_n) converge vers 0 pour $\|.\|_1$ et pas pour $\|.\|_2$.

2) Déterminer α pour que la suite (f_n) converge vers 0 pour $\|.\|_2$ et pas pour $\|.\|_\infty$.

Solution

1) On a

$$\|f_n\|_1 = \frac{n^{\alpha+1}}{2} ,$$

(c'est l'aire d'un triangle de base n^α et de hauteur n). Cette expression tend vers 0 si et seulement si $\alpha < -1$.

Par ailleurs

$$\|f\|_2^2 = \int_0^{n^\alpha} n^{2(1-\alpha)}(x - n^\alpha)^2\, dx = n^{2(1-\alpha)} \left[\frac{(x-n^\alpha)^3}{3}\right]_0^{n^\alpha} = \frac{n^{\alpha+2}}{3} ,$$

et cette expression ne tend pas vers 0 si et seulement si $\alpha \geq -2$.

Donc si $-2 \leq \alpha < -1$, la suite (f_n) converge vers 0 en norme 1 mais pas en norme 2.

2) La suite f_n converge vers 0 pour la norme 2 si et seulement si $\alpha < -2$. D'autre part

$$\|f_n\|_\infty = f_n(0) = n$$

et la suite (f_n) ne converge jamais vers 0. Donc, si $\alpha < -2$, la suite (f_n) converge vers 0 pour la norme 2 et pas pour la norme infinie.

Exercice 50

Soit E un espace vectoriel normé complet, f une application de E dans E contractante de rapport k. Pour tout a de E on pose

$$g_a = f + a\,.$$

1) Montrer que l'équation $g_a(x) = x$ possède une unique solution notée $\Phi(a)$. et que Φ est une application uniformément continue de E dans E.

2) Montrer que l'application $\mathrm{Id}_E - f$ est bijective et que

$$\Phi = (\mathrm{Id}_E - f)^{-1}\,.$$

3) On suppose que f est linéaire continue de norme $k < 1$. Montrer que ce qui précède s'applique, puis, en utilisant la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, la relation

$$u_n = g_a(u_{n-1})\,,$$

trouver une expression de u_n, puis de $\Phi(a)$ en fonction de f.

4) Dans le cas où E est l'espace $\mathscr{C}([0,\,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie, soit f l'endomorphisme défini par

$$f(u)(x) = k\int_0^x u(t)\,dt\,.$$

où $|k| < 1$. Déterminer $\Phi(a)$ lorsque a est de classe C^1, puis dans le cas général.

Solution

1) On a

$$\|g_a(x) - g_a(y)\| = \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|\,.$$

Donc g_a est contractante et le théorème du point fixe peut s'appliquer : il existe $\Phi(a)$ unique dans E tel que

$$g_a(\Phi(a)) = \Phi(a)\,.$$

Alors

$$\|\Phi(a) - \Phi(b)\| = \|g_a(\Phi(a)) - g_b(\Phi(b)\| \leq \|f(\Phi(a)) + a - (f(\Phi(b)) + b)\|\,,$$

puis

$$\|\Phi(a) - \Phi(b)\| \leq \|f(\Phi(a)) - f(\Phi(b))\| + \|a - b\| \leq k\,\|\Phi(a) - \Phi(b)\| + \|a - b\|\,.$$

Alors

$$\|\Phi(a) - \Phi(b)\| \leq \frac{1}{1-k}\,\|a - b\|\,.$$

On en déduit que Φ est lipschitzienne et donc uniformément continue sur E.

2) On a pour tout a de E,

$$\Phi(a) = f(\Phi(a)) + a\,,$$

donc
$$(\mathrm{Id}_E - f) \circ \Phi(a) = a\,.$$
Comme l'équation
$$x - f(x) = a$$
possède une solution et une seule qui est $\Phi(a)$ il en résulte que l'application $\mathrm{Id}_E - f$ est bijective. Alors
$$\Phi = (\mathrm{Id}_E - f)^{-1}\,.$$

3) Puisque f est linéaire continue de norme k, on a pour tout x de E,
$$\|f(x)\| \leq k\|x\|\,,$$
et l'on en déduit que, quels que soient x et y dans E,
$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| \leq k\,\|x-y\|\,.$$
Donc f est contractant de rapport k. Alors, d'après le théorème du point fixe, la suite (u_n) converge vers $\Phi(a)$. En partant de $u_0 = 0$, alors $u_1 = f(0) + a = a$, puis $u_2 = f(a) + a$ et une récurrence immédiate donne
$$u_n = \sum_{p=0}^{n-1} f^p(a)\,,$$
et par passage à la limite
$$\Phi(a) = \sum_{p=0}^{\infty} f^p(a)\,.$$

4) L'application f est linéaire et l'on a
$$|f(u)(x)| \leq |k| \int_0^1 |u(t)|\,dt \leq |k|\,\|u\|_\infty\,,$$
donc
$$\|f(u)\|_\infty \leq |k|\,\|u\|_\infty\,.$$
Ce qui précède s'applique. L'équation s'écrit
$$f(u) = u - a\,,$$
c'est-à-dire, pour tout x de $[\,0,\,1\,]$,
$$k\int_0^x u(t)\,dt = u(x) - a(x)\,.$$
Si a est dérivable cela équivaut à
$$ku = u' - a' \quad \text{et} \quad u(0) = a(0)\,.$$

Cette équation se résout. L'équation homogène a pour solution

$$u(x) = Ae^{kx}\,.$$

En faisant varier la constante A, on cherche une solution telle que

$$u(x) = A(x)e^{kx} \quad \text{et} \quad u(0) = a(0)\,.$$

On obtient

$$A'(x) = a'(x)e^{-kx}\,,$$

donc

$$A(x) = \int_0^x a'(t)e^{-kt}dt + A(0)\,.$$

Comme $A(0) = u(0) = a(0)$, on trouve, en intégrant par parties,

$$A(x) = a(x)e^{-kx} + k\int_0^x a(t)e^{-kt}dt\,,$$

et finalement, la solution $u = \Phi(a)$ est définie par

$$\Phi(a)(x) = a(x) + ke^{kx}\int_0^x a(t)e^{-kt}dt\,.$$

En fait cette solution est valable dans le cas général. Pour le vérifier, on calcule

$$f(\Phi(a))(x) = k\int_0^x \Phi(a)(t)\,dt\,.$$

On a donc

$$f(\Phi(a))(x) = k\left[\int_0^x a(t)\,dt + k\int_0^x e^{kt}\left(\int_0^t a(u)e^{-ku}du\right)dt\right]\,.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$f(\Phi(a))(x) = k\left[\int_0^x a(t)\,dt + k\left[\frac{e^{kt}}{k}\int_0^t a(u)e^{-ku}du\right]_0^x - k\int_0^x \frac{e^{kt}}{k}\,a(t)e^{-kt}dt\right]\,,$$

et finalement

$$f(\Phi(a))(x) = ke^{kx}\int_0^x a(u)e^{-ku}du = \Phi(a)(x) - a(x)\,.$$

Exercice 51

Soit la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies sur $[-1,\, 1]$ par

$$f_n(x) = x\ \sqrt[2n+1]{x}\,.$$

Etudier la convergence de cette suite pour les normes ∞ et 2.

Solution

La fonction f_n est paire et l'on peut écrire

$$f_n(x) = |x|^{1+1/(2n+1)}\,.$$

La suite $(f_n(x))$ converge donc vers la fonction f qui à x associe $|x|$.

Pour x dans $[0,\, 1]$, posons

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) = x - x^{(2n+2)/(2n+1)}\,.$$

On obtient en dérivant

$$g_n'(x) = 1 - \frac{2n+2}{2n+1}x^{1/(2n+1)}\,.$$

La fonction g_n possède un maximum au point $\left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^{2n+1}$ et, en raison de la parité,

$$\|f - f_n\|_\infty = g_n\left(\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{2n+1}\right) = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{2n+1}\left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1}\,.$$

La suite (f_n) converge donc vers f pour la norme infinie.

Par ailleurs,

$$\|f_n - f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1}(f_n(t) - f(t))^2\,dt\right)^{1/2} \leq \|f_n - f\|_\infty \left(\int_{-1}^{1} 1\,dt\right)^{1/2} = \sqrt{2}\,\|f_n - f\|_\infty\,,$$

donc la suite (f_n) converge également vers f pour la norme 2.

Exercice 52

Soit k un nombre réel positif et soit la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = n^k x\, e^{-nx^2/2}\,.$$

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles la suite $(\|f_n\|_\infty)$ a l'infini pour limite et la suite $(\|f_n\|_1)$ converge vers 0.

Solution

En dérivant, on obtient

$$f_n'(x) = n^k(1-nx^2)\, e^{-nx^2/2}\,,$$

et la fonction f_n admet un maximum en $1/\sqrt{n}$. Alors

$$\|f_n\|_\infty = f_n(1/\sqrt{n}) = e^{-1/2}n^{k-1/2}\,.$$

La suite $(\|f_n\|_\infty)$ a une limite infinie si et seulement si $k > 1/2$.

Par ailleurs

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|\, dx = n^k \int_0^1 xe^{-nx^2/2}dx = n^k\left[-\frac{1}{n}\, e^{-nx^2/2}\right]_0^1 = n^{k-1}(1-e^{-n/2})\,.$$

Alors la suite $(\|f_n\|_1)$ converge vers 0 si et seulement si $k < 1$.

Finalement les conditions imposées ont lieu si et seulement si $\dfrac{1}{2} < k < 1\,.$

Exercice 53

Soit la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies sur $[0, 2]$ par

$$f_n(x) = \sin\frac{2\pi x^{n+1}}{1+x^n}\,.$$

Etudier la convergence de cette suite pour les normes 2 , 1 et ∞.

Solution

Soit h_n définie par

$$h_n(x) = \frac{2\pi x^{n+1}}{1+x^n}\,.$$

Il résulte des propriétés de la suite (x^n) que

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ \pi & \text{si} \quad x = 1 \\ 2\pi x & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases} .$$

et donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f continue définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ \sin(2\pi x) & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases} .$$

On a alors

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(x)|^2\,dx + \int_1^2 |f_n(x) - f(x)|^2\,dx .$$

On utilise l'inégalité

$$|\sin u - \sin v| \le |u - v| ,$$

vraie quels que soient les réels u et v. (Elle résulte du théorème des accroissements finis).

En majorant sur $[0,\,1]$, on obtient

$$|f_n(x)| = \left|\sin \frac{2\pi x^{n+1}}{1+x^n}\right| \le \frac{2\pi x^{n+1}}{1+x^n} \le 2\pi x^{n+1} ,$$

donc

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2\,dx \le 4\pi^2 \int_0^1 x^{2n+2}\,dx = \frac{4\pi^2}{2n+3} .$$

Sur $[1,\,2]$ cette fois

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sin \frac{2\pi x^{n+1}}{1+x^n} - \sin(2\pi x)\right| \le \left|\frac{2\pi x^{n+1}}{1+x^n} - 2\pi x\right| = \frac{2\pi x}{1+x^n} \le 2\pi x^{1-n} ,$$

donc

$$\int_1^2 |f_n(x) - f(x)|^2\,dx \le 4\pi^2 \int_1^2 x^{2-2n}\,dx = \frac{4\pi^2}{2n-3}\left(1 - 2^{3-2n}\right) \le \frac{4\pi^2}{2n-3} .$$

Finalement

$$\|f_n - f\|_2 \le \frac{4\pi^2}{2n+3} + \frac{4\pi^2}{2n-3} ,$$

et, puisque le membre de droite converge vers 0, la suite (f_n) converge vers f pour la norme 2.

D'après l'inégalité de Schwarz, on a

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^2 1 \times (f_n(t) - f(t))\,dt \le \left(\int_0^2 dt\right)^{1/2} \|f_n - f\|_2 = \sqrt{2}\,\|f_n - f\|_2 .$$

Donc la suite (f_n) converge également vers f pour la norme 1.

Par contre, soit $u_n = 2^{-1/n}$. Le nombre u_n appartient à l'intervalle $]\,0,\,1\,[$. Alors

$$(f_n - f)(u_n) = f_n(u_n) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\,2^{-1/n}\right)\,,$$

et la suite $((f_n - f)(u_n))$ converge vers $\sin\dfrac{2\pi}{3}$ qui n'est pas nul. La suite $((f_n - f)(u_n))$ ne converge pas vers 0, donc (f_n) ne converge pas vers f pour la norme infinie.

Exercice 54

Soit la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(3n-x)(x-n)}{n^3}} & \text{si} \quad n \leq x \leq 3n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\,.$$

Etudier si cette suite converge vers 0 pour les normes ∞ et 2.

Solution

Pour tout x réel le nombre $f_n(x)$ est nul dès que $n > x$, et la suite $(f_n(x))$ converge vers 0.

Comme le polynôme $P(x) = (3n-x)(x-n)$ atteint son maximum en $2n$ sur l'intervalle $[\,n,\,3n\,]$, on a

$$\|f_n\|_\infty = \sqrt{\frac{P(2n)}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,,$$

et la suite (f_n) converge vers 0 pour la norme infinie.

D'autre part,

$$\|f_n\|_2^2 = \int_n^{3n} \frac{(3n-x)(x-n)}{n^3}\,dx$$

et en posant $u = x/n$

$$\|f_n\|_2^2 = \int_1^3 (3-u)(u-1)\,du > 0\,.$$

Lea suite $(\|f_n\|_2)$ et donc une suite constante non nulle et la suite (f_n) ne peut converger vers 0 pour la norme 2.

Exercice 55

Soit la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies sur $[0,\,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-nx & \text{si} \quad 0 \leq x < 1/n \\ 0 & \text{si} \quad 1/n \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Etudier la convergence de cette suite pour les normes ∞ et 2.

Solution

Remarquons que les fonctions f_n sont continues sur $[0,\,1]$. Pour tout x de $]0,\,1]$ le nombre $f_n(x)$ est nul dès que $n > 1/x$, et la suite $(f_n(x))$ converge vers 0. Par contre la suite $(f_n(0))$ est la suite constante 1. La limite simple est donc discontinue en 0 et la convergence ne peut avoir lieu pour la norme infinie.

Par contre

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{1/n} (1-nx)^2 dx = \left[\frac{(nx-1)^3}{3n}\right]_0^{1/n} = \frac{1}{3n}\,,$$

et la suite (f_n) converge vers 0 pour le norme 2.

Exercice 56

Soit la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies sur $[-1,\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{(1+x^2)^n}\ .$$

Etudier la convergence de cette suite pour les normes ∞ et 2.

Solution

La suite $(f_n(0))$ est la suite constante nulle, et si x est non nul, la suite $(f_n(x))$ est le produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0 donc converge elle aussi vers 0. La limite simple est donc la fonction constante nulle.

On constate que

$$f_n(1/n) = \frac{\sin 1}{(1+1/n^2)^n} = e^{-n\ln(1+1/n^2)}\,\sin 1\,.$$

Mais

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n}\,,$$

et donc la suite $(f_n(1/n))$ converge vers $\sin 1$ qui n'est pas nul. La convergence ne peut avoir lieu en norme infinie.

Pour la norme 2, on donne une démonstration sans utiliser le théorème de convergence dominée.

Puisque la fonction f_n est impaire on a

$$\|f_n\|_2^2 = 2\int_0^1 f_n(x)^2\,dx = 2\left(\int_0^{n^{-1/4}} f_n(x)^2\,dx + \int_{n^{-1/4}}^1 f_n(x)^2\,dx\right)\,.$$

Majorons les deux intégrales de droite. Comme la fonction f_n^2 est majorée par 1 on a tout d'abord

$$\int_0^{n^{-1/4}} f_n(x)^2\,dx \leq n^{-1/4}\,.$$

Sur l'intervalle $[\,n^{-1/4},\,1\,]$,

$$f_n(x)^2 \leq \frac{1}{(1+x^2)^{2n}} \leq \frac{1}{(1+n^{-1/2})^{2n}}\,,$$

donc

$$\int_{n^{-1/4}}^1 f_n(x)^2\,dx \leq \frac{1}{(1+n^{-1/2})^{2n}}$$

et finalement

$$\|f_n\|_2^2 \leq 2\,u_n\,.$$

où

$$u_n = \frac{1}{n^{1/4}} + \frac{1}{(1+n^{-1/2})^{2n}}\,,$$

Or

$$2n\ln(1+n^{-1/2}) \sim 2\sqrt{n}\,,$$

tend vers l'infini, donc

$$(1+n^{-1/2})^{2n} = e^{2n\ln(1+n^{-1/2})}\,,$$

tend aussi vers l'infini. Il en résulte que la suite (u_n) converge vers 0 et que la suite (f_n) converge vers 0 pour la norme 2.

Exercice 57

Soit la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies sur $[0,\, 1]$ par

$$f_n(x) = \sqrt{n}\, x^n \sqrt{1-x^2}\ .$$

Etudier la convergence de cette suite pour les normes ∞ et 2.

Solution

On remarque tout d'abord que la suite $(f_n(1))$ est la suite constante nulle, et que, si $0 \leq x < 1$, la suite $(f_n(x))$ converge vers 0. La limite simple de (f_n) est donc la fonction nulle. Si la suite convergeait pour la norme infinie, sa limite serait nécessairement nulle. En dérivant

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\left(nx^{n-1}\sqrt{1-x^2} - \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\sqrt{n}\, x^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}}\,(n-(n+1)x^2)\,.$$

La fonction f_n est positive et admet un maximum en

$$a_n = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\,.$$

Alors

$$\|f_n\|_\infty = f_n(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n+1)/2} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)/2}\,.$$

La suite définie par le membre de droite converge vers $e^{-1/2}$. La convergence ne peut avoir lieu pour la norme infinie.

Par contre

$$\|f_n\|_2^2 = n\int_0^1 x^{2n}(1-x^2)\,dx = \int_0^1 (x^{2n}-x^{2n+2})\,dx = n\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right) = \frac{2n}{(2n+1)(2n+3)} \sim \frac{1}{2n}\,.$$

La suite (f_n) converge donc vers 0 pour la norme 2.

Exercice 58

Soit la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies sur $[0,\, 1]$ par

$$f_n(x) = \cos x^n\ .$$

Etudier la convergence de cette suite pour les normes ∞ et 2.

