Marc BRIANE
Gilles PAGÈS

L3 - M1
Agrégation
Écoles d'ingénieurs

Analyse
Théorie de l'intégration

8e édition

Intégrale de Lebesgue • Convolution
Transformées de Fourier et de Laplace

COURS COMPLET

- Plus de 260 exercices avec solutions
- QCM corrigés
- Problèmes d'examens

deboeck SUPÉRIEUR

Marc Briane
Gilles Pagès

Analyse

Théorie de l'intégration

Intégrale de Lebesgue • Convolution
Transformées de Fourier et de Laplace

8e édition

de boeck SUPÉRIEUR

Chez le même éditeur (extrait du catalogue)

Belhaj S., *Mathématiques pour l'économie et la gestion*
Belhaj S., Ben Aissa A., *Mathématiques pour l'informatique*
Burg P., *Mathématiques. Les fondamentaux en Licence 1*
Canon É., *Analyse numérique*
Carassus L., Pagès G., *Finance de marché. Modèles mathématiques à temps discret*
Carton O., *Langages formels. Calculabilité et complexité*
Choulli M., *Analyse fonctionnelle*
Choulli M., *Analyse complexe*
Cottet-Emard F., *36 problèmes corrigés pour le CAPES de mathématiques*
Cottet-Emard F., *Probabilités et tests d'hypothèses*
Cottet-Emard F., *Algèbre linéaire et bilinéaire*
Cottet-Emard F., *Analyse*
Cottet-Emard F., *Toutes les maths – Analyse en 40 fiches*
Cottet-Emard F., *Toutes les maths – Algèbre et probabilités en 62 fiches*
Darracq M.-C. & Rombaldi J.-É., *Analyse pour la Licence*
Darracq M.-C. & Rombaldi J.-É., *Algèbre et géométrie pour la Licence*
Darracq M.-C. & Rombaldi J.-É., *Probabilités pour la Licence*
Depauw J., *Statistiques*
Girardin V., Limnios N., *Probabilités et introduction à la statistique*
Mansuy R., R. Mneimné, *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes* – 3e édition
Pagès G., *101 quizz qui banquent. Mathématiques et finances sont-elles indépendantes ?*
Wassef P., *Algèbre. Arithmétique pour l'informatique*

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web :
www.deboecksuperieur.com

En couverture : Coupe d'un nautile © Bereta/Getty Images
Maquette et mise en page des auteurs
Conception et réalisation de couverture : Primo&Primo

Dépôt légal :
Bibliothèque royale de Belgique : 2023/13647/094
Bibliothèque nationale, Paris : août 2023

Sommaire

Table des matières

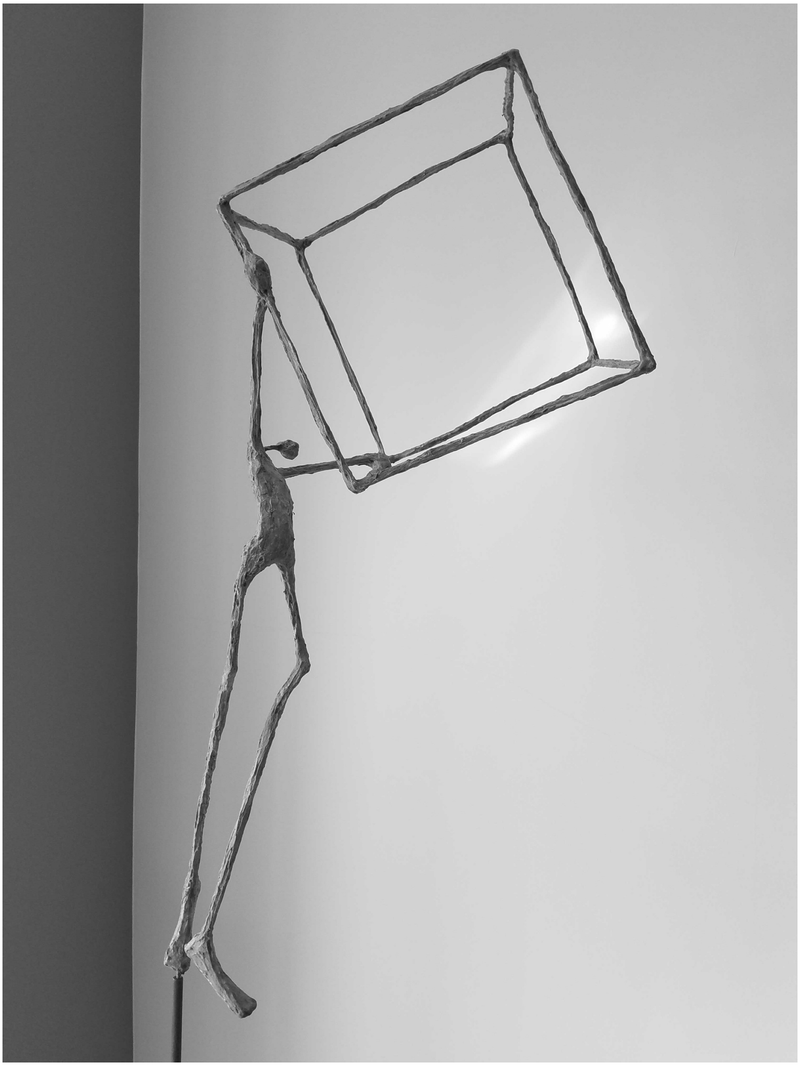

FIGURE 1 – *Sculpture en volume*, D. Lorilleux, création 2021
Galerie Laute, Rennes, https ://galerielaute.com/

Avant-propos

à la huitième édition

Ce livre, issu d'un cours d'intégration dispensé durant plusieurs années en Licence de Mathématiques à l'Université Paris XII Val de Marne puis à Sorbonne Université (anciennement Université Paris VI Pierre & Marie Curie) ainsi que depuis 2014 en troisième année (niveau L3) à l'INSA Rennes, est prioritairement destiné aux étudiants achevant leur parcours de Licence (L3) ou entamant un parcours de Master (M1) spécialisé en Mathématiques. À un premier niveau de lecture, nous y exposons les bases indispensables de la théorie de Lebesgue et ses premières applications. Les connaissances requises à l'usage de cet ouvrage sont celles d'un étudiant issu de deuxième année (niveau L2). En outre, nous avons souhaité que le lecteur puisse y trouver matière à référence au-delà de la licence, en maîtrise, pour l'agrégation, voire en troisième cycle. C'est dans cette optique que nous avons complété ce premier niveau de lecture par la démonstration détaillée des grands théorèmes classiques de la théorie (construction de la mesure de Lebesgue, théorèmes de Riesz, de Lusin, etc.). Parallèlement, nous avons mis l'accent, à travers de nombreuses applications, sur la puissance de l'intégrale de Lebesgue dans tous les problèmes mettant en jeu des interversions des symboles d'intégrale et de limite. Chaque chapitre s'achève par une section d'exercices, mêlant des énoncés de simple manipulation des définitions et des énoncés plus ambitieux.

Pour la plupart des exercices, le lecteur peut s'appuyer sur des indications regroupées en fin de volume, dans le chapitre 18. Nous savons, en effet, par expérience que des indications plutôt que des corrigés détaillés des exercices, permettent au lecteur – nous pensons particulièrement aux étudiants qui doivent être acteurs de leur apprentissage des mathématiques et se confronter aux difficultés de la discipline (Figure 1 ci-contre) – de mieux s'approprier les techniques fondamentales de l'intégrale de Lebesgue (théorème de convergence dominée, théorèmes de Fubini, changement de variables, convolution, transformées de Fourier et de Laplace). Néanmoins, les nouveaux exercices sur les transformées de Fourier et de Laplace ainsi que quelques autres plus anciens y font l'objet de corrections plus détaillées. Plus généralement, ce chapitre 18 regroupe des indications de résolution fonction de la difficulté des questions posées. Les exercices dans chaque chapitre ne suivent pas nécessairement l'ordre du chapitre. Cette configuration devrait permettre aux lecteurs de butiner au gré des difficultés, tels des abeilles *ouvrières*. Ils pourront ainsi démontrer – *via* neuf approches inspirées en partie de la compilation de R. Chapman ([1]) et déclinées sous forme d'exercices au fil des chapitres (*cf.* Bâle dans l'index) – la célèbre formule suivante, établie pour la première fois par

1. R. Chapman, "Evaluating $\zeta(2)$", Department of Mathematics, University of Exeter, 07-2003.

le mathématicien suisse Euler en 1735 ([2]) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

ou bien les étonnantes identités suivantes (*cf.* exercices 15.24 et 15.25) :

$$\pi \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin n}{n} \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin^2 n}{n^2} \;=\; \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\, dx \;=\; \pi,$$

qui illustrent l'intimité entre dénombrabilité, sommation et intégration, trois notions indissociables de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

La théorie de l'intégration peut être abordée naturellement sous deux angles très différents : la présentation fonctionnelle, issue de Bourbaki, qui prolonge l'intégrale de Riemann *via* le théorème de représentation de Riesz, et l'approche abstraite, qui s'appuie directement sur la notion de mesure positive. Nous avons choisi la seconde voie, non seulement pour son caractère (paradoxalement) plus concret, mais aussi parce qu'elle permet l'introduction naturelle des probabilités et de la statistique. La contrepartie pour les futurs "analystes" est sans doute de longs développements sur la mesurabilité. Quoi qu'il en soit, il nous semble que la mesure abstraite reste la plus accessible des deux approches pour les étudiants d'aujourd'hui, sans doute par son caractère moins topologique.

L'ouvrage se divise en six parties :

– La partie I, rappels et préliminaires, après un bref retour sur l'intégrale élémentaire qui permettra de mettre en perspective les atouts décisifs de la théorie de Lebesgue, est essentiellement consacrée à quelques éléments de théorie des cardinaux et de topologie. La notion de dénombrabilité, au cœur de l'approche de Borel et Lebesgue, est notoirement mal connue des étudiants de premier cycle. L'occasion leur est donnée de faire le point sur cette question. Les "rappels" de topologie mêlent quelques développements sur les notions de base déjà vues en cours de structures métriques à des points plus techniques – la séparabilité notamment – qui se révèleront indispensables à la suite de notre propos.

– La partie II, théorie de la mesure, bâtit les fondations de la théorie de l'intégration : tribus, fonctions mesurables, mesures positives. Un accent tout particulier est mis sur la mesure de Lebesgue. Plusieurs voies d'approfondissement sont développées : le théorème de Carathéodory et la construction des mesures de Lebesgue et Stieltjes sur la droite réelle ; la régularité des mesures sur des espaces localement compacts ou séparables complets.

– La partie III, théorie de l'intégration, débute par la construction de l'intégrale au sens de Lebesgue. On enchaîne par les trois théorèmes classiques (Beppo Levi,

2. L. Euler, "De summis serierum reciprocarum", *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol. 7 (1740), 123-134. Archivé dans *Opera Omnia*, Series 1, vol. 14, 73-86 (E41).

Fatou, Lebesgue) et les outils d'étude des intégrales dépendant d'un paramètre (continuité et dérivation ponctuelle sous le signe somme). Les espaces L^p et les théorèmes de densité – dont le théorème de Lusin – sont développés ensuite, puis viennent la mesure produit, les théorèmes de Fubini et le théorème de changement de variables ainsi que leurs applications au calcul d'intégrales multiples. Cette partie s'achève sur la notion de complétion de mesure et sur ses conséquences, en particulier le théorème de Fubini-Lebesgue.

– La partie IV, convolution et transformées de Fourier et de Laplace, est consacrée à des prolongements essentiels de la théorie de l'intégration : la convolution sur $\mathbb{R}^d$ et les transformées de Fourier et de Laplace sur $\mathbb{R}^d$, outils de base de l'Analyse harmonique mais aussi des Probabilités. Ces notions peuvent être vues comme des applications importantes des théorèmes de convergences de la partie III. La convolution avec la notion d'identités approchées est un outil indispensable dans les transformées, notamment pour les théorèmes d'inversion de Fourier (dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$) qui demeurent parmi les plus beaux résultats de l'Analyse, et qui sont aussi le point de départ de l'Analyse harmonique qui a connu ces dernières décennies un essor considérable avec le traitement d'images. Nous avons introduit dans cette huitième édition la transformée de Laplace comme prolongement naturel de la transformée de Fourier, sans la détailler autant, mais en insistant sur ses applications avec une vingtaine de nouveaux exercices très développés (sur 13 pages), traitant notamment de la résolution de diverses équations (équations différentielles, équations aux dérivées partielles, équations aux différences finies). Avec en points d'orgue : le théorème de Bernstein-Widder dont la démonstration (*cf.* exercice 15.39) repose sur tous les théorèmes fondamentaux de l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann-Liouville (*cf.* exercice 15.40) étroitement liée à la notion de dérivée fractionnaire, qui termine cet ouvrage.

– La partie V est constituée d'énoncés de QCM et de problèmes d'examen.

– La partie VI propose 30 pages d'indications détaillées (en petits caractères) des 261 exercices que comporte l'ouvrage, et les réponses aux QCM.

Signalons qu'en guise d'introduction, la partie II débute par la reproduction intégrale du texte de la Note aux *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris* d'Henri Lebesgue parue en 1901 et intitulée :

"Sur une généralisation de l'intégrale définie".

Il y présente, en quatre feuillets d'une puissance et d'une beauté mathématique saisissantes, les principes fondateurs et les premiers résultats de sa théorie.

Les parties dont le titre est précédé du symbole ♣, correspondent à des compléments ou des approfondissements qui peuvent être passées en première lecture. De même, certaines applications s'éloignant par trop du cœur de notre propos ou s'apparentant à des exercices corrigés ont été transcrits en plus petits caractères. Une table des matières détaillée introduit l'ouvrage et un index avec 477 entrées (dont un certain nombre de doubles entrées) le conclut.

Pour une large part, notre goût commun pour l'intégration nous a été transmis par nos professeurs, le regretté J. Deny et O. Kavian. Cet ouvrage leur doit beaucoup.

Les judicieux conseils et les encouragements de P.G. Ciarlet nous ont également été précieux.

Si toutes les erreurs sont les nôtres, plusieurs personnes ont contribué à en diminuer le nombre depuis la première édition : Omer Adelman, Marie-Dominique de Cayeux, Yannick Baraud, Fabienne Comte, François James, Laurence Marsalle, Patrick Polo, Jacques Roubaud, Emmanuel Roy, Dominique Simpelaere, Sergio Vega. Qu'elles en soient ici remerciées. Un remerciement tout particulier à Yannick Joncour pour son énorme travail de relecture : il a débusqué dans la 7ème version de l'ouvrage un certain nombre de coquilles !

Marc Briane et Gilles Pagès

Paris et Rennes, le 26 juin 2023.

Notations

Ensembles

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\mathscr{P}(X)$: ensemble des parties de l'ensemble X.

${}^{c}A$: complémentaire de la partie A de X.

$\mathbb{1}_A$: fonction caractéristique de A, *i.e.* $\mathbb{1}_A(x) := 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) := 0$ si $x \in {}^{c}A$.

$\subset$: inclusion au sens large.

Δ : différence symétrique.

card X : cardinal de l'ensemble X.

$X \hookrightarrow Y$: injection de X dans Y.

$\mathscr{O}(X)$: ensemble des ouverts de l'espace métrique X.

$\overline{A}$: adhérence de la partie A.

$\mathring{A}$: intérieur de la partie A.

∂A : frontière de la partie A.

$\sigma(\mathscr{C})$: tribu engendrée par la partie $\mathscr{C}$ de $\mathscr{P}(X)$.

$\Lambda(\mathscr{C})$: λ-système engendré par la partie $\mathscr{C}$ de $\mathscr{P}(X)$.

$\mathscr{A} \times \mathscr{B}$: ensemble des rectangles $A \times B$ à côtés mesurables.

$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$: produit tensoriel des tribus $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.

$(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$: complété de l'espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$.

supp$f$: support de la fonction f.

μ-*p.p.* : μ presque partout.

$\lim\limits_{n}^{\uparrow} A_n = \bigcup\limits_{n \geq 0}^{\uparrow} A_n$: réunion de la suite d'ensembles $(A_n)_{n \geq 0}$, croissante pour $\subset$.

$\lim\limits_{n}^{\downarrow} A_n = \bigcap\limits_{n \geq 0}^{\downarrow} A_n$: intersection de la suite d'ensembles $(A_n)_{n \geq 0}$, décroissante pour $\subset$.

Fonctions

$f(x_+)$: limite à droite de f en x.

$f(x_-)$: limite à gauche de f en x.

sgn : fonction signe (vaut 0 en 0).

$\Re(f)$: partie réelle de f.

$\Im(f)$: partie imaginaire de f.

$|f|$: module de f.

f^+ : maximum entre f et 0.

f^- : maximum entre $-f$ et 0.

$f \vee g$: maximum entre f et g.

$f \wedge g$: minimum entre f et g.

$\sup\limits_{i \in I} x_i$: borne supérieure de la famille de réels $(x_i)_{i \in I}$.

$\inf\limits_{i \in I} x_i$: borne inférieure de la famille de réels $(x_i)_{i \in I}$.

$\equiv$: identiquement égal à.

$\operatorname{dist}(x, A)$: distance du point x à la partie A.

Convergence de suites

$\lim\limits_n f_n$: limite de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$.

$\lim\limits_n^{\uparrow} f_n$: limite de la suite croissante $(f_n)_{n \geq 0}$.

$\lim\limits_n^{\downarrow} f_n$: limite de la suite décroissante $(f_n)_{n \geq 0}$.

$\overline{\lim\limits_n} f_n$: limite supérieure de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$.

$\underline{\lim\limits_n} f_n$: limite inférieure de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$.

$f_n \to f$: la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f.

$f_n \uparrow f$: la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge en croissant vers f.

$f_n \downarrow f$: la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge en décroissant vers f.

$f_n \xrightarrow{S} f$: la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers la fonction f.

$f_n \xrightarrow{U^t} f$: la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers la fonction f.

$f_n \xrightarrow{p.p.} f$: la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge presque partout vers la fonction f.

$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$: la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge en norme $\|\cdot\|$ vers la fonction f.

Espaces de fonctions

$\mathscr{E}([a, b], \mathbb{K})$: ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.

$\mathscr{I}([a, b], \mathbb{K})$: ensemble des fonctions Riemann-intégrables de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.

$\mathscr{C}(X, Y)$: ensemble des fonctions continues de X dans Y.

$\mathscr{C}_K(X, Y)$: ensemble des fonctions continues de X dans Y, à support compact.

$\mathscr{C}_0(\Omega, \mathbb{K})$: ensemble des fonctions continues de l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{K}$, de limite nulle à l'infini.

$\mathscr{C}^n(\Omega, \mathbb{K})$: ensemble des fonctions de l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{K}$, n fois différentiables sur Ω.

$\mathscr{C}^n_K(\Omega, \mathbb{K})$: ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^n(\Omega, \mathbb{K})$, à support compact inclus dans Ω.

$\mathscr{C}^n_b(\Omega, \mathbb{K})$: ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^n(\Omega, \mathbb{K})$, à dérivées bornées.

$\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$: ensemble des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{K}$, de puissance $p^{\text{ème}}$ μ-intégrable.

$\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc},\mathbb{K}}(\lambda_d)$: ens. des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, λ_d-intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.
$\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$: ensemble des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{K}$, μ-essentiellement bornées.
$L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$: ensemble des classes de fonctions de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ pour l'égalité μ-presque partout.
$\mathrm{Lip}_b(X, \mathbb{K})$: ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{K}$, lipschitziennes bornées.
$\mathrm{Lip}_K(X, \mathbb{K})$: ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{K}$, lipschitziennes à support compact.

Normes

$|x|$: norme de x dans $\mathbb{K}^d$.
$\|f\|_{\mathrm{sup}}$: norme sup de (la fonction) f.
$\|f\|_p$: (semi-)norme L^p de (la fonction) f.
$\|f\|_\infty$: (semi-)norme du supremum essentiel de (la fonction) f.

Première partie

Rappels et préliminaires

Chapitre 1

Intégrale au sens de Riemann

Ce chapitre est constitué de rappels sur l'intégrale de Riemann et ne comporte pas de démonstrations pour lesquelles nous renvoyons, par exemple, à [32] ou [31]. Il a simplement pour but de mettre en évidence certaines des insuffisances de cette théorie, élaborée par le mathématicien allemand Riemann dans sa thèse de doctorat [5] (soutenue en 1854 et publiée en 1857). Ses travaux généralisaient de façon décisive ceux du mathématicien français Cauchy, auteur dans les années 1820 d'une première théorie essentiellement rigoureuse de l'intégration des fonctions continues. Les deux grands précurseurs de la théorie de l'intégration au 18$^{\text{ème}}$ siècle sont incontestablement Newton – qui développa sous le nom de *fluxion* une approche systématique de la réciproque de la dérivation – et Leibniz – pour son approche géométrique fondée sur le calcul d'aire.

Notations : Dans la suite, on se placera sur un intervalle compact $[a, b]$, non vide et non réduit à un point ($-\infty < a < b < +\infty$). La lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$.

1.1 Intégrale des fonctions en escalier

***Définition* 1.1.** (a) *On appelle* subdivision *de l'intervalle* $[a, b]$ *tout* $(n + 1)$*- uplet* $\sigma := (a_0, \ldots, a_n)$ *vérifiant* $a := a_0 < \cdots < a_n := b$.
(b) *Une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est* en escalier *s'il existe une subdivision* $(a_0, \ldots, a_n)$ *de* $[a, b]$ *et des éléments* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *de* $\mathbb{K}$ *tels que*

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\},\ \forall\, x \in]a_{i-1}, a_i[, \quad f(x) = \lambda_i. \tag{1.1}$$

On note $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{K})$ *l'ensemble des fonctions en escalier de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{K}$.
(c) *L'intégrale de* f *relativement à une subdivision* σ*, provisoirement notée* $I(f, \sigma)$*, est définie par*

$$I(f, \sigma) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,(a_i - a_{i-1}).$$

Remarques : • Une fonction en escalier n'est en fait pas spécifiée aux points a_i de la subdivision et l'intégrale $I(f,\sigma)$ ne dépend donc pas de la valeur de f en ces points.
• On vérifie d'autre part que $I(f,\sigma)$ ne dépend pas de la subdivision σ choisie *sous réserve que celle-ci soit "adaptée"* à f, *i.e.* vérifie la relation (1.1).