Solution

La suite $(f_n(1))$ est la suite constante $(\cos 1)$, alors que si $0 \le x < 1$, la suite $(f_n(x))$ converge vers $\cos 0 = 1$. La limite simple n'est pas continue et la suite ne peut converger pour la norme infinie.

Pour la norme 2, on donne une démonstration sans utiliser le théorème de convergence dominée.

Notons f la fonction constante 1, et soit u_n dans l'intervalle $]\,0,\,1\,[$. On a

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 (\cos x^n - 1)^2\,dx = 4\int_0^1 \sin^4\frac{x^n}{2}\,dx \le 4\left(\int_0^{u_n} \sin^4\frac{x^n}{2}\,dx + \int_{u_n}^1 \sin^4\frac{x^n}{2}\,dx\right).$$

Puisque la fonction sinus est croissante sur l'intervalle $[\,0,\,1/2\,]$, on peut majorer et l'on obtient

$$\|f_n - f\|_2^2 \le 4\left(u_n \sin^4\frac{u_n^n}{2} + 1 - u_n\right).$$

En prenant par exemple $1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ comme valeur de u_n on a

$$u_n^n = e^{n\,\ln(1-1/\sqrt{n})}\,,$$

mais

$$n\,\ln(1 - 1/\sqrt{n}) \sim -\sqrt{n}\,,$$

et donc la suite (u_n^n) converge vers 0. Il en résulte que la suite $(\|f_n - f\|_2^2)$ converge vers 0 et donc que la suite (f_n) converge vers 1 pour la norme 2.

Exercice 59

Soit la suite $(f_n)_{n\ge 1}$ de fonctions définies sur $[\,0,\,\infty\,[$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n - 1}{x^n + 1}\,.$$

Etudier la convergence de cette suite pour les normes ∞ et 2.

Solution

Les fonctions f_n sont continues et la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}\,,$$

qui n'est pas continue. La convergence ne peut avoir lieu en norme infinie.

On a
$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 \frac{4x^{2n}}{(x^n+1)^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{4}{(x^n+1)^2}\,dx\,,$$
et, en majorant,
$$\|f_n - f\|_2^2 \leq 4\left(\int_0^1 x^{2n}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^{2n}}\,dx\right) = 4\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\right)\,.$$
Il en résulte que la suite $(\|f_n - f\|_2^2)$ converge vers 0 et donc que la suite (f_n) converge vers f pour la norme 2.

Exercice 60 *Fonctions à variations bornées*

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction numérique définie sur I. Pour toute famille finie $X = \{x_1, \dots x_n\}$ de I, telle que $x_1 \leq \dots \leq x_n$, on pose
$$V_f(X) = \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|\,,$$
et l'on note $V_I(f)$ la borne supérieure des sommes précédentes pour tous les choix possibles de familles finies de I.

1) Montrer que, si X est inclus dans Y, alors $V_f(X)$ est plus petit que $V_f(Y)$.

2) Soit f dans $\mathscr{V}$. Montrer que, si a, b, c sont des points de I tel que $a \leq b \leq c$, on a
$$V_{[a,c]}(f) = V_{[a,b]}(f) + V_{[b,c]}(f)\,.$$

3) Soit $\mathscr{V}$ l'ensemble des fonctions f telles que $V_I(f)$ soit fini. Montrer que $\mathscr{V}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ des fonctions numériques définies sur I, et que $V_I(f)$ est nul, si et seulement si f est constante. En déduire que si a est un point de I l'on définit une norme sur $\mathscr{V}$ en posant
$$\|f\| = |f(a)| + V_I(f)\,.$$

4) Montrer que $\mathscr{V}$ est inclus dans l'espace vectoriel des fonctions bornées et comparer $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$.

5) Montrer que $\mathscr{V}$ est complet pour la norme $\|.\|$.

6) Montrer que f appartient à $\mathscr{V}$ si et seulement si f s'écrit comme la différence de deux fonctions croissantes bornées sur I.

7) On suppose I borné. Montrer que l'ensemble $\mathscr{L}$ des fonction lipschitziennes sur I est inclus dans $\mathscr{V}$. Comparer sur $\mathscr{L}$ la norme lipschitzienne $\|.\|_a$ de l'ex 35 et la norme $\|.\|$.

Solution

1) On remarque tout d'abord que si l'on ajoute un point x à une famille $X = \{x_1, \dots x_n\}$, alors

$$V_f(X \cup \{x\}) \geq V_f(X)\,.$$

En effet, si $x \leq x_1$, on augmente la somme $V_f(X)$ en ajoutant $|f(x_1) - f(x)|$. Si $x \geq x_n$ on ajoute cette fois $|f(x) - f(x_n)|$. Enfin, si

$$x_1 \leq \dots \leq x_k \leq x \leq x_{k+1} \leq x_n\,,$$

alors

$$V_f(X) = \sum_{i=1}^{k-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{i=k+1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|\,,$$

et, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$V_f(X) \leq \sum_{i=1}^{k-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_{k+1}) - f(x)| + |f(x) - f(x_k)| + \sum_{i=k+1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = V_f(X \cup \{x\})\,.$$

Une récurrence immédiate montre alors que le résultat subiste si l'on ajoute un nombre fini de points. Donc si X est inclus dans Y, alors $V_f(X)$ est inférieur à $V_f(Y)$.

2) En conséquence, $V_{[\,a,\,c\,]}$ est la borne supérieure des nombres $V_f(X)$ pour toute famille finie X contenant les points a et c, et si b appartient à $[\,a,\,c\,]$, c'est encore la borne supérieure des nombres $V_f(X)$ pour toute famille finie X contenant les points a, b et c.

Soit X et Y deux familles de $[\,a,\,b\,]$ et $[\,b,\,c\,]$ respectivement contenant les extrémités des intervalles respectifs. Alors $X \cup Y$ est une famille de $[\,a,\,c\,]$. et

$$V_f(X \cup Y) = V_f(X) + V_f(Y)\,,$$

donc

$$V_f(X) + V_f(Y) \leq V_{[\,a,\,c\,]}(f)\,.$$

Alors

$$V_f(X) \leq V_{[\,a,\,c\,]}(f) - V_f(Y)\,.$$

et le membre de droite est un majorant des nombres $V_f(X)$, donc majore la borne supérieure, d'où

$$V_{[\,a,\,b\,]}(f) \leq V_{[\,a,\,c\,]}(f) - V_f(Y)\,,$$

puis

$$V_f(Y) \leq V_{[\,a,\,c\,]}(f) - V_{[\,a,\,b\,]}(f)\,.$$

Le membre de droite est un majorant des nombres $V_f(Y)$ donc majore la borne supérieure, d'où

$$V_{[\,b,\,c\,]}(f) \leq V_{[\,a,\,c\,]}(f) - V_{[\,a,\,b\,]}(f)\,,$$

et finalement
$$V_{[a,b]}(f) + V_{[b,c]}(f) \leq V_{[a,c]}(f)\,.$$
Inversement, soit Z une famille de $[a,\,c]$ contenant a, b et c. Alors
$$V_f(Z) = V_f(Z \cap [a,\,b]) + V_f(Z \cap [b,\,c]) \leq V_{[a,b]}(f) + V_{[b,c]}(f)\,,$$
et le membre de droite majore les nombres $V_f(Z)$ donc la borne supéreure, d'où
$$V_{[a,c]}(f) \leq V_{[a,b]}(f) + V_{[b,c]}(f)\,.$$
On a donc bien égalité.

3) Il résulte facilement des propriétés des bornes supérieures que, si f et g sont deux fonctions définies sur I, et λ un nombre réel,
$$V_I(f+g) \leq V_I(f) + V_I(g) \quad \text{et} \quad V_I(\lambda f) = |\lambda|\, V_I(f)\,.$$
Il en résulte que $\mathscr{V}$ est stable par addition et multiplication par un scalaire. C'est donc un sous-espace de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, et V_I est une semi-norme. Ce n'est pas une norme car si f est constante $V_I(f)$ est nulle.

Réciproquement, si $V_I(f)$ est nulle, et si x et y sont deux éléments de I, on a en particulier
$$V_f(\{x,y\}) = |f(x) - f(y)| \leq V_I(f) = 0\,,$$
ce qui montre que $f(x) = f(y)$. La fonction f est donc constante.

Si maintenant on ajoute $|f(a)|$, alors la nullité de $\|f\|$ implique celle de $V_I(f)$, donc f est constante, mais aussi la nullité de $f(a)$, donc f est la fonction nulle. Les deux autres propriétés de la norme restent conservées. On en déduit que $\|.\|$ est une norme sur $\mathscr{V}$.

4) On a, quel que soit x dans I,
$$|f(x)| - |f(a)| \leq |f(x) - f(a)| \leq V_I(f)\,,$$
donc
$$|f(x)] \leq \|f\|\,,$$
et, par suite,
$$\|f\|_\infty \leq \|f\|\,.$$
Les éléments de $\mathscr{V}$ sont donc des fonctions bornées, et la convergence en norme implique la convergence pour la norme infinie.

Les deux normes ne sont pas équivalentes. Par exemple si $I = [0,\,1]$, prenons
$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin^2(nx\pi)\,.$$

On a déjà

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}\,,$$

et la suite (f_n) converge vers 0 pour la norme $\|.\|_\infty$. D'autre part

$$f_n(k/(2n)) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & k = 2p \\ 1/n & \text{si} & k = 2p+1 \end{array} \right. .$$

Donc

$$f_n\left(\frac{2p+1}{2n}\right) - f_n\left(\frac{2p}{2n}\right) = f_n\left(\frac{2p+1}{2n}\right) - f\left(\frac{2p+2}{2n}\right) = \frac{1}{n}\,,$$

et

$$V_I(f_n) \geq \sum_{p=0}^{n-1}\left(\left|f_n\left(\frac{2p+1}{2n}\right) - f_n\left(\frac{2p}{2n}\right)\right| + \left|f_n\left(\frac{2p+2}{2n}\right) - \left(\frac{2p+1}{2n}\right)\right|\right) = 2\,.$$

La suite (f_n) ne converge pas vers 0 pour la norme $\|.\|$.

5) Soit (f_n) une, suite de Cauchy de $\mathscr{V}$ pour la norme $\|.\|$. Alors, d'après la question précédente, c'est aussi une suite de Cauchy pour la norme infinie, et elle converge vers une limite f pour cette norme qui n'est autre que la limite simple de la suite (f_n).

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que, si $m > n \geq N$,

$$\|f_n - f_m\| = |f_n(a) - f_m(a)| + V_I(f_n - f_m) \leq \varepsilon\,.$$

Donc, pour toute famille ordonnée $\{x_1, \dots, x_p\}$ de I

$$|f_n(a) - f_m(a)| + \sum_{i=1}^{p} |(f_n - f_m)(x_{i+1}) - (f_n - f_m)(x_i)| \leq \varepsilon\,.$$

En faisant tendre m vers l'infini, on obtient

$$|f_n(a) - f(a)| + \sum_{i=1}^{p} |(f_n - f)(x_{i+1}) - (f_n - f)(x_i)| \leq \varepsilon\,.$$

Alors en prenant la borne supérieure, on en déduit que

$$V_I(f_n - f) \leq V_I(f_n - f) + |f_n(a) - f(a)| \leq \varepsilon\,.$$

En particulier

$$V_I(f) \leq V_I(f_n) + V_I(f - f_n) \leq V_I(f_n) + \varepsilon\,,$$

ce qui montre que $V_I(f)$ est finie et donc que f appartient á $\mathscr{V}$. Ensuite, si $n \geq N$,

$$\|f_n - f\| \leq \varepsilon\,,$$

donc la suite (f_n) converge vers f pour la norme $\|.\|$.

6) Pour une fonction croissante bornée g

$$V_g(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n-1}|g(x_{i+1})-g(x_i)|=\sum_{i=1}^{n-1}(g(x_{i+1})-g(x_i))=g(x_n)-g(x_1)\leq 2\,\|g\|_\infty\,.$$

Il en résulte que g appartient à $\mathscr{V}$ et comme $\mathscr{V}$ est un espace vectoriel, la différence de deux fonctions croissantes bornées appartient encore à $\mathscr{V}$.

Rermarque : pour une fonction croissante

$$\|g\|=|g(a)|+V_I(g)\leq 3\,\|g\|_\infty\,.$$

Réciproquement. Soit f dans $\mathscr{V}$ et a dans I. On définit une fonction g sur I en posant

$$g(x)=\begin{cases}\ \ V_{[\,a,\,x\,]}(f) & \text{si} \quad x\geq a\\ -V_{[\,x,\,a\,]}(f) & \text{si} \quad x\leq a\end{cases}$$

Cette fonction est croissante. En effet, si $a\leq x\leq y$,

$$g(y)-g(x)=V_{[\,a,\,y\,]}(f)-V_{[\,a,\,x\,]}(f)=V_{[\,x,\,y\,]}(f)\geq 0\,,$$

et si $x\leq y\leq a$,

$$g(y)-g(x)=-V_{[\,y,\,a\,]}(f)+V_{[\,x,\,a\,]}(f)=V_{[\,x,\,y\,]}(f)\geq 0\,.$$

Soit alors $h=g-f$. Cette fonction est également croissante. En effet, si $a\leq x\leq y$,

$$h(y)-h(x)=V_{[\,a,\,y\,]}(f)-f(y)-(V_{[\,a,\,x\,]}(f)-f(x))=V_{[\,x,\,y\,]}(f)-(f(y)-f(x))\geq 0\,,$$

et si $x\leq y\leq a$,

$$h(y)-h(x)=-V_{[\,y,\,a\,]}(f)-f(y)-(-V_{[\,x,\,a\,]}(f)-f(x))=V_{[\,x,\,y\,]}(f)-(f(y)-f(x))\geq 0\,.$$

De plus

$$|g(x)|\leq V_I(f) \quad \text{et} \quad |h(x)|\leq|f(x)|+|g(x)|\leq\|f\|_\infty+V_I(f)\,,$$

et g et h sont bornées.

7) Soit f lipschitzienne sur I et $k(f)$ le plus petit nombre réel k tel que, quels que soient x et y dans I,

$$|f(x)-f(y)|\leq k\,|x-y|\,.$$

Alors, si $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ est une famille croissante de points de I,

$$V_f(X)=\sum_{i=1}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|\leq k(f)\,\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=k(f))(x_n-x_1)\leq k(f)\,\delta(I)\,,$$

où $\delta(I)$ est le diamètre de I, et donc f est dans $\mathscr{V}$. De plus

$$\|f\|\leq|f(a)|+\delta(I)\,k(f)\,,$$

donc
$$\|f\| \leq \max(1, \delta(I))\,(|f(a)| + k(f)) = \max(1, \delta(I))\,\|f\|_a\,.$$
Soit maintenant un point a de I tel que $a+1/n$ soit aussi dans I. Soit f_n la fonction continue croissante, qui vaut 0, si $x \leq a$, 1 si $x \geq a + 1/n$ et affine sur $[\,a,\, a+1/n\,]$. Alors
$$\|f_n\|_a = n \quad \text{et} \quad \|f_n\| = 1\,.$$
Les deux normes $\|f\|$ et $\|f\|_a$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 61

Soit φ une fonction continue bornée et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Montrer que dans l'espace E des fonctions numériques continues et bornées sur $\mathbb{R}$, on définit une norme en posant
$$\|f\| = \|\varphi f\|_\infty\,,$$
A quelle condition cette norme est-elle équivalente à la norme infinie ?

Solution

Si la norme $\|f\|$ est nulle alors φf est la fonction nulle et, puisque φ ne s'annule pas, f est la fonction nulle. Les autres propriétés de la norme résultent de celles de $\|.\|_\infty$.

On a d'une part
$$\|f\| = \|\varphi f\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty\,\|f\|_\infty\,,$$
(avec égalité si f est constante).

Dans l'autre sens, en écrivant
$$f = \frac{1}{\varphi}\,(\varphi f)\,,$$
on obtient, si $1/\varphi$ est bornée,
$$\|f\|_\infty \leq \|1/\varphi\|_\infty \|\varphi f\|_\infty = \|1/\varphi\|_\infty \|f\|\,,$$
(avec égalité si $f = 1/\varphi$). Dans ce cas les normes sont équivalentes.

Maintenant, si $1/\varphi$ n'est pas bornée, pour tout entier n, il existe un nombre x_n tel que $1/\varphi(x_n) > n$, et puisque φ est continue, il existe tout un intervalle $]\,u_n,\, v_n\,[$ contenant x_n sur lequel on a encore $1/\varphi(x) > n$, c'est-à-dire $\varphi(x) < 1/n$. Soit alors la fonction continue f_n qui est nulle en dehors de $]\,u_n,\, v_n\,[$, qui vaut 1 en x_n et qui est affine sur les intervalles $[\,u_n,\, x_n\,]$ et $[\,x_n,\, v_n\,]$. On a dans ce cas
$$\|f_n\|_\infty = 1\,,$$

et

$$\|f_n\| = \|\varphi f_n\|_\infty = \sup_{x\in[\,u_n,\,v_n\,]} (\varphi(x)f_n(x)) \leq \frac{1}{n}\,.$$

Il ne peut donc pas exister de constante K telle que, pour toute f de E

$$\|f\|_\infty \leq K\|f\|\,,$$

et les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 62

Soit E l'espace vectoriel des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et nulles en dehors d'un intervalle compact (dépendant de f). Soit φ une fonction de E qui n'est pas la fonction nulle. Montrer que l'on définit une application linéaire continue L_φ de E dans E en posant, pour tout x réel

$$L_\varphi(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\varphi(t)\,dt$$

et trouver la norme de L_φ.

Solution

On suppose dans ce qui suit que φ est nulle en dehors de l'intervalle $[\,c,\,d\,]$.