Notations : La seconde remarque nous conduit à faire disparaître σ dans la notation de l'intégrale. En pratique, on note l'intégrale de f entre a et b indifféremment par les symboles $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. La variable x est "muette", *i.e.* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy$, etc.

***Proposition* 1.1.** (a) $\displaystyle\int_a^b : (\mathscr{E}([a,b],\mathbb{K}),\|\cdot\|_{\sup}) \longrightarrow \mathbb{K}$ *est une forme linéaire, continue puisque* $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq (b-a)\,\|f\|_{\sup}$ *où* $\displaystyle\|f\|_{\sup} := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ *désigne la norme uniforme (le* sup *est nécessairement fini car f ne prend qu'un nombre fini de valeurs).*

(b) *Si $f,\ g\in\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$, alors* $\displaystyle f\leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g.$

(c) *Si $f\in\mathscr{E}([a,b],\mathbb{K})$, alors $|f|\in\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}_+)$ et* $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$

1.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

***Définition* 1.2.** $f : [a,b]\to\mathbb{K}$ *est* Riemann intégrable – *ou* intégrable au sens de Riemann – *si*

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\Phi_\varepsilon\in\mathscr{E}([a,b],\mathbb{K}),\ \exists\,\Psi_\varepsilon\in\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}_+)\ \textit{telles que}\ \begin{cases} |f-\Phi_\varepsilon|\leq\Psi_\varepsilon \\ \textit{et} \\ \displaystyle\int_a^b \Psi_\varepsilon \leq \varepsilon. \end{cases}$$

On note $\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions Riemann intégrables définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarques : • On a en particulier pour $\varepsilon=1$, $|f|\leq|\Phi_1|+\Psi_1$ donc une fonction *Riemann intégrable* est toujours *bornée*.
• Évidemment $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{K})\subset\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ [prendre $\Phi_\varepsilon:=f$ et $\Psi_\varepsilon:=0$].

Construction de l'intégrale (esquisse) : Soit $f\in\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$. En prenant successivement $\varepsilon := \frac{1}{n}$, $n\geq 1$, la définition 1.2 entraîne l'existence de deux suites

$(\tilde{\Phi}_n)_{n\geq 1}$ et $(\tilde{\Psi}_n)_{n\geq 1}$ vérifiant, pour tout $n \geq 1$, $|f - \tilde{\Phi}_n| \leq \tilde{\Psi}_n$ et $\displaystyle\int_a^b \tilde{\Psi}_n \leq \frac{1}{n}$. Par suite,

$$\forall\, p,\, q \in \mathbb{N}^*, \quad |\tilde{\Phi}_p - \tilde{\Phi}_q| \leq |\tilde{\Phi}_p - f| + |\tilde{\Phi}_q - f| \leq \tilde{\Psi}_p + \tilde{\Psi}_q$$

et, partant,

$$\forall\, p,\, q \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_a^b \tilde{\Phi}_p - \int_a^b \tilde{\Phi}_q \right| \leq \int_a^b |\tilde{\Phi}_p - \tilde{\Phi}_q| \leq \int_a^b (\tilde{\Psi}_p + \tilde{\Psi}_q) \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

La suite $\displaystyle\left(\int_a^b \tilde{\Phi}_n\right)_{n\geq 1}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{K}$; par conséquent elle converge vers une limite ℓ finie. On vérifie ensuite immédiatement que ℓ ne dépend pas des suites $\tilde{\Phi}_n$ et $\tilde{\Psi}_n$ sous réserve que $|f - \tilde{\Phi}_n| \leq \tilde{\Psi}_n$ et $\displaystyle\lim_n \int_a^b \tilde{\Psi}_n = 0$.

***Définition* 1.3.** *La limite commune aux suites* $\displaystyle\left(\int_a^b \tilde{\Phi}_n\right)_{n\geq 1}$ *est notée* $\displaystyle\int_a^b f$. *C'est l'intégrale – au sens de Riemann – de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.*

***Proposition* 1.2.** (a) $\mathscr{I}([a, b], \mathbb{K})$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et*

$$\int_a^b : (\mathscr{I}([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\sup}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une forme linéaire continue de norme $b - a$.

(b) *Si $f \in \mathscr{I}([a, b], \mathbb{K})$ alors $|f| \in \mathscr{I}([a, b], \mathbb{R}_+)$ et* $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

(c) *Soit $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Alors, pour toute fonction f dans $\mathscr{I}([a, b], \mathbb{C})$, $\varphi(f) \in \mathscr{I}([a, b], \mathbb{C})$ et*

$$\int_a^b \varphi(f) = \varphi\left(\int_a^b f\right).$$

(d) *Si $f,\, g \in \mathscr{I}([a, b], \mathbb{K})$ alors $f\,g \in \mathscr{I}([a, b], \mathbb{K})$.*

Exercice : Montrer que si $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{I}([a, b], \mathbb{R})$ et si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est monotone “coordonnée par coordonnée”, alors $\varphi(f_1, \ldots, f_n) \in \mathscr{I}([a, b], \mathbb{R})$.

***Application* 1.1.** (a) Du point (b) de la proposition précédente, on déduit la positivité et la croissance de l'intégrale au sens où

$$\forall\, f,\, g \in \mathscr{I}([a, b], \mathbb{R}) \quad f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0 \quad \text{et} \quad f \geq g \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

(b) Du point (c), on déduit que si $f \in \mathscr{I}([a, b], \mathbb{C})$, alors $\Re(f)$, $\Im(f)$ et $\bar{f}$ sont Riemann intégrables.

***Proposition* 1.3.** *(Relation de Chasles) Soit* $c \in]a, b[$*. Si* $f \in \mathscr{I}([a, b], \mathbb{K})$ *alors les restrictions de* f *à* $[a, c]$ *et* $[c, b]$ *sont Riemann intégrables et*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Conventions : • Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^a f := 0$.

• Pour tous réels $a > b$, on pose $\displaystyle\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Il est essentiel de noter que, au vu de ces conventions, la relation de Chasles s'étend à tout triplet a, b, c de réels dès que la fonction f est Riemann intégrable sur l'intervalle $[\min(a, b, c), \max(a, b, c)]$.

***Proposition* 1.4** (Intégrale et convergence uniforme)**.** *Soit* $(f_n)_{n \geq 1}$ *une suite de fonctions de* $\mathscr{I}([a, b], \mathbb{K})$ *qui converge uniformément vers* f*,* i.e. $\|f_n - f\|_{\sup} \to 0$*, alors*

$$f \in \mathscr{I}([a, b], \mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n.$$

Citons encore un critère de Riemann intégrabilité, souvent utile dans les applications.

***Proposition* 1.5.** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée et Riemann intégrable sur tout intervalle* $[\alpha, \beta]$ *contenu dans* $]a, b[$*. Alors* f *est Riemann intégrable sur* $[a, b]$*.*

À ce stade, la question naturelle est évidemment de savoir s'il existe des fonctions Riemann intégrables en dehors des fonctions en escalier.

1.3 Fonctions réglées

***Définition* 1.4.** *Une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ *est* réglée *s'il existe une suite* $(f_n)_{n \geq 1}$ *de fonctions en escalier convergeant uniformément vers* f*.*

En d'autres termes, les fonctions réglées constituent l'adhérence des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions bornées pour la norme de la convergence uniforme $\| \,.\, \|_{\sup}$.

***Proposition* 1.6.** *Si une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ *est réglée, alors* $f \in \mathscr{I}([a, b], \mathbb{K})$*.*

Ce résultat est un corollaire immédiat de la proposition 1.4.

***Théorème* 1.1.** *Une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ *est réglée si et seulement si elle possède une limite à droite en chaque point de* $[a, b[$ *et une limite à gauche en chaque point de* $]a, b]$ *(ces limites s'entendent dans* $\mathbb{K}$*).*

***Corollaire* 1.1.** (a) $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K}) \subset \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$.

(b) *Si une fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est monotone, alors* f *est Riemann intégrable.*

Exemples : 1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) := \sin(1/x)$ si $x \in]0,1]$ et $f(0) := 0$. La fonction f n'est pas réglée puisque f n'a pas de limite en 0^+. Elle est cependant Riemann intégrable, d'après la proposition 1.5, puisque f est continue sur $]0,1]$ et bornée sur $[0,1]$.

2. La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) := 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $f(x) := \dfrac{1}{q}$ si $x = \dfrac{p}{q}$, $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$, est réglée (*cf.* exercice 1.3).

3. La fonction indicatrice des rationnels sur $[0,1]$ définie par $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) := 1$ si $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) := 0$ sinon, n'est pas Riemann intégrable.
En effet, soient $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([0,1],\mathbb{R})$, $\psi \geq 0$ telles que $|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} - \varphi| \leq \psi$. Il vient $\varphi - \psi \leq \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \leq \varphi + \psi$. Or $\varphi \pm \psi$ étant en escalier, on a nécessairement, sauf éventuellement en un nombre fini de points, $\varphi - \psi \leq 0 \leq 1 \leq \varphi + \psi$: en effet, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ étant denses dans $\mathbb{R}$, tout intervalle ouvert non vide contient à la fois des rationnels et des irrationnels. En particulier, $1 - \psi \leq \varphi \leq \psi$ et donc $\psi \geq \frac{1}{2}$ sauf sur un ensemble fini. D'où $\displaystyle\int_0^1 \psi \geq \frac{1}{2}$. Ceci contredit la définition de la Riemann intégrabilité dès que $\varepsilon < 1/2$.

On notera cependant que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est "très souvent" nulle et qu'il semblerait raisonnable de poser $\displaystyle\int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = 0$.

***Application* 1.2.** (a) *Riemann intégrabilité et convergence simple* : Soient $(r_n)_{n\geq 1}$ une numérotation des rationnels de $[0,1]$ et $f_n(x) := \mathbb{1}_{\{r_1,\ldots,r_n\}}(x)$, $n \geq 1$. Les fonctions f_n sont clairement en escalier donc Riemann intégrables. D'autre part, pour tout $x \in [0,1]$, $\lim\limits_n f_n(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$ qui n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$. On en déduit que $\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ n'est pas stable pour la convergence simple.

(b) *Composition de fonctions Riemann intégrables* : Soient f, g deux fonctions respectivement définies par :

– $f(x) := 0$ si $x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $f(x) := \dfrac{1}{q}$ si $x = \dfrac{p}{q}$, $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$, $p \leq q$, $f(0) := 1$

– $g(x) := 1$ si $x \in]0,1]$ et $g(0) := 0$.

Les fonctions f et g sont Riemann intégrables (*cf.* exemple 2 pour f, g étant en escalier), cependant on constate que $g \circ f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \notin \mathscr{I}([0,1],\mathbb{R})$ (*cf.* exemple 1). La Riemann intégrabilité n'est donc pas stable par composition. Néanmoins, le résultat est vrai dès que la fonction g est continue.

1.4 Intégrale de Riemann et calcul de primitive

***Proposition* 1.7.** *Soit* $f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$. *Alors f est Riemann intégrable sur tout intervalle* $[a,x]$, $x \in [a,b]$ *et l'on pose* $F(x) := \int_a^x f$ *pour* $x \in [a,b]$.

(a) *F est lipschitzienne de rapport* $\|f\|_{\sup}$ (i.e. $|F(x)-F(y)| \le \|f\|_{\sup}\,|x-y|$*).*

(b) *Si f est continue à droite en* $c \in [a,b[$, *alors F est dérivable à droite en c et* $F'_d(c) = f(c)$, *idem à gauche sur* $]a,b]$.

***Corollaire* 1.2.** *Si f est continue sur* $[a,b]$, *alors f admet une primitive sur* $[a,b]$, i.e. *une application* $F : [a,b] \to \mathbb{K}$ *telle que* $F' = f$, *et toute primitive F de f vérifie :*

$$\forall\, x \in [a,b], \quad F(x) = F(a) + \int_a^x f.$$

***Application* 1.3.** La fonction $(x \mapsto 1/x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet donc une (unique) primitive nulle en 1 : c'est le logarithme népérien $\ln(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}$.

Contre-exemple : Il existe des fonctions f non Riemann intégrables (et donc *a fortiori* non continues) admettant des primitives. Ainsi, la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) := -\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{2}\sqrt{x}\,\sin\left(\frac{1}{x}\right),\ x \in]0,1],\ f(0) := 0,$$

a pour primitive sur $[0,1]$ la fonction F définie par

$$F(x) := x^{\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \in]0,1], \quad F(0) := 0.$$

Or, la fonction f n'étant pas bornée – $f(\frac{1}{2\pi n}) = -\sqrt{2\pi n}$ – ne peut être Riemann intégrable sur $[0,1]$.

***Proposition* 1.8.** *Si* $F : [a,b] \to \mathbb{K}$ *est dérivable (à droite) de dérivée (à droite)* F'_d *Riemann intégrable sur* $[a,b]$, *alors*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'_d.$$

1.5 Changement de variable et intégration par parties

Ce sont les deux principaux outils pratiques du calcul intégral élémentaire.

***Théorème* 1.2** (Changement de variable élémentaire)**.** *Soit* $\varphi \in \mathscr{C}^1([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ *et* $f \in \mathscr{C}(\varphi([\alpha,\beta]),\mathbb{K}) \subset \mathscr{I}(\varphi([\alpha,\beta]),\mathbb{K})$. *Alors :*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

Remarque : Seuls les changements de variable monotones ont un intérêt pratique. Dans ce cas $\varphi([\alpha,\beta])=[\varphi(\alpha),\varphi(\beta)]$ ou $[\varphi(\beta),\varphi(\alpha)]$ selon que φ est croissante ou décroissante.

Exemple : Calcul de $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\mathrm{ch}(x)}$. On pose $x := \varphi(u) := \mathrm{argsh}(u) \in \mathscr{C}^1([0,\mathrm{sh}(a)])$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\mathrm{sh}(a)) = a$ et $\varphi'(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, donc

$$\int_0^a \frac{dx}{\mathrm{ch}(x)} = \int_0^{\mathrm{sh}(a)} \frac{du}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(u))\sqrt{1+u^2}} = \int_0^{\mathrm{sh}(a)} \frac{du}{1+u^2} = \arctan(\mathrm{sh}(a)).$$

***Théorème* 1.3** (Intégration par parties élémentaire)**.** *Soient $f, g \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{K})$. La formule d'intégration par parties s'écrit*

$$\int_a^b f\,g' = [f\,g]_a^b - \int_a^b f'\,g.$$

Exemple : Calcul d'une primitive de la fonction arctan :

$$\int_0^x \arctan(u)\,du = [u\arctan(u)]_0^x - \int_0^x \frac{u}{1+u^2}\,du = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

1.6 Formules de la moyenne

***Proposition* 1.9** (Première formule de la moyenne)**.** *Soient $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{R}_+)$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f\,g = f(c)\int_a^b g.$$

Remarques : • Si $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f = f(c)\,(b-a)$.

• Le résultat n'est pas vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ix}\,dx = 0 \neq e^{ic}\,(2\pi - 0)$ pour tout $c \in [0,2\pi]$.

***Proposition* 1.10** (Seconde formule de la moyenne)**.** *Soient f, $g \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{R})$, f positive et décroissante. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f\,g = f(a_+)\int_a^c g.$$

***Application* 1.4.** Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles, Riemann intégrables sur tout intervalle compact de $[1,+\infty[$ et vérifiant : f est positive, décroissante, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $G(x) := \displaystyle\int_1^x g$ est bornée, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f\,g$ existe dans $\mathbb{R}$.

Démonstration : La fonction $\displaystyle\int_1^x f\,g$ vérifie le critère de Cauchy au voisinage de $+\infty$. En effet,

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,A_\varepsilon \geq 1,\ \forall\,y \geq x > A_\varepsilon,\ \left|\int_1^y f\,g - \int_1^x f\,g\right| = \left|\int_x^y f\,g\right|$$
$$= f(x_+)\,|G(c) - G(x)|$$
$$\leq 2\,f(x)\,\|G\|_{\sup} < \varepsilon. \quad \Diamond$$

En appliquant ce dernier résultat aux fonctions $f(x) := \dfrac{1}{x^\alpha}$ et $g(x) := \sin(x)$, on établit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,dx$ est convergente pour $\alpha \in]0,1]$, bien que non absolument convergente (nommée intégrale généralisée semi-convergente).

1.7 Sommes de Riemann

***Définition* 1.5.** *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ *et* $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ *une subdivision de* $[a,b]$. *On appelle* pas de la subdivision σ *la quantité* $\|\sigma\| := \max\limits_{1\leq i\leq n}(a_i - a_{i-1})$. *Soit* $\xi_\sigma = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *un* n*-uplet d'éléments de* $\mathbb{K}$ *vérifiant :* $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$. *On définit* la somme de Riemann *relative à* f, σ *et* ξ_σ *par :*

$$S(f,\sigma,\xi_\sigma) := \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})\,f(\xi_i).$$

On notera que $S(f,\sigma,\xi_\sigma) = \displaystyle\int_a^b \varphi$ où φ est une fonction en escalier vérifiant $\varphi(x) := f(\xi_i)$ pour $x \in]a_{i-1}, a_i[$.

***Théorème* 1.4.** *Si* $f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$*, alors*

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\alpha>0,\ \forall\,\sigma \text{ subdivision de } [a,b],\ \|\sigma\| \leq \alpha \Rightarrow \left|S(f,\sigma,\xi_\sigma) - \int_a^b f\right| \leq \varepsilon.$$

On peut établir ce résultat à titre d'exercice lorsque $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ en utilisant l'uniforme continuité de la fonction f sur le compact $[a,b]$. Dans le cas général, sa démonstration est plus délicate.

***Application* 1.5.** Si $f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$

Ainsi, par exemple,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

1.8 L'espace semi-normé $\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$

***Définition* 1.6.** *On pose, pour toute fonction $f\in\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$, $N_1(f):=\displaystyle\int_a^b|f|$.*

***Proposition* 1.11.** $(\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K}),N_1)$ *est un espace semi-normé non complet.*

La semi-norme N_1 n'est pas une norme car la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x):=0$ si $x\in\,]0,1]$ et $f(0):=1$, n'est pas nulle sur $[0,1]$ bien que $\displaystyle\int_0^1|f|=0$. On admettra que l'on peut exhiber une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ vérifiant :

(i) $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,n_\varepsilon\geq 1,\ \forall\,p,q\geq n_\varepsilon,\quad N_1(f_p-f_q)\leq\varepsilon,$

(ii) Pour aucune fonction $f\in\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ on a $\lim_n N_1(f_n-f)=0$.

Cependant, lorsque la fonction f est continue et positive, on montre aisément que, si $\displaystyle\int_a^b f=0$, alors $f\equiv 0$. On en déduit aussitôt que $(\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K}),N_1)$ est un espace normé. Mais lui non plus n'est pas complet.

***Proposition* 1.12.** $(\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K}),N_1)$ *est un espace normé non complet.*

La non-complétude découle du contre-exemple suivant :

Contre-exemple : Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ la suite de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ affine par morceaux définie par $f_n:=1$ sur $[0,\frac{1}{2}]$ et $f_n:=0$ sur $[\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1]$. On vérifie, d'une part, que la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ est de Cauchy dans $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),N_1)$ et, d'autre part, qu'elle converge simplement et dans $(\mathscr{I}([0,1],\mathbb{R}),N_1)$ vers $\tilde{f}_\infty:=\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}\notin\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Si f_n convergeait vers une fonction continue f_∞ au sens de la norme N_1, on aurait nécessairement $N_1(f_\infty-\tilde{f}_\infty)=0$. Or, on vérifie sans peine que, pour toute fonction continue f, $N_1(f-\tilde{f}_\infty)>0$. D'où la non-complétude annoncée.

1.9 Intégrales dépendant d'un paramètre

On considère la fonction

$$f:\quad \begin{array}{ccc} J\times[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ (t,x) & \longmapsto & f(t,x)\end{array}$$

où J est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

***Proposition* 1.13.** (a) *(Continuité sous le signe intégrale) Si $f\in\mathscr{C}(J\times[a,b],\mathbb{K})$, alors la fonction F définie par $F(t):=\displaystyle\int_a^b f(t,x)\,dx$ est continue sur J.*

(*b*) *(Dérivabilité sous le signe somme) Si* f *et* $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ *sont dans* $\mathscr{C}(J \times [a,b], \mathbb{K})$*, alors* F *est dérivable sur* J *et*

$$\forall\, t \in J, \quad F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, dx.$$

Remarque : Si $g \in \mathscr{I}([a,b], \mathbb{K})$ et $f(t,x) := g(x)$ si $x \leq t$ et $f(t,x) := 0$ si $x > t$, on note que $F(t) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)\ dx = \int_a^t g$ ne rentre aucunement dans le cadre de la proposition précédente.

Ce résultat laisse donc ouvert tous les cas où f n'est pas continue et, surtout, celui où l'intégrale est définie sur un intervalle non compact ($\mathbb{R}$, $]0,1[$, $\ldots$). En fait, il existe des théorèmes généraux relatifs aux intégrales généralisées dépendant d'un paramètre mais ceux-ci sont d'un usage compliqué et il est généralement plus efficace de "couper" les intégrales en morceaux pour faire le travail "à la main".

***Application* 1.6.** *Calcul de l'intégrale impropre* $F(t) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ e^{-tx} dx, t \geq 0.$

DÉMONSTRATION : L'idée est de dériver sous le signe intégral pour faire apparaître la fonction $x \mapsto \sin x\, e^{-tx}$ dont il est facile de calculer une primitive. Mais les théorèmes dont on dispose ne sont valables que sur des intervalles compacts. On considère donc la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$F_n(t) := \int_0^n \frac{\sin x}{x}\ e^{-tx}\, dx, \quad t \geq 0.$$

<u>Étape 1</u> *La suite* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* F *sur* $\mathbb{R}_+$ *et* F *est continue sur* $\mathbb{R}_+$:

Soient $n \leq m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto x^{-1}\, e^{-tx}$ étant positive, décroissante et continue, il existe d'après la seconde formule de la moyenne (proposition 1.10), un réel $c \in [n,m]$ tel que

$$F_m(t) - F_n(t) = \int_n^m \frac{\sin x}{x}\ e^{-tx}\, dx = \frac{e^{-nt}}{n} \int_n^c \sin x\, dx = \frac{e^{-nt}}{n}\,(\cos n - \cos c).$$

Le critère de Cauchy de convergence uniforme est donc vérifié puisque

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad |F_m(t) - F_n(t)| \leq \frac{2}{n}.$$

D'autre part, la fonction g définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $g(t,x) := \dfrac{\sin x}{x}\ e^{-tx}$ si $x \neq 0$ et $g(t,0) := 1$ est continue sur le pavé $[0,n] \times \mathbb{R}_+$. La fonction F_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ d'après la proposition 1.13. Finalement la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Elle l'est donc en particulier en 0.

<u>Étape 2</u> *La fonction* F *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $F'(t) = \dfrac{-1}{1+t^2}$:

Comme $\left(x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}\right)$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0,n] \times \mathbb{R}_+$. Par suite, d'après la proposition 1.13(b), la fonction F_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $F_n'(t) = -\displaystyle\int_0^n \sin x\, e^{-tx}\, dx.$

Soient $a > 0$, $t \geq a$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il vient, d'après la relation de Chasles,

$$\left| F_n'(t) + \int_0^{+\infty} \sin x \, e^{-tx} \, dx \right| = \left| \int_n^{+\infty} \sin x \, e^{-tx} \, dx \right| \leq \int_n^{+\infty} e^{-tx} \, dx = \frac{1}{nt} \leq \frac{1}{na}$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x \, e^{-tx} \, dx = \Im\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-t)x} \, dx\right) = \Im\left(\left[\frac{e^{(i-t)x}}{i-t}\right]_{x=0}^{x=+\infty}\right) = -\frac{1}{1+t^2}.$

La suite $(F_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers la fonction $t \mapsto -\dfrac{1}{1+t^2}$ sur $[a, +\infty[$. Comme F est limite simple de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$, F est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ *i.e.* sur $\mathbb{R}_+$ et $F'(t) = -\dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t > 0$.

Étape 3 $\forall\, t \geq 0, \quad F(t) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan t$:

D'après l'étape 2, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t > 0$, $F(t) = k - \arctan t$. Comme F est continue en 0, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t) = F(0) = k$. D'autre part, pour tout $t > 0$,

$$|F(t)| \leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| e^{-tx} \, dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} \, dx = \frac{1}{t},$$

d'où $\lim\limits_{t\to +\infty} F(t) = 0 = k - \dfrac{\pi}{2}$. Par conséquent, pour tout $t \geq 0$, $F(t) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan t$. $\Diamond$

Conclusion

On a pu constater à plusieurs reprises dans ce chapitre que l'intégrale de Riemann souffrait de nombreuses limitations tant sur le plan théorique que pratique : ainsi, une fonction Riemann intégrable est nécessairement bornée, $\mathscr{I}([a, b])$ l'espace des fonctions Riemann intégrables n'est stable, ni par convergence simple, ni par composition quand cela est possible. L'espace $\big(\mathscr{I}([a, b]), N_1\big)$ n'est pas complet. Les intégrales dépendant d'un paramètre ne donnent lieu à des résultats généraux que dans des cadres très restrictifs (fonctions continues).

En outre, malgré toutes ces limitations, l'intégrale de Riemann reste un outil très technique et d'un maniement délicat. D'où l'intérêt d'introduire une nouvelle notion d'intégrale possédant un plus vaste champ d'applications et fournissant des outils plus puissants dans la résolution des questions pratiques.

Quant à l'intégrale de Riemann, elle conserve néanmoins certains attraits, notamment par son extension immédiate aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach (*i.e.* un espace vectoriel normé complet). En effet, l'extension de l'intégrale au sens de Lebesgue à ce type de fonctions, qui ne sera pas abordée dans cet ouvrage, se révèle, elle, particulièrement délicate.

1.10 Exercices

Les exercices 1.9, 1.11, 1.12, 1.15, 1.16, 1.18 traitent du problème d'interversion limite-intégrale et pointent les insuffisances de l'intégrale de Riemann liées à l'emploi restrictif de la convergence uniforme (*cf.* proposition 1.4), qui nécessite souvent des découpages d'intégrales assez techniques. Les puissants théorèmes de l'intégrale de Lebesgue du chapitre 8 permettront de surpasser ces difficultés (*cf.* en particulier l'exercice 8.0).

1.1 $a)$ Soient $f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne sur un intervalle borné contenant l'image de f. Montrer que $g \circ f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$.
$b)$ Plus généralement, montrer que $g \circ f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ si g est continue.

1.2 *Lemme de Riemann-Lebesgue* et *Problème de Bâle* 1

$a)$ Soit $f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que $\displaystyle\lim_n \int_a^b f(x)\, e^{inx}\, dx = 0$.

$b)$ Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi \left(\alpha\, x + \beta\, x^2\right) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{n^2}$.

$c)$ Montrer que pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left((n+1/2)\, x\right)}{2\, \sin(x/2)} - \frac{1}{2}$.

$d)$ En déduire la formule $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ en appliquant $a)$ sur $[\delta,\pi]$, $\delta \in]0,\pi]$, et en majorant l'intégrale sur $[0,\delta]$ à l'aide de l'inégalité $\sin(x/2) \geq x/\pi$.

1.3 Montrer que la fonction f suivante est réglée :

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N}^* \text{ premiers entre eux.} \end{cases}$$

1.4 Soit $f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{R}_+^*)$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f > 0$.

1.5 Calculer la limite de la suite $\displaystyle u_n := \left(\frac{(2n)!}{n!\, n^n}\right)^{1/n}$ pour $n \geq 1$.

1.6 Soit $f \in \mathscr{I}([0,1],\mathbb{R})$. Calculer la limite de $\displaystyle T_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$, $n \geq 1$.

1.7 *Somme de Riemann*

$a)$ Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ soit convergente. Montrer que $\displaystyle\lim_n \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}\,(b-a)\right) = \int_a^b f(x)\, dx$.

$b)$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

En déduire, à l'aide du $a)$ la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi \ln(\sin x)\, dx$.

1.8 Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que f soit décroissante et $0 \le g \le 1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \le \int_0^I f(x)\, dx$ où $\displaystyle I := \int_0^1 g(x)\, dx$.

1.9 Soit $(f_n)_{n\ge 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $\displaystyle f_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$.

Montrer que $(f_n)_{n\ge1}$ est de Cauchy mais ne converge pas dans $\big(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}), N_1\big)$ où $N_1(f) := \int_0^1 |f|$.

1.10 $a)$ Soit $(f_n)_{n\ge0}$ la suite définie par $\displaystyle f_n(x) := \frac{2^n x}{1 + n\, 2^n x^2}$ pour $x \in [0,1]$.

La suite $(f_n)_{n\ge0}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$? Sur $[a,1]$ avec $a > 0$?

$b)$ Calculer $\displaystyle\lim_n \int_0^1 f_n(x)\, dx$.

1.11 $a)$ Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n\ge1} \frac{1}{n^n}$ à l'aide d'un développelement en série.

$b)$ Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\, dx = \sum_{n\ge1} \frac{1}{n^2}$ en développant en série la fonction $\displaystyle x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur $[0,a]$, $a \in [0,1[$, et en majorant l'intégrale sur $[a,1]$.

1.12 $a)$ Montrer que pour tout $n \ge 1$, la fonction $\displaystyle f_n : x \mapsto e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$b)$ En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_n \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx$.

1.13 Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\displaystyle f(x) := \int_0^x \sin(1/t)\, dt$ pour $x \ge 0$, en particulier au point 0.

1.14 Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$ par $\displaystyle f(x) := \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$, en particulier aux points 0 et 1.

1.15 *Intégrale de Gauss*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\displaystyle f(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$a)$ Montrer que $\displaystyle\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \frac{\pi}{4} - \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2$.

$b)$ En déduire la valeur de $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$c)$ Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Calculer g' et $\lim\limits_{+\infty} g$ puis g.

$d)$ En déduire à nouveau la valeur de I.

1.16 *Problème de Bâle* 2, seconde résolution d'Euler en 1741 ([1])

$a)$ *Intégrales de Wallis* : Soit $I_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n,\ \ I_{n+1}\, I_n = \dfrac{\pi}{2n+2},\ \ I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

$b)$ Soit f la fonction définie par $f(x) := (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ pour $x \in [0,1[$.
Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1[,\ \ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(2n+1)\, I_{2n+1}} (1-x)^{-n-\frac{1}{2}}$.

En déduire que $\forall\, x \in [0,1[\,,\ \ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)\, I_{2n+1}}$.

$c)$ Montrer que $\forall\, x \in [0,1[\,,\ \ \arcsin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2\, I_{2n+1}}$.

$d)$ Montrer, à l'aide de la question $c)$, que

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Conclure en séparant les termes pairs et les termes impairs dans $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

1.17 *Problème de Bâle* 3, tiré de l'article ([2])

On reprend l'intégrale de Wallis de l'exercice 1.16 : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^n\, d\theta$, obtenu avec $x = \cos\theta$, et on définit $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 (\cos\theta)^{2n}\, d\theta$, pour $n \in \mathbb{N}$.

$a)$ Montrer en intégrant par parties, que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_{2n} = n(2n-1)\, J_{n-1} - 2n^2\, J_n$.

$b)$ En déduire, à l'aide de 1.16 $a)$, que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{2\, J_{n-1}}{I_{2n-2}} - \dfrac{2\, J_n}{I_{2n}}$.

1. L. Euler, "Démonstration de la somme de cette suite 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + 1/36 + ...", *Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord*, vol. 2 (1743), 115-127. Archivé dans *Opera Omnia*, Series. 1, vol. 14, 177-186 (E63).

2. Y. Matsuoka, "An elementary proof of the formula $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$", *Amer. Math. Monthly*, **68** (1961), 485-487.

$c)$ Montrer l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{J_n}{I_{2n}} \leq \dfrac{\pi^2}{4}\Big(1 - \dfrac{I_{2n+2}}{I_{2n}}\Big)$ en utilisant l'inégalité de convexité $\sin\theta \geq \dfrac{2}{\pi}\,\theta$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$d)$ En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1.18 *Autour du problème de Bâle* 4, tiré de l'article ([3])

$a)$ Montrer que

$$\forall\, x \in]0,1[\,, \quad \ln(x)\ln(1-x) - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt - \int_1^{1-x} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = 0.$$

$b)$ En déduire que

$$\forall\, x \in]0,1[\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(x^n + (1-x)^n\big)}{n^2} + \ln(x)\ln(1-x).$$

$c)$ Montrer la formule $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}\,n^2} + (\ln 2)^2$.

3. L. Euler, "De summatione innumerabilium progressionum", *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol. 5 (1738), 91-105. Archivé dans *Opera Omnia*, Series 1, vol. 14, 25-41. (E20).

Chapitre 2

Éléments de théorie des cardinaux

2.1 Cardinaux

***Définition* 2.1.** *Soient X et Y deux ensembles. On dit que X est équipotent à Y, et l'on note X éq. Y ou* $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$*, s'il existe une bijection de X sur Y.*

Il est immédiat que tout ensemble X est équipotent à lui-même car l'application identité sur X est une bijection de X sur X. Si une fonction $f : X \to Y$ est bijective, elle admet une réciproque bijective $f^{-1} : Y \to X$, en conséquence, si X éq. Y, alors Y éq. X. Enfin la composée de deux applications bijectives étant bijective, il est clair que, si X éq. Y et Y éq. Z, alors X éq. Z.

La relation d'équipotence est donc une relation d'équivalence sur la "collection de tous les ensembles" dont les "classes" définissent les "cardinaux". La présence de "guillemets" est justifiée par le fait que la collection de tous les ensembles n'est pas un ensemble, sinon cet ensemble serait élément de lui-même. La notion de classe d'équivalence associée de façon *naïve* à la relation d'équipotence n'est donc pas parfaitement satisfaisante du point de vue de la rigueur. Cet obstacle peut néanmoins être contourné, et les cardinaux définis rigoureusement ([16], E-III-3).

Exemples : 1. $\mathscr{P}(X)$ et $\{0,1\}^X$ sont équipotents car l'application définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X) & \longrightarrow & \{0,1\}^X \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \qquad \text{où} \quad \mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

est bijective.

2. $\mathbb{N}$ est équipotent à $2\,\mathbb{N}$ car $n \mapsto 2\,n$ est une bijection.

***Proposition* 2.1.** *Soit X un ensemble. Les ensembles X et $\mathscr{P}(X)$ ne sont pas équipotents et, plus précisément, il n'existe pas de surjection de X sur $\mathscr{P}(X)$.*

DÉMONSTRATION : Supposons l'existence d'une surjection f de X sur $\mathscr{P}(X)$; on pourrait alors trouver un antécédent a à l'ensemble $A := \{x \in X : x \notin f(x)\}$, *i.e.* un élément $a \in X$ tel que $f(a) = A$. Mais si $a \in A$ alors $a \notin f(a) = A$ et si $a \notin A$ alors $a \in f(a) = A$. $\Diamond$

Notation-définition :
(a) S'il existe une injection de X dans Y, on notera $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$.
(b) Si $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$ et X, Y non équipotents, on notera $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$.

***Théorème* 2.1** (Bernstein)**.**
(a) *S'il existe une injection de X dans Y alors il existe une surjection de Y sur X.*
(b) *S'il existe une surjection de X sur Y alors il existe une injection de Y dans X.*
(c) *S'il existe une injection (resp. surjection) de X dans Y et une injection (resp. surjection) de Y dans X alors X et Y sont équipotents,* i.e. *ont même cardinal.*
(d) *Si X et Y sont deux ensembles, ils se trouvent toujours dans* une et une seule *des trois situations suivantes :*

$$\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y \quad \textit{ou} \quad \operatorname{card} X = \operatorname{card} Y \quad \textit{ou} \quad \operatorname{card} X > \operatorname{card} Y.$$

Ce résultat – difficile – sera admis ici. Pour une démonstration du (c) on peut notamment consulter [30], p. 59.

***Corollaire* 2.1.** *La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur les cardinaux.*

DÉMONSTRATION : La réflexivité est immédiate car, pour tout ensemble X, l'application identité Id_X est injective. L'antisymétrie découle du point (c). La composée de deux applications injectives étant injective, la relation $\leq$ est clairement transitive. La relation est totale d'après le point (d). $\Diamond$

Illustrations : 1. Si $X \subset Y$ alors $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$.

2. D'une part $\operatorname{card} \mathbb{N} \leq \operatorname{card} \mathscr{P}(\mathbb{N})$ car $n \mapsto \{n\}$ est injective ; d'autre part $\operatorname{card} \mathbb{N} < \operatorname{card} \mathscr{P}(\mathbb{N})$ car il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ d'après la proposition 2.1.

***Définition* 2.2.** *Un ensemble X est* infini *s'il existe $x_0 \in X$ et une injection de X dans $X \setminus \{x_0\}$. Dans le cas contraire X est dit* fini *et l'on note* $\operatorname{card} X < +\infty$.

Exemple : $\mathbb{N}$ est infini car $(n \mapsto n+1)$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

***Proposition* 2.2.** *S'il existe une injection de X dans Y et si X est infini alors Y est infini. En particulier, dès qu'un ensemble contient une partie infinie, il est lui-même infini.*

DÉMONSTRATION : Soient i une injection de X dans Y et φ une injection de X dans $X \setminus \{x_0\}$ alors l'application ψ définie par

$$\begin{cases} \psi(y) = y & \text{si } y \in Y \setminus i(X) \\ \psi(y) = i\left[\varphi\left(x\right)\right] & \text{si } y = i(x) \in i(X) \end{cases}$$

est une injection de Y dans $Y \setminus \{i(x_0)\}$. $\Diamond$

Proposition 2.3. *Un ensemble X est infini si et seulement si il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans X,* i.e. $\operatorname{card} X \geq \operatorname{card} \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION : Soit X un ensemble infini. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(n+1)$ éléments distincts $x_0, \ldots, x_n$ de X et une injection i_n de X dans $X \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$. Le résultat est vrai pour $n=0$ d'après la définition d'un ensemble infini. Supposons le vrai pour n. D'après la proposition 2.2, l'ensemble $X \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$ est donc infini ce qui entraîne l'existence d'une injection j de $X \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$ dans $X \setminus \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}$ où $x_{n+1} \in X \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$. On vérifie aussitôt que $i_{n+1} := j \circ i_n$ est une injection de X dans $X \setminus \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}$. Finalement, l'application de $\mathbb{N}$ dans X donnée par $(n \mapsto x_n)$ est une injection.

Réciproquement, l'existence d'une injection de $\mathbb{N}$ dans X entraîne que X est infini d'après la proposition précédente puisque $\mathbb{N}$ est lui-même infini. $\diamondsuit$

Remarque : La proposition 2.3 se reformule de façon équivalente en :

un ensemble X est fini si et seulement si $\operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathbb{N}$.

Ceci traduit le fait que les ensembles équipotents à $\mathbb{N}$ sont les plus "petits" ensembles infinis au sens des cardinaux.

Exemples : 1. $\mathbb{R}$ est infini car $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

2. $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ est infini car $(n \mapsto \{n\})$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Cependant on a vu précédemment que $\operatorname{card} \mathbb{N} < \operatorname{card} \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Il y a donc plusieurs – et même une infinité – de "classes" d'ensembles infinis dont la plus petite est constituée par les ensembles équipotents à $\mathbb{N}$. C'est cette classe que nous allons maintenant étudier plus en détail.

2.2 Ensembles dénombrables

Définition 2.3. (a) *L'ensemble X est dit* dénombrable *s'il existe une injection de X dans $\mathbb{N}$,* i.e. $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} \mathbb{N}$.

(b) *L'ensemble X est dit* infini dénombrable *si X est équipotent à $\mathbb{N}$,* i.e. $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathbb{N}$. *On note $\aleph^0$ ([1]) le cardinal infini dénombrable.*

(c) *Si* $\operatorname{card} X > \operatorname{card} \mathbb{N}$, *$X$ est dit* non dénombrable *ou parfois* infini non dénombrable.

Ainsi $\mathbb{N}$ est-il évidemment infini dénombrable et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ est-il infini non dénombrable (*cf.* exemple ci-dessus).

Remarque : D'après le théorème de Bernstein, un ensemble X est infini dénombrable si et seulement si il est infini et dénombrable (ce qui assure la cohérence de la définition).

On déduit immédiatement de ces définitions les propriétés ci-après.

1. $\aleph$ (prononcer "aleph") est la première lettre de l'alphabet hébraïque.

***Proposition* 2.4.** *(a) L'ensemble X est dénombrable si et seulement si il est fini ou infini dénombrable.*

(b) Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

(c) Si X est infini, Y dénombrable et $X \subset Y$ alors Y est infini dénombrable.

DÉMONSTRATION : (b) Soit $X' \subset X$. La composée de l'injection canonique de X' dans X par une injection de X dans $\mathbb{N}$ est une injection de X' dans $\mathbb{N}$. Donc X' est dénombrable.

(c) L'ensemble Y est infini d'après la proposition 2.3, dénombrable par définition donc infini dénombrable. $\diamondsuit$

***Application* 2.1.** (a) $\mathbb{Z}$ est infini dénombrable.

(b) $\mathbb{N}^2$ est infini dénombrable.

(c) $\mathbb{Q}$ est infini dénombrable.

DÉMONSTRATION : (a) L'application Φ définie par

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ 2\,n & \longmapsto & n \\ 2\,n-1 & \longmapsto & -n \end{array}$$

est une bijection, donc $\mathbb{Z}$ est bien équipotent à $\mathbb{N}$.

(b) L'application Φ définie par

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (p,q) & \longmapsto & \Phi(p,q) := \dfrac{(p+q)\,(p+q+1)}{2} + q \end{array}$$

est une bijection. Cette application Φ consiste à numéroter les couples de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ au fur et à mesure de leur rencontre le long du parcours indiqué ci-dessous.

(c) D'une part $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ donc $\mathbb{Q}$ est infini. D'autre part, tout rationnel r s'écrit de façon unique $r = \dfrac{p}{q}$, $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, pgcd $(p,q) = 1$ (l'écriture canonique de 0 est donc $0 = \frac{0}{1}$). L'application définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \\ \dfrac{p}{q} & \longmapsto & (p,q) \end{array}$$

est donc une injection. Or $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{N}^2$, lui-même équipotent à $\mathbb{N}$, donc par composition, il existe une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$. $\diamondsuit$

On déduit immédiatement de la proposition précédente

***Corollaire* 2.2.** *(a) Pour tout $d \geq 1$, $\mathbb{N}^d$ est dénombrable,*

(b) Pour tout $d \geq 1$, si les ensembles $X_1, \ldots, X_d$ sont dénombrables, alors le produit cartésien $X_1 \times \ldots \times X_d$ est dénombrable. En outre, si tous les X_i sont non vides, $X_1 \times \ldots \times X_d$ est infini dénombrable dès que l'un des X_i est infini dénombrable.

DÉMONSTRATION : On établit directement le point (b) *via* une récurrence sur $d \geq 2$. Supposons $d = 2$. Les ensembles X_1 et X_2 étant dénombrables, il existe deux injections Φ_i de X_i dans $\mathbb{N}$, $i \in \{1, 2\}$. On vérifie immédiatement que l'application $\Phi : X_1 \times X_2 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $\Phi((x_1, x_2)) := (\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2))$ est injective. Le produit $X_1 \times X_2$ est donc dénombrable.

Supposons, par exemple, X_2 infini dénombrable. Alors X_2 éq. $\mathbb{N}$ et l'on peut supposer que Φ_2 est une bijection. Soit $x_1^0 \in X_1$ un élément fixé de l'ensemble non vide X_1. L'ensemble $\mathbb{N}$ s'injecte dans $X_1 \times X_2$ *via* $\Psi(n) = (x_1^0, (\Phi_2)^{-1}(n))$.