Soit f dans E, nulle en dehors de $[\,a,\,b\,]$. Alors la fonction sous le signe somme dans l'intégrale $L_\varphi(f)(x)$ est nulle si t appartient à $\complement\,[\,c,\,d\,]$ et $x-t$ appartient à $\complement\,[\,a,\,b\,]$ c'est-à-dire si t appartient à $\complement\,[\,x-b,\,x-a\,]$. Finalement $L_\varphi(f)(x)$ est nulle si t appartient à

$$\complement\,[\,x-b,\,x-a\,] \cup \complement\,[\,c,\,d\,] = \complement(\,[\,x-b,\,x-a\,] \cap [\,c,\,d\,]\,)\,.$$

C'est vrai en particulier lorsque $[\,x-b,\,x-a\,] \cap [\,c,\,d\,]$ est vide, c'est-à-dire lorsque

$$x-a < c \quad\text{ou}\quad d < x-b\,,$$

ou encore

$$x < a+c \quad\text{ou}\quad x > b+d\,,$$

finalement lorsque x appartient à $\complement\,[\,a+c,\,b+d\,]$. Donc $L_\varphi(f)$ est nulle en dehors d'un intervalle compact.

On montre maintenant que $L_\varphi(f)$ est continue.

Si f est nulle en dehors de $[a, b]$, elle est uniformément continue sur $[a, b]$ et nulle en a et b. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|u - v| \leq \alpha$ et u et v dans $[a, b]$ impliquent

$$|f(u) - f(v)| \leq \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_1}\,.$$

Alors, si $u \leq a \leq v \leq b$ et $|u - v| \leq \alpha$ on a aussi $|a - v| \leq \alpha$ donc

$$|f(u) - f(v)| = |f(v)| = |f(a) - f(v)| \leq \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_1}\,.$$

De même si $a \leq u \leq b \leq v$ et $|u - v| \leq \alpha$ on a aussi $|u - b| \leq \alpha$ donc

$$|f(u) - f(v)| = |f(u)| = |f(u) - f(b)| \leq \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_1}\,.$$

(La fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$).

En particulier, si $|x - y| \leq \alpha$, on aura pour tout réel t

$$|f(x - t) - f(y - t)| \leq \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_1}$$

et

$$|L_\varphi(x) - L_\varphi(y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - t) - f(y - t)|\,|\varphi(t)|\,dt \leq \varepsilon\,.$$

Donc $L_\varphi(f)$ est continue. C'est bien un élément de E. Comme par ailleurs L_φ est clairement linéaire, il en résulte que c'est un endomorphisme de E et, en majorant $|f(x-t)|$ dans l'intégrale par $\|f\|_\infty$, on obtient

$$|L_\varphi(x)| \leq \|f\|_\infty \|\varphi\|_1\,,$$

et donc

$$|||L_\varphi||| \leq \|\varphi\|_1\,.$$

Si n est un entier plus grand que 1 posons maintenant

$$f_n(x) = \frac{\varphi(-x)}{|\varphi(-x)| + 1/n}\,.$$

C'est une fonction de E de norme infinie plus petite que 1. Alors

$$|||L_\varphi||| \geq \frac{\|L_\varphi(f_n)\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} \geq L_\varphi(f_n)(0) = \int_c^d f_n(-t)\varphi(t)\,dt = \int_c^d \frac{\varphi(t)^2}{|\varphi(t)| + 1/n}\,dt\,,$$

puis

$$|||L_\varphi||| \geq \int_c^d \frac{\varphi(t)^2 - 1/n^2}{|\varphi(t)| + 1/n}\,dt = \int_c^d \left(|\varphi(t)| - \frac{1}{n}\right)\,dt = \|\varphi\|_1 - \frac{d-c}{n}\,.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit

$$|||L_\varphi||| \geq \|\varphi\|_1\,.$$

Finalement

$$|||L_\varphi||| = \|\varphi\|_1\,.$$

Chapitre 6

Convergence uniforme

Dans ce chapitre on étudie la convergence uniforme de suites de fonctions.

Exercice 63

Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ des suites $(f_n)_{n\geq 0}$, $(g_n)_{n\geq 0}$ et $(h_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies par

$$\text{a)}\quad f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2} \quad , \quad \text{b)}\quad g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \quad , \quad \text{c)}\quad h_n(x) = \frac{\sin nx}{1+n^2x^2} \,.$$

Solution

a) Pour tout x non nul, la suite $(f_n(x))$ converge vers 0, alors que la suite $(f_n(0))$ est la suite constante égale à 1. La limite simple de (f_n) n'est pas une fonction continue alors que les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$. La convergence ne peut être uniforme.

b) Cette fois la suite $(g_n(x))$ converge vers 0 pour tout x réel. Cherchons le maximum de g_n sur $[\,0,\,\infty\,[$. En dérivant

$$g_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}\,,$$

et g_n admet un maximum en $1/n$. On a alors pour tout x réel, en raison de la parité de g_n,

$$\|g_n\|_\infty = g_n(1/n) \leq \frac{1}{2n}\,.$$

Comme le membre de droite tend vers 0, la convergence est uniforme.

c) Ici aussi la suite $(h_n(x))$ converge vers 0 pour tout x réel. Mais

$$|h_n(1/n)| = \frac{\sin 1}{2}\,,$$

et la suite (h_n) ne peut converger uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 64

Etudier la convergence uniforme sur $[0, \infty[$ de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = x\sqrt{n}\, e^{-xn^2} .$$

Solution

En dérivant, on obtient

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\, e^{-xn^2}(1 - xn^2) .$$

La fonction f_n atteint son maximume en $1/n^2$ et

$$\sup_{x\geq 0} |f_n(x)| = f_n(1/n^2) = \frac{e^{-1}}{n^{3/2}} .$$

la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, \infty[$.

Exercice 65

Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \frac{e^{nx} + n^2 - n}{e^{nx} + n^2 + n} .$$

Solution

Si $x > 0$, on écrit

$$f_n(x) = \frac{1 + (n^2 - n)e^{-nx}}{1 + (n^2 + n)e^{-nx}} ,$$

et la limite quand n tend vers l'infini vaut 1.

Si $x \leq 0$, on écrit cette fois

$$f_n(x) = \frac{1 + \dfrac{e^{nx}}{n^2} - \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{e^{nx}}{n^2} + \dfrac{1}{n}} ,$$

et la limite vaut encore 1. Alors

$$|f_n(x) - 1| = \frac{2n}{e^{nx} + n^2 + n} \leq \frac{2}{n} ,$$

Comme le membre de droite tend vers 0, la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante 1.

Exercice 66

Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ des suites $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies par

$$\text{a)}\quad f_n(x) = \arctan(nx) \quad , \quad \text{b)}\quad g_n(x) = x\arctan(nx)\,.$$

Solution

a) La suite $(f_n(x))$ converge vers

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \pi/2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} ,$$

Comme f n'est pas continue, alors que les fonctions f_n le sont, la convergence n'est pas uniforme.

b) Cette fois la suite $(g_n(x))$ converge vers

$$g(x) = \begin{cases} -x\pi/2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x\pi/2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} ,$$

c'est-à-dire

$$g(x) = \frac{\pi}{2}\,|x|\,.$$

Posons

$$h_n = g - g_n\,,$$

et étudions cette fonction sur $[\,0,\,\infty\,[$ (cela suffit puisque h_n est impaire). On obtient en dérivant

$$h_n'(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(nx) - \frac{nx}{1+n^2x^2}\,,$$

puis

$$h_n''(x) = -\frac{2n}{(1+n^2x^2)^2} < 0\,.$$

La fonction h_n' est décroissante et sa limite en $+\infty$ est nulle, donc h_n' est positive et h_n est croissante positive car $h_n(0)$ est nul. Alors, en utilisant, lorsque u est positif, la relation

$$\arctan u + \arctan\frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}\,,$$

on obtient
$$\|g-g_n\|_\infty = \lim_{x\to\infty} h_n(x) = \lim_{x\to\infty} x\arctan\frac{1}{nx} = \frac{1}{n}\,.$$
Comme le membre de droite tend vers 0, la convergence est uniforme.

Exercice 67

Etudier la convergence uniforme sur $[\,0,\,1\,[$, puis sur $[\,0,\,a\,]$ $(0\leq a<1)$, de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par
$$f_n(x) = n(x^n - x^{n+1})\,.$$

Solution

On a donc
$$f_n(x) = nx^n(1-x)\,.$$
Le nombre $f_n(x)$ est nul si x vaut 0 ou 1. Donc la suite $(f_n(x))$ converge vers 0 dans ces deux cas. C'est encore vrai si x appartient à $]\,0,\,1\,[$ car la limite de la suite $(nx^n)_{n\geq 0}$ est nulle. La suite (f_n) converge simplement vers 0. On obtient en dérivant
$$f_n'(x) = nx^{n-1}(n-(n+1)x)\,,$$
et cette fonction s'annule en $n/(n+1)$ où f_n atteint son maximum. On constate que
$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\,,$$
et la limite de la suite $(f(n/(n+1)))$ vaut $1/e$. La suite (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur l'intervalle $[\,0,\,1\,]$.

Sur $[\,0,\,a\,]$. Dès que $n/(n+1)$ est plus grand que a, on a
$$\sup_{x\in[\,0,\,a\,]} f_n(x) = f_n(a)\,,$$
et la suite $(f_n(a))$ converge vers 0. Donc la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[\,0,\,a\,]$.

Exercice 68

Soit $a<1$. Etudier la convergence uniforme sur $]-1,\,1\,[$, puis sur $[-a,\,a\,]$, de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies par
$$f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^n\,.$$

Solution

On a aussi
$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$
et, lorsque $|x| < 1$, la suite $(f_n(x))$ converge vers
$$f(x) = \frac{1}{1 - x}\,.$$
Alors
$$f(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1 - x}\,.$$
Sur l'intervalle $\left]\,-1,\, 1\,\right[$ le fonction $f - f_n$ n'est pas bornée. Il ne peut y avoir convergence uniforme. Par contre lorsque $-1 < -a \leq x \leq a < 1$, on a
$$|f(x) - f_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1 - x} \leq \frac{a^{n+1}}{1 - a}\,.$$
La suite (f_n) converge donc uniformément vers f sur $[\,-a,\, a\,]$.

Exercice 69

Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies par
$$f_n(x) = \frac{x}{1 + e^{nx}}\,.$$

Solution

Comme la suite (e^{nx}) a pour limite $+\infty$ si $x > 0$ et 0 si $x < 0$, on en déduit que la suite (f_n) converge vers 0 dans le premier cas, et vers x dans le second. De plus la suite $(f_n(0))$ est nulle. Il en résulte que (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}\,,$$
c'est-à-dire
$$f(x) = \inf(x, 0)\,.$$
Posons
$$g_n = f_n - f\,.$$
Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et
$$g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \frac{x}{1 + e^{nx}} - x = \frac{-xe^{nx}}{1 + e^{nx}} = \frac{-x}{1 + e^{-nx}} = f_n(-x) = g_n(-x)\,.$$

La fonction g_n est paire. On l'étudie sur $[0, \infty[$ où $f_n = g_n$ est une fonction positive. En dérivant, on obtient

$$g_n'(x) = f_n'(x) = \frac{1 + e^{nx}(1 - nx)}{(1 + e^{nx})^2}.$$

Pour $u > 0$, posons

$$h(u) = 1 + e^u(1 - u).$$

donc

$$h'(u) = -ue^u.$$

La fonction h est décroissante. On a

$$h(0) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{u \to +\infty} h(u) = -\infty,$$

et la fonction h possède un zéro et un seul, noté u_0, qui est plus grand que 1, puisque $h(1) = 1$. Il en résulte que u_0/n est la seule racine de f_n'. Alors, puisque

$$f_n(0) = \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$$

la fonction f_n possède un maximum en u_0/n, et donc

$$\|f_n - f\|_\infty = f_n(u_0/n) = \frac{1}{n} \frac{u_0}{1 + e^{u_0}}.$$

La convergence est donc uniforme.

Exercice 70

Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \frac{nx}{n + e^{nx}}.$$

Solution

On écrit

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + e^{nx}/n}.$$

Comme la suite (e^{nx}/n) a pour limite $+\infty$ si $x > 0$ et 0 si $x < 0$, on en déduit que la suite (f_n) converge vers 0 dans le premier cas, et vers x dans le second. De plus la suite $(f_n(0))$ est nulle. Il en résulte que (f_n) converge simplement vert la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \inf(x, 0)\,.$$

Posons

$$g_n = f_n - f\,.$$

Si $x \leq 0$, on a

$$|g_n(x)| = \frac{|xe^{nx}|}{n + e^{nx}} \leq \frac{|xe^{nx}|}{n} = \frac{n|x|e^{-n|x|}}{n^2}\,.$$

Pour $u \geq 0$, posons

$$g(u) = ue^{-u}\,.$$

On a donc

$$g'(u) = (1-u)e^{-u}\,,$$

et g admet un maximum en 1 qui vaut e^{-1}. Alors

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{en^2}\,,$$

et le suite (f_n) converge uniformément vers f sur $]-\infty, 0]$.

Si $x \geq 0$, la fonction $f_n = g_n$ est positive. En dérivant, on obtient

$$g_n'(x) = f_n'(x) = n\,\frac{n + e^{nx}(1-nx)}{(n+e^{nx})^2}\,.$$

Posons

$$h_n(x) = n + e^{nx}(1-nx)\,,$$

donc

$$h_n'(x) = -n^2xe^{nx}\,.$$

La fonction h_n est décroissante. On a

$$h_n(0) = n+1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} h_n(x) = -\infty\,.$$

Alors la fonction h_n possède un zéro et une seul, noté u_n, et f_n admet un maximum en u_n, donc

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(u_n)\,,$$

et

$$h_n(u_n) = n + e^{nu_n} - nu_ne^{nu_n} = 0\,.$$

Alors

$$f_n(u_n) = \frac{nu_n}{n + e^{nu_n}} = e^{-nu_n}\,.$$

Considérons maintenant la suite $(t_n)_{n\geq 3}$ de nombre réels positifs définie par

$$t_n = \frac{\ln\ln n}{n}\,.$$

Quand n tend vers l'infini, on a

$$h_n(t_n) = n + \ln n(1 - \ln\ln n) \sim n\,,$$

donc ce nombre est strictement positif pour n assez grand et il en résulte que

$$0 < t_n \leq u_n\,.$$

Alors

$$f_n(u_n) = e^{-nu_n} \leq e^{-nt_n} = e^{-\ln\ln n} = \frac{1}{\ln n}\,,$$

et le suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[\,0,\,\infty\,[$.

En conclusion la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 71

1) Etudier la convergence uniforme sur $[\,0,\,\infty\,[$ de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = (1-x)e^{-x^n}\,.$$

2) Calculer la limite de la suite (I_n) définie par

$$I_n = \int_0^2 f_n(x)\,dx\,.$$

Solution

1) Comme la suite $(-x^n)$ a pour limite $-\infty$ si $x > 1$ et 0 si $0 \leq x < 1$, on en déduit que la suite (f_n) converge vers 0 dans le premier cas, et vers $1-x$ dans le second. De plus la suite $(f_n(1))$ est nulle. Il en résulte que (f_n) converge simplement vert la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}\,.$$

Posons

$$g_n = f_n - f\,.$$

Si $0 \leq x \leq 1$, on a

$$|g_n(x)| = (1-x)|e^{-x^n} - 1|\,.$$

Il résulte du théorème des accroissements finis que, pour tout réel négatif u, on a

$$|e^u - 1| \leq |u|\,,$$

d'où

$$|g_n(x)| \leq (1-x)x^n \,.$$

Si l'on pose

$$h_n(x) = (1-x)x^n \,,$$

on obtient en dérivant

$$h_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n-(n+1)x) \,,$$

et cette fonction s'annule en $n/(n+1)$. Alors h_n admet un maximum en ce point et

$$|g_n(x)| \leq |h_n(n/(n+1))| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq \frac{1}{n+1} \,.$$

La suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[\,0,\,1\,]$.

Si $x \geq 1$, on peut déjà majorer la fonction en remarquant que l'on a toujours, pour $u > 0$,

$$e^{-u} \leq \frac{1}{eu} \,.$$

En effet, si l'on pose,

$$g(u) = ue^{-u} \,,$$

on a donc

$$g'(u) = (1-u)e^u \,,$$

et g admet un maximum en 1 qui vaut e^{-1}.

On a alors

$$|f_n(x)| = |g_n(x)| \leq (x-1)\,\frac{x^{-n}}{e} \,.$$

En étudiant maintenant le membre de droite de cette inéquation, noté $h_n(x)$, on obtient en dérivant

$$h_n'(x) = \frac{1}{e}\,x^{-n-1}(n-(n-1)x)$$

qui s'annule en $n/(n-1)$, et h_n admet un maximum en ce point. Alors

$$|g_n(x)| \leq |h_n(n/(n-1))| = \frac{1}{e(n-1)}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \leq \frac{1}{e(n-1)} \,,$$

et le suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[\,1,\,\infty\,[$.

En conclusion la convergence est uniforme sur $[\,0,\,\infty\,[$ tout entier.

2) Comme la convergence est uniforme

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2} \,.$$

Exercice 72

Etudier la convergence uniforme sur $[0, \infty[$ de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \frac{n^x + n}{xn^x + n}\,.$$

Solution

On peut écrire

$$f_n(x) = \frac{1 + n^{x-1}}{1 + xn^{x-1}}\,.$$

Puisque, si $0 \leq x < 1$, la suite (n^{x-1}) converge vers 0, alors la suite $(f_n(x))$ converge vers 1.
On a également

$$f_n(x) = \frac{1 + n^{1-x}}{x + n^{1-x}}\,.$$

Puisque, si $x > 1$, la suite (n^{1-x}) converge vers 0, alors la suite $(f_n(x))$ converge vers $1/x$. Enfin la suite $(f_n(1))$ est constante et vaut 1.

Il en résulte que (f_n) converge simplement vert la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1/x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}\,.$$

Posons

$$g_n = f_n - f\,.$$

Lorsque $0 \leq x \leq 1$, on a

$$|g_n(x)| = \frac{(1-x)n^x}{xn^x + n} = \frac{1-x}{x + n^{1-x}} \leq (1-x)n^{x-1}\,.$$

Lorsque $x \geq 1$,

$$|g_n(x)| = \frac{n(x-1)}{x(xn^x + n)} = \frac{x-1}{x(1 + xn^{x-1})} \leq (x-1)n^{1-x}\,.$$

Donc, pour tout $x \geq 0$

$$|g_n(x)| \leq |x-1]n^{-|x-1|}\,.$$

Si l'on pose, pour tout $u \geq 0$,

$$h_n(u) = un^{-u} = ue^{-u\ln n}\,,$$

on obtient en dérivant

$$h_n'(u) = n^{-u}(1 - u\ln n)\,,$$

et cette fonction s'annule en $1/\ln n$. Alors h_n admet un maximum en ce point et

$$|g_n(x)| = h_n(|x-1|) \leq |h_n(1/\ln n)| = \frac{1}{e \ln n},$$

et le suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, \infty[$.