Le passage de d à $d + 1$ se fait en notant d'abord que

$$X_1 \times \ldots \times X_d \times X_{d+1} = (X_1 \times \ldots \times X_d) \times X_{d+1}.$$

Enfin, quitte à changer l'indexation des ensembles, on peut toujours supposer, si l'un des ensembles X_i est infini dénombrable, qu'il s'agit de X_{d+1}. $\Diamond$

Proposition 2.5. *Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

DÉMONSTRATION : Soit $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, $I \subset \mathbb{N}$ où chaque ensemble X_i, $i \in I$, est dénombrable. Pour tout $i \in I$, on considère une injection φ_i de X_i dans $\mathbb{N}$. Pour chaque $x \in X$, on définit l'entier naturel $n(x) := \min\{i \in I\,;\, x \in X_i\}$. L'application Φ définie par

$$\begin{array}{rcl} \Phi : X & \longrightarrow & \mathbb{N}^2 \\ x & \longmapsto & \Phi(x) := \big(n(x), \varphi_{n(x)}(x)\big) \end{array}$$

est une injection. En effet, si $x \neq y$, soit $n(x) \neq n(y)$ et $\Phi(x) \neq \Phi(y)$, soit $n(x) = n(y) = n$ auquel cas $x, y \in X_n$ et $\varphi_n(x) \neq \varphi_n(y)$ car φ_n est injective, donc $\Phi(x) \neq \Phi(y)$. Par conséquent, X est dénombrable. $\Diamond$

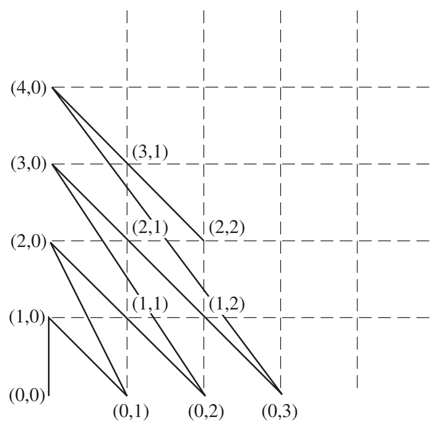

FIGURE 2.1 – Dénombrabibilité de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Remarque : Si l'un des X_i est infini dénombrable alors X l'est aussi grâce à la proposition 2.4 (c).

Enfin, on montre le théorème essentiel suivant :

Théorème 2.2. *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *est infini* non *dénombrable. Plus précisément,* $\operatorname{card} \mathbb{R} = \operatorname{card} \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

DÉMONSTRATION : Soit Φ l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & [0,1/2] \\ x := (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{3^{n+1}}. \end{array}$$

Φ est une injection car, si $(x_n)_{n\geq 0} \neq (y_n)_{n\geq 0}$, $\ell := \min\{n\,;\, x_n \neq y_n\}$ est fini. Or

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \geq \frac{1}{3^{\ell+1}} - \sum_{n=\ell+1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{3^{\ell+1}} > 0,$$

donc, $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, qui est équipotent à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, s'injecte dans l'intervalle $[0,1/2]$ par Φ. Comme $[0,1/2]$ s'injecte à son tour dans $\mathbb{R}$ *via* l'injection canonique, il vient

$$\operatorname{card} \mathbb{N} < \operatorname{card} \mathscr{P}(\mathbb{N}) \leq \operatorname{card} \mathbb{R}.$$

À ce stade, $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ étant infini non dénombrable, il est immédiat qu'il en est de même pour $\mathbb{R}$.

Pour établir l'égalité $\operatorname{card} \mathbb{R} = \operatorname{card} \mathscr{P}(\mathbb{N})$, on s'appuie d'abord sur l'application bijective

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x}{1+e^x}. \end{array}$$

Il vient alors

$$\operatorname{card}\, [0,1[\, \leq \operatorname{card} \mathbb{R} = \operatorname{card}\,]0,1[\, \leq \operatorname{card}\, [0,1[$$

et partant, $\operatorname{card} \mathbb{R} = \operatorname{card}\, [0,1[$. Soit Ψ l'application définie par

$$\begin{array}{rl} \Psi : [0,1[& \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ x & \longmapsto \Psi(x) := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{cases} x_0 := [2\,x], \\ x_n := \left[2^{n+1}\left(x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{2^{k+1}}\right)\right], \; n \geq 1, \end{cases}$$

($[x]$ désigne la partie entière de x). $\Psi(x)$ est alors le développement dyadique propre de x et l'on a l'égalité $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ qui entraîne à son tour l'injectivité de Ψ. Donc $\operatorname{card}\mathbb{R} = \operatorname{card}[0,1[\leq \operatorname{card}\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \operatorname{card}\mathscr{P}(\mathbb{N})$. On en conclut que $\operatorname{card}\mathbb{R} = \operatorname{card}\mathscr{P}(\mathbb{N})$, ce qui achève la démonstration. $\Diamond$

2.3 Exercices

2.1 Soit $f : X \to Y$ une application.

$a)$ Montrer l'équivalence des énoncés suivants :

(i) f surjective,

(ii) pour tout $B \in \mathscr{P}(Y)$, $f(f^{-1}(B)) = B$,

(iii) pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, ${}^{c}f(A) \subset f({}^{c}A)$.

$b)$ Montrer l'équivalence des énoncés suivants :

(i) f injective,

(ii) pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, $f^{-1}(f(A)) = A$,

(iii) pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, $f({}^{c}A) \subset {}^{c}f(A)$,

(iv) pour tous $A, B \in \mathscr{P}(X)$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

2.2 Soient $A, B \in \mathscr{P}(X)$. Exprimer $\mathbb{1}_{{}^{c}A}$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\cup B}$, $\mathbb{1}_{A\setminus B}$ et $\mathbb{1}_{A\Delta B}$ à l'aide des fonctions indicatrices $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

2.3 $a)$ Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(X)$, $n \geq 1$. Montrer que

$$\mathbb{1}_{(\bigcup_{i=1}^n A_i)} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\},\,\operatorname{card}(I)=k} \mathbb{1}_{(\bigcap_{i\in I} A_i)}.$$

$b)$ En déduire, si X est fini, la *formule de Poincaré* :

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\},\,\operatorname{card}(I)=k} \operatorname{card}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big).$$

2.4 $a)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \ldots, p_n$ n nombres premiers distincts. Montrer que $\mathbb{N}^n$ est dénombrable à l'aide de l'application définie par $\big((k_1, \ldots, k_n) \mapsto p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}\big)$.

$b)$ En déduire que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Que peut-on dire d'un produit cartésien infini dénombrable d'ensembles dénombrables ?

2.5 Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable en considérant le développement décimal propre de chaque réel (*i.e.* celui dont la suite des décimales ne stationne pas en 9) dans $[0, 1[$.

2.6 Montrer que l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$, et plus généralement d'un ensemble infini, n'est pas dénombrable.

2.7 Montrer que l'ensemble $\mathbb{A}$ des nombres réels *algébriques*, *i.e.* racines d'un polynôme à coefficients entiers, est dénombrable.

2.8 Montrer que les points de discontinuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone, est dénombrable.

2.9 Montrer que tout ouvert Ω de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Chapitre 3

Quelques compléments de topologie

Ces quelques rappels et compléments ne sauraient en aucun cas se substituer à un cours de topologie générale ou de structures métriques. Seules les notions absolument indispensables en théorie de la mesure et en intégration sont abordées : la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$, les limites supérieure et inférieure, la séparabilité et les bases dénombrables d'ouverts et, enfin, les fonctions distance à un ensemble. À l'inverse, des notions de base comme l'adhérence ou l'intérieur d'un ensemble, la compacité, dont il sera fait abondamment usage dans la suite, ne sont ni développées, ni même redéfinies ici. En cas de doute ou d'absence, le recours à un manuel de topologie générale ou, plus simplement, de structures métriques (*e.g.* [18]) s'impose.

3.1 La droite achevée

La droite achevée, généralement désignée par $\overline{\mathbb{R}}$, est un espace métrique ordonné répondant à trois exigences essentielles :

– être un sur-ensemble de $\mathbb{R}$ aussi "petit" que possible au sens de l'inclusion,

– être compact et totalement ordonné,

– être compatible avec la droite réelle au sens où l'ordre et la topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$, restreints à $\mathbb{R}$, coïncident avec l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$ et la topologie associée à la métrique de la valeur absolue.

Il existe plusieurs façons de procéder qui, peu ou prou, se ramènent à fabriquer un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ que l'on prolonge convenablement. Considérons, par exemple, l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}. \end{array}$$

La fonction f est clairement un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et $]-1,1[$ (sa réciproque $f^{-1}(y) := \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ est bien continue). Or, comme l'intervalle ouvert $]-1,1[$ a pour adhérence dans $\mathbb{R}$ l'intervalle compact $[-1,1]$, l'idée pour construire $\overline{\mathbb{R}}$ est d'ajouter deux éléments notés $-:$ et $+:$ à $\mathbb{R}$ pour en faire les antécédents de -1 et 1 par un prolongement $\tilde{f}$ de f à $\overline{\mathbb{R}}$.

On définit donc

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+:, -:\} \text{ et } \tilde{f}_{|\mathbb{R}} := f, \quad \tilde{f}(-:) := -1, \quad \tilde{f}(+:) := 1. \tag{3.1}$$

Reste maintenant – et c'est le plus important – à définir sur $\overline{\mathbb{R}}$ un ordre total, noté $\leq$, et une distance δ.

Ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$ *:*

$$\begin{cases} (i) \text{ l'ordre usuel sur } \mathbb{R} \; i.e. \; x \leq y \text{ si } y-x \in \mathbb{R}_+ \text{ lorsque } x,\, y \in \mathbb{R}, \\ (ii) \; \forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} \; -: \leq x \leq +: . \end{cases}$$

Distance sur $\overline{\mathbb{R}}$ *:*

$$\forall\, x,\, y \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \delta(x,y) := |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|. \tag{3.2}$$

La proposition suivante montre que le but recherché est atteint.

***Proposition* 3.1.** (a) *La relation binaire* $\leq$ *est un ordre total sur* $\overline{\mathbb{R}}$*, pour lequel toute partie non vide possède une borne supérieure et une borne inférieure, et* δ *est une distance sur* $\overline{\mathbb{R}}$*.*

(b) *L'application identité* $Id : (\mathbb{R}, \delta_{|\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, |\,.\,|)$ *est un homéomorphisme.*

(c) *L'espace* $(\overline{\mathbb{R}}, \delta)$ *est un compact, homéomorphe à l'intervalle* $[-1,1]$ *et* $\mathbb{R}$ *est ouvert dans* $\overline{\mathbb{R}}$*. Il existe un tel homéomorphisme compatible avec les ordres sur* $\overline{\mathbb{R}}$ *et* $[-1,1]$ *; c'est le cas de l'application* $\tilde{f}$ *définie par (3.1).*

DÉMONSTRATION : (a) Le fait que soit un ordre total est immédiat. De plus, une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ est : soit majorée dans $\mathbb{R}$ et possède donc une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$, soit non-majorée dans $\mathbb{R}$ et admet alors $+:$ comme borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$; *idem* pour la borne inférieure. Concernant la distance, il suffit de noter que $\tilde{f}$ est injective de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $[-1,1]$ car f l'est de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. Ceci assure que $\delta(x,y)=0$ si et seulement si $x=y$.

(b) Vue la définition de δ sur $\mathbb{R}$, la bi-continuité de l'identité pour δ et $|\,.\,|$ consiste simplement à montrer que f est un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et $]-1,1[$. Ceci a été établi dans l'introduction de la section. La topologie induite par δ sur $\mathbb{R}$ coïncide donc bien avec celle définie par la valeur absolue.

L'application $\tilde{f}$ est clairement une bijection (strictement) croissante entre $\overline{\mathbb{R}}$ et $[-1,1]$. Enfin, vu que pour tous $x,\, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| = \delta(x,y)$, $\tilde{f}$ est une isométrie bijective, c'est donc un homéomorphisme.

On en déduit immédiatement que $\overline{\mathbb{R}} = \tilde{f}^{-1}([-1,1])$ est un intervalle compact puisque l'application $\tilde{f}^{-1}$ est continue. Enfin $\mathbb{R}$, image réciproque de $]-1,1[$ par l'application continue $\tilde{f}$ est ouvert dans $\overline{\mathbb{R}}$. $\diamondsuit$

On déduit immédiatement du point (b) le corollaire suivant où $\mathscr{O}_d(X)$ désigne l'ensemble des ouverts de la topologie définie sur X par la distance d (*cf.* section 3.3 ci-après)

***Corollaire* 3.1.** $\mathscr{O}_\delta(\overline{\mathbb{R}}) \cap \mathbb{R} = \mathscr{O}_{|\,.\,|}(\mathbb{R})$.

DÉMONSTRATION : En effet si $i : \mathbb{R} \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ désigne l'injection canonique, il vient pour tout $O \in \mathscr{O}(\overline{\mathbb{R}})$, $i^{-1}(O) = O \cap \mathbb{R} \in \mathscr{O}(\mathbb{R})$. Réciproquement, $\mathbb{R}$ étant ouvert dans $\overline{\mathbb{R}}$, tout ouvert O de $\mathbb{R}$ est ouvert dans $\overline{\mathbb{R}}$, il est donc la trace sur $\mathbb{R}$ de... lui-même. $\diamondsuit$

3.2 Limite supérieure et limite inférieure

Dans la suite, $\overline{\mathbb{R}}$ est muni de la distance δ définie par (3.2) qui est compatible avec l'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$ et qui en fait un espace métrique compact.

***Définition* 3.1.** *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\overline{\mathbb{R}}$. *On définit la* limite supérieure *de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par*

$$\overline{\lim_n}\, x_n := \inf_{n\geq 0}\big(\sup_{k\geq n} x_k\big) \in \overline{\mathbb{R}}$$

et la limite inférieure *de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par*

$$\underline{\lim_n}\, x_n := \sup_{n\geq 0}\big(\inf_{k\geq n} x_k\big) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Remarque : Comme toute suite monotone de $\overline{\mathbb{R}}$ converge, on a immédiatement

$$\overline{\lim_n}\, x_n := \lim_n{}^{\downarrow}\big(\sup_{k\geq n} x_k\big) \quad \text{et} \quad \underline{\lim_n}\, x_n := \lim_n{}^{\uparrow}\big(\inf_{k\geq n} x_k\big).$$

Le résultat suivant établit le lien entre limites supérieure et inférieure, monotonie et continuité ; il sera utile dans la suite.

***Proposition* 3.2.** *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\overline{\mathbb{R}}$ *et soit* $f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction monotone et continue. Alors*

$$f\big(\overline{\lim_n}\, x_n\big) = \overline{\lim_n}\, f(x_n) \quad \textit{et} \quad f\big(\underline{\lim_n}\, x_n\big) = \underline{\lim_n}\, f(x_n) \quad \textit{si } f \textit{ est croissante,}$$
$$f\big(\overline{\lim_n}\, x_n\big) = \underline{\lim_n}\, f(x_n) \quad \textit{et} \quad f\big(\underline{\lim_n}\, x_n\big) = \overline{\lim_n}\, f(x_n) \quad \textit{si } f \textit{ est décroissante.}$$

DÉMONSTRATION : Études le cas de la limite supérieure lorsque f est croissante, les autres cas se traitent de façon similaire. Posons $y_n := \sup_{k\geq n} x_k$, $n \in \mathbb{N}$. La croissance de f implique l'inégalité $f(y_n) \geq \sup_{k\geq n} f(x_k)$. De plus, par définition de la borne supérieure, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(k)})$ extraite de $(x_k)_{k\geq n}$ convergeant vers y_n dans $\overline{\mathbb{R}}$ (n est fixé). D'où $f(y_n) = \lim_k f(x_{\varphi(k)}) \leq \sup_{k\geq n} f(x_k)$ par continuité de f. Donc $f(y_n) = \sup_{k\geq n} f(x_k)$. De nouveau par la continuité de f, on a

$$\overline{\lim_n} f(x_n) = \lim_n^{\downarrow} \sup_{k\geq n} f(x_k) = \lim_n^{\downarrow} f(y_n) = f\big(\lim_n^{\downarrow} y_n\big) = f\big(\overline{\lim_n} x_n\big),$$

d'où l'égalité cherchée. $\diamondsuit$

L'intérêt des limites supérieure et inférieure réside essentiellement dans le résultat suivant :

***Proposition* 3.3.** *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. $\overline{\lim_n} x_n$ et $\underline{\lim_n} x_n$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. De plus, on a*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ converge dans } \overline{\mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\lim_n} x_n = \underline{\lim_n} x_n.$$

DÉMONSTRATION : Comme $(\overline{\mathbb{R}}, \delta)$ est compact, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence (théorème de Bolzano-Weierstrass). Soit ℓ une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \delta)$. Étant donné que $x_{\varphi(n)} \leq \sup_{k\geq\varphi(n)} x_k$ qui converge en décroissant vers $\overline{\lim_n} x_n$, on obtient, par compatibilité de la topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$ avec l'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$, $\ell \leq \overline{\lim_n} x_n$.

Montrons à présent que $\ell_+ := \overline{\lim_n} x_n$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *i.e.* par la caractérisation d'une valeur d'adhérence dans un espace métrique,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geq N,\ \ \delta(x_n, \ell_+) \leq \varepsilon.$$

On pose $y_n := \tilde{f}(x_n) \in [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, où $\tilde{f}$ est définie par (3.1). D'après la proposition 3.2, on a $\overline{\lim_n} y_n = \tilde{f}(\ell_+)$ car $\tilde{f}$ est croissante et continue sur $\overline{\mathbb{R}}$. Par conséquent, la suite de terme général $z_n := \sup_{k\geq n} y_k$ converge en décroissant vers $\tilde{f}(\ell_+)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Il existe donc $n_0 \geq N$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\tilde{f}(\ell_+) \leq z_n \leq \tilde{f}(\ell_+) + \varepsilon$. En outre, par définition du sup, il existe $n \geq n_0$ tel que $y_n \leq z_{n_0} < y_n + \varepsilon$. On dispose donc d'un $n \geq N$ tel que

$$\tilde{f}(\ell_+) - \varepsilon \leq z_{n_0} - \varepsilon \leq y_n \leq z_n \leq \tilde{f}(\ell_+) + \varepsilon,$$

d'où $\delta(x_n, \ell_+) = |y_n - \tilde{f}(\ell_+)| \leq \varepsilon$.

On obtient un résultat équivalent pour la limite inférieure en remarquant que

$$\underline{\lim}_n\, x_n = -\,\overline{\lim}_n(-x_n).$$

Enfin, $(\overline{\mathbb{R}}, \delta)$ étant compact, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle possède une unique valeur d'adhérence, *i.e.* $\overline{\lim}_n\, x_n = \underline{\lim}_n\, x_n$. $\Diamond$

Terminons par deux propriétés des limites supérieure et inférieure, relatives aux opérations $+$ et $\times$.

Proposition 3.4. (a) *Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de* $\overline{\mathbb{R}}$*, simultanément majorées dans* $[-:,+:[$ *ou bien minorées dans* $]-:,+:]$*. Alors*

$$\overline{\lim}_n(x_n + y_n) \;\leq\; \overline{\lim}_n\, x_n + \overline{\lim}_n\, y_n,$$
$$\underline{\lim}_n(x_n + y_n) \;\geq\; \underline{\lim}_n\, x_n + \underline{\lim}_n\, y_n.$$

(b) *Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de* $\overline{\mathbb{R}}_+$*, simultanément majorées dans* $\mathbb{R}_+$ *ou bien minorées dans* $]0,+:]$*. Alors*

$$\overline{\lim}_n(x_n\, y_n) \;\leq\; \overline{\lim}_n\, x_n \times \overline{\lim}_n\, y_n,$$
$$\underline{\lim}_n(x_n\, y_n) \;\geq\; \underline{\lim}_n\, x_n \times \underline{\lim}_n\, y_n.$$

DÉMONSTRATION : (a) se déduit des majorations suivantes :

$$\sup_{k\geq n}(x_k + y_k) \;\leq\; \sup_{k\geq n} x_k + \sup_{k\geq n} y_k,$$
$$\inf_{k\geq n}(x_k + y_k) \;\geq\; \inf_{k\geq n} x_k + \inf_{k\geq n} y_k.$$

(b) s'obtient en appliquant (i) aux suites $\ln(x_n)$ et $\ln(y_n)$ – avec la convention $\ln(0) = -:$ et $\ln(+:) = +:$ – puis en appliquant la proposition 3.2 successivement aux fonctions $\ln$ et $\exp$. $\Diamond$

3.3 Topologie sur un ensemble. Espace métrique

Définition 3.2. (a) *On appelle* topologie *sur un ensemble* X *la donnée d'une famille* $\mathscr{O}(X)$ *de parties de* X*, vérifiant*

(i) Ø *et* $X \in \mathscr{O}(X)$.

(ii) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, si* $O_1, \ldots, O_n \in \mathscr{O}(X)$ *alors* $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathscr{O}(X)$ [stabilité par intersection finie].

(iii) *Soit I un ensemble d'indices* quelconque*; si $O_i \in \mathscr{O}(X)$ pour tout $i \in I$ alors* $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathscr{O}(X)$ [stabilité par réunion quelconque].

(b) *Les éléments de $\mathscr{O}(X)$ sont appelés* ouverts *de X. Les ensembles complémentaires des ouverts sont appelés* fermés.

(c) *Une topologie est* séparée *si deux éléments distincts de X appartiennent à deux ouverts disjoints.*

"Exemple" du cas métrique : Si (X, d) est un *espace métrique* ([1]), la topologie de X relative à cette distance d est donnée par la famille d'ouverts

$$\mathscr{O}_d(X) := \Big\{ \bigcup_{i\in I} \mathring{B}(x_i, r_i),\ x_i \in X,\ r_i \in \mathbb{R}_+^*,\ I \text{ ensemble quelconque} \Big\}$$

où $\mathring{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$. On vérifie qu'une telle famille vérifie les axiomes d'une topologie séparée. En outre, il est clair que, dans ce cadre,

$$O \in \mathscr{O}_d(X) \iff \forall\, x \in O,\ \exists\, r_x > 0 \text{ tel que } \mathring{B}(x, r_x) \subset O.$$

3.4 Base dénombrable d'ouverts, séparabilité

***Définition* 3.3.** (a) *Un espace topologique $(X, \mathscr{O}(X))$ est dit à* base dénombrable d'ouverts *s'il existe une famille dénombrable d'ouverts non vides $\{\omega_n,\ n \geq 1\}$ telle que*

$$\forall\, O \in \mathscr{O}(X),\ \exists\, I \subset \mathbb{N} \textit{ tel que } O = \bigcup_{n\in I} \omega_n.$$

(b) *Un espace métrique (X, d) est dit* séparable *s'il contient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* dense ([2]).

***Proposition* 3.5.** *Un espace métrique est séparable si et seulement si il est à base dénombrable d'ouverts.*

DÉMONSTRATION : $(\Rightarrow)$ On vérifie qu'une base dénombrable d'ouverts est constituée par $\{\mathring{B}(x_n, r),\ n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Q}_+^*\}$. En effet, pour tout ouvert O de X,

$$O = \bigcup_{\mathring{B}(x_n, r)\subset O} \mathring{B}(x_n, r).$$

Quant à la dénombrabilité de $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}_+^*$, elle découle des résultats sur les cardinaux établis dans le chapitre 2.

$(\Leftarrow)$ Soit $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts. Il est immédiat que toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in \omega_n$ est dense. $\diamondsuit$

---

1. Rappelons qu'une distance est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant : $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$; $d(x, y) = d(y, x)$; $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tous $x, y, z \in X$.

2. Rappelons qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans X si, pour tout $x \in X$, il existe une suite extraite $(x_{\varphi_x(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $d(x_{\varphi_x(n)}, x) \to 0$.

3.5 Exemples de constructions de topologies

3.5.1 Topologie induite

Définition 3.4. *Soit $(X, \mathscr{O}(X))$ un espace topologique et $Y \subset X$ une partie de X. On définit la* topologie induite *(par celle de X) sur Y en posant*

$$\mathscr{O}(Y) := \{O \cap Y,\ O \in \mathscr{O}(X)\}\,.$$

Il est à noter que si $i : Y \hookrightarrow X$ désigne l'injection canonique, alors

$$\mathscr{O}(Y) = \left\{i^{-1}(O),\ O \in \mathscr{O}(X)\right\} = i^{-1}\left(\mathscr{O}(X)\right).$$

En outre, une topologie induite par une topologie séparée est elle-même séparée.

– *Le cas métrique :* Si la topologie sur X est métrique relativement à une distance d, on vérifie immédiatement que $\mathscr{O}(Y) = \mathscr{O}_{d_{|Y}}(Y)$ où $d_{|Y}$ désigne la restriction à Y de la distance d.

– *Topologie induite et séparabilité :* Si (X, d) est séparable, il est à base dénombrable d'ouverts. Or, par définition même de la topologie induite, si $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base dénombrable d'ouverts de X, alors $(\omega_n \cap Y)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base dénombrable d'ouverts de Y donc (Y, d) est séparable.

3.5.2 Topologie produit

Définition 3.5. *Si $(X, \mathscr{O}(X))$ et $(Y, \mathscr{O}(Y))$ sont deux espaces topologiques,* la topologie produit *sur $X \times Y$ est définie par la famille d'ouverts :*

$$\mathscr{O}(X \times Y) := \left\{\bigcup_{i\in I}(O_i \times \Omega_i),\ O_i \times \Omega_i \in \mathscr{O}(X) \times \mathscr{O}(Y),\ i \in I \textit{ (ensemble qcq)}\right\}.$$

Remarques : • La topologie produit issue de deux topologies séparées est elle-même séparée.

• La topologie produit sur $X \times Y$ est la plus petite topologie sur $X \times Y$ qui rende continues les projections canoniques π_X et π_Y de $X \times Y$ respectivement sur les espaces topologiques $(X, \mathscr{O}(X))$ et $(Y, \mathscr{O}(Y))$.

Si les topologies sur X et Y sont métriques relativement à des distances d et δ, on vérifie immédiatement (voir par exemple [18]) que $\mathscr{O}(X \times Y)$ est également la topologie associée aux distances usuelles sur $X \times Y$, comme par exemple

$$\begin{aligned}
D_1((x,y),(x',y')) &:= d(x,x') + \delta(y,y'),\\
D_p((x,y),(x',y')) &:= \left((d(x,x')^p + \delta(y,y')^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \text{pour } p \in [1,+:[,\\
D_{:}((x,y),(x',y')) &:= \max\left(d(x,x'),\delta(y,y')\right),
\end{aligned}$$

et bien d'autres distances sur $X \times Y$ définissent cette topologie produit.

***Proposition* 3.6.** (a) *Si* $(X, \mathscr{O}(X))$ *et* $(Y, \mathscr{O}(Y))$ *sont à base dénombrable d'ouverts,* $(X \times Y, \mathscr{O}(X \times Y))$ *est à base dénombrable d'ouverts.*

(b) *Si* (X, d) *et* (Y, δ) *sont séparables alors* $X \times Y$ *est séparable pour toutes les distances (topologiquement) équivalentes définissant la topologie produit,* e.g. *les* D_p, $p \in [1, +:]$.

DÉMONSTRATION : (a) Soient $\mathscr{U}_X := \{U_n,\, n \geq 1\}$ et $\mathscr{V}_Y := \{V_n,\, n \geq 1\}$ deux bases dénombrables d'ouverts, respectivement de X et Y. Alors, la famille dénombrable $\mathscr{U}_X \times \mathscr{V}_Y := \{U_n \times V_m,\, (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ est une base d'ouverts de $\mathscr{O}(X \times Y)$. En effet, si $O \in \mathscr{O}(X \times Y)$ et $z = (x, y) \in O = \cup_{i \in I} O_i \times \Omega_i$, il existe $i_z \in I$ tel que $(x, y) \in O_{i_z} \times \Omega_{i_z}$; par définition des bases dénombrables d'ouverts $\mathscr{U}_X$ et $\mathscr{V}_Y$, il existe alors deux entiers n_x et m_y tels que $x \in U_{n_x} \subset O_{i_z}$ et $y \in V_{m_y} \subset \Omega_{i_z}$. Finalement, il vient donc

$$O = \bigcup_{(x,y) \in O} U_{n_x} \times V_{m_y} = \bigcup_{(n,m) \in \mathscr{L}_O} U_n \times V_m \quad \text{où} \quad \mathscr{L}_O := \{(n_x, m_y),\, (x, y) \in O\} \subset \mathbb{N}^2.$$

(b) Ce point est un corollaire immédiat de (a) et de la proposition 3.5. On peut également procéder directement : si $\{x_n,\, n \geq 1\}$ et $\{y_n,\, n \geq 1\}$ sont respectivement denses dans (X, d) et (Y, δ), il est immédiat de par la définition des distances D_p que $\{(x_n, y_m),\, n,\, m \geq 1\}$ est dense dans $(X \times Y, D_p)$. $\diamondsuit$

3.6 Distance d'un point à un ensemble

***Définition* 3.6.** *Soit* (X, d) *un espace métrique et* A *une partie non vide de* X. *Pour tout* $x \in X$, *on définit la distance de* x *à* A *par*

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a) < +: .$$

Ces fonctions interviennent très souvent en théorie de la mesure car elles fournissent un moyen efficace d'approcher des fonctions indicatrices d'ensemble par des fonctions continues.

***Proposition* 3.7.** (a) *Pour tout partie non vide* A *de* X, *la fonction* $x \mapsto d(x, A)$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$, *est lipschitzienne de rapport* 1 *pour la distance* d, i.e.

$$\forall\, x,\, y \in X, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

(b) *L'ensemble* $\{x \in X : d(x, A) = 0\}$ *est égal à* $\overline{A}$ *(adhérence de* A *dans* X*).*

DÉMONSTRATION : (a) Pour tout $z \in A$, $d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Par suite, $d(x, A) - d(x, y)$ est un minorant des $d(y, z)$, $z \in A$.
Partant, $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$, et finalement, $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Les points x et y jouant des rôles symétriques, l'inégalité a bien lieu en valeur absolue.

(b) La distance $d(x,A)$ étant toujours positive ou nulle, il découle de la définition du sup que $d(x,A) = 0$ si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_n d(x,a_n) = 0$. D'où le résultat, par définition de l'adhérence de A dans un espace métrique. $\diamondsuit$

D'autres propriétés de ces fonctions seront établies au fil des besoins, mais toutes reposent sur la proposition 3.7.

3.7 Exercices

3.1 $a)$ Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle vérifiant :

$$\forall\, p,n,r \geq 0, \quad a_{pn+r} \leq p\, a_n + r\,\alpha \quad \text{où } \alpha \text{ est un réel fixé.}$$

Montrer que la suite $\left(\dfrac{a_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $\inf\limits_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{n}$.

$b)$ Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. On pose $S_n^f := \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ pour tout $n \geq 1$. Montrer, à l'aide de $a)$, que la suite $(S_n^f)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers sa borne inférieure.

3.2 Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\forall\, x,y \geq 0,\ f(xy) \leq f(x)\, f(y)$. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, la suite de terme général $\big((f(x^n))^{1/n}\big)_{n\geq 1}$ converge vers un élément de $[0, f(x)]$. Appliquer à $f(x) := (1+x)^a$ où $a \geq 0$.

3.3 Soit $M_d(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $(d\times d)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni d'une norme $\|\cdot\|$ telle que :

$$\forall\, A,B \in M_d(\mathbb{K}), \quad \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|.$$

Montrer que, pour toute $A \in M_d(\mathbb{R})$, la suite de terme général $\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ converge vers un élément de $[0, \|A\|]$.

3.4 $a)$ Soient X un ensemble non vide et une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$ bornées, qui converge simplement vers $f : X \to \mathbb{R}$ bornée. Montrer que

$$\sup_{x\in X} f(x) \leq \underline{\lim}_n \Big(\sup_{x\in X} f_n(x)\Big).$$

Établir une inégalité analogue pour l'$\inf$.

$b)$ Donner un exemple où l'inégalité est stricte. Montrer qu'il y a égalité si la convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est uniforme.

3.5 Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathscr{P}(X)$. On pose

$$\overline{\lim_n}\, A_n := \bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n} A_k \quad \text{et} \quad \underline{\lim}_n\, A_n := \bigcup_{n\geq 0}\bigcap_{k\geq n} A_k.$$

$a)$ Calculer les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{\cup_{n\geq 0} A_n}$, $\mathbb{1}_{\cap_{n\geq 0} A_n}$, $\mathbb{1}_{\overline{\lim}_n A_n}$ et $\mathbb{1}_{\underline{\lim}_n A_n}$ à l'aide des $\mathbb{1}_{A_n}$.

$b)$ En déduire les propriétés suivantes :

(i) ${}^c(\overline{\lim\limits_n} A_n) = \underline{\lim\limits_n} {}^cA_n$ et $\underline{\lim\limits_n} A_n \subset \overline{\lim\limits_n} A_n$,

(ii) $\overline{\lim\limits_n} A_n = \{ \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = +\infty \}$ et $\underline{\lim\limits_n} A_n = \{ \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{{}^cA_n} < +\infty \}$,

(iii) $\overline{\lim\limits_n} (A_n \cup B_n) = \overline{\lim\limits_n} A_n \cup \overline{\lim\limits_n} B_n$ et $\overline{\lim\limits_n}(A_n \cap B_n) \subset \overline{\lim\limits_n} A_n \cap \overline{\lim\limits_n} B_n$.

Deuxième partie

Théorie de la mesure

De Riemann vers Lebesgue

Le principe fondateur de l'intégration au sens de Riemann est d'approcher la surface comprise entre l'axe des abscisses et la courbe du graphe de f à l'aide de "petits" rectangles $[a_{i-1}, a_i]\times[0, \Phi_i]$ basés sur l'axe des abscisses et dont la hauteur Φ_i est proche de la hauteur "moyenne" de la fonction f sur $[a_{i-1}, a_i]$. C'est très précisément cette idée qu'exprime le théorème sur les sommes de Riemann (*cf.* théorème 1.4).

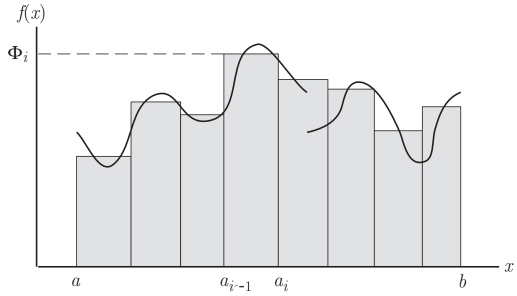

FIGURE 3.1 – Intégrale selon Riemann

L'idée novatrice apportée par la théorie de l'intégrale de Lebesgue est, à l'inverse, de commencer par découper en "petits" intervalles $[b_{j-1}, b_j]$ l'axe des ordonnées, puis d'approximer la surface située sous le graphe de f par

$$\int_a^b f \approx \sum_j \frac{b_{j-1}+b_j}{2} \times \text{longueur}\left(\{x : b_{j-1} \leq f(x) \leq b_j\}\right).$$

La principale difficulté réside dans le fait que les ensembles

$$E_j := \{x : b_{j-1} \leq f(x) \leq b_j\}$$

ne sont généralement pas des intervalles et que leur associer une longueur – ou plus généralement une "mesure" – est délicat voire même, dans certains cas, impossible.

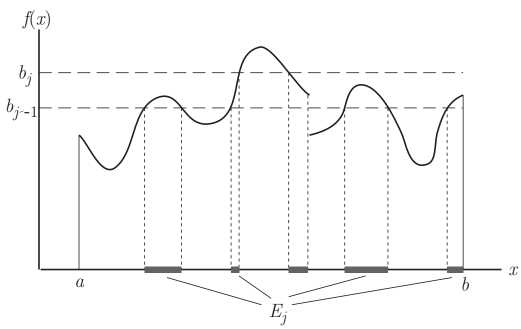

FIGURE 3.2 – Intégrale selon Lebesgue

Avant d'aborder la théorie de l'intégration au sens de Lebesgue elle-même dans la partie III, il nous faudra donc d'abord définir ce qu'est un ensemble pouvant être "mesuré", puis une fonction susceptible d'être intégrée et enfin une mesure elle-même. C'est l'objet de cette seconde partie.

Cependant, au cas où certains s'interrogeraient sur le caractère central de l'interversion du rôle joué par les abscisses et les ordonnées dans l'intégrale de Lebesgue par rapport à celle de Riemann, nous avons jugé instructif de reproduire *in extenso* le texte fondateur de Lebesque tel qu'il est paru à l'époque aux *Comptes-rendus de l'Académies des Sciences de Paris* (*cf.* [2]), sous forme d'une note de... 4 feuillets. D'autres textes plus étoffés suivront, notamment [4], mais chacun pourra constater que l'essentiel y est !

Les deux notes de bas de page ci-après font partie intégrante du texte original.

Sur une généralisation de l'intégrale définie

Par M. Henri Lebesgue

29 avril 1901

Dans le cas des fonctions continues, il y a identité entre les notions d'intégrales et de fonctions primitives. Riemann a défini l'intégrale de certaines fonctions discontinues, mais toutes les fonctions dérivées ne sont pas intégrables, au sens de Riemann. Le problème de la recherche des fonctions primitives n'est donc pas résolu par l'intégration, et l'on peut désirer une définition de l'intégrale comprenant comme cas particulier celle de Riemann et permettant de résoudre le problème des fonctions primitives ([3]).

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue croissante

$$y(x) \qquad (a < x < b),$$

on divise l'intervalle (a, b) en intervalles partiels et l'on fait la somme des quantités obtenues en multipliant la longueur de chaque intervalle partiel par l'une des valeurs de y quand x est dans cet intervalle. Si x est dans l'intervalle (a_i, a_{i+1}), y varie entre certaines limites m_i et m_{i+1}, et réciproquement si y est entre m_i et m_{i+1}, x est entre a_i et a_{i+1}. De sorte qu'au lieu de se donner la division de la variation de x, c'est-à-dire de se donner les nombres a_i, on aurait pu se donner la division de la variation de y, c'est-à-dire les nombres m_i. De là deux manières de généraliser la notion d'intégrale. On sait que la première (se donner les a_i) conduit

3. Ces deux conditions imposées *a priori* à toute généralisation de l'intégrale sont évidemment compatibles, car toute fonction dérivée intégrable, au sens de Riemann, a pour intégrale une de ses fonctions primitives.

à la définition donnée par Riemann et aux définitions des intégrales par excès et par défaut données par M. Darboux. Voyons la seconde.

Soit la fonction y comprise entre m et M. Donnons-nous

$$m = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_{p-1} < M = m_p \;;$$

$y = m$ quand x fait partie d'un ensemble E_0 ; $m_{i-1} < y < m_i$ quand x fait partie d'un ensemble E_i.

Nous définirons plus loin les mesures λ_0, λ_i de ces ensembles. Considérons l'une ou l'autre des deux sommes

$$m_0\lambda_0 + \sum m_i\lambda_i \;;\; m_0\lambda_0 + \sum m_{i-1}\lambda_i \;;$$

si, quand l'écart maximum entre deux m_i consécutifs tend vers zéro, ces sommes tendent vers une même limite indépendante des m_i choisis, cette limite sera par définition l'intégrale des y qui sera dite *intégrable*.

Considérons un ensemble de points de (a, b) ; on peut d'une infinité de manières enfermer ces points dans une infinité dénombrable d'intervalles ([4]) ; la limite inférieure de la somme des longueurs de ces intervalles est la mesure de l'ensemble. Un ensemble E est dit *mesurable* si sa mesure augmentée de celle des points ne faisant pas partie de E donne la mesure de (a, b) ([5]). Voici deux propriétés de ces ensembles : une infinité d'ensembles mesurables E_i étant donnée, l'ensemble des points qui font partie de l'un au moins d'entre eux est mesurable ; si les E_i n'ont deux à deux aucun point commun, la mesure de l'ensemble obtenu est la somme des mesures E_i. L'ensemble des points communs à tous les E_i est mesurable.

Il est naturel de considérer d'abord les fonctions telles que les ensembles qui figurent dans la définition de l'intégrale soient mesurables. On trouve : *si une fonction limitée supérieurement en valeur absolue est telle que, quels que soient A et B, l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a $A < y \leq B$ est mesurable, elle est intégrable* par le procédé indiqué. Une telle fonction sera dite *sommable*. L'intégrale d'une fonction sommable est comprise entre l'intégrale par défaut et l'intégrale par excès. De sorte que, *si une fonction intégrable au sens de Riemann est sommable, l'intégrale est la même avec les deux définitions*. Or, *toute fonction intégrable au sens de Riemann est sommable*, car l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle, et l'on peut démontrer que si, en faisant abstraction d'un ensemble de valeurs de x de mesure nulle, il reste un ensemble en chaque point duquel une fonction est continue, cette fonction est sommable. Cette propriété permet de former immédiatement des fonctions non intégrables au sens de Riemann et cependant sommables. Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions continues, $\varphi(x)$ n'étant pas toujours nulle ; une fonction qui ne diffère de $f(x)$ qu'aux

4. Henri Lebesgue pensait sans doute à des intervalles ouverts, comme nous l'a suggéré notre collègue Patrick Polo.

5. Si l'on ajoute à ces ensembles des ensembles de mesure nulle convenablement choisis, on a des ensembles mesurables au sens de M. Borel (*Leçons sur la théorie des fonctions* [1]).

points d'un ensemble de mesure nulle partout dense et qui en ces points est égale à $f(x) + \varphi(x)$ est sommable sans être intégrable au sens de Riemann. Exemple : la fonction égale à 0 si x est irrationnel et à 1 si x est rationnel. Le procédé de formations qui précède montre que l'ensemble des fonctions sommables a une puissance supérieure au continu. Voici deux propriétés des fonctions de cet ensemble.

1- Si f et φ sont *sommables*, $f + \varphi$ et $f\varphi$ le sont et l'intégrale de $f + \varphi$ est la somme des intégrales de f et de φ.

2- *Si une suite de fonctions sommables a une limite, c'est une fonction sommable*.

L'ensemble des fonctions sommables contient évidemment $y = k$ et $y = x$; donc d'après 1- il contient tous les polynômes et comme, d'après 2- il contient toutes ses limites, il contient donc toutes les fonctions continues, c'est-à-dire les fonctions de première classe (voire Baire, *Annali di Matematica*, 1899), il contient toutes celles de seconde classe, etc.

En particulier, *toute fonction dérivée, limitée supérieurement en valeur absolue*, étant de première classe, *est sommable*, et l'on peut démontrer que *son intégrale, considérée comme fonction de sa limite supérieure, est une de ses fonctions primitives*. Voici maintenant une application géométrique : si $|f'|$, $|\varphi'|$, $|\psi'|$ sont limitées supérieurement, la courbe

$$x = f(t),\ y = \varphi(t),\ z = \psi(t)$$

a pour longueur l'intégrale de $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}$. Si $\varphi = \psi = 0$, on a la variation totale de la fonction f à variation limitée. Dans le cas où f', φ', ψ' n'existent pas, on peut obtenir un théorème presque identique en remplaçant les dérivées par les nombres de Dini.

Chapitre 4

Tribu de parties d'un ensemble

Préliminaires ensemblistes

Dans ce paragraphe préliminaire ont été regroupés les résultats relatifs au maniement des ensembles et des fonctions qui se révèlent absolument indispensables pour aborder la théorie de la mesure et de l'intégration. Il s'agit pour l'essentiel de rappels.