Exercice 73

Etudier la convergence uniforme sur $[0, \infty[$ de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = (1+x^n)^{1/n}.$$

Solution

Lorsque $0 \leq x \leq 1$, on a

$$1 \leq f_n(x) \leq 2^{1/n}$$

et il résulte du théorème d'encadrement que la suite $(f_n(x))$ converge vers 1.

Lorsque $x > 1$, on écrit

$$f_n(x) = x\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{1/n} = xf_n(1/x).$$

Alors, puisque $1/x > 1$, la suite $(f_n(x))$ converge vers x. La limite simple de la suite (f_n) est donc la fonction f définie par

$$f(x) = \max(1, x).$$

Sur $[0, 1]$ on a

$$0 \leq f_n(x) - f(x) \leq 2^{1/n} - 1,$$

et sur $[1, \infty[$,

$$f_n(x) - f(x) = f_n(x) - x = x(f_n(1/x) - 1) \geq 0.$$

En dérivant $f_n(x) - x$ on obtient

$$f_n'(x) - 1 = x^{n-1}(1+x^n)^{-1+1/n} - 1 = (1+x^{-n})^{-1+1/n} - 1 \leq 0.$$

La fonction $f_n - f$ est décroissante sur $[1, \infty[$, donc

$$\sup_{x\geq 1}(f_n - f)(x) = (f_n - f)(1) = 2^{1/n} - 1.$$

Alors,

$$\sup_{x\geq 0}|f_n(x) - f(x)| = 2^{1/n} - 1 = f_n(1) - f(1),$$

et la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, \infty[$.

Exercice 74

Etudier la convergence uniforme sur $[a, \infty[$ $(a \geq 0)$ de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \frac{1+nx}{2+nx^2}\,.$$

Solution

On constate que $(f_n(x))$ converge vers $1/x$, si $x > 0$, et vers $1/2$ si $x = 0$. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x = 0 \\ 1/x & \text{si} & x > 0 \end{array} \right. .$$

Comme f n'est pas continue en 0, alors que les fonctions f_n le sont, la convergence ne peut être uniforme sur $[0, \infty[$.

Maintenant si $x \geq a > 0$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x-2|}{x(2+nx^2)} \leq \frac{x+2}{x(2+nx^2)} = \left(1+\frac{2}{x}\right)\frac{1}{2+nx^2} \leq \left(1+\frac{2}{a}\right)\frac{1}{2+na^2}\,.$$

Comme le membre de droite tend vers 0, on en déduit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, \infty[$.

Exercice 75

Etudier la convergence uniforme sur $[0, \infty[$ de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = x\ln\left(x+\frac{1}{n}\right)\,.$$

Solution

On constate que $(f_n(x))$ converge vers $x\ln x$, si $x > 0$, et vers 0 si $x = 0$. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x = 0 \\ x\ln x & \text{si} & x > 0 \end{array} \right. .$$

Alors, si $x > 0$,

$$f_n(x) - f(x) = x\left(\ln\left(x + \frac{1}{n}\right) - \ln x\right) = x\,\ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right) = \frac{1}{n}\,h(nx)\,,$$

où

$$h(x) = x\,\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\,.$$

La fonction h est positive et au voisinage de l'infini

$$h(x) \sim x\,\frac{1}{x} = 1\,,$$

donc h est majorée sur $]\,0,\,\infty\,[$ par une constante K. Alors, pour tout $x > 0$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{K}{n}\,,$$

ce qui reste vrai si $x = 0$. La suite (f_n) converge donc uniformément vers f sur $[\,0,\,\infty\,[$.

Exercice 76

Etudier la convergence uniforme sur $[\,-a,\,a\,]$ $(a > 0)$, puis sur $\mathbb{R}$, de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \frac{nx + \sin^2 nx}{n + \sin^2 nx}\,.$$

Solution

En écrivant

$$f_n(x) = \frac{x + \dfrac{\sin^2 nx}{n}}{1 + \dfrac{\sin^2 nx}{n}}\,,$$

on constate, puisque la suite $(\sin^2 nx)$ est bornée, que la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x) = x$.

Alors

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x-1|\sin^2 nx}{n + \sin^2 nx} \leq \frac{|x-1|}{n} \leq \frac{|x|+1}{n}\,.$$

Donc, si $|x| \leq a$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{a+1}{n}\,.$$

La suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[\,-a,\,a\,]$. Par contre

$$\left|f_n\left(n\pi + \frac{\pi}{2n}\right) - \left(n\pi + \frac{\pi}{2n}\right)\right| = \frac{\left(n\pi - 1 + \dfrac{\pi}{2n}\right)\sin^2\left(n^2\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)}{n + \sin^2\left(n^2\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)} = \frac{n\pi - 1 + \dfrac{\pi}{2n}}{n+1}\,,$$

et cette suite converge vers π. Il ne peut y avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 77

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique de limite u et $(v_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique de limite $v > 0$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \frac{x + u_n}{x + v_n}$$

converge uniformément sur $[\,0,\,\infty\,[$.

Solution

La suite (v_n) est strictement positive à partir d'un certain rang n_0. On suppose $n \geq n_0$ pour définir f_n. La limite simple est la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x + u}{x + v}\,.$$

Alors

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x(u_n - u + v - v_n) + u_n v - v_n u|}{(x + v_n)(x + v)} \leq \frac{x(|u_n - u| + |v_n - v|)}{(x + v_n)(x + v)} + \frac{|u_n v - v_n u|}{(x + v_n)(x + v)}\,,$$

et en minorant $(x + v_n)(x + v)$ par xv ou par $v_n v$, on obtient

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{|u_n - u| + |v_n - v|}{v} + \frac{|u_n v - v_n u|}{v_n v}\,.$$

Comme le membre de droite tend vers 0, on en déduit que (f_n) converge uniformément vers f sur l'intervalle $[\,0,\,\infty\,[$.

Exercice 78

Etudier la convergence uniforme sur $[\,0,\,\infty\,[$, puis sur $[\,0,\,a\,]$ $(0 < a < 1)$ et sur $[\,a,\,\infty\,[$ $(a > 1)$, de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \sin(\pi e^{2 - x^n - x^{-n}}) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}\,.$$

Solution

Lorsque x est distinct de 0 et 1, la suite $(x^n + x^{-n})$ a l'infini pour limite et $(f_n(x))$ converge vers 0. Par ailleurs $f_n(1)$ et $f_n(0)$ sont nuls. Donc la suite (f_n) converge simplement vers 0. Cependant

$$f_n(2^{1/n}) = \sin(\pi e^{-1/2}) \, ,$$

et la suite (f_n) ne peut pas converger uniformément vers 0 sur $[\,0,\,\infty\,[$.

En utilisant le fait que, pour tout nombre réel u, on a

$$|\sin u| \leq |u| \, ,$$

on obtient sur $]\,0,\,a\,]$,

$$|f_n(x)| \leq \pi e^{2-x^n-x^{-n}} \leq \pi e^{2-x^{-n}} \, ,$$

donc

$$|f_n(x)| \leq \pi e^{2-a^{-n}} \, ,$$

ce qui reste vrai si $x = 0$, et le membre de droite tend vers 0. La suite (f_n) converge donc uniformément vers 0 sur $[\,0,\,a\,]$.

Sur $[\,a,\,\infty\,[$, on a de même

$$|f_n(x)| \leq \pi e^{2-x^n-x^{-n}} \leq \pi e^{2-x^n} \leq \pi e^{2-a^n} \, ,$$

et le membre de droite tend vers 0. La suite (f_n) converge donc uniformément vers 0 sur $[\,a,\,\infty\,[$.

Exercice 79

Etudier la convergence uniforme sur $[\,0,\,\infty\,[$, puis sur $[\,0,\,a\,]$ $(0 < a < 1)$ et sur $[\,a,\,\infty\,[$ $(a > 1)$, de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \cos \dfrac{4\pi}{x^n + x^{-n}} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \, .$$

Solution

Si $x \neq 1$, la suite $(x^n + x^{-n})$ a l'infini pour limite et donc $(f_n(x))$ converge vers $\cos 0 = 1$. Par ailleurs $f_n(1) = \cos 2\pi$ vaut 1, ainsi que $f_n(0)$, donc la suite (f_n) converge simplement vers 1. Cependant

$$f_n(2^{1/n}) = \cos \frac{8\pi}{5}$$

et la suite (f_n) ne peut pas converger uniformément vers 1 sur $[\,0,\,\infty\,[$.

En utilisant le fait que, pour tout nombre réel u, on a

$$|\cos u - 1| \leq |u|\,,$$

on obtient sur $]\,0,\, a\,]$,

$$|f_n(x) - 1| \leq \frac{4\pi}{x^n + x^{-n}} \leq 4\pi x^n \leq 4\pi a^n\,,$$

ce qui reste vrai si $x = 0$, donc le membre de droite tend vers 0 et la suite (f_n) converge uniformément vers 1 sur $[\,0,\, a\,]$.

Sur $[\,a,\, \infty\,[$, on a de même

$$|f_n(x) - 1| \leq \frac{4\pi}{x^n + x^{-n}} \leq 4\pi x^{-n} \leq 4\pi a^{-n}\,,$$

et le membre de droite tend vers 0. La suite (f_n) converge donc uniformément vers 1 sur $[\,a,\, \infty\,[$.

Exercice 80

Etudier la convergence uniforme sur $[\,0,\, \infty\,[$, puis sur $[\,a,\, \infty\,]$ $(a > 0)$, de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \sin\frac{2\pi}{1 + nx}\,.$$

Solution

Si x est non nul, la suite $(f_n(x))$ converge vers 0, ce qui est encore le cas si x est nul car $f_n(x) = \sin 2\pi$ est nul pour tout n. Donc la suite f_n converge simplement vers 0 sur $[\,0,\, \infty\,[$.

On constate que

$$f_n(2/n) = \sin\frac{2\pi}{3}\,,$$

et donc la suite $(f_n(2/n))$ ne converge pas vers 0. On ne peut avoir convergence uniforme sur $[\,0,\, \infty\,[$.

Sur $[\,a,\, \infty\,[$, en raison de l'inégalité

$$|\sin u| \leq |u|\,,$$

on obtient

$$|f_n(x)| \leq \frac{2\pi}{1 + nx} \leq \frac{2\pi}{1 + na}\,.$$

Comme le membre de droite tend vers 0, la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[\,a,\, \infty\,[$.

Exercice 81

Etudier la convergence uniforme sur $[0, \infty[$, puis sur $[a, \infty]$ $(a > 0)$ de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \sin \frac{\pi + n^2x^2}{1 + n^2x}\,.$$

Solution

Si x est non nul, la suite $(f_n(x))$ converge vers $\sin x$, ce qui est encore le cas si x est nul car $f_n(x) = \sin \pi = \sin 0$ est nul pour tout n. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f qui à x associe $\sin x$ sur $[0, \infty[$.

On constate que

$$f_n(1/n^2) - f(1/n^2) = \sin \frac{\pi + 1/n^2}{2} - \sin \frac{1}{n^2}\,,$$

et donc la suite $(f_n(1/n^2) - f(1/n^2))$ converge vers 1 et pas vers 0. On ne peut avoir convergence uniforme de (f_n) vers f sur $[0, \infty[$.

Il résulte du théorème des accroissements finis que, quels que soient les réels u et v, on a

$$|\sin u - \sin v| \leq |u - v|\,,$$

et donc, sur $[a, \infty[$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \left|\frac{\pi + n^2x^2}{1 + n^2x} - x\right| = \frac{|\pi - x|}{1 + n^2x} \leq \frac{\pi + x}{n^2x} = \frac{1}{n^2} + \frac{\pi}{n^2x} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\pi}{n^2a}\,.$$

Comme le membre de droite tend vers 0, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, \infty[$.

Exercice 82

Soit f une fonction numérique continue non constante sur $[0, \infty[$ telle que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0)\,.$$

Etudier la convergence uniforme sur $[0, \infty[$, puis sur $[a, \infty]$ $(a > 0)$, de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = f(nx)\,.$$

Solution

Si x est non nul, la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(0)$, ce qui est encore le cas si x est nul car $f_n(0) = f(0)$ pour tout n. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction constante $f(0)$ sur $[\,0,\, \infty\,[$.

On a
$$\sup_{x\geq 0}|f_n(x) - f(0)| = \sup_{x\geq 0}|f(nx) - f(0)| = \sup_{x\geq 0}|f(x) - f(0)|\,,$$
et si f n'est pas constante ce nombre n'est pas nul. On ne peut avoir convergence uniforme de (f_n) vers $f(0)$ sur $[\,0,\, \infty\,[$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K tel que $x \geq K$ implique
$$|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon\,.$$
Alors, si $n \geq K/a$ et si $x \geq a$, on a $nx \geq K$ et
$$|f_n(x) - f(0)| = |f(nx) - f(0)| \leq \varepsilon\,.$$
La suite (f_n) converge uniformément vers $f(0)$ sur $[\,a,\, \infty\,[$.

Exercice 83

Soit f une fonction numérique continue en 0 et non constante. Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, puis sur $[\,-a,\, a\,]$ $(a > 0)$, de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par
$$f_n(x) = f(x/n)\,.$$

Solution

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction constante $f(0)$.

On a
$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(0)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x/n) - f(0)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x) - f(0)|\,,$$
et si f n'est pas constante ce nombre n'est pas nul. On ne peut avoir convergence uniforme de f_n vers $f(0)$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α tel que $|x| \leq \alpha$ implique
$$|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon\,.$$
Alors, si $n \geq a/\alpha$ et si $|x| \leq a$, on a $|x|/n \leq \alpha$ et
$$|f_n(x) - f(0)| = |f(x/n) - f(0)| \leq \varepsilon\,.$$

La suite (f_n) converge uniformément vers $f(0)$ sur $[-a, a]$.

Exercice 84

Soit f une fonction numérique continue sur $[0, \infty[$. Etudier la convergence uniforme sur $[0, K]$ de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = f(x + 1/n) .$$

Donner un exemple où l'on a convergence uniforme sur $[0, \infty[$ et un exemple où l'on n'a pas convergence uniforme sur $[0, \infty[$.

Solution

La suite (f_n) converge simplement vers f.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est uniformément continue sur le compact $[0, K+1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α tel que si x et y sont dans $[0, K+1]$ tels que $|x-y| \leq \alpha$, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon .$$

Alors, si $n > 1/\alpha$ et si x appartient à $[0, K]$, le nombre $x + 1/n$ appartient à $[0, K+1]$, et

$$|f(x) - f(x + 1/n)| \leq \varepsilon .$$

On a donc convergence uniforme de la suite (f_n) vers f sur $[0, K]$.

Si f est uniformément continue sur $[0, \infty[$, le calcul précédent et sa conclusion subsistent en remplaçant $[0, K+1]$ par $[0, \infty[$. C'est le cas par exemple de la fonction sinus puisque, quels que soient les réels u et v,

$$|\sin u - \sin v| \leq |u - v| .$$

Par contre, si $f(x) = e^x$, on a

$$f_n(x) - f(x) = e^x(e^{1/n} - 1)$$

et cette fonction n'est pas bornée sur $[0, \infty[$, donc on ne peut avoir convergence uniforme dans ce cas.

Exercice 85

Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \ln\left(e^{x^2} + \frac{x^2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n}\,.$$

Trouver la limite de la suite (I_n) définie par

$$I_n = \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx\,.$$

Solution

La suite $(f_n(x))$ converge vers

$$f(x) = x^2\,.$$

Posons

$$h_n(x) = f(x) - f_n(x) = x^2 - \ln\left(e^{x^2} + \frac{x^2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \left(\frac{x^2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)e^{-x^2}\right)\,,$$

et étudions le signe de cette fonction sur $[\,0,\,\infty\,[$. (La fonction est paire). En dérivant la première expression, on obtient

$$h_n'(x) = 2x - 2x\,\frac{e^{x^2} + \dfrac{1}{n}}{e^{x^2} + \dfrac{x^2}{n} + \dfrac{1}{n^2}} = \frac{2x}{n}\,\frac{x^2 - 1 + \dfrac{1}{n}}{e^{x^2} + \dfrac{x^2}{n} + \dfrac{1}{n^2}}\,.$$

La dérivée s'annule en $u_n = \sqrt{1 - 1/n}$. Elle est négative sur $[\,0,\,u_n\,]$ et positive sur $[\,u_n,\,\infty\,[$. Donc $f - f_n$ est décroissante sur le premier intervalle et croissante sur le second, et $f - f_n$ atteint son minimum en u_n. Ce minimum vaut

$$(f - f_n)(u_n) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\,e^{-1+1/n}\right)\,.$$

En majorant $e^{-1+1/n}$ par 1, et compte tenu du fait que $0 \leq \ln(1+t) \leq t$ si $t \geq 0$. On obtient alors

$$(f - f_n)(u_n) \geq \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0\,,$$

et $f - f_n$ est positive. On a donc

$$0 \leq f(x) - f_n(x) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \left(\frac{x^2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)e^{-x^2}\right) \leq \frac{1}{n}\,,$$

et la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}\,.$$

Exercice 86

Soit h une fonction continue positive sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 1\,,$$

et soit f continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = n \int_{-1/n}^{1/n} f(x-t)h(nt)\,dt\,.$$

converge uniformément vers f sur tout intervalle $[-K,\,K]$.