(a) Soit X un ensemble, $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble de ses parties et A, $B \in \mathscr{P}(X)$. On note

$$\begin{array}{lcl} A\cup B & := & \{x\in X : x\in A \text{ ou } x\in B\}, \\ A\cap B & := & \{x\in X : x\in A \text{ et } x\in B\}, \\ {}^cA & := & \{x\in X : x\notin A\}, \\ A\setminus B & := & \{x\in X : x\in A \text{ et } x\notin B\} = A\cap {}^cB, \\ A\Delta B & := & \{x\in X : x\in A\cup B \text{ et } x \notin A\cap B\} \\ & = & A\cup B\setminus A\cap B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A). \end{array}$$

(b) Soit $f : X \to Y$, $A_i \subset X$, $B_i \subset Y$, $i\in I$ (I ensemble quelconque). On associe canoniquement à f les fonctions "image directe" f_d et "image réciproque" f_r^{-1} définies par

$$\begin{array}{rcl} f_d : \mathscr{P}(X) & \longrightarrow & \mathscr{P}(Y) \\ A & \longmapsto & f_d(A) := \{f(x),\, x\in A\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f_r^{-1} : \mathscr{P}(Y) & \longrightarrow & \mathscr{P}(X) \\ B & \longmapsto & f_r^{-1}(B) := \{x\in X : f(x)\in B\}. \end{array}$$

(Par souci de simplicité, et malgré les risques de confusion, on note presque systématiquement f au lieu de f_d et f^{-1} au lieu de f_r^{-1}.)

Ces applications ensemblistes f_d et f_r^{-1} vérifient les *formules de Hausdorff* : soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X et $(B_j)_{j\in J}$ une famille de parties de Y

(I et J étant supposés non vides).

$$\begin{cases} f_d\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f_d(A_i), & f_d\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f_d(A_i) \\ & \text{(avec égalité si } f \text{ est injective)}, \\ f_r^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_i\Big) = \bigcup_{j\in J} f_r^{-1}(B_j), & f_r^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f_r^{-1}(B_j), \\ {}^c f_r^{-1}(B) = f_r^{-1}({}^c B). & \end{cases}$$

Enfin, lorsque la fonction f est *bijective*, il existe un lien simple entre l'application ensembliste f_r^{-1} et la réciproque f^{-1} de f : pour toute partie B de Y, $f_r^{-1}(B) = \{f^{-1}(b),\, b\in B\}$.

Notation : Si $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(Y)$ est une famille de parties de Y, on note par extension

$$f^{-1}(\mathscr{C}) := \{f^{-1}(C),\, C\in \mathscr{C}\} \subset \mathscr{P}(X).$$

(c) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite (dénombrable) de sous-ensembles. On définit la limite “supérieure” et la limite “inférieure” des A_n par :

$$\begin{aligned} \overline{\lim_n}\, A_n := \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k &= \{x\in X : \forall\, n\geq 1,\ \exists\, k\geq n \text{ tel que } x\in A_k\}, \\ &= \{x\in X : x\in A_k \text{ infiniment souvent}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\lim_n}\, A_n := \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k &= \{x\in X : \exists\, n\geq 1,\ \forall\, k\geq n \text{ tel que } x\in A_k\}, \\ &= \{x\in X : x\in A_k \text{ à partir d'un certain rang}\}. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que $\underline{\lim}_n A_n \subset \overline{\lim}_n A_n$ et l'on parle de $\lim_n A_n$ en cas d'égalité entre $\overline{\lim}_n A_n$ et $\underline{\lim}_n A_n$.

En outre, si la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est croissante (resp. décroissante) pour l'inclusion, alors

$$\underline{\lim_n}\, A_n = \overline{\lim_n}\, A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n \quad \Big(\text{resp. } \bigcap_{n\geq 1} A_n\Big).$$

(d) *Lois de Morgan :* $\quad {}^c\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} {}^c A_i$ et ${}^c\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} {}^c A_i$.

On en déduit aussitôt les relations :

$$^c(\overline{\lim_n}\, A_n) = \underline{\lim_n}\, {}^c A_n \quad \text{et} \quad {}^c(\underline{\lim_n}\, A_n) = \overline{\lim_n}\, {}^c A_n.$$

4.1 Tribu, tribu borélienne

***Définition* 4.1.** (a) *Soit X un ensemble. On appelle* tribu *(ou σ-*algèbre*) sur X toute famille $\mathscr{A}$ de parties de X vérifiant :*

(i) $\emptyset \in \mathscr{A}$,

(ii) *si* $A \in \mathscr{A}$ *alors* ${}^cA \in \mathscr{A}$ [stabilité par complémentaire],

(iii) *si* $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}^*}$, *alors* $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{A}$ [stabilité par union *dénombrable*].

(b) *Le doublet $(X, \mathscr{A})$ est appelé un* espace mesurable *(au sens "susceptible de recevoir une mesure").*

Remarque : La condition (iii) entraîne la stabilité de la tribu $\mathscr{A}$ par réunion finie. Il suffit en effet de poser, n_0 étant fixé, $A_n = \emptyset$, $n > n_0$.

Exemples de tribus : 1. $\mathscr{A} := \{\emptyset,\ X\}$, tribu dite *grossière*.

2. $\mathscr{A} := \mathscr{P}(X)$, tribu dite *triviale*.

3. Soit $A \subset X$, fixé ; $\mathscr{A} := \{\emptyset,\ X,\ A,\ {}^cA\}$: c'est la plus petite tribu contenant le sous-ensemble A.

4. Si $X = \bigcup\limits_{i\in I} X_i$, I non vide, fini ou infini dénombrable, $X_i \cap X_j = \emptyset$ dès que $i \neq j$ (les X_i, $i \in I$, forment donc une partition de X) alors

$$\mathscr{A} := \Big\{ \bigcup_{j\in J} X_j,\ J \subset I \Big\} \text{ est une tribu.}$$

5. $\mathscr{A} := \big\{ A \in \mathscr{P}(X),\ A \text{ dénombrable ou } {}^cA \text{ dénombrable} \big\}$.
Le seul point à vérifier est l'axiome (iii). Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathscr{A}$. S'ils sont tous dénombrables, il en est de même de leur réunion (*cf.* proposition 2.5). Si l'un des A_n, disons A_{n_0}, n'est pas dénombrable, son complémentaire l'est. Par suite, ${}^c(\bigcup_n A_n) = \bigcap_n {}^cA_n \subset {}^cA_{n_0}$ est nécessairement dénombrable.

En outre, on peut montrer que $\mathscr{A} \neq \mathscr{P}(X)$ si et seulement si X a un cardinal infini non dénombrable (résultat notablement moins trivial qui dépasse le cadre de cet ouvrage).

6. Si $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$, est une famille quelconque de tribus sur X, $I \neq \emptyset$, alors

$$\mathscr{A} := \bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i \ \text{ est une tribu.}$$

***Propriétés* 4.1.** (a) *$X \in \mathscr{A}$.*

(b) *Si $A_n \in \mathscr{A}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$ [d'où la stabilité par intersection finie en posant $A_n := X$, $n > n_0$].*

(c) *Si A, $B \in \mathscr{A}$ alors $A \setminus B = A \cap {}^cB \in \mathscr{A}$.*

(d) *Si* $A,\ B \in \mathscr{A}$ *alors* $A\,\Delta\,B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathscr{A}$.

(e) *Si* $A_n \in \mathscr{A}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *alors* $\overline{\lim\limits_{n}}\, A_n$ *et* $\underline{\lim\limits_{n}}\, A_n \in \mathscr{A}$.

DÉMONSTRATION : (a) $X = {}^c\emptyset \in \mathscr{A}$.

(b) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = {}^c\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} {}^cA_n\Big) \in \mathscr{A}$.

Les propriétés (c), (d) et (e) sont immédiates. $\Diamond$

Remarque (Contre-exemple) : Si X est un espace topologique ([1]) (ou simplement *métrique*), la famille $\mathscr{O}(X) := \{O \in \mathscr{P}(X),\ O \text{ ouvert de } X\}$ n'est généralement pas une tribu à cause de l'axiome (ii) : si O est ouvert, alors ${}^cO$ n'est en général pas ouvert. Ainsi $\mathbb{R}_-^* \in \mathscr{O}(\mathbb{R})$ mais ${}^c\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_+ \notin \mathscr{O}(\mathbb{R})$.

***Proposition* 4.1. -Définition** (a) *Soit* $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$ *une famille de parties de* X. *Il existe une plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant* $\mathscr{E}$. *On la note* $\sigma(\mathscr{E})$ *: c'est la* tribu engendrée *par* $\mathscr{E}$.

(b) *Si* $\mathscr{T}$ *est une tribu,* $\sigma(\mathscr{T}) = \mathscr{T}$.

(c) *Si* $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$, *alors* $\sigma(\mathscr{E}) \subset \sigma(\mathscr{F})$. *En particulier, si* $\mathscr{E} \subset \mathscr{T}$ *et* $\mathscr{T}$ *est une tribu,* $\sigma(\mathscr{E}) \subset \mathscr{T}$.

DÉMONSTRATION : (a) On considère $\sigma(\mathscr{E}) := \bigcap\limits_{\mathscr{T} \text{ tribu} \supset \mathscr{E}} \mathscr{T}$. L'ensemble $\mathscr{P}(X)$ est bien une tribu qui contient $\mathscr{E}$ donc l'ensemble $I := \{\mathscr{T},\ \mathscr{T} \text{ tribu},\ \mathscr{T} \supset \mathscr{E}\}$ est non vide. $\sigma(\mathscr{E})$ est donc bien une tribu d'après l'exemple 6 ci-avant et c'est évidemment la plus petite.

Les points (b) et (c) découlent immédiatement de la définition d'une tribu engendrée. $\Diamond$

Premiers exemples : 1. Soit $A \in \mathscr{P}(X)$, $A \neq X$, non vide fixé. La tribu engendrée par $\mathscr{E} := \{A\}$ est $\mathscr{T}_A = \{\emptyset,\ X,\ A,\ {}^cA\}$.

2. La tribu X engendrée par les singletons *i.e.* $\mathscr{E} := \{\{x\},\ x \in X\}$ n'est autre que $\mathscr{A} := \{A \in \mathscr{P}(X),\ A \text{ dénombrable ou } {}^cA \text{ dénombrable}\}$.

***Définition* 4.2.** *Soit* $(X, \mathscr{O}(X))$ *un espace topologique. La* tribu borélienne ([2]) *de* X, *aussi appelée tribu des boréliens de* X, *est définie par* $\mathscr{B}(X) := \sigma\big(\mathscr{O}(X)\big)$.

Remarques : • Il est immédiat que $\mathscr{B}(X) = \sigma\left(\{F \in \mathscr{P}(X) : F \text{ fermé}\}\right)$.

• En règle générale, $\mathscr{B}(X) \neq \mathscr{P}(X)$, c'est notamment le cas lorsque $X = \mathbb{R}$. Ce résultat, délicat à établir, peut se montrer par des arguments de cardinalité ; en effet, $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents (voir [6], exercice 2.6.11 p.286) et, partant, $\operatorname{card} \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \operatorname{card} \mathbb{R} < \operatorname{card} \mathscr{P}(\mathbb{R})$ (*cf.* proposition 2.1).

1. Voir section 3.3.

2. En hommage au mathématicien français Émile Borel (1871-1956) qui a mis en évidence l'importance de cette famille de parties pour la théorie de la mesure, alors naissante.

On peut aussi procéder directement en exhibant, à l'aide de *l'axiome du choix*, un ensemble non borélien (voir la démonstration du théorème 13.2 (b)).

Boréliens d'un espace topologique à base dénombrable d'ouverts : Un espace topologique (ou plus simplement métrique) $(X, \mathscr{O}(X))$ est à *base dénombrable d'ouverts* s'il existe une famille $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts de X vérifiant :

$$\forall\, O \in \mathscr{O}(X),\ \exists\, I \subset \mathbb{N},\ O = \bigcup_{i\in I} \omega_i.$$

Ainsi, un espace métrique (X, d) *séparable*, *i.e.* contenant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense ([3]), est à base dénombrable d'ouverts puisque

$$\big\{\mathring{B}(x_n, r),\ n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Q}_+^*\big\} \qquad\qquad [\mathbb{N}\times\mathbb{Q}_+^* \text{ est dénombrable}]$$

est une telle base. Pour de plus amples développements on pourra se reporter à la section 3.3.

On déduit alors immédiatement la proposition suivante de la stabilité d'une tribu par union dénombrable (axiome (iii)) et de la définition d'une tribu borélienne.

***Proposition* 4.2.** *Soit X est un espace topologique possédant une base dénombrable d'ouverts $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $\mathscr{B}(X) = \sigma(\{\omega_n,\ n \in \mathbb{N}\})$.*

***Application* 4.1.** On se place sur la droite réelle $X = \mathbb{R}$. Il est immédiat que tout intervalle I de $\mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}$ puisque l'on peut toujours l'écrire la réunion d'un (intervalle) ouvert et d'au plus deux singletons (fermés). Inversement, certaines familles d'intervalles engendrent la tribu borélienne. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(\mathbb{R}) &= \sigma(\{[a, +\infty[,\ a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{]a, +\infty[,\ a \in \mathbb{Q}\})\\ &= \sigma(\{[-\infty, a[,\ a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{]-\infty, a],\ a \in \mathbb{Q}\}).\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION : L'ensemble $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$,

$$\{]\alpha, \beta[,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{Q},\ \alpha < \beta\} = \{]\rho - r, \rho + r[,\ \rho \in \mathbb{Q},\ r \in \mathbb{Q}_+^*\}$$

est une base dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. Par suite

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]\alpha, \beta[,\ \alpha, \beta \in \mathbb{Q},\ \alpha < \beta\}).$$

Or $]\alpha, \beta[=]\alpha, +\infty[\cap {}^c[\beta, +\infty[$ et $]\alpha, +\infty[= \displaystyle\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} [\alpha + 1/n, +\infty[$ donc

$$\sigma(\{[\alpha, +\infty[,\ \alpha \in \mathbb{Q}\}) \supset \sigma(\{]\alpha, \beta[,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{Q},\ \alpha < \beta\}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

L'autre inclusion est immédiate (car les intervalles $[\alpha, +\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$). On procède de façon analogue pour les autres égalités. $\diamondsuit$

3. Au sens où, pour tout $x \in X$, il existe une suite extraite $x_{\varphi(n)} \to x$ quand $n \to +\infty$.

4.2 Autres exemples de tribus

4.2.1 Tribu image-réciproque

***Proposition* 4.3.** *Soit $f : X \to Y$ et $\mathscr{B}$ une tribu sur Y. Alors*

$$\mathscr{A} := \{f^{-1}(B),\ B \in \mathscr{B}\} \text{ est une tribu sur } X.$$

DÉMONSTRATION : Le résultat est évident *via* les formules de Hausdorff "réciproques" rappelées au début de ce chapitre :

$$^c\big(f^{-1}(B)\big) = f^{-1}(\underbrace{^cB}_{\in \mathscr{B}}) \in \mathscr{A} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\Big(\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}_{\in \mathscr{B}}\Big) \in \mathscr{A}. \quad \diamondsuit$$

***Définition* 4.3.** *La tribu $\{f^{-1}(B),\ B \in \mathscr{B}\}$ est appelée* tribu image-réciproque *(sous-entendu "de $\mathscr{B}$ par f"). On la note $f^{-1}(\mathscr{B})$ ou $\sigma(f)$.*

Exemples : 1. *Tribu-trace :* Soient $Y \subset X$ et $i : Y \to (X, \mathscr{A})$. On vérifie que $i^{-1}(\mathscr{A}) = \{A \cap Y,\ A \in \mathscr{A}\}$: c'est la $tribu\text{-}trace$ de $\mathscr{A}$ sur Y. Si $Y \in \mathscr{A}$, alors $i^{-1}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}$.

2. *Tribu-bande :* Soit $\pi : X \times Y \to (X, \mathscr{A})$ la projection canonique de $X \times Y$ sur X. On appelle $tribu\text{-}bande$ $\pi^{-1}(\mathscr{A}) = \{A \times Y,\ A \in \mathscr{A}\}$.

4.2.2 Tribu image

La terminologie employée est trompeuse car si $f : X \to Y$ est une application et $\mathscr{A}$ une tribu sur X, alors $\{f(A),\ A \in \mathscr{A}\}$ *n'est pas* une tribu sur Y en général.

***Définition* 4.4.** *Soit $f : X \to Y$ et $\mathscr{A}$ une tribu sur X. On appelle* tribu image *de $\mathscr{A}$ par f, la tribu sur Y définie par $\mathscr{B} := \{B \in \mathscr{P}(Y) : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$.*

La famille $\mathscr{B}$ est clairement une tribu *via* les formules de Hausdorff "réciproques".

4.3 Lemme de transport

La proposition suivante est connue sous le nom de lemme de transport.

***Proposition* 4.4.** *Soient $f : X \to Y$ et $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(Y)$. Alors*

$$\sigma\left(f^{-1}(\mathscr{E})\right) = f^{-1}\left(\sigma(\mathscr{E})\right) \qquad [\textit{toutes deux sont des tribus sur } X].$$

DÉMONSTRATION : On montre la double inclusion.

$$\boxed{\subset :}\quad f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \underbrace{f^{-1}\left(\sigma(\mathscr{E})\right)}_{\text{tribu (\textit{cf.} proposition 4.3)}} \qquad \text{donc } \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{E})\right) \subset f^{-1}\left(\sigma(\mathscr{E})\right).$$

$\boxed{\supset :}$ On considère $\mathscr{B}$ la tribu image de la tribu $\sigma\left(f^{-1}(\mathscr{E})\right)$ par f *i.e.* $\mathscr{B} := \left\{B \in \mathscr{P}(Y) : f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{E})\right)\right\}$. $\mathscr{E} \subset \mathscr{B}$ donc $\sigma(\mathscr{E}) \subset \mathscr{B}$ et, partant, $f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})) \subset f^{-1}(\mathscr{B})$. Par définition même de $\mathscr{B}$, $f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{E})\right)$ donc $f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})) \subset \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{E})\right)$. $\quad\diamondsuit$

Remarque : L'énoncé est en fait aisé à retenir, la principale difficulté étant de comprendre la signification de chacun des deux termes.

***Proposition* 4.5.** (a) *Si X est un espace métrique (resp. topologique) et $Y \subset X$ est muni de la distance (resp. topologie) induite (*cf.* paragraphe 3.5.1), alors*

$$\mathscr{B}(Y) = \{A \cap Y,\ A \in \mathscr{B}(X)\}.$$

(b) *En outre, $\mathscr{B}(Y) \subset \mathscr{B}(X)$ si et seulement si $Y \in \mathscr{B}(X)$. Dans ce cas,*

$$\mathscr{B}(Y) = \{A \in \mathscr{B}(X),\ A \subset Y\}.$$

DÉMONSTRATION : (a) En effet, si l'on désigne par i l'inclusion canonique $i : Y \hookrightarrow X$, $\mathscr{O}(Y) := \{O \cap Y,\ O \in \mathscr{O}(X)\} = i^{-1}(\mathscr{O}(X))$, il vient

$$\mathscr{B}(Y) = \sigma\left(i^{-1}(\mathscr{O}(X))\right) = i^{-1}(\sigma(\mathscr{O}(X))) = i^{-1}(\mathscr{B}(X)) = \{A \cap Y,\ A \in \mathscr{B}(X)\}. \quad \diamondsuit$$

(b) est immédiat car une tribu est stable par intersection finie.

***Application* 4.2.** (a) *Boréliens de quelques parties boréliennes usuelles de $\mathbb{R}$:* $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) = \{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : A \subset \mathbb{R}_+\}$ car $\mathbb{R}_+$ est fermé dans $\mathbb{R}$ donc borélien ; par suite $\mathscr{B}(\mathbb{R}^*) = \{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : 0 \notin A\}$, etc.

(b) *Boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$:* Si $X = \overline{\mathbb{R}}$ et $Y = \mathbb{R}$, on est exactement dans le cadre d'application de la proposition 4.5 comme le montre le corollaire 3.1. On en déduit que

$$\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subset \{A,\ A \cup \{+\infty\},\ A \cup \{-\infty\},\ A \cup \{\pm\infty\},\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}.$$

Réciproquement, les ensembles $\{+\infty\}$, $\{-\infty\}$, $\{\pm\infty\}$ sont finis donc fermés dans $\overline{\mathbb{R}}$ et sont donc dans $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$. D'autre part, toujours *via* la proposition 4.5, $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ puisque $\mathbb{R} \in \mathscr{O}(\overline{\mathbb{R}}) \subset \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$. On en déduit une première caractérisation des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{A,\ A \cup \{+\infty\},\ A \cup \{-\infty\},\ A \cup \{\pm\infty\},\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}. \tag{4.1}$$

Comme la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$, la tribu $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est engendrée par les intervalles (ici généralisés) $[a, +\infty]$, $a \in \mathbb{R}$, *i.e.*

$$\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{[a, +\infty],\ a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{]a, +\infty],\ a \in \mathbb{Q}\}). \tag{4.2}$$

Posons $\mathscr{T} := \sigma(\{[a, +\infty],\ a \in \mathbb{Q}\})$. Les intervalles généralisés $[a, +\infty]$ étant des fermés de $\overline{\mathbb{R}}$, donc des boréliens, il est immédiat que $\mathscr{T} \subset \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$. D'autre part

$$\{+\infty\} = \bigcap_{n \geq 1} [n, +\infty] \in \mathscr{T} \quad \text{et} \quad \{-\infty\} = {}^c\Big(\bigcup_{n \geq 1} [-n, +\infty]\Big) \in \mathscr{T}.$$

Par suite, $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \{\pm\infty\} \in \mathscr{T}$, si bien que, si i désigne l'injection canonique de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, $i^{-1}(\mathscr{T}) \subset \mathscr{T}$ (*cf.* exemple 1). Le lemme de transport entraîne alors que

$$i^{-1}(\mathscr{T}) = \sigma(\{i^{-1}([a,+\infty]),\, a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{[a,+\infty[,\, a \in \mathbb{Q}\}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

En conséquence, $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{T}$. Le résultat découle alors de la caractérisation (4.1). L'égalité $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma\big(\{]a,+\infty],\, a \in \mathbb{Q}\}\big)$ s'établit de façon analogue.

4.4 Exercices

$(X, \mathscr{A})$ désigne un espace mesurable.

4.1 Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des parties finies de X ? Donner une condition suffisante pour qu'elle coïncide avec $\mathscr{P}(X)$.

4.2 $a)$ Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux tribus sur X. $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ est-elle une tribu sur X ?

$b)$ Montrer que

$$\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) = \sigma\big(\{A \cup B : A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{B}\}\big) = \sigma\big(\{A \cap B : A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{B}\}\big).$$

4.3 Soient pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n^0 :=]0, \frac{1}{2^n}[$, $I_n^k := [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$, $k \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}$, et la tribu $\mathscr{B}_n$ définie sur $]0,1[$ par $\mathscr{B}_n := \sigma\big(\{I_n^k,\ 0 \leq k < 2^n\}\big)$. Montrer que la suite des tribus $\mathscr{B}_n$ est croissante mais que leur union n'est pas une tribu.

4.4 Soient $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ deux espaces mesurables ; on note, pour toutes parties $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ et $\mathscr{D} \subset \mathscr{B}$, $\mathscr{C} \otimes \mathscr{D} := \sigma(\{A \times B,\ A \in \mathscr{C},\ B \in \mathscr{D}\})$. On considère des parties $\mathscr{C}$ de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{D}$ de $\mathscr{B}$ telles que $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{C})$, $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{D})$ et $X \times Y \in \mathscr{C} \times \mathscr{D}$. Montrer que $\mathscr{C} \otimes \mathscr{D} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

La tribu $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ est appelée la *tribu produit* et sera étudiée en détail dans le chapitre 11.

4.5 On définit *l'atome* de la tribu $\mathscr{A}$, engendré par $x \in X$ par $\dot{x} := \bigcap_{x \in A,\, A \in \mathscr{A}} A$.

$a)$ Montrer que, pour tout $x \in X$, l'atome de x est égal à la classe d'équivalence de x modulo la relation d'équivalence $\sim$ définie par : $x \sim y$ si $\forall\, A \in \mathscr{A},\ x \in A \Leftrightarrow y \in A$.

$b)$ Montrer que si $\mathscr{A}$ est dénombrable alors $\mathscr{A}$ contient ses atomes et que chaque élément de $\mathscr{A}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.

$c)$ En déduire que la tribu $\mathscr{A}$ est soit finie, soit non dénombrable.

Chapitre 5

Fonctions mesurables

Dans la théorie de l'intégration de Lebesgue, les fonctions mesurables (à valeurs réelles ou complexes) joueront en grande partie le rôle dévolu aux fonctions Riemann intégrables dans la théorie élémentaire.

5.1 Définitions

***Définition* 5.1.** (a) *Soient* $(X,\mathscr{A})$ *et* $(Y,\mathscr{B})$ *deux espaces mesurables. Une fonction* $f:(X,\mathscr{A})\to(Y,\mathscr{B})$ *est* $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-mesurable *(ou plus simplement* mesurable*) si* $\forall\, B\in\mathscr{B},\;\; f^{-1}(B)\in\mathscr{A}$.

(b) *Si* X *et* Y *sont des espaces métriques (ou plus généralement topologiques) munis de leurs tribus boréliennes respectives* $\mathscr{A}:=\mathscr{B}(X)$ *et* $\mathscr{B}:=\mathscr{B}(Y)$, *on parle alors de* fonction borélienne.

Remarques : • La mesurabilité de f peut s'exprimer à l'aide de la tribu image réciproque *via* l'inclusion $f^{-1}(\mathscr{B})\subset\mathscr{A}$. La tribu $f^{-1}(\mathscr{B})$ est donc *la plus petite tribu sur* X rendant la fonction f mesurable ; d'où, par analogie avec la notion de tribu engendrée, l'autre notation $\sigma(f)$.

• Dans les applications courantes, $Y:=\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}^d$ et est muni de sa tribu borélienne. On omettra alors couramment de faire figurer celle-ci.

• Si $A\subset X$, on définit l'indicatrice (ou *fonction indicatrice*) de A par :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{1}_A:(X,\mathscr{A}) & \longrightarrow & \big(\{0,1\},\mathscr{P}(\{0,1\})\big)\\ x & \longmapsto & \begin{cases}1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{si } x\notin A.\end{cases}\end{array}$$

On constate que la fonction $\mathbb{1}_A$ est mesurable si et seulement si $A\in\mathscr{A}$.

Notation : Très souvent, on adoptera la notation $\{f\in B\}$ en lieu et place de $f^{-1}(B):=\{x\in X\,:\,f(x)\in B\}$. Ainsi $\{f\geq b\}$ désignera $f^{-1}([b,+\infty[)$, $\{f=b\}$ désignera $f^{-1}(\{b\})$, etc, selon les nécessités du problème.

Exemple : Toute fonction *constante* $f : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ est mesurable. En effet, si $f(x) = y_0$ pour tout $x \in X$, il est clair que $f^{-1}(B) = X$ ou Ø selon que $y_0 \in B$ ou $y_0 \notin B$.

***Proposition* 5.1.** *Soit $f : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ avec $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{E})$ où $\mathscr{E}$ désigne une famille de parties de Y. Alors*

$$f \text{ est mesurable si et seulement } f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}$$

(au sens : $\forall\, B \in \mathscr{E},\ f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$).

DÉMONSTRATION : La fonction f est mesurable ssi $f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$. Or $f^{-1}(\mathscr{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})) = \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{E})\right)$ d'après le lemme de transport (*cf.* proposition 4.4) ; f est donc mesurable si et seulement si $\sigma\left(f^{-1}(\mathscr{E})\right) \subset \mathscr{A}$ ou encore de manière équivalente $f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}$, puisque $\mathscr{A}$ est une tribu. ◊

***Application* 5.1.** (a) $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ ou $(\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est mesurable si et seulement si

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \{f \geq a\} = \{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathscr{A}.$$

(b) Plus généralement, si Y est un espace topologique, l'application $f : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B}(Y))$ est mesurable si et seulement si

$$\forall\, O \in \mathscr{O}(Y), \ \ f^{-1}(O) \in \mathscr{A}.$$

(c) En particulier, si X et Y sont des espaces métriques (voire topologiques), toute fonction *continue* de X dans Y est borélienne.

***Proposition* 5.2.** *Soit $f : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$. Soit $Y' \in \mathscr{B}$ tel que $f(X) \subset Y'$. Alors f est $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-mesurable si et seulement si*

$$\forall\, B \in \mathscr{B},\ B \subset Y',\ f^{-1}(B) \in \mathscr{A}.$$

En outre, f vue comme fonction de $(X, \mathscr{A})$ dans Y' est mesurable pour la tribu-trace de $\mathscr{B}$ sur Y'.

DÉMONSTRATION : L'implication directe est évidente.
Réciproquement, soit $B \in \mathscr{B}$. Il est clair que $B \cap Y' \in \mathscr{B}$ puisque $Y' \in \mathscr{B}$. Par suite, $f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap Y') \in \mathscr{A}$ par hypothèse. L'affirmation sur la tribu-trace est évidente : lorsque $Y' \in \mathscr{B}$, celle-ci est précisément constituée des éléments de $\mathscr{B}$ contenus dans Y'. ◊

***Application* 5.2.** (a) Si $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable et positive alors f est mesurable de $(X, \mathscr{A})$ dans $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$. Et inversement si $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ est mesurable alors $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ l'est aussi car $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ est la tribu-trace de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}_+$.
(b) Si $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable alors $f : (X, \mathscr{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est mesurable et, inversement, si $f : (X, \mathscr{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est mesurable et $f(X) \subset \mathbb{R}$ alors $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.

***Proposition* 5.3** (Composition)**.** *Soient* $(X,\mathscr{A}) \xrightarrow{f} (Y,\mathscr{B}) \xrightarrow{g} (Z,\mathscr{C})$. *Si f et g sont mesurables alors $g \circ f$ est mesurable.*

DÉMONSTRATION : Soit $C \in \mathscr{C}$. $(g\circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(C)}_{\in\mathscr{B}}) \in \mathscr{A}$. $\Diamond$

En combinant l'application 5.1 (c) et la proposition 5.3, on peut construire de nouvelles fonctions mesurables à partie d'une fonction mesurable donnée.

***Application* 5.3.** (a) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : (X,\mathscr{A}) \to (\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. Alors $\max(f,a)$, $\min(f,a)$, $|f|$, $f^+ := \max(f,0)$, $f^- := -\min(f,0)$ sont mesurables.

(b) Si $f : (X,\mathscr{A}) \to (\mathbb{R}^*,\mathscr{B}(\mathbb{R}^*))$ est mesurable alors $1/f$ est mesurable ; si $f : (X,\mathscr{A}) \to \mathbb{R}_+$ est mesurable, alors $\sqrt{f}$ l'est aussi et si, en outre, f ne s'annule pas, $\ln(f)$ l'est, etc.

***Proposition* 5.4.** *Soit* $f := (f_1,f_2) : (X,\mathscr{A}) \to (\mathbb{R}^2,\mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$. *La fonction f est mesurable si et seulement si f_1 et f_2 le sont comme fonctions de $(X,\mathscr{A})$ dans* $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

DÉMONSTRATION : $(\Rightarrow)$ $f_1 = \pi_1 \circ f$ où $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ désigne la 1ère projection canonique *i.e.* $\pi_1((x_1,x_2)) := x_1$. π_1 est continue donc mesurable et partant f_1 l'est aussi.

$(\Leftarrow)$ $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) := \sigma\left(\mathscr{O}(\mathbb{R}^2)\right)$ et, par définition de la topologie produit de deux espaces métriques séparables,

$$\mathscr{O}(\mathbb{R}^2) = \Big\{ \bigcup_{i\in I} (U_i \times V_i),\ U_i, V_i \text{ ouverts de } \mathbb{R},\ I \text{ dénombrable} \Big\} \quad (\textit{cf.}\ \text{section 3.4}).$$

D'où il vient, clairement, $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma\left(\{U \times V,\ U,\ V \text{ ouverts de } \mathbb{R}\}\right)$. D'après la proposition 5.1, f sera mesurable si $f^{-1}(U \times V) \in \mathscr{A}$, U, V ouverts de $\mathbb{R}$. Or, $f^{-1}(U \times V) = \underbrace{f_1^{-1}(U)}_{\in\mathscr{A}} \cap \underbrace{f_2^{-1}(V)}_{\in\mathscr{A}} \in \mathscr{A}$. $\Diamond$

***Application* 5.4.** (a) Si l'on identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ [*i.e.* $z = x + iy \equiv (x,y)$], la proposition 5.4 se reformule en : la fonction $f : (X,\mathscr{A}) \to (\mathbb{C},\mathscr{B}(\mathbb{C}))$ est mesurable si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ le sont.

(b) Si $f : (X,\mathscr{A}) \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est mesurable alors $|f|^p$, $p > 0$, est mesurable car $\left(u \mapsto |u|^p\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, donc borélienne.

5.2 Opérations sur les fonctions mesurables

***Proposition* 5.5.** *Soient $f, g : (X,\mathscr{A}) \to (\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ deux fonctions mesurables. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\alpha f + g$ et $f\,g$ sont mesurables.*

DÉMONSTRATION : D'après la proposition 5.4 ci-avant, l'application $(f,g) : (X,\mathscr{A}) \to (\mathbb{R}^2,\mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$ est mesurable puisque ses composantes f et g le sont ; d'autre part, les applications somme : $(x_1,x_2) \mapsto \alpha\, x_1 + x_2$ et produit : $(x_1,x_2) \mapsto x_1x_2$ de $(\mathbb{R}^2,\mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$ dans $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ sont continues donc boréliennes. On conclut *via* la proposition 5.3. $\diamondsuit$

***Corollaire* 5.1.** *La proposition 5.5 s'étend aux fonctions à valeurs complexes.*

DÉMONSTRATION : En effet, si f est mesurable, $\Re(f)$ et $\Im(f)$ le sont, donc, d'après la proposition 5.5, $\Re(f+g)=\Re(f)+\Re(g)$ et $\Im(f+g)=\Im(f)+\Im(g)$ sont mesurables. Partant, $f+g$ l'est aussi grâce à l'application 5.4. Le produit, notamment par une constante complexe, se traite de façon analogue à partir des formules du produit de deux nombres complexes. $\diamondsuit$

Ces propriétés se résument ainsi :

***Proposition* 5.6.** *L'ensemble des fonctions mesurables de $(X,\mathscr{A})$ dans $(\mathbb{K},\mathscr{B}(\mathbb{K}))$ muni des opérations usuelles $+,\cdot,\times$ sur les fonctions est une $\mathbb{K}$-algèbre* ([1]).

***Proposition* 5.7.** *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables de $(X,\mathscr{A})$ à valeurs dans $(\overline{\mathbb{R}},\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.*

(a) $\sup\limits_n f_n$ *et* $\inf\limits_n f_n$ *sont mesurables,*

(b) $\overline{\lim\limits_n}\, f_n$ *et* $\underline{\lim\limits_n}\, f_n$ *sont mesurables,*

(c) *Si* $f_n \xrightarrow{S} f$ *("S" pour "simplement"* i.e. $\forall\, x\in X,\ f_n(x)\to f(x)$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$*), alors f est mesurable.*

DÉMONSTRATION : Comme $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(]a,+\infty],\ a\in\mathbb{R}) = \sigma([a,+\infty],\ a\in\mathbb{R})$, il suffit, pour établir la mesurabilité d'une fonction g, de vérifier (*cf.* proposition 5.1) que

$$\forall\, a\in\mathbb{R},\quad \{g>a\}\in\mathscr{A} \text{ ou } \forall\, a\in\mathbb{R},\quad \{g\geq a\}\in\mathscr{A}.$$

(a) $\{\sup\limits_n f_n > a\} = \bigcup\limits_{n\geq 1}\{f_n>a\}\in\mathscr{A}$ et $\{\inf\limits_n f_n \geq a\} = \bigcap\limits_{n\geq 1}\{f_n\geq a\}\in\mathscr{A}$.

(b) On rappelle que $\overline{\lim\limits_n}\, f_n := \inf\limits_n(\sup\limits_{k\geq n} f_k)$ et $\underline{\lim\limits_n}\, f_n := \sup\limits_n(\inf\limits_{k\geq n} f_k)$ et l'on applique le point (a).

(c) On sait qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\underline{\lim\limits_n}\, x_n = \overline{\lim\limits_n}\, x_n$, auquel cas $\lim\limits_n x_n = \underline{\lim\limits_n}\, x_n = \overline{\lim\limits_n}\, x_n$. En conséquence, si $f_n \xrightarrow{S} f$, $f=\underline{\lim\limits_n}\, f_n$ est donc mesurable. $\diamondsuit$

1. *i.e.* un $\mathbb{K}$-e.v. pour les lois $+,\cdot$ et un anneau pour les lois $+,\times$, ces quatre opérations vérifiant en outre diverses relations naturelles de compatibilité trivialement vérifiées dans le cas d'espaces vectoriels de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, pour lesquelles nous renvoyons à un ouvrage approprié.

Exemple : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors $f' = \lim_n n\big(f(.+1/n) - f\big)$ est borélienne.

Compléments et raffinements : 1. L'assertion (c) peut être affinée ; en effet, si l'on ne suppose pas *a priori* que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge, on sait cependant que

$$\{f_n \xrightarrow{(\overline{\mathbb{R}})} .\} := \{x \in X : \lim_n f_n(x) \text{ existe dans } \overline{\mathbb{R}}\} \in \mathscr{A}$$

puisque

$$\begin{aligned}\{f_n \xrightarrow{(\overline{\mathbb{R}})} .\} &= {}^c\{\overline{\lim_n}\, f_n \neq \underline{\lim_n}\, f_n\}\\ &= {}^c\left(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (\{\underline{\lim_n}\, f_n < r\} \cap \{\overline{\lim_n}\, f_n \geq r\})\right) \in \mathscr{A}.\end{aligned}$$

En outre, l'application $\lim_n f_n : \{f_n \xrightarrow{(\overline{\mathbb{R}})} .\} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est toujours mesurable pour les tribus $\mathscr{A} \cap \{f_n \xrightarrow{(\overline{\mathbb{R}})} .\}$ (tribu-trace) et $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

2. L'assertion (c) reste vraie si l'on remplace $\overline{\mathbb{R}}$ par un espace métrique quelconque (E, d). En effet, soit $f_n : (X, \mathscr{A}) \to (E, \mathscr{B}(E))$ une suite de fonctions mesurables convergeant simplement vers une fonction f. Pour tout fermé F de E, il vient

$$\begin{aligned}f^{-1}(F) &= \{x \in X : d(f(x), F) = 0\} = \{x \in X : \lim_n d(f_n(x), F) = 0\}\\ &= \bigcap_{p\geq 1} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \left\{x \in X : d(f_n(x), F) \leq \frac{1}{p}\right\} \in \mathscr{A}\end{aligned}$$

car l'application $x \mapsto d(f_n(x), F)$, composée de la fonction mesurable f_n par la fonction 1-lipschitzienne $e \mapsto d(e, F)$, est mesurable de $(X, \mathscr{A})$ dans $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$.

3. Si l'espace métrique (E, d) est en outre complet et séparable ([2]) on peut également établir la mesurabilité de $\{f_n \xrightarrow{(E)} .\}$. En effet, si $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ désigne une suite dense dans (E, d), on vérifie aisément que

$$\begin{aligned}\{f_n \xrightarrow{(E)} .\} &:= \{x \in X : (f_n(x))_{n\geq 1} \text{ de Cauchy }\}\\ &= \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{\ell\geq 1} \bigcap_{m,n\geq \ell} \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \left(\left\{x \in X / d(f_m(x), e_p) \leq \frac{1}{k}\right\} \bigcap \cdots\right.\\ &\qquad \left.\cdots \left\{x \in X / d(f_n(x), e_p) \leq \frac{1}{k}\right\}\right) \in \mathscr{A}.\end{aligned}$$

Les espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$ sont des espaces métriques séparables complets.

Exercice : En s'inspirant de la méthode proposée dans le premier complément ci-dessus, montrer que si les fonctions $f, g : (X, \mathscr{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ sont mesurables alors $\{f = g\} \in \mathscr{A}$.

2. Un tel espace est parfois appelé un espace polonais, en hommage aux nombreux mathématiciens polonais qui ont montré l'importance de tels espaces, notamment en Probabilités.

5.3 Fonctions étagées sur un espace mesurable

***Définition* 5.2.** *Une fonction $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{K}, \mathscr{B}(\mathbb{K}))$ est* étagée *si elle est mesurable et ne prend qu'un* nombre fini de valeurs *($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

Il est immédiat que toute fonction étagée $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{K}, \mathscr{B}(\mathbb{K}))$ s'écrit sous la forme

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \ I \text{ fini}, \ \alpha_i \in \mathbb{K}, \ (A_i)_{i \in I} \ \textit{partition } \mathscr{A}\text{-mesurable de } X \qquad (5.1)$$

où l'on entend, par partition $\mathscr{A}$-mesurable, toute partition de X constituée d'éléments (éventuellement vides) de $\mathscr{A}$.

Réciproquement, toute fonction de la forme (5.1) est étagée. En outre, parmi toutes les décompositions de type (5.1) d'une fonction étagée f, il en existe une et une seule dans laquelle les α_i sont deux à deux distincts. Dans ce cas il est clair que $\{\alpha_i, \, i \in I\} = f(X)$, $A_i = \{f = \alpha_i\}$, $i \in I$, et l'on obtient la *forme canonique* de f :

$$f = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \, \mathbb{1}_{\{f=\alpha\}}.$$

Les fonctions étagées jouent dans la construction de l'intégrale de Lebesgue le rôle dévolu aux fonctions en escalier dans la théorie Riemann.

Exemples : 1. Une fonction $f : (X, \mathscr{P}(X)) \to \mathbb{K}$ est étagée si et seulement si $\mathrm{card}(f(X))$ est fini.

2. La fonction indicatrice $f := \mathbb{1}_A$ d'un ensemble mesurable $A \in \mathscr{A}$ est une fonction étagée dont la forme canonique est évidemment donnée par

$$f = 1 \times \mathbb{1}_A + 0 \times \mathbb{1}_{^c A}.$$

3. Si $X = [a, b]$, $(a < b)$ et $\mathscr{A} = \mathscr{B}([a, b])$, toute fonction en escalier f est étagée. En effet (*cf.* définition 1.1) elle prend un nombre fini de valeurs et, pour tout $\alpha \in f([a, b])$, l'ensemble $\{f = \alpha\}$ est une réunion finie d'intervalles de $[a, b]$ donc un borélien de $[a, b]$. La réciproque est fausse, ce qui illustre le fait que la notion de fonction étagée est une généralisation de celle fonction en escalier.

D'autres écritures de type (5.1) sont généralement possibles : ainsi, dès qu'il existe $\tilde{A} \subset A$, $\tilde{A} \in \mathscr{A}$, $\tilde{A} \neq A$, Ø, la fonction f s'écrit également

$$f = 1 \times \mathbb{1}_{\tilde{A}} + 1 \times \mathbb{1}_{A \setminus \tilde{A}} + 0 \times \mathbb{1}_{^c A}.$$

***Proposition* 5.8.** *L'ensemble*

$$\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(X, \mathscr{A}) := \{f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{K}, \mathscr{B}(\mathbb{K})), \ f \ \textit{étagée}\}$$

est une $\mathbb{K}$-algèbre réticulée ([3]).

3. *i.e.* stable par max et par min finis.

DÉMONSTRATION : La fonction nulle est évidemment étagée. D'autre part, soient $f := \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $g := \sum_{j\in J} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$ deux décompositions de type (5.1). Si $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
\lambda f + g &= \sum_{i\in I,\, j\in J} (\lambda\alpha_i + \beta_j)\mathbb{1}_{A_i\cap B_j},\\
f\, g &= \sum_{i\in I,\, j\in J} \alpha_i\, \beta_j\, \mathbb{1}_{A_i\cap B_j},\\
\max(f,g) &= \sum_{i\in I,\, j\in J} \max(\alpha_i,\beta_j)\mathbb{1}_{A_i\cap B_j},
\end{aligned}$$

etc., qui sont à leur tour des décompositions de type (5.1) relatives à la partition $\mathscr{A}$-mesurable $(A_i \cap B_j)_{i\in I,\, j\in J}$.