Solution

En effectuant le changement de variable $x = nt$, on constate que

$$n \int_{-1/n}^{1/n} h(nt)\,dt = \int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 1\,.$$

On a alors

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| n \int_{-1/n}^{1/n} f(x-t)h(nt)\,dt - f(x) n \int_{-1/n}^{1/n} h(nt)\,dt \right| \leq n \int_{-1/n}^{1/n} |f(x-t) - f(x)|\, h(nt)\,dt\,.$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est uniformément continue sur $[-K-1,\,K+1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, quels que soient x et y dans $[-K-1,\,K+1]$ vérifiant $|x-y| \leq \alpha$ on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\,.$$

Soit $n \geq 1/\alpha$. Si x appartient à $[-K,\,K]$, alors, si t appartient à $[-1/n,\,1/n]$, le nombre $x - t$ appartient à $[-K-1,\,K+1]$. Il en résulte que

$$|f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon\,,$$

et

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon n \int_{-1/n}^{1/n} h(nt)\, dt = \varepsilon\,.$$

On a donc bien la convergence uniforme sur $[-K,\, K]$.

Exercice 87

Etudier la convergence uniforme sur $[0,\, \infty[$, puis sur $[0,\, a]$ $(a > 0)$, de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \tan\left(\arctan x - \frac{1}{n}\right)\,.$$

Solution

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto x$. En utilisant la formule de développement

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}\,,$$

on obtient

$$f(x) - f_n(x) = x - \frac{x - \tan(1/n)}{1 + x\tan(1/n)} = \frac{(x^2+1)\tan(1/n)}{1 + x\tan(1/n)}\,.$$

Lorsque x tend vers l'infini $f(x) - f_n(x)$ est équivalent à x et la fonction n'est pas bornée sur $[0,\, \infty[$, donc il ne peut y avoir convergence uniforme sur cet intervalle. Par contre sur $[0,\, a]$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq (x^2+1)\tan(1/n) \leq (a^2+1)\tan(1/n)\,,$$

et la convergence est uniforme.

Exercice 88

Etudier la convergence uniforme sur $[0,\, \pi]$ de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \arcsin\left(\sin x - \frac{1}{n}\right)\,.$$

Solution

On remarque que la fonction f_n vérifie la relation

$$f_n(\pi - x) = f_n(x)\,.$$

La limite simple vérifie donc la même relation. La suite f_n converge simplement vers la fonction f qui vaut x sur $[\,0,\,\pi/2\,]$ et donc $\pi - x$ sur $[\,\pi/2,\,\pi\,]$.

Posons
$$g_n = f - f_n\,.$$
Sur le premier intervalle
$$g_n'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} - \frac{\cos x}{\sqrt{1-(\sin x - 1/n)^2}} = \cos x\,\frac{\sqrt{1-(\sin x-1/n)^2}-\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sqrt{1-\sin^2 x}\sqrt{1-(\sin x-1/n)^2}}\,.$$
Puisque le nombre $\cos x$ est positif, le signe de $g_n'(x)$ est celui de la différence
$$D = \sqrt{1-(\sin x - 1/n)^2} - \sqrt{1-\sin^2 x}$$
c'est-à-dire aussi le signe de la différence des carrés
$$1 - \left(\sin x - \frac{1}{n}\right)^2 - (1-\sin^2 x) = \sin^2 x - \left(\sin x - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(2\sin x - \frac{1}{n}\right)\,.$$
La dérivée s'annule en $u_n = \arcsin(1/2n)$ et la fonction g_n est décroissante sur $[\,0,\,u_n\,]$ et croissante sur $[\,u_n,\,\pi/2\,]$. Puisque
$$g_n(u_n) = 2\arcsin\frac{1}{2n} > 0\,,$$
la fonction g_n est strictement positive. Alors
$$0 < g_n(x) \leq \max(g_n(0), g_n(\pi/2))\,,$$
puis, en raison de la symétrie,
$$\|f - f_n\|_\infty \leq \max(g_n(0), g_n(\pi/2))\,,$$
et la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[\,0,\,\pi\,]$.

Remarque : on peut montrer que l'on a en fait

(1) $$g_n(0) = \arcsin(1/n) \leq \pi/2 - \arcsin(1-1/n) = g_n(\pi/2)\,.$$

Tout d'abord
$$\cos g_n(0) = \cos\arcsin\frac{1}{n} = \sqrt{1-\sin^2\arcsin\frac{1}{n}} = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\,,$$
et
$$\cos g_n(\pi/2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = \sin\arcsin\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}\,.$$
Alors, puisque la fonction cosinus est décroissante sur $[\,0,\,\pi/2\,]$, en prenant le cosinus des deux membre, démontrer (1), revient à montrer que
$$\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} \geq 1 - \frac{1}{n}\,,$$

ou encore, en élevant au carré, que
$$1-\frac{1}{n^2}\geq 1+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}\,,$$
c'est-à-dire
$$\frac{2}{n}\geq\frac{2}{n^2}\,,$$
ce qui est vrai pour tout entier n strictement positif.

On a donc
$$\|f-f_n\|_\infty=\pi/2-\arcsin(1-1/n)\,.$$

Exercice 89

Etudier la convergence uniforme sur $[\,0,\,\infty\,[$, puis sur $[\,0,\,a\,]$ $(a>0)$, de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par
$$f_n(x)=n^2\,\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-nx\,.$$

Solution

En utilisant le développement limité en 0 de $\ln(1+u)$, on obtient, si x est fixé et n tend vers l'infini,
$$f_n(x)=n^2\left(\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+\circ(1/n^2)\right)-xn=-\frac{x^2}{2}+\circ(1)\,.$$
Il en résulte que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par
$$f(x)=-\frac{x^2}{2}\,.$$
Posons
$$g_n(x)=f_n(x)-f(x)=n^2\,\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-nx+\frac{x^2}{2}\,.$$
On obtient en dérivant,
$$g_n'(x)=\frac{n^2}{x+n}-n+x=\frac{x^2}{x+n}\geq 0\,.$$
La fonction g_n est donc croissante. Par ailleurs, en écrivant
$$g_n(x)=\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{2n^2}{x^2}\,\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{2n}{x}\right)\,,$$
on obtient, quand x tend vers l'infini pour n fixé,
$$g_n(x)\sim\frac{x^2}{2}\,,$$

et la fonction g_n n'est pas bornée. Il ne peut y avoir convergence uniforme sur $[0, \infty[$. Par contre comme $g_n(0)$ est nul, la fonction g_n est croissante positive et sur $[0, a]$

$$|g_n(x)| \leq g_n(a) .$$

La convergence est donc uniforme sur cet intervalle.

Exercice 90

Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \frac{x^5}{(1+x^2)^n} .$$

En déduire la limite de la suite (I_n) définie par

$$I_n = \int_0^{15} f_n(x)\, dx .$$

Solution

La suite $(f_n(x))$ converge vers 0 pour tout x réel. On obtient en dérivant

$$f_n'(x) = \frac{5x^4(1+x^2)^n - 2xn(1+x^2)^{n-1}x^5}{(1+x^2)^{2n}} = \frac{5-(2n-5)x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\, x^4 .$$

Lorsque $n \geq 3$, la dérivée s'annule en

$$x_n = \sqrt{\frac{5}{2n-5}} ,$$

et le maximum de f_n est obtenu en ce point. Donc

$$\|f_n\|_\infty = f_n(x_n) = \frac{x_n^5}{(1+x_n^2)^n} \leq x_n^5 = \left(\frac{5}{2n-5}\right)^{5/2} .$$

Comme le membre de droite tend vers 0, la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$, donc aussi sur $[0, 15]$, et la suite (I_n) converge donc vers 0.

Exercice 91

On veut étudier la convergence uniforme sur $[0, \infty[$ de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1}+n}{x^n+n}\,.$$

1) Trouver la limite simple.

2) Montrer la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

3) Pour $n \geq 3$, on pose

$$t_n = 1 + \frac{\ln\ln n}{n-1}\,.$$

Sur $[1, \infty[$, montrer que la fonction $g_n = f - f_n$ a un zéro et un seul, noté s_n, et que, pour n assez grand,

$$s_n \geq t_n > 1\,.$$

4) Montrer que

$$g_n(s_n) = s_n^{1-n} \leq t_n^{1-n}$$

et en déduire la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0, \infty[$.

Solution

1) La suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}\,.$$

On a donc

$$f(x) = \sup(1, x)\,.$$

2) Etudions la convergence uniforme sur $[0, 1]$. On a

$$|f(x) - f_n(x)| = \frac{x^n - x^{n+1}}{x^n+n} = \frac{x^n(1-x)}{x^n+n} \leq \frac{1}{n}\,.$$

La convergence est donc uniforme sur cet intervalle.

3) Sur $[1, \infty[$, posons

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \frac{n(x-1)}{x^n+n}\,.$$

En dérivant on obtient

$$g_n'(x) = n\,\frac{nx^{n-1} - (n-1)x^n + n}{(x^n+n)^2}\,.$$

En posant maintenant

$$v_n(x) = nx^{n-1} - (n-1)x^n + n\,,$$

et en dérivant, on trouve,

$$v_n'(x) = n(n-1)x^{n-2}(1-x) \leq 0\,.$$

La fonction v_n décroit strictement sur $[1,\infty[$. Comme $v_n(1) = n+1$ est positif, et que $v_n(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, la fonction v_n s'annule une fois et une seule en un point s_n de $]1,\infty[$.

Calculons $v_n(t_n)$. La suite (t_n) converge vers 1 par valeurs positives, donc

$$\begin{aligned}
v_n(t_n) &= t_n^{n-1}(n-(n-1)t_n) + n \\
&= \left(1 + \frac{\ln\ln n}{n-1}\right)^{n-1}(1-\ln\ln n) + n \\
&= n\left[1 + \frac{1-\ln\ln n}{n}\ \exp\left((n-1)\ln\left(1+\frac{\ln\ln n}{n-1}\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

Comme la suite $(\dfrac{\ln\ln n}{n-1})$ converge vers 0, on a

$$\ln\left(1+\frac{\ln\ln n}{n-1}\right) = \frac{\ln\ln n}{n-1} + \circ\left(\left(\frac{\ln\ln n}{n-1}\right)^2\right),$$

et donc

$$t_n^{n-1} = \exp\left(\ln\ln n + \circ\left(\frac{(\ln\ln n)^2}{n-1}\right)\right) = (\ln n)\ \exp\left(\circ\left(\frac{(\ln\ln n)^2}{n-1}\right)\right).$$

Alors

$$v_n(t_n) = n\left[1 + \frac{1-\ln\ln n}{n}\,(\ln n)\ \exp\left(\circ\left(\frac{(\ln\ln n)^2}{n-1}\right)\right)\right],$$

ce que l'on peut encore écrire

$$v_n(t_n) = n\left[1 + \frac{1-\ln\ln n}{\sqrt{n}}\ \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\ \exp\left(\circ\left(\frac{(\ln\ln n)^2}{n-1}\right)\right)\right].$$

Alors l'expression entre crochets tend vers 1 et

$$v_n(t_n) \sim n\,.$$

Il en résulte que pour n assez grand $v_n(t_n)$ est positif et donc que

$$1 < t_n \leq s_n\,.$$

4) Par définition $v_n(s_n)$ est nul, donc

$$-ns_n^{n-1} + (n-1)s_n^n = n\,,$$

ou encore

$$n + s_n^n = ns_n^{n-1}(s_n - 1)\,.$$

Alors

$$g_n(s_n) = \frac{n(s_n-1)}{s_n^n + n} = \frac{1}{s_n^{n-1}} \leq \frac{1}{t_n^{n-1}} = \frac{1}{\ln n}\ \exp\left(\circ\left(\frac{(\ln\ln n)^2}{n-1}\right)\right).$$

Comme le membre de droite tend vers 0, on en déduit que la suite $(g_n(s_n))$ converge vers 0 et donc que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[1, \infty[$ et finalement sur $[0, \infty[$.

Exercice 92

Etudier la convergence uniforme sur $[0, \infty[$ de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si} \quad 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si} \quad x \geq n \end{cases} .$$

Solution

Remarquons que, pour x fixé, dès que $n \geq x$, alors

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

et la suite $(f_n(x))$ converge vers

$$f(x) = e^{-x} .$$

Posons

$$g_n = f - f_n .$$

Tout d'abord, si $x \geq n$,

$$0 \leq g_n(x) = e^{-x} \leq e^{-n} = g_n(n) .$$

Le maximum de $|g_n|$ sur $\mathbb{R}$ est atteint sur $[0, n]$. Ensuite, si $0 \leq x \leq n$, on obtient en dérivant,

$$g_n'(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} - e^{-x} .$$

Comme la fonction ln est croissante, la fonction g_n' est du même signe que la fonction h_n définie par

$$h_n(x) = \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} - \ln e^{-x} = (n-1)\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + x ,$$

dont la dérivée vaut

$$h_n'(x) = \frac{1-x}{n-x} .$$

Si $n > 1$, la fonction h_n est croissante sur $[0, 1]$ et positive puisque $h_n(0)$ est nul. Elle est décroissante sur $[1, n]$ et, puisque sa limite en n vaut $-\infty$, elle s'annule une fois et une seule pour un nombre $s_n > 1$. Il en est donc de même pour g_n'. En particulier, puisque $g_n(s_n)$ est nul, on a

$$\left(1 - \frac{s_n}{n}\right)^{n-1} = e^{-s_n} .$$

Alors

$$g_n(s_n) = e^{-s_n} - \left(1 - \frac{s_n}{n}\right)^n = e^{-s_n} - e^{-s_n}\left(1 - \frac{s_n}{n}\right) = \frac{s_n\, e^{-s_n}}{n} .$$

Mais la fonction qui à x associe xe^{-x} possède un maximum en 1 et est donc majorée sur $[0, \infty[$ par e^{-1}. Alors

$$g_n(s_n) \leq \frac{1}{ne}\,.$$

Enfin, g_n est croissante sur $[0, s_n]$, décroissante sur $[s_n, n]$. De plus $g_n(0)$ et $g_n(n)$ sont positifs, donc la fonction g_n est positive sur $[0, n]$. Finalement, pour tout $x \geq 0$,

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{ne}\,,$$

et la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, \infty[$.

Exercice 93

Soit (u_n) une suite numérique de limite nulle et f une fonction numérique uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite (f_n) de fonctions définies par

$$f_n(x) = f(x + u_n)$$

converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Solution

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|x - y| \leq \alpha$ implique

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\,.$$

Il existe N tel que $n \geq N$ implique

$$|u_n| \leq \alpha\,.$$

Alors, pour tout nombre réel x, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = |f(x + u_n) - f(x)| \leq \varepsilon\,,$$

ce qui montre que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 94

Soit (u_n) une suite de fonctions numériques continues définies sur $[0, 1]$ et vérifiant les propriétés suivantes :
a) la suite (u_n) est uniformément bornée sur $[0, 1]$;
b) la suite (u_n) converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $[a, 1]$, où $0 < a < 1$.
Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et nulle en 0. Montrer que la suite (fu_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$.

Solution

La propriété a) signifie qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout entier n et tout nombre x de $[\,0,\,1\,]$

$$|u_n(x)| \leq M\,.$$

Comme f est continue sur $[\,0,\,1\,]$ elle est bornée, donc il existe $m > 0$ tel que, pour tout nombre x de l'intervalle $[\,0,\,1\,]$

$$|f(x)| \leq m\,.$$

Comme f est continue et nulle en 0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α tel que, $0 \leq x \leq \alpha$ implique

$$|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M}\,.$$

Alors, sur $[\,0,\,\alpha\,]$,

$$|f(x)u_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M}\,M = \varepsilon\,.$$

La suite (u_n) converge uniformément vers 0 sur $[\,\alpha,\,1\,]$, donc il existe N tel que $n \geq N$ et x dans $[\,\alpha,\,1\,]$ impliquent

$$|u_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{m}\,.$$

Alors, sur $[\,\alpha,\,1\,]$,

$$|f(x)v_n(x)| \leq m\,\frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon\,.$$

Finalement, pour tout x de $[\,0,\,1\,]$,

$$|f(x)u_n(x)| \leq \varepsilon$$

ce qui montre que la suite (fu_n) converge uniformement vers 0 sur cet intervalle.

Exercice 95

Soit (u_n) une suite de fonctions numériques continues définies sur un intervalle I non vide, qui converge uniformément vers u sur I, et f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite $f \circ u_n$ converge uniformément vers $f \circ u$ sur I.

Solution

La fonction f est uniformément continue, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|s - t| \leq \alpha$ implique

$$|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon\,.$$

La suite (u_n) converge uniformément vers u, donc il existe N tel que $n \geq N$ et x dans I impliquent

$$|u_n(x) - u(x)| \leq \alpha\,.$$

Alors
$$|f(u_n(x)) - f(u(x))| \leq \varepsilon$$
et la suite $(f \circ u_n)$ converge uniformément vers $f \circ u$ sur I.

Exercice 96

Soit (u_n) une suite de fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$, qui converge uniformément vers u sur $\mathbb{R}$. On suppose que u est majorée. Montrer que la suite (e^{u_n}) converge uniformément vers e^u sur $\mathbb{R}$. Donner un contrexemple si u n'est pas bornée

Solution

Si u est majorée, il en est de même de e^u. Soit alors M le maximum de e^u. On écrit
$$e^{u_n} - e^u = e^u(e^{u_n - u} - 1)\,.$$
En raison de la continuité en 0 de la fonction exponentielle, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|x| \leq \alpha$ implique
$$|e^x - 1| \leq \frac{\varepsilon}{M}\,.$$
Puisque (u_n) converge uniformément vers u, il existe N tel que $n \geq N$ implique
$$|u_n(x) - u(x)| \leq \alpha\,.$$
Alors
$$|e^{u_n(x)} - e^{u(x)}| \leq e^{u(x)}\frac{\varepsilon}{M} \leq \varepsilon\,,$$
et la suite (e^{u_n}) converge uniformément vers e^u sur $\mathbb{R}$.

Si l'on pose
$$u_n(x) = x + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad u(x) = x\,,$$
la suite (u_n) converge uniformément vers u sur $\mathbb{R}$. Mais
$$e^{u_n(x)} - e^{u(x)} = e^x(e^{1/n} - 1)\,,$$
et la fonction $e^{u_n} - e^u$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 97

On définit une suite de fonctions continues sur $[-1, 1]$ en posant, $u_0 = \mathrm{Id}$, et si $n \geq 1$,

$$u_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} u_{n-1}\right).$$

Etudier la convergence uniforme de la suite (u_n) sur les intervalles fermés inclus dans $[-1, 1]$.

Solution

Posons
$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right).$$

L'application f est une bijection strictement croissante et impaire de $[-1, 1]$ dans lui même qui conserve les intervalles $[0, 1]$ et $[-1, 0]$.

Posons $g = f - \mathrm{Id}$. On a donc
$$g'(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) - 1.$$

Dans l'intervalle $[0, 1]$, g' s'annule en un point α et un seul

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{2}{\pi}.$$

Puisque la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi/2]$, on en déduit que sur $[0, \alpha]$ la fonction g' est strictement positive, donc g est strictement croissante, et sur $[\alpha, 1]$ la fonction g' est strictement négative, donc g est strictement décroissante. De plus g s'annule en 0 et en 1. Elle est donc positive sur $[0, 1]$. Finalement, en utilisant de plus le fait que g est impaire,

$$\begin{array}{lcc} f(x) > x & \text{sur} &]0, 1[\\ f(x) < x & \text{sur} &]-1, 0[\\ f(x) = x & \text{en} & -1, 0, 1 \end{array}.$$

La suite u_n est alors définie par $u_0 = \mathrm{Id}$ et, si $n \geq 1$,

$$u_n = f \circ u_{n-1}.$$

Si x appartient à $]0, 1[$, une récurrence immédiate montre que la suite $(u_n(x))$ est strictement croissante. Comme elle est majorée par 1, elle converge vers une limite qui est un point fixe de f dans $]0, 1]$. La limite est donc 1. Par symétrie, la suite converge vers -1 si x appartient à $]-1, 0[$. Enfin la suite est constante si x appartient à $\{-1, 0, 1\}$. Donc (u_n) a pour limite simple la fonction ℓ définie par

$$\ell(x) = \left\{\begin{array}{rcc} 1 & \text{si} & x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si} & x = 0 \\ -1 & \text{si} & x \in [-1, 0[\end{array}\right..$$

Dès que l'intervalle $[\,a,\,b\,]$ contient 0 la fonction ℓ n'est pas continue sur $[\,a,\,b\,]$ et la convergence n'est pas uniforme.

Soit x dans l'intervalle $[\,a,\,b\,]$ inclus dans $]\,0,\,1\,[$. On a, puisque toutes les fonctions u_n sont croissantes (comme composées de fonctions croissantes),

$$u_n(a) \leq u_n(x) \leq 1\,,$$

et donc

$$|u_n(x) - 1| = 1 - u_n(x) \leq 1 - u_n(a)\,.$$

Il en résulte que la suite (u_n) converge uniformément vers 1 sur $[\,a,\,b\,]$. Par symétrie elle converge uniformément vers -1 si $[\,a,\,b\,]$ est inclus dans $[\,-1,\,0\,[$.

Exercice 98

On définit une suite de fonctions continues sur $[\,0,\,1\,]$ en posant, $u_0 = \mathrm{Id}$, et si $n \geq 1$,

$$u_n = 1 - \frac{u_n^2}{2}\,.$$

Montrer que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction constante que l'on déterminera.

Solution

Posons

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}\,.$$

La fonction f est décroissante sur $[\,0,\,1\,]$. On a successivement

$$f(\,[\,0,\,1\,]\,) = [\,f(1),\,f(0)\,] = [\,1/2,\,1\,]\,,$$

puis

$$f(\,[\,1/2,\,1\,]\,) = [\,f(1),\,f(1/2)\,] = [\,1/2,\,7/8\,]\,,$$

et ensuite

$$f(\,[\,1/2,\,7/8\,]\,) = [\,f(7/8),\,f(1/2)\,] = [\,79/128,\,7/8\,] \subset [\,1/2,\,7/8\,]\,.$$

Il en résulte par récurrence que pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{2} \leq u_n(x) \leq \frac{7}{8}\,.$$

D'autre part, sur l'intervalle $[\,1/2,\,7/8\,]$, on a

$$|f'(x)| = x \leq \frac{7}{8} < 1\,,$$

et la fonction f est contractante.

On peut alors appliquer le théorème du point fixe. (Voir ex 8)

On concidère l'espace vectoriel normé complet $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. L'ensemble F des fonctions u comprises entre $1/2$ et $7/8$ est une partie fermée, et l'application Φ qui à u associe

$$\Phi(u) = f \circ u$$

est une application de F dans F. Comme f est contractante, on a aussi, quels que soient u et v dans F,

$$|f \circ u(x) - f \circ v(x)| \leq \frac{7}{8} |u(x) - v(x)| ,$$

donc

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_\infty = \|f \circ u - f \circ v\|_\infty \leq \frac{7}{8} \|u - v\|_\infty ,$$

et Φ est contractante. Alors, puisque

$$u_n = \Phi(u_{n-1}) ,$$

la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge vers le point fixe ℓ de Φ. On a donc

$$\ell = \Phi(\ell) ,$$

et, pour tout x de $[0, 1]$,

$$\ell(x) = 1 - \frac{\ell(x)^2}{2} .$$

Mais l'équation

$$x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

a comme unique solution dans $[0, 1]$ le nombre $\sqrt{3} - 1$. Donc ℓ est la fonction constante $\sqrt{3} - 1$.

Chapitre 7

Espaces d'applications (bi)linéaires

Exercice 99

1) Soit $(E_1, \|.\|_1)$ et $(E_2, \|.\|_2)$ deux espaces normés, et Φ une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans un espace normé $(F, \|.\|)$.

Montrer que Φ est continue si et seulement si l'une des deux propriétés suivantes est satisfaite :
(i) Φ est continue en $(0,0)$;
(ii) il existe une constante K telle que, pour tout couple (A, B) de $E_1 \times E_2$,

$$\|\Phi(A, B)\| \leq K \, \|A\|_1 \|B\|_2 \, .$$

2) Montrer que l'on définit une norme sur l'espace $B(E_1, E_2; F)$ des applications bilinéaires continues de $E_1 \times E_2$ dans F en posant

$$|||\Phi||| = \sup_{A \neq 0, B \neq 0} \frac{\|\Phi(A, B)\|}{\|A\|_1 \|B\|_2} \, .$$

Solution

1) Si Φ est continue sur $E_1 \times E_2$, elle est bien sûr continue en $(0,0)$ et l'on a (i).

Si Φ est continue en $(0,0)$, alors, il existe r_1 et r_2 strictement positifs, tels que, $\|U\|_1 \leq r_1$ et $\|V\|_2 \leq r_2$ impliquent

$$\|\Phi(U, V)\| \leq 1 \, .$$

En particulier, si (A, B) appartient à $E_1 \times E_2$, et si A et B ne sont pas nuls, on pose

$$U = \frac{r_1}{\|A\|_1} \, A \quad \text{et} \quad V = \frac{r_2}{\|B\|_2} \, B \, ,$$

et l'on obtient deux vecteurs tels que

$$\|U\|_1 = r_1 \quad \text{et} \quad \|V\|_2 = r_2 \, ,$$

donc
$$\|\Phi(U,V)\| = \frac{r_1 r_2}{\|A\|_1 \|B\|_2}\,\|\Phi(A,B)\| \leq 1\,,$$
d'où l'on déduit
$$\|\Phi(A,B)\| \leq \frac{\|A\|_1\|B\|_2}{r_1 r_2}\,,$$
ce qui reste vrai si A ou B est nul. On a donc (ii).

Si (ii) est vérifié, alors, en écrivant

$$\begin{aligned}\Phi(A,B)-\Phi(A_0,B_0) &= \Phi(A-A_0,B)+\Phi(A_0,B-B_0)\\ &= \Phi(A-A_0,B-B_0)+\Phi(A-A_0,B_0)+\Phi(A_0,B-B_0)\,,\end{aligned}$$

on majore
$$\|\Phi(A,B)-\Phi(A_0,B_0)\| \leq K(\|A-A_0\|_1\|B-B_0\|_2+\|A-A_0\|_1\|B_0\|_2+\|A_0\|_1\|B-B_0\|_2)\,.$$

On en déduit que $\Phi(A,B)$ tend vers $\Phi(A_0,B_0)$ lorsque A tend vers A_0 et B vers B_0. L'application bilinéaire Φ est donc continue.

2) Si $|||\Phi|||$ est nul, alors $\Phi(A,B)$ est nul quels que soient A et B non nuls, ce qui reste vrai si A ou B est nul puisque Φ est bilinéaire. Donc Φ est la forme bilinéaire nulle. Les autre propriétés de la norme résultent de celles de la borne supérieure.

Exercice 100

1) Soit $(E_1, \|.\|_1)$ et $(E_2, \|.\|_2)$ deux espaces normés de dimension finie, et Φ une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans un espace normé $(F, \|.\|)$. On pose, pour tout A de E_1
$$N(A) = \sup_{M\neq 0} \frac{\|\Phi(A,M)\|}{\|M\|_2} + \|A\|_1\,.$$
Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E.

2) Montrer qu'il existe une constante K telle que, quels que soient A et B dans E,
$$\|\Phi(A,B)\| \leq K\|A\|_1\|B\|_2\,.$$
Que déduit-on de l'exercice précédent ?

Solution

1) Soit A fixé dans E_1. Comme E_2 est de dimension finie, l'application linéaire qui à M dans E_2 associe $\Phi(A, M)$ est continue sur E_2. Il existe donc une constante H telle que, pour tout M de E_2,

$$\|\Phi(A, M)\| \leq H\, \|M\|_2\,,$$

ce qui montre que $N(A)$ est fini.

Si $N(A)$ est nul, alors $\|A\|_1$, donc A, est nul, et l'on vérifie facilement les deux autres propriétés qui font de N une norme.

2) Sur l'espace E_1 de dimension finie, les normes N et $\|.\|_1$ sont équivalente et il existe une constante R telle que, pour tout A de E_1,

$$N(A) \leq R\|A\|_1\,,$$

d'où l'on déduit

$$\sup_{M\neq 0} \frac{\|\Phi(A, M)\|}{\|M\|_2} \leq (R-1)\|A\|_1\,.$$

Donc, pour tout B de E_2, on a

$$\frac{\|\Phi(A, B)\|}{\|B\|_2} \leq (R-1)\|A\|_1\,,$$

et en posant $K = R - 1$

$$\|\Phi(A, B)\| \leq K\|A\|_1\|B\|_2\,.$$

D'après l'exercice précédent, cela signifie que Φ est continue. Donc, toute application bilinéaire sur des espaces de dimension finie est continue.

Exercice 101

Soit E un espace vectoriel normé.

1) Montrer que pour tout élément e de E, il existe un élément φ_e de E' tel que

$$\varphi_e(e) = \|e\| \quad \text{et} \quad \|\varphi_e\| = 1\,.$$

(*N.B. Cette question nécessite d'utiliser le théorème de Hahn-Banach*).

2) Montrer que E s'envoit isométriquement dans E'' et $L(E, E)$ dans $L(E, E'')$.

3) Montrer que les espaces $L(E, E'')$, $L(E', E')$, $B(E, E')$ sont isométriquement isomorphes.

Solution

Pour simplifier les notations, toutes les normes de ces différents espaces seront notées $\|.\|$.

1) Soit e dans E. Considérons la droite vectorielle F engendrée par e. Soit e' la forme linéaire sur F telle que

$$e'(e) = \|e\| \,,$$

et donc, pour tout vecteur $u = \lambda e$ de F, où λ est un nombre réel,

$$|e'(u)| = |e'(\lambda e)| = |\lambda e'(e)| = |\lambda| \, \|e\| = \|\lambda e\| = \|u\| \,.$$

donc

$$|e'(u)| \leq \|u\| \,.$$

Alors, d'après le théorème de Hahn-Banach, la forme linéaire e' se prolonge à E tout entier en une forme linéaire, notée φ_e qui vérifie pour tout u de E l'inégalité

$$|\varphi_e(u)| \leq \|u\| \,.$$

Donc φ_e appartient à E' et on a égalité lorsque $u = e$, ce qui donne

$$\|\varphi_e\| = 1 \,.$$

2) $\boxed{E \to E''}$

L'application linéaire T qui à e dans E associe la forme linéaire $T(e)$ sur E' définie pour tout élément e' de E' par

$$T(e)(e') = e'(e)$$

est une isométrie de E dans E''. En effet,

$$|T(e)(e')| = |e'(e)| \leq \|e'\| \, \|e\| \,.$$

Donc $T(e)$ est continue et appartient à E''. De plus

$$\|T(e)\| \leq \|e\| \,.$$

Maintenant, en utilisant l'élément φ_e de E' obtenu dans 1), on a

$$\|e\| = |\varphi_e(e)| = |T(e)(\varphi_e)| \leq \|T(e)\| \,,$$

et l'on a égalité. En particulier

$$\|T\| = 1 \,.$$

$\boxed{L(E,E) \to L(E,E'')}$

Soit ℓ dans $L(E,E)$. On définit une application linéaire continue $\bar{\ell}$ de E dans E'' en posant,

$$\bar{\ell} = T \circ \ell \,.$$

C'est-à-dire, si e est dans E et e' dans E',

$$\bar{\ell}(e)(e') = e'(\ell(e)) \,.$$

Alors
$$\|\bar{\ell}\| \leq \|T\|\,\|\ell\| = \|\ell\|\,.$$
Pour obtenir l'inégalité inverse, supposons ℓ non nul dans $L(E,E)$ et soit ε tel que $0<\varepsilon<\|\ell\|$. Puisque $\|\ell\|$ est la borne supérieure des nombres $\|\ell(e)\|$ lorsque e est de norme inférieure à 1, il existe e dans E tel que
$$\|e\|\leq 1 \quad \text{et} \quad 0<\|\ell(e)\|\leq\|\ell\|\leq\|\ell(e)\|+\varepsilon\,.$$
Si e' est la forme linéaire $\varphi_{\ell(e)}$ obtenue dans 1), on a alors
$$\|\ell\|\leq\|\ell(e)\|+\varepsilon\leq|e'(\ell(e))|+\varepsilon=|\bar{\ell}(e)(e')|+\varepsilon\leq\|\bar{\ell}\|\,\|e\|\,\|e'\|+\varepsilon\leq\|\bar{\ell}\|+\varepsilon\,,$$
et en faisant tendre ε vers 0, on en tire
$$\|\ell\|\leq\|\bar{\ell}\|\,,$$
d'où l'égalité.

3) $\boxed{L(E,E'')\leftrightarrow L(E',E')}$

Soit ℓ dans $L(E,E'')$ et $\widetilde{\ell}$ l'application linéaire de E' dans E' telle que, pour tout e de E et e' de E', on ait
$$\widetilde{\ell}(e')(e)=\ell(e)(e')\,.$$
Alors
$$|\widetilde{\ell}(e')(e)|=|\ell(e)(e')|\leq\|\ell\|\,\|e\|\,\|e'\|\,.$$
On en déduit, pour tout e' dans E',
$$\|\widetilde{\ell}(e')\|\leq\|\ell\|\,\|e'\|\,.$$
Donc $\widetilde{\ell}$ est continue et appartient à $L(E',E')$. De plus
$$\|\widetilde{\ell}\|\leq\|\ell\|\,.$$
Réciproquement, soit λ dans $L(E',E')$ et $\widehat{\lambda}$ l'application linéaire de E dans E'' telle que, pour tout e de E et tout e' de E', on ait
$$\widehat{\lambda}(e)(e')=\lambda(e')(e)\,.$$
Alors
$$|\widehat{\lambda}(e)(e')|=|\lambda(e')(e)|\leq\|\lambda\|\,\|e\|\,\|e'\|\,.$$
On en déduit, pour tout e dans E,
$$\|\widehat{\lambda}(e)\|\leq\|\lambda\|\,\|e\|\,.$$
Donc $\widehat{\lambda}$ est continue et appartient à $L(E,E'')$. De plus
$$\|\widehat{\lambda}\|\leq\|\lambda\|\,.$$
Par ailleurs, quels que soient e dans E et e' dans E', on a
$$\widetilde{\widehat{\lambda}}(e')(e)=\widehat{\lambda}(e)(e')=\lambda(e')(e)\,,$$

donc

$$\tilde{\tilde{\lambda}} = \lambda\,.$$

De même,

$$\hat{\tilde{\ell}}(e)(e') = \tilde{\ell}(e')(e) = \ell(e)(e')\,,$$

donc

$$\hat{\tilde{\ell}} = \ell\,.$$

Il en résulte que l'application linéaire de $L(E, E'')$ dans $L(E', E')$ qui à ℓ associe $\tilde{\ell}$ est bijective. Alors

$$\|\ell\| = \|\hat{\tilde{\ell}}\| \leq \|\tilde{\ell}\| \leq \|\ell\|\,,$$

d'où l'égalité

$$\|\tilde{\ell}\| = \|\ell\|\,,$$

On a bien une isométrie.

$\boxed{L(E', E') \leftrightarrow B(E, E')}$

Soit ℓ dans $L(E', E')$ et $\bar{\ell}$ la forme bilinéaire définie sur $E \times E'$ quels que soient e dans E et e' dans E' par

$$\bar{\ell}(e, e') = \ell(e')(e)\,.$$

On a,

$$|\bar{\ell}(e, e')| = |\ell(e')(e)| \leq \|\ell\|\,\|e'\|\,\|e\|\,.$$

Donc $\bar{\ell}$ est continue et appartient à $B(E, E')$. (Voir ex. 99). De plus

$$\|\bar{\ell}\| \leq \|\ell\|\,.$$

Réciproquement, si b est dans $B(E, E')$ et $\tilde{b}$ est l'application linéaire de E' dans E' telle que, quels que soient e dans E et e' dans E',

$$\tilde{b}(e')(e) = b(e, e')\,,$$

on a

$$|\tilde{b}(e')(e)| = |b(e, e')| \leq \|b\|\,\|e\|\,\|e'\|\,,$$

puis, pour tout e' de E',

$$\|\tilde{b}(e')\| \leq \|b\|\,\|e'\|\,.$$

Donc $\tilde{b}$ est continue et appartient à $L(E', E')$. De plus

$$\|\tilde{b}\| \leq \|b\|\,.$$

Par ailleurs, quels que soient e dans E et e' dans E', on a

$$\bar{\tilde{b}}(e, e') = \tilde{b}(e')(e) = b(e, e')\,,$$

donc

$$\bar{\tilde{b}} = b\,.$$

De même
$$\tilde{\bar{\ell}}(e')(e) = \bar{\ell}(e, e') = \ell(e')(e)\,,$$
donc
$$\tilde{\bar{\ell}} = \ell\,.$$
Il en résulte que l'application linéaire de $L(E', E')$ dans $B(E, E')$ qui à ℓ associe $\bar{\ell}$ est bijective. Alors
$$\|\ell\| = \|\,\tilde{\bar{\ell}}\,\| \leq \|\bar{\ell}\| \leq \|\ell\|\,,$$
d'où l'égalité
$$\|\bar{\ell}\,\| = \|\ell\|\,.$$
On a bien de nouveau une isométrie.

Exercice 102

Soit E et F deux espaces normés, φ une application linéaire de E dans F non nulle. On suppose qu'il existe une application k de E dans $\mathbb{R}^+$, bornée sur la boule unité de E, et un nombre réel α tels que, pour tout x de E,

$$(1) \qquad \|\varphi(x)\| \leq k(x)\|x\|^{\alpha}\,.$$

1) Montrer que φ est continue, que $\alpha \leq 1$ et que
$$|||\varphi||| \leq \sup_{\|x\|=1} k(x)\,.$$

2) Montrer que si de plus k est homogène de puissance β, alors $\beta = 1 - \alpha$.

3) Montrer que pour toute application linéaire continue φ de E dans F et tout nombre $\alpha \leq 1$, il existe une fonction k de E dans $\mathbb{R}^+$, homogène de puissance $1 - \alpha$, bornée sur la boule unité, telle que, pour tout x de E, on ait (1).

Solution

1) Si y est non nul, on applique l'inégalité (1) à $y/\|y\|$. Alors
$$\frac{\|\varphi(y)\|}{\|y\|} = \varphi\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \leq k\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \leq \sup_{\|x\|=1} k(x)\,,$$
d'où
$$\|\varphi(y)\| \leq \|y\| \sup_{\|x\|=1} k(x)\,,$$
ce qui prouve que φ est continue et que
$$|||\varphi||| \leq \sup_{\|x\|=1} k(x)\,.$$

Soit u de norme 1 et λ dans $]\,0,\,1\,[$. Alors λx appartient à $B(0,1)$ et

$$|\lambda|\,\|\varphi(u)\| = \|\varphi(\lambda u)\| \leq k(\lambda u)\lambda^{\alpha}\,.$$

d'où

$$\|\varphi(u)\| \leq k(\lambda u)\lambda^{\alpha-1} \leq \lambda^{\alpha-1}\sup_{\|x\|\leq 1} k(x)\,.$$

Si l'on avait $\alpha > 1$, en faisant tendre λ vers 0 le membre de droite tendrait vers zéro et l'on trouverait que $\varphi(u)$ est nul pour tout u de norme 1. Alors, pour tout x non nul,

$$\|\varphi(x)\| = \|x\|\,\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0\,,$$

donc $\varphi = 0$, d'où une contradiction. Il en résulte que $\alpha \leq 1$.

2) Si k est homogène de puissance β, soit x un vecteur de E et λ un nombre réel strictement positif. Alors,

$$\lambda\,\|\varphi(x)\| = \|\varphi(\lambda x)\| \leq k(\lambda x)\|\lambda x\|^{\alpha} = \lambda^{\alpha+\beta}k(x)\|x\|^{\alpha}\,,$$

d'où

$$\|\varphi(x)\| \leq \lambda^{\alpha+\beta-1}k(x)\|x\|^{\alpha}\,.$$

En faisant tendre λ vers 0 si $\alpha+\beta-1>0$ et vers l'infini si $\alpha+\beta-1<0$ le membre de droite tend vers zéro et l'on trouve que $\varphi(x)$ est nul pour tout x de E ce qui n'est pas possible. C'est donc que

$$\beta = 1-\alpha\,.$$

3) Si x est non nul, posons

$$k(x) = \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|^{\alpha}}\,,$$

ainsi que $k(0)=0$. Pour tout x de E, on a donc

$$\|\varphi(x)\| = k(x)\|x\|^{\alpha}\,.$$

Alors, si λ est strictement positif et x non nul,

$$k(\lambda x) = \frac{\|\varphi(\lambda x)|\|}{\|\lambda x\|^{\alpha}} = \frac{\lambda\|\varphi(x)|\|}{\lambda^{\alpha}\|x\|^{\alpha}} = \lambda^{1-\alpha}k(x)\,,$$

ce qui montre que k est homogène de puissance $1-\alpha$.

Par ailleurs

$$\sup_{\|x\|=1} k(x) = \sup_{\|x\|=1}\|\varphi(x)\| = |\!|\!|\varphi|\!|\!|\,.$$

Exercice 103

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans cette base, on définit les normes sur E

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{et} \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad (p \in [1, \infty[\,) .$$

Soit f une forme linéaire sur E. On note $|||f|||_p$ la norme de f, comme application de $(E, \|.\|_p)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$ et l'on pose

$$F = \sum_{k=1}^n f(e_i) e_i .$$

Soit p dans $[1, \infty]$. Montrer que

$$|||f|||_p = \|F\|_q ,$$

où $1/p + 1/q = 1$.

Solution

On a, d'après l'inégalité de Hölder,

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \right| \leq \|x\|_p \|F\|_q ,$$

où $1/p + 1/q = 1$. Alors, pour montrer que

$$|||f|||_p = \|F\|_q$$

il suffit de trouver un vecteur $e = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i$ réalisant l'égalité.

$\boxed{p = 1 \ , \ q = \infty}$

Soit e_j tel que

$$|f(e_j)| = \max_{1 \leq i \leq n} |f(e_i)| .$$

On pose

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ \operatorname{sign} f(e_j) & \text{si} \quad i = j \end{cases} .$$

Alors,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = 1 \quad \text{et} \quad |f(x)| = |f(e_j)| = \max_{1 \leq i \leq n} |f(e_i)| = \|F\|_\infty ,$$

donc

$$|||f|||_1 = \|F\|_\infty .$$

$\boxed{p = \infty \ , \ q = 1}$

Pour i compris entre 1 et n, on pose

$$x_i = \operatorname{sign} f(e_i)\,.$$

Alors

$$\|x\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad |f(x)| = \sum_{i=1}^{n} |f(e_i)| = \|F\|_1\,,$$

donc

$$|||f|||_\infty = \|F\|_1\,.$$

$\boxed{1 < p < \infty \ , \ 1 < q < \infty}$

Pour i compris entre 1 et n, on pose cette fois

$$x_i = (\operatorname{sign} f(e_i))\,|f(e_i)|^{q/p}\,.$$

Alors

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|^q\right)^{1/p} = \|F\|_q^{q/p}\,,$$

et

$$|f(x)| = \sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|\,|f(e_i)|^{q/p} = \sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|^q = \|F\|_q^q\,,$$

donc

$$\|x\|_p\|F\|_q = \|F\|_q^{q/p}\|F\|_q = \|F\|_q^q = |f(x)|\,,$$

et de nouveau

$$|||f|||_p = \|F\|_q\,.$$

Exercice 104

Soit E un espace vectoriel normé complet et A dans l'espace $L(E)$ des applications linéaires continues de E dans E.

1) Montrer que la série de terme général $A^n/n!$ converge. On note $\exp A$ sa somme. Montrer que

$$|||\exp A||| \leq \exp |||A|||\,,$$

et que, si A et B commutent, on a

$$\exp(A + B) = \exp A \circ \exp B\,.$$

2) Montrer que si $|||A||| < 1$ alors $\operatorname{Id} - A$ est inversible et que la série de terme général A^n converge vers $(\operatorname{Id} - A)^{-1}$.

Solution

1) On sait que l'espace $L(E)$ est complet pour la norme d'opérateur et que

$$\text{(AN)} \qquad |||A \circ B||| \leq |||A|||\,|||B||| \quad \text{et} \quad |||\mathrm{Id}||| = 1\,.$$

Il en résulte que, pour tout entier naturel n,

$$\frac{|||A^n|||}{n!} \leq \frac{|||A|||^n}{n!}\,.$$

Comme la série de terme général $|||A|||^n/n!$ converge dans $\mathbb{R}$, alors la série de terme général $A^n/n!$ converge normalement dans $L(E)$, et, puisque l'espace $L(E)$ est complet, on en déduit qu'elle converge. On a alors

$$|||\sum_{k=0}^{n} \frac{A^n}{n!}||| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|||A^n|||}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|||A|||^n}{n!}\,,$$

et par passage à la limite

$$|||\exp A||| \leq \exp |||A|||\,.$$

Considérons la famille $\left(\dfrac{A^n}{n!} \circ \dfrac{B^m}{m!}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$. Cette famille est normalement sommable puisque

$$|||\frac{A^n}{n!} \circ \frac{B^m}{m!}||| \leq \frac{|||A|||^n}{n!}\,\frac{|||B|||^m}{m!}\,,$$

et que la famille $\left(\dfrac{|||A|||^n}{n!}\,\dfrac{|||B|||^m}{m!}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable de somme $\exp |||A|||\,\exp |||B|||$.

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \circ \frac{B^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \circ \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \circ \exp B = \exp A \circ \exp B\,.$$

On peut également sommer sur les diagonales, donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \circ \frac{B^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n} \frac{A^i \circ B^j}{i!\,j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} A^i \circ B^j\,,$$

Or, si A et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme

$$\sum_{i+j=n} \binom{n}{i} A^i \circ B^j = (A+B)^n\,.$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \circ \frac{B^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n} \frac{A^i \circ B^j}{i!\,j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \exp(A+B)\,.$$

2) Puisque

$$|||A^n||| \leq |||A|||^n\,,$$

la série de terme général A^n converge normalement dans $L(E)$ lorsque $|||A||| < 1$. Alors

$$(\mathrm{Id} - A) \sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} (A^k - A^{k+1}) = \mathrm{Id} - A^{n+1} .$$

Comme la suite (A^n) converge vers 0, on en déduit

$$(\mathrm{Id} - A) \sum_{n=0}^{\infty} A^n = \mathrm{Id} .$$

Donc $\mathrm{Id} - A$ est inversible et son inverse vaut

$$(\mathrm{Id} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n .$$

Remarque : ce qui précède reste vrai si l'on remplace $L(E)$ par une algèbre normée complète, munie d'une norme vérifiant les relations (AN).

Chapitre 8

Espaces de matrices

Exercice 105

1) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni d'une norme N. Montrer qu'il existe une constante K telle que, quels que soient A et B dans E,

$$N(AB) \leq KN(A)N(B)\,.$$

2) On pose

$$N'(A) = \sup_{M\neq 0} \frac{N(MA)}{N(M)}\,.$$

Montrer que N' est une norme sur E vérifiant, quelles que soient A et B dans E

$$N'(AB) \leq N'(A)N'(B) \quad \text{et} \quad N'(I) = 1\,.$$

3) En identifiant E à $\mathbb{K}^{n^2}$ on place sur E une des normes définie par

$$N_1(A) = \sum_{ij} |a_{ij}| \quad \text{et} \quad N_\infty(A) = \max_{ij} |a_{ij}|\,,$$

où $A = [a_{ij}]$. Montrer que

$$N_1'(A) = \max_i \sum_j |a_{ij}| \quad \text{et} \quad N_\infty'(A) = \max_j \sum_i |a_{ij}|\,.$$

Solution

1) L'application de E^2 dans E qui à (A, B) associe AB est une forme bilinéaire. D'après l'exercice 100 il existe K tel que

$$N(AB) \leq KN(A)N(B)\,.$$

2) Si $N'(A)$ est nul, alors $N(MA)$ donc MA est nul quel que soit M non nul. En particulier si $M = I$,

on trouve que A est nulle et l'on vérifie facilement les deux autres propriétés qui font de N' une norme.

Quels que soient M et A dans E, il résulte de la définition de N' que l'on a

$$N(MA) \leq N(M)N'(A)\,.$$

Alors

$$N(MAB) \leq N(MA)N'(B) \leq N(M)N'(A)N'(B)\,,$$

donc

$$N'(AB) = \sup_{M\neq 0} \frac{N(MAB)}{N(M)} \leq N'(A)N'(B)\,.$$

Par ailleurs, si $A = I$, la définition donne immédiatement

$$N'(A) = 1\,.$$

Remarque : on obtient une autre norme N'', vérifiant les mêmes propriétés, en remplaçant MA par AM dans la définition.

3) $\boxed{\text{Norme } N_1}$

On a

$$N_1(MA) = \sum_{i,j} \Big|\sum_k m_{ik}a_{kj}\Big| \leq \sum_{i,j}\sum_k |m_{ik}|\,|a_{kj}|\,.$$

Alors

$$N_1(MA) \leq \sum_i \sum_k \Big(|m_{ik}| \sum_j |a_{kj}|\Big) \leq \sum_i \sum_k \Big(|m_{ik}| \max_\ell \sum_j |a_{\ell j}|\Big)\,,$$

et donc

$$N_1(MA) \leq \Big(\max_\ell \sum_j |a_{\ell j}|\Big) \sum_{i,k} |m_{ik}| = \Big(\max_\ell \sum_j |a_{\ell j}|\Big) N_1(M)\,.$$

On en déduit que

$$N_1'(A) \leq \max_\ell \sum_j |a_{\ell j}|\,.$$

Si le maximum de $\sum_j |a_{\ell j}|$ est atteint pour ℓ_0, soit alors M la matrice telle que, quel que soit i,

$$m_{i\ell_0} = 1\,,$$

les autres termes étant nuls. Alors

$$\sum_k m_{ik}a_{kj} = a_{\ell_0 j}\,.$$

Donc

$$N_1(MA) = \sum_{i,j} |a_{\ell_0 j}| = n \sum_j |a_{\ell_0 j}| = n \max_\ell \sum_j |a_{\ell j}|\,.$$

D'autre part $N_1(M)$ vaut n, et finalement

$$N_1(MA) = N_1(M)\ \max_k \sum_j |a_{kj}|\,.$$

Il en résulte que

$$N_1'(A) = \max_k \sum_j |a_{kj}|\,.$$

$\boxed{\text{Norme } N_\infty}$

On a

$$N_\infty(MA) = \max_{i,j} \Big|\sum_k m_{ik}a_{kj}\Big| \le \max_{i,j} \sum_k |m_{ik}|\,|a_{kj}| \le \max_{i,j} \sum_k \Big(\max_\ell |m_{i\ell}|\Big)\,|a_{kj}|\,,$$

donc

$$N_\infty(MA) \le \Big(\max_{i\ell} |m_{i\ell}|\Big)\Big(\max_j \sum_k |a_{kj}|\Big) = N_\infty(M)\ \max_j \sum_k |a_{kj}|\,.$$

Notons ε_{kj} un nombre de $\mathbb{K}$ de module 1 tel que

$$\varepsilon_{kj}a_{kj} = |a_{kj}|\,.$$

Si le maximum de $\sum\limits_k |a_{kj}|$ est atteint pour j_0, soit alors M la matrice telle que, quel que soit j, le coefficient m_{j_0j} soit égal à ε_{jj_0}, les autres étant nuls. Alors

$$\sum_k m_{j_0k}a_{kj} = \sum_k \varepsilon_{kj_0}a_{kj}\,.$$

On obtient

$$\sum_k m_{j_0k}a_{kj_0} = \sum_k \varepsilon_{kj_0}a_{kj_0} = \sum_k |a_{kj_0}|\,,$$

et, si $j \ne j_0$,

$$\Big|\sum_k m_{j_0k}a_{kj}\Big| \le \sum_k |\varepsilon_{kj_0}a_{kj}| = \sum_k |a_{kj}|\,,$$

et les autres coefficients de MA sont nuls. On a donc

$$\|MA\|_\infty = \sum_k |a_{kj_0}|\,,$$

Par ailleurs

$$\|M\|_\infty = 1\,,$$

ce qui donne finalement

$$\|MA\|_\infty = \|M\|_\infty\ \max_j \sum_k |a_{kj}|\,,$$

et donc

$$N_\infty'(A) = \max_j \sum_k |a_{kj}|\,.$$

Exercice 106

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On place sur $\mathbb{K}^n$ les normes 1, 2 ou ∞. Soit E l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note $|||A|||_i$ la norme de l'application linéaire de E dans lui même de matrice A dans la base canonique. Si $A = [a_{ij}]$, montrer que

$$\begin{array}{lll} 1) \ |||A|||_1 & = & \max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}| \\ 2) \ |||A|||_\infty & = & |||A^*|||_1 = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}| \\ 3) \ |||A|||_2 & = & |||A^*|||_2 = \sqrt{|||A^*A|||_2} = \sqrt{\Lambda} = |||SAS^{-1}|||_2 \end{array}$$

où Λ est la plus grande valeur propre de A^*A et S une matrice unitaire quelconque.

Solution

Dans ce qui suit, on notera X un vecteur de $\mathbb{K}^n$ de coordonnées x_k dans la base canonique $(E_1, \dots, E_n)$.

Par définition, on a
$$|||A|||_i = \sup_{\|X\|_i \le 1} \|AX\|_i \,.$$

1) $\boxed{\text{Norme 1}}$

On a
$$\|AX\|_1 = \sum_i \Big| \sum_j a_{ij} x_j \Big| \le \sum_i \sum_j |a_{ij}|\,|x_j|\,,$$

et en permutant les sommations
$$\|AX\|_1 \le \sum_j \Big(\sum_i |a_{ij}|\Big)|x_j| \le \sum_j \Big(\max_k \sum_i |a_{ik}|\Big)|x_j| = \Big(\max_k \sum_i |a_{ik}|\Big)\sum_j |x_j|\,.$$

On en déduit que
$$\|AX\|_1 \le \max_j \sum_i |a_{ij}|\,\|X\|_1\,,$$

et donc
$$|||A|||_1 \le \max_j \sum_i |a_{ij}|\,.$$

Si l'on prend pour X le vecteur de base E_j, qui est de norme 1, le vecteur AE_i a pour coordonnées $(a_{1j}, \dots, a_{nj})$ et
$$\|AE_j\|_1 = \sum_i |a_{ij}|\,.$$

Alors il existe un des vecteurs de base E_{j_0} pour lequel

$$\|AE_{j_0}\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|\,,$$

et l'on a donc

$$|||A|||_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|\,.$$

2) $\boxed{\text{Norme } \infty}$

On a ici

$$\|AX\|_\infty = \max_i \Big|\sum_j a_{ij}x_j\Big| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|\,|x_j|\,,$$

et, en majorant $|x_i|$ par $\|X\|_\infty$, on obtient

$$\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty \max_i \sum_j |a_{ij}|\,.$$

Si le maximum précédent est atteint pour i_0, notons ε_j un nombre de $\mathbb{K}$ de module 1, tel que

$$\varepsilon_j a_{i_0 j} = |a_{i_0 j}|\,,$$

et soit

$$E = \sum_j \varepsilon_j E_j\,.$$

C'est un vecteur dont la norme infinie vaut 1, et l'on a

$$\Big|\sum_j a_{i_0 j}\varepsilon_j\Big| = \sum_j |a_{i_0 j}|$$

puis

$$\Big|\sum_j a_{ij}\varepsilon_j\Big| \leq \sum_j |a_{ij}| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| = \sum_j |a_{i_0 j}|\,,$$

donc

$$\|AE\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|\,,$$

et finalement

$$|||A|||_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|\,.$$

On remarque pour finir que l'on passe de $|||A|||_1$ à $|||A|||_\infty$ en inversant les rôle des lignes et des colonnes, et donc

$$|||A|||_\infty = |||A^*|||_1\,.$$

3) $\boxed{\text{Norme 2}}$

Si l'on note $(X|Y)$ le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on a donc

$$\|AX\|_2^2 = (AX|AX) = (A^*AX|X)\,.$$

Si λ est une valeur propre de la matrice autoadjointe A^*A et X un vecteur propre associé, on a alors

$$\|AX\|_2^2 = (A^*AX\|X) = \bar{\lambda}\,\|X\|_2^2\,,$$

et il en résulte que λ est un nombre réel strictement positif.

En diagonalisant la matrice dans une base orthonormée de vecteurs propres, on obtient

$$(A^*AX|X) = \sum_i \lambda_i\, x_i^2\,,$$

où les nombres x_i sont les coordonnées de X dans la base orthonormée. Alors

$$\|AX\|_2^2 \leq (\max_i \lambda_i)\,\|X\|_2^2 = \Lambda\,\|X\|_2^2\,,$$

avec égalité pour un vecteur propre associé à Λ. Il en résulte que

$$|||A|||_2 = \sqrt{\Lambda}\,.$$

Comme A^*A et AA^* ont les mêmes valeurs propres, on a aussi

$$|||A|||_2 = |||A^*|||_2\,.$$

Maintenant, si B est autoadjointe, alors $B^*B = B^2$ et les valeurs propres de B^2 sont les carrés des valeurs propres μ_i de B. Alors

$$|||B|||_2 = \max_i \sqrt{\mu_i^2} = \max_i |\mu_i|$$

En particulier, puisque A^*A est autoadjointe,

$$|||A^*A|||_2 = \Lambda\,,$$

donc

$$|||A|||_2 = \sqrt{|||A^*A|||_2}\,.$$

Pour finir, si $S^{-1} = S^*$, alors la matrice

$$(SAS^{-1})^*(SAS^{-1}) = S(A^*A)S^{-1}$$

a les mêmes valeurs propres que A^*A, et donc

$$|||A|||_2 = |||SAS^{-1}|||_2\,.$$

Exercice 107 *Norme de Hilbert-Schmidt*

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1) Montrer que l'on définit une norme sur E en posant

$$\|A\|_{HS} = \sqrt{\operatorname{tr}(AA^*)}\,,$$

et que, pour tout couple (A, B) de matrices de E, on a

$$\|AB\|_{HS} \leq \|A\|_{HS}\,\|B\|_{HS}\,.$$

2) Comparer cette norme aux normes $|||.|||_1$, $|||.|||_2$ et $|||.|||_\infty$ définies dans l'exercice précédent.

Solution

1) La matrice AA^* est une matrice autoadjointe de valeurs propres positives. Alors $\operatorname{tr}(AA^*)$ est la somme des valeurs propres de cette matrice et est donc positive. Si l'on note a_{ij} les coefficients de la matrice, on constate que les coefficients diagonaux de AA^* valent

$$d_{ii} = \sum_k a_{ik}\bar{a}_{ik} = \sum_k |a_{ik}|^2\,,$$

donc

$$\operatorname{tr}(AA^*) = \sum_i d_{ii} = \sum_{ik} |a_{ik}|^2\,.$$

Alors, si l'on identifie E avec l'espace $\mathbb{K}^{n^2}$, la norme $\|.\|_{HS}$ n'est autre que la norme $\|.\|_2$.

Soit maintenant deux matrices $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ de E. Le produit AB a pour coefficients

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}\,,$$

et d'après l'inégalité de Schwarz

$$|c_{ij}|^2 \leq \left(\sum_k |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_k |b_{kj}|^2\right)\,,$$

donc

$$\|AB\|_{HS}^2 \leq \sum_{ij}\left(\sum_k |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_k |b_{kj}|^2\right) \leq \|A\|_{HS}\,\|B\|_{HS}\,.$$

Remarque : $\|A\|_{HS} = \|A^*\|_{HS}$.

2) $\boxed{\text{Norme } |||.|||_1}$

En utilisant l'inégalité de Schwarz

$$|||A|||_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| \leq \max_j \sqrt{n} \left(\sum_i |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{n}\, \|A\|_{HS}\,.$$

L'égalité a lieu pour la matrice dont tous les éléments de la première colonne valent 1 alors que les autres sont nuls, car

$$|||A|||_1 = n \quad \text{et} \quad \|A\|_{HS} = \sqrt{n}\,.$$

D'autre part

$$\|A\|_{HS} = \left(\sum_j \left(\sum_i |a_{ij}|^2 \right) \right)^{1/2} \leq \left(\sum_j |||A|||_1^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n}\, |||A|||_1\,.$$

L'égalité a lieu pour la matrice I car

$$\|I\|_{HS} = \sqrt{n} \quad \text{et} \quad |||I|||_1 = 1\,.$$

Finalement

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\, \|A\|_{HS} \leq |||A|||_1 \leq \sqrt{n}\, \|A\|_{HS}\,.$$

$\boxed{\text{Norme } |||.|||_\infty}$

Comme on a

$$\|A\|_{HS} = \|A^*\|_{HS}\,,$$

et, d'après l'exercice précédent,

$$|||A|||_\infty = |||A^*|||_1\,,$$

on obtient le même encadrement

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\, \|A\|_{HS} \leq |||A|||_\infty \leq \sqrt{n}\, \|A\|_{HS}\,.$$

$\boxed{\text{Norme } |||.|||_2}$

Le nombre $|||A|||_2^2$ est une valeur propre de A^*A donc inférieure à la somme des valeurs propres (toutes positives). Donc

$$|||A|||_2^2 \leq \mathrm{tr}(A^*A) = \|A\|_{HS}^2\,.$$

L'égalité a lieu pour la matrice A dont tous les éléments sont nuls sauf a_{11} qui vaut 1 car dans ce cas,

$$|||A|||_2 = \|A\|_{HS} = 1\,.$$

Par ailleurs la somme des valeurs propres se majore par n fois la plus grande et donc

$$\|A\|_{HS}^2 \leq n|||A|||_2^2\,.$$

L'égalité a lieu pour la matrice I car

$$|||I|||_2 = 1 \quad \text{et} \quad \|I\|_{HS} = \sqrt{n}\,.$$

On a donc

$$|||A|||_2 \leq \|A\|_{HS} \leq \sqrt{n}\,|||A|||_2\,.$$

Exercice 108

Dans l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, trouver la norme de l'application linéaire tr qui à une matrice associe sa trace, selon les normes définies dans un des exercices précédents.

Solution

On part dans tous les cas de l'inégalité

$$|\operatorname{tr} A| = \left|\sum_i a_{ii}\right| \leq \sum_i |a_{ii}|\,.$$

$\boxed{\|A\| = \sum_{ij} |a_{ij}|}$

On a alors

$$|\operatorname{tr} A| \leq \|A\|$$

avec égalité si $A = I$ puisque

$$|\operatorname{tr} I| = \|I\| = n\,.$$

Donc

$$|||\operatorname{tr}||| = 1\,.$$

$\boxed{\|A\| = \max_{ij} |a_{ij}|}$

On a cette fois

$$|\operatorname{tr} A| \leq n\,\|A\|$$

avec égalité si $A = I$ puisque

$$|\operatorname{tr} I| = n \quad \text{et} \quad \|I\| = 1\,.$$

Donc

$$|||\operatorname{tr}||| = n\,.$$

$$\boxed{\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|}$$

On a de nouveau

$$|\operatorname{tr} A| \leq n \, \|A\|$$

avec égalité si $A = I$ puisque

$$|\operatorname{tr} I| = n \quad \text{et} \quad \|I\| = 1\,.$$

Donc

$$|||\mathrm{tr}||| = n\,.$$

$$\boxed{\|A\| = \max_j \sum_i |a_{ij}|}$$

Le résultat est le même que pour la norme précédente en prenant la transposée qui ne change pas la trace et fait passer d'une norme à l'autre.

$$\boxed{\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^* A)} = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2}}$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz

$$|\operatorname{tr} A| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_i |a_{ii}^2|} \leq \sqrt{n} \, \|A\|\,,$$

avec égalité si $A = I$ puisque

$$|\operatorname{tr} I| = n \quad \text{et} \quad \|I\| = \sqrt{n}\,.$$

Donc

$$|||\mathrm{tr}||| = \sqrt{n}\,.$$

$$\boxed{\|A\| = \sqrt{\Lambda} \text{ où } \Lambda \text{ est la plus grande valeur propre de } A^* A}$$

Comme la somme des valeurs propres de $A^* A$ est inférieure à n fois la plus grande, on a donc

$$\sqrt{\operatorname{tr}(A^* A)} \leq \sqrt{n} \, \|A\|\,.$$

Alors, d'après ce qui précède,

$$|\operatorname{tr} A| \leq \sqrt{n} \sqrt{\operatorname{tr}(A^* A)} \leq n \, \|A\|\,,$$

avec égalité si $A = I$ puisque

$$|\operatorname{tr} I| = n \quad \text{et} \quad \|I\| = 1\,.$$

Donc

$$|||\mathrm{tr}||| = n\,.$$

Exercice 109

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni de la norme N définie par

$$N(A) = \sum_i \max_j |a_{ij}| .$$

Déterminer

$$N'(A) = \sup_{M \neq 0} \frac{N(MA)}{N(M)} .$$

Solution

On a

$$N(MA) = \sum_i \max_j \Big| \sum_k m_{ik} a_{kj} \Big| \leq \sum_i \max_j \Big(\sum_k |m_{ik}| \, |a_{kj}| \Big) \leq \sum_i \max_j \Big(\sum_k \max_\ell |m_{i\ell}| \, |a_{kj}| \Big) ,$$

puis

$$N(MA) \leq \sum_i \Big(\max_\ell |m_{i\ell}| \max_j \sum_k |a_{kj}| \Big) = \Big(\sum_i \max_\ell |m_{i\ell}| \Big) \Big(\max_j \sum_k |a_{kj}| \Big) = N(M) \max_j \sum_k |a_{kj}| .$$

Donc

$$N'(A) \leq \max_j \sum_k |a_{kj}| .$$

Notons ε_{kj} un nombre de $\mathbb{K}$ de module 1 tel que

$$\varepsilon_{kj} a_{kj} = |a_{kj}| ,$$

et soit j_0 tel que

$$\max_j \sum_k |a_{kj}| = \sum_k |a_{kj_0}| .$$

Pour tout k, posons alors

$$m_{ik} = \begin{cases} \varepsilon_{kj_0} & \text{si } i = j_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La somme $\sum_k m_{ik} a_{kj}$ est nulle si i est distinct de j_0. Dans le cas contraire

$$\Big| \sum_k m_{j_0 k} a_{kj} \Big| \leq \sum_k |m_{j_0 k}| \, |a_{kj}| = \sum_k |a_{kj}| \leq \sum_k |a_{kj_0}| ,$$

et si $j = j_0$

$$\Big| \sum_k m_{j_0 k} a_{kj} \Big| = \Big| \sum_k \varepsilon_{kj_0} a_{kj_0} \Big| = \sum_k |a_{kj_0}| .$$

Donc
$$\max_j \Big| \sum_k m_{j_0k} a_{kj} \Big| = \sum_k |a_{kj_0}| \,,$$
puis
$$N(MA) = \sum_i \max_j \Big| \sum_k m_{ik} a_{kj} \Big| = \max_j \Big| \sum_k m_{j_0k} a_{kj} \Big| = \sum_k |a_{kj_0}| = \max_j \sum_k |a_{kj}| \,.$$
On obtient finalement
$$N'(A) = \max_j \sum_k |a_{kj}| \,.$$

Exercice 110

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni de la norme N définie par
$$N(A) = \max_j \sum_i |a_{i,i+j}| \,,$$
où dans cette somme les indices sont considérés modulo n.

Déterminer
$$N'(A) = \sup_{M \neq 0} \frac{N(MA)}{N(M)} \,,$$
et comparer les normes N et N'.

Solution

Explicitons les sommations : on aura
$$\sum_i |a_{i,i+j}| = |a_{1,1+j}| + \cdots + |a_{n-j,n}| + |a_{n-j+1,1}| + \cdots + |a_{n,j}| \,.$$
(On somme sur les "diagonales".)

Le fait de considérer les indices modulo n permet de faire des changements d'indices sans se préocupper des bornes de sommation.

On a donc
$$N(MA) = \max_j \sum_i \Big| \sum_k m_{i,k} a_{k,i+j} \Big| \leq \max_j \sum_i \sum_k |m_{i,k}| \, |a_{k,i+j}| \,.$$
Etudions la somme
$$\alpha_j = \sum_i \sum_k |m_{i,k}| \, |a_{k,i+j}| \,.$$

En posant $k = i + s$, on a encore

$$\alpha_j = \sum_i \sum_s |m_{i,i+s}| \, |a_{i+s,i+j}| = \sum_s \sum_i |m_{i,i+s}| \, |a_{i+s,i+j}| \, .$$

On obtient

$$\alpha_j \leq \sum_s \sum_i \left(|m_{i,i+s}| \, \max_\ell |a_{\ell+s,\ell+j}| \right) = \sum_s \left(\max_\ell |a_{\ell+s,\ell+j}| \, \sum_i |m_{i,i+s}| \right) .$$

Mais

$$\sum_i |m_{i,i+s}| \leq N(M) \, ,$$

donc

$$\alpha_j \leq N(M) \, \sum_s \max_\ell |a_{\ell+s,\ell+j}| \, .$$

Alors si l'on pose $u = \ell + s$, on obtient

$$\alpha_j = N(M) \, \sum_s \max_u |a_{u,u-s+j}| \, .$$

Puis en posant $t = j - s$,

$$\alpha_j = N(M) \, \sum_t \max_u |a_{u,u+t}| \, .$$

On constate que la majoration ne dépend pas de j. Finalement

$$N(MA) \leq \sup_j \alpha_j = N(M) \, \sum_t \max_u |a_{u,u+t}| \, ,$$

et donc

$$N'(A) \leq \sum_j \max_i |a_{i,i+j}| \, ,$$

Maintenant, pour tout indice j de colonne, notons i_j l'indice de ligne tel que

$$\max_i |a_{i,i+j}| = |a_{i_j,i_j+j}| \, .$$

et soit T l'ensemble des couples $(i_j + j, i_j)$. Notons ε_{kj} un nombre de $\mathbb{K}$ de module 1 tel que

$$\varepsilon_{kj} a_{kj} = |a_{kj}| \, .$$

Posons

$$m_{uv} = \begin{cases} \varepsilon_{vu} & \text{si } (u,v) \in T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Dans chaque "diagonale" il existe un élément non nul de M et un seul et cet élément est de module 1, donc $N(M)$ vaut 1.

Notons c_{ij} les coefficients de MA. On a tout d'abord

$$\sum_i |c_{ii}| = \sum_i \Big| \sum_k m_{ik} a_{ki} \Big| .$$

Mais dans cette somme les seules termes non nuls sont obtenus lorsque (i,k) appartient à T, et on obtient alors

$$\sum_i |c_{ii}| = \sum_j |a_{i_j, i_j+j}| = \sum_j \max_i |a_{i,i+j}| .$$

Par ailleurs

$$\sum_i |c_{i,i+j}| = \sum_i \Big| \sum_k m_{i,k} a_{k,i+j} \Big| \leq \sum_i \sum_k |m_{i,k}|\, |a_{k,i+j}| .$$

De nouveau, en gardant uniquement les termes non nuls obtenus lorsque (i,k) appartient à T dans la somme de droite

$$\sum_i |c_{i,i+j}| \leq \sum_s |a_{i_s, i_s+s+j}| \leq \sum_s \max_u |a_{u,u+s+j}| .$$

Enfin, en posant $v = s + j$,

$$\sum_i |c_{i,i+j}| \leq \sum_v \max_u |a_{u,u+v}| .$$

Finalement

$$N(MA) = \max_j \sum_i |c_{i,i+j}| = \sum_v \max_u |a_{u,u+v}| = N'(A) ,$$

et donc

$$N'(A) = \sum_j \max_i |a_{i,i+j}| .$$

Par construction

$$N(AM) \leq N'(A) N(M) \quad \text{et} \quad N'(I) = 1 ,$$

donc, si $M = I$,

$$N(A) \leq N'(A) N(I) ,$$

avec égalité si $A = I$. Comme $N(I)$ vaut 1, on a donc

$$N(A) \leq N'(A) .$$

En partant de

$$\max_i |a_{ij}| \leq \sum_i |a_{ij}| \leq \max_j \sum_i |a_{ij}| = N(A) ,$$

on en déduit

$$N'(A) = \sum_j \max_i |a_{ij}| \leq n\, N(A) .$$

Et l'on a égalité en prenant la matrice A telle que $a_{i1} = 1$ pour tout i, les autres termes étant nuls, car

$$N'(A) = n \quad \text{et} \quad N(A) = 1 .$$