Exercice : Montrer que toute fonction f de la forme $f = \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $A_i \in \mathscr{A}$, $i \in I$, I fini, est étagée.

***Théorème* 5.1** (Lemme fondamental d'approximation)**.** *Soit $f : (X,\mathscr{A}) \to \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, mesurable. Il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions étagées, telle que, pour tout $x \in X$, $\lim_n f_n(x) = f(x)$. En outre,*

(a) si $f \geq 0$, on peut choisir la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ croissante et positive, au sens où

$$\forall\, n \geq 1, \qquad 0 \leq f_n \leq f_{n+1}.$$

*(b) Si f est bornée, on peut choisir la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de façon que f_n converge uniformément vers f (*i.e.* $\lim_n \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$).*

DÉMONSTRATION : (a) Supposons $f \geq 0$ et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E_{n,k} := \left\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\right\},\ k \in \{0,\ldots, n2^n - 1\},\ \text{ et }\ E_{n,\infty} := \{f \geq n\}.$$

Les ensembles $E_{n,k}$ et $E_{n,\infty}$ appartiennent à la tribu $\mathscr{A}$ comme images réciproques d'intervalles de $\mathbb{R}$ par la fonction mesurable f. On définit alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\mathbb{1}_{E_{n,k}} + n\mathbb{1}_{E_{n,\infty}}.$$

Les fonctions f_n sont étagées par construction. On vérifie que, si $x \in E_{n,k}$,

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } \frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}},\\ f_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}} & \text{si } \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2(k+1)}{2^{n+1}},\end{cases}$$

et si $x \in E_{n,\infty}$,

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} n+1 > f_n(x) \ \text{ si } \ f(x) \geq n+1,\\ \frac{n2^{n+1}+\ell}{2^{n+1}} \geq n \quad \text{si } \frac{n2^{n+1}+\ell}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{n2^{n+1}+\ell+1}{2^{n+1}},\ 0 \leq \ell \leq 2^{n+1}-1.\end{cases}$$

On a donc bien établi que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ pour tout $x \in X$.

Il est évident par construction que, si $x \in \{f < n\}$, $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n}$. Par conséquent, pour tout $x \in \{f < n_0\}$, il vient,

$$\forall\, n \geq n_0, \;\; 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n} \to 0.$$

Par suite $f_n \to f$ sur $\{f < +\infty\} = \bigcup_{k\geq 1} \{f < k\}$.

Enfin, si $x \in \{f = +\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f \geq n\}$, $f_n(x) = n \to +\infty$.

Si f est bornée par M, on constate que $\{f \geq n\} = \varnothing$ pour $n > M$, d'où la convergence uniforme dans ce cas, car $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n}$ pour tout $x \in X$ dès que $n > M$.

(b) *Cas réel :* Si f est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on la décompose en $f := f^+ - f^-$ où $f^+ := \max(f, 0)$ et $f^- := \max(-f, 0)$. Les fonctions f^+ et f^- vérifient $f^\pm \geq 0$, $f^+ + f^- = |f|$. Ainsi, f^+ et f^- sont bornées si et seulement si f l'est. Enfin, on note que, en tout point $x \in X$, soit $f^+(x)$, soit $f^-(x)$ est nul.

On considère alors les suites f_n^+ et f_n^- relatives à f^+ et f^- construites au point (a) et l'on pose $f_n := f_n^+ - f_n^-$. La fonction f_n est clairement étagée et $f_n \to f$ quand $n \to +\infty$. Aucune forme indéterminée ne peut survenir lors du passage à la limite ; en effet, $0 \leq f_n^\pm \leq f^\pm$ donc, $x \in X$ étant fixé, l'une des deux suites $(f_n^+(x))_{n\geq 1}$ ou $(f_n^-(x))_{n\geq 1}$ est identiquement nulle. La convergence est en outre uniforme si f est bornée puisque les fonctions $f^\pm$ le sont.

Cas complexe : Si f est à valeurs complexes, on écrit $f = \Re(f) + i\Im(f)$. $\quad\diamondsuit$

Remarque : Le lemme fondamental d'approximation repose effectivement sur l'idée développée dans le préliminaire “De Riemann vers Lebesgue” consistant à approcher une fonction f en découpant régulièrement l'“axe” des ordonnées, en lieu et place de l'“axe” des abscisses (comme pour les fonctions en escalier).

5.4 Exercices

$(X, \mathscr{A})$ désigne un espace mesurable.

5.1 $a)$ Soient Y un ensemble et une fonction $f : (X, \mathscr{A}) \to Y$. $f(\mathscr{A})$ est-elle une tribu ? Décrire la plus grande tribu sur Y rendant f mesurable.

$b)$ Soit $(Y, \mathscr{B})$ un espace mesurable et $f : X \to (Y, \mathscr{B})$. Quelle est la plus petite tribu sur X rendant f mesurable ?

5.2 Soient $(Y_i, \mathscr{B}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces mesurables, Y un ensemble, des fonctions $f_i : Y \to Y_i$ et $\mathscr{B}$ la *tribu engendrée par la famille de fonctions* $(f_i)_{i\in I}$, *i.e.* la plus petite tribu sur Y rendant les f_i mesurables. Montrer que la fonction $f : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ est mesurable si et seulement si, pour tout $i \in I$, $f_i \circ f : (X, \mathscr{A}) \to (Y_i, \mathscr{B}_i)$ est mesurable.

5.3 $a)$ Montrer que $\mathscr{A} := \big\{A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) : A = -A\big\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$, où $-A$ est défini par $-A := \{-a,\ a \in A\}$.

$b)$ Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ et les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

5.4 Soient une fonction $f : X \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et $\mathscr{A}_f := f^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ la tribu image-réciproque de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ par f.

$a)$ Soit une fonction $h : (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ borélienne. Montrer que la fonction $g := h \circ f$ est mesurable de $(X, \mathscr{A}_f)$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

$b)$ Soit $s : (X, \mathscr{A}_f) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ une fonction étagée mesurable. Montrer qu'il existe une fonction borélienne t telle que $s = t \circ f$. En déduire que si la fonction $g : (X, \mathscr{A}_f) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, alors il existe h borélienne telle que $g = h \circ f$.

5.5 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) := x^2$.

$a)$ Montrer que la tribu image-réciproque par f est $\mathscr{A}_f := \{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : A = -A\}$.

$b)$ Déterminer les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathscr{A}_f)$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

5.6 $a)$ Montrer que toute fonction réglée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.

$b)$ En déduire que toute fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.

$c)$ Retrouver le résultat du $b)$ en utilisant le fait que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est dénombrable.

5.7 Soit une fonction $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{C}, \mathscr{B}(\mathbb{C}))$ mesurable. Montrer qu'il existe une fonction mesurable $\theta : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ telle que $f = e^{i\theta}|f|$.

5.8 Montrer que la tribu borélienne d'un espace métrique (X, d) coïncide avec la *tribu de Baire*, *i.e.* la tribu engendrée par les fonctions à valeurs réelles, continues et bornées (cf. exercice 5.2).

5.9 Soient (Y, d) un espace métrique muni de sa tribu borélienne et une suite de fonctions $f_n : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B}(Y))$ mesurables, convergeant simplement vers f.

$a)$ Montrer que, pour tout $\Omega \in \mathscr{O}(Y)$, il existe $A \in \mathscr{A}$ tel que $f^{-1}(\Omega) \subset A \subset f^{-1}(\overline{\Omega})$.

$b)$ En déduire que f est mesurable.

Chapitre 6

Mesure positive sur un espace mesurable

6.1 Définition et exemples

***Définition* 6.1.** (a) *Soit* $(X, \mathscr{A})$ *un espace mesurable. On appelle* mesure *(positive) sur* $(X, \mathscr{A})$ *toute application* $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *vérifiant :*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) *Si* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une suite d'éléments de* $\mathscr{A}$*, deux à deux disjoints (éventuellement vides) :*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \qquad \text{[propriété de } \sigma\text{-additivité].}$$

(b) *Si* $\mu(X) < +\infty$*, la mesure* μ *est dite* $finie$ *ou bornée, si* $\mu(X) = 1$*,* μ *est une probabilité.*

Remarque : Les hypothèses ci-dessus entraînent la “simple additivité” de la mesure μ : pour toute famille $A_1, \ldots, A_n$ de parties de $\mathscr{A}$, deux à deux disjointes,

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$$

(on pose simplement $A_k := \emptyset$ pour $k > n$ et on applique conjointement (i) et (ii)).

Exemples : 1. La *mesure nulle* sur $(X, \mathscr{P}(X))$: $\forall\, A \in \mathscr{P}(X),\ \mu(A) := 0$.

2. La *mesure grossière* : $\mu(\emptyset) := 0$ et $\forall\, A \in \mathscr{P}(X),\ A \neq \emptyset,\ \mu(A) := +\infty$.

3. La *mesure de Dirac* au point $a \in X$:

$$\forall\, A \in \mathscr{P}(X), \quad \mu(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A. \end{cases} \tag{6.1}$$

La mesure de Dirac en a est notée δ_a.

4. La *mesure de comptage* sur $(X, \mathscr{P}(X))$:

$$\forall A \in \mathscr{P}(X), \quad \mu(A) := \begin{cases} \text{card}\,(A) & \text{si } A \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (^1)$$

Il est immédiat que card $(\emptyset) = 0$; d'autre part, si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties de X deux à deux disjointes, $\text{card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \text{card}(A_1) + \cdots + \text{card}(A_n)$. La σ-additivité découle de cette relation de façon claire. Ceci fait bien de m une mesure.

La mesure de comptage est également caractérisée par le fait que, pour tout $x \in X$, $m(\{x\}) = 1$.

Cet exemple est important car il fait le lien entre intégration et familles sommables indexées par X, entre intégration et séries lorsque $X = \mathbb{N}$.

Les exemples ci-avant sont tous définis sur la tribu triviale $\mathscr{P}(X)$ de toutes les parties de X. Ces mesures existent *a fortiori* par restriction sur toute tribu $\mathscr{A}$ sur X. En revanche, il n'est généralement pas possible de définir une mesure sur $\mathscr{P}(X)$ tout entière.

5. Soit μ une mesure sur $(X, \mathscr{A})$ et $B \in \mathscr{A}$. On définit la *mesure-trace* de μ sur B par $\mu_B := \mu(. \cap B)$. Si $\mu(B) \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la *mesure conditionnelle* sachant B par

$$\mu(\,.\,/B) := \frac{\mu(\cdot \cap B)}{\mu(B)}.$$

6. La *mesure de Lebesgue* sur $\mathbb{R}^d$: cet exemple est, de loin, le plus important de la liste. C'est en effet la mesure de Lebesgue qui est à la base de l'extension de l'intégrale de Riemann aux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puis de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.

Quelques préliminaires sont nécessaires pour énoncer le théorème d'existence et de caractérisation de la mesure de Lebesgue : soit $a \in \mathbb{R}^d$ et $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, on note $a + A := \{a + x,\ x \in A\}$. L'application $\tau_a : x \mapsto x - a$ étant clairement continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, donc borélienne, l'ensemble $a + A = \tau_a^{-1}(A) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$.

***Théorème* 6.1.** *Il existe une unique mesure sur* $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ *dite* mesure de Lebesgue *sur* $\mathbb{R}^d$ *et notée* λ_d *vérifiant*

(i) $\lambda_d([0,1]^d) = 1$,

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}^d, \forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \quad \lambda_d(a + A) = \lambda_d(A)$.

On notera souvent par la simple lettre λ la mesure de Lebesgue sur la droite réelle $\mathbb{R}$. Nous admettrons provisoirement l'existence de λ_d. Dans un premier temps, nous montrerons simplement que, en dimension 1, la mesure de Lebesgue $\lambda(I)$ d'un intervalle I coïncide avec sa longueur (*cf.* paragraphe 6.1.2). Ceci nous permettra quand même d'établir la partie unicité du théorème (*cf.* Application 6.1). Une première approche de la construction de λ sur $\mathbb{R}$ comme conséquence du théorème de Carathéodory est proposée à la section 6.3. La construction complète

1. Le cardinal d'un ensemble A sera aussi noté $\#A$ ou $|A|$ selon les cas.

est abordée à la section 6.5.2, après la démonstration détaillée du théorème de Carathéodory. Elle peut être évitée en première lecture.

La mesure de Lebesgue λ_d sur $\mathbb{R}^d$ sera construite encore plus loin, au chapitre 11, lorsque nous aborderons la notion de mesure produit. Cette phase fera l'objet de la section 11.2.2.

6.1.1 Propriétés essentielles

Soit μ une mesure positive sur $(X, \mathscr{A})$.

P1 : *μ est croissante pour l'inclusion :*
(a) $\forall\, A,\ B \in \mathscr{A},\quad A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.
(b) Si en outre $\mu(A) < +\infty$, alors $\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A) \leq +\infty$.
(c) En revanche, si $\mu(A) = +\infty$, on ne peut rien dire sur $\mu(B\backslash A)$.

DÉMONSTRATION : Ces résultats découlent du fait que $B = A \cup (B \setminus A)$ (union disjointe) d'où $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B\backslash A) \geq \mu(A)$ [avec $A_1 := A,\ A_2 := B \setminus A$]. $\Diamond$

P2 : *μ est fortement additive :*

$$\forall\, A, B \in \mathscr{A},\ \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

DÉMONSTRATION : Soit $\mu(A \cap B) = +\infty$ et (*cf.* **P1**) $\mu(A) = \mu(B) = +\infty$.
Soit $\mu(A \cap B) < +\infty$, auquel cas on décompose $A \cup B$ de façon disjointe en

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B)).$$

$$\begin{aligned}\text{D'où : }\ \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus (A \cap B))\\ &= \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B)\\ &= \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B). \quad \Diamond\end{aligned}$$

P3 : *μ est "continue à gauche" :* Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'éléments de $\mathscr{A}$ (*i.e.* $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} A_n\Big) = \lim_n{}^{\uparrow} \mu(A_n).$$

DÉMONSTRATION : On pose $B_1 := A_1$ et $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ pour $n \geq 2$. On vérifie par récurrence que $A_n = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} B_k$ pour tout $n \geq 1$.

En effet, supposons que $A_{n-1} = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k$. Il vient alors

$$A_n = (A_n \setminus A_{n-1}) \cup A_{n-1} = B_n \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\Big) = \bigcup_{k=1}^{n} B_k.$$

D'autre part les B_k sont deux à deux disjoints par construction. D'où finalement

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_n\Big) = \sum_{n\geq 1}\mu(B_n) = \lim_n \sum_{k=1}^{n}\mu(B_k) = \lim_n \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big)$$
$$= \lim_n{}^{\uparrow} \mu(A_n). \quad \Diamond$$

Remarque : La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ étant croissante pour l'inclusion, il vient $\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} A_n = \lim_n A_n$; d'où l'écriture possible : $\mu\big(\lim_n A_n\big) = \lim_n \mu(A_n)$... et la terminologie.

P4 : *μ est "continue à droite" :* Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{A}$ (*i.e.* $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $\mu(A_{n_0}) < +\infty$. Alors

$$\mu\Big(\bigcap_{n\geq 1}^{\downarrow} A_n\Big) = \lim_n{}^{\downarrow} \mu(A_n).$$

DÉMONSTRATION : On applique le résultat précédent à $A_{n_0} \setminus A_n$, $n \geq n_0$. Il vient

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq n_0} (A_{n_0}\setminus A_n)\Big) = \lim_n{}^{\uparrow} \mu(A_{n_0}\setminus A_n) \;\text{ avec }\; \bigcup_{n\geq n_0} (A_{n_0}\setminus A_n) = A_{n_0}\setminus\Big(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\Big)$$

et, de plus, $\mu(A_{n_0}\setminus A_n) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_n)$ car $\mu(A_n) < +\infty$ pour $n \geq n_0$. D'où

$$\mu(A_{n_0}) - \mu\Big(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\Big) = \lim_n\, (\mu(A_{n_0}) - \mu(A_n)) = \mu(A_{n_0}) - \lim_n \mu(A_n).$$

On conclut en simplifiant par la quantité finie $\mu(A_{n_0})$. $\quad\Diamond$

Remarques : • La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ étant décroissante pour l'inclusion, l'identité peut se lire $\mu(\lim_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$ dès que le second membre est fini.

• L'existence d'une partie A_{n_0} de μ-mesure finie est indispensable comme l'illustre le contre-exemple suivant : on munit $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ de la mesure de comptage et l'on pose pour tout $n \geq 1$, $A_n := \{k \in \mathbb{N},\, k \geq n\}$. On vérifie immédiatement que $A_{n+1} \subset A_n$, $\bigcap_{n\geq 1} A_n = \emptyset$ et $\mu(A_n) = +\infty$, pour tout $n \geq 1$.

P5 : *μ est sous-additive :* Soient $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, alors

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \leq \sum_{n\geq 1}\mu(A_n).$$

DÉMONSTRATION : On procède par récurrence. Si $n = 1$, l'inégalité est triviale.

Si $n=2$: $\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ d'après **P2**. Supposons acquis le résultat au rang n ; il vient

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big) = \mu\left(A_{n+1} \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)\right) \leq \mu(A_{n+1}) + \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k).$$

Donc, pour tout $n \geq 1$, $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leq \sum_{k\geq 1} \mu(A_k)$. Appliquant la propriété **P3** à la suite croissante $\bigcup_{k=1}^{n} A_k,\ n \geq 1$, on obtient

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \lim_n{}^{\uparrow} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_n\Big) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n). \quad \Diamond$$

6.1.2 Application à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

***Proposition* 6.1.** *Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\lambda(I) = \mathrm{long}(I)$, où $\mathrm{long}(I)$ désigne la longueur de l'intervalle I.*

DÉMONSTRATION : Étape 1 : Soit $\alpha := \lambda(\{0\})$. L'invariance par translation de λ entraîne que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda(\{x\}) = \alpha$. Donc, pour tout $n \geq 1$,

$$n\alpha = \lambda\left(\left\{\frac{1}{k},\ 1 \leq k \leq n\right\}\right) \leq \lambda([0,1]) = 1 \ \text{ puisque } \ \left\{\frac{1}{k},\ 1 \leq k \leq n\right\} \subset [0,1].$$

D'où $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Finalement,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \lambda(\{x\}) = 0.$$

Étape 2 : Toujours d'après la propriété d'invariance par translation,

$$1 = \lambda([0,1]) = \lambda(]0,1]) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n} \left]\tfrac{k-1}{n}, \tfrac{k}{n}\right]\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda\left(\left]\tfrac{k-1}{n}, \tfrac{k}{n}\right]\right) = n\lambda\left(\left]0, \tfrac{1}{n}\right]\right).$$

Il vient alors $\lambda\left(\left]0, \frac{1}{n}\right]\right) = \frac{1}{n}$ puis, pour tous $k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z},\ k_1 \leq k_2$,

$$\lambda\left(\left]\tfrac{k_1}{n}, \tfrac{k_2}{n}\right]\right) = \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \lambda\left(\left]\tfrac{k-1}{n}, \tfrac{k}{n}\right]\right) = (k_2 - k_1)\,\frac{1}{n} = \frac{k_2}{n} - \frac{k_1}{n}.$$

Par suite : $\forall\, r,\ r' \in \mathbb{Q},\ r < r',\ \lambda(]r, r']) = r' - r$. Soient maintenant $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Il existe deux suites de rationnels $r_n \downarrow a$ et $r'_n \uparrow b$, $r_n < r'_n$. Les intervalles $A_n :=]r_n, r'_n]$ croissent vers $]a, b[$ (*i.e.* $\bigcup_n^{\uparrow} A_n =]a, b[$), donc, d'après **P3**,

$$\lambda(]a, b[) = \lambda\Big(\bigcup_n^{\uparrow} A_n\Big) = \lim_n (A_n) = \lim_n (r'_n - r_n) = b - a.$$

On conclut en notant que $\lambda([a,b])=\lambda(]a,b])=\lambda(]a,b[)=\lambda[a,b[)$. Enfin,

$$[a,+\infty[=\bigcup_{n\geq 1}[a+n-1,a+n[\text{ donc }\lambda([a,+\infty[)=\sum_{n\geq 1}1=+\infty.$$

Les autres types d'intervalles se traitent de façon analogue. $\Diamond$

Cette proposition se généralise en dimension supérieure par

***Proposition* 6.2.** *Pour tout pavé $P := I_1 \times \cdots \times I_d$ de $\mathbb{R}^d$ (produit cartésien d'intervalles)*

$$\lambda_d(P) = \mathrm{Vol}(P) := \prod_{1\leq \ell\leq d} \mathrm{long}(I_\ell).$$

(avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$).

La démonstration directe de cette proposition est possible et suit le même canevas que celui du cadre réel, quelques difficultés techniques en plus. Nous verrons plus loin – au chapitre 11 – une autre démarche permettant à la fois de construire et de caractériser la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, fondée sur la notion de produit de mesures. Néanmoins, cette approche s'appuie sur l'existence de la mesure de Lebesgue réelle.

6.2 Caractérisation d'une mesure. Unicité

Les tribus, notamment boréliennes, sont généralement très "riches" en ensembles au sens où il est impossible d'en décrire exhaustivement les éléments. Ainsi, si X est un espace topologique et $\mathscr{B}(X)=\sigma\big(\mathscr{O}(X)\big)$ la tribu borélienne sur X, $\mathscr{B}(X)$ contient non seulement les ouverts et les fermés mais également les intersections dénombrables d'ouverts (dits ensembles de type "G_δ"), les réunions dénombrables de fermés (dits ensembles de type "F_σ"), les réunions et intersections dénombrables de tels ensembles, et ainsi de suite.

En particulier, vérifier que deux mesures sont égales sur une tribu $\mathscr{A}$ semble a $priori$ une tâche titanesque et pour tout dire inextricable. Le but du théorème de caractérisation ci-après, en amont des théorèmes dits de classe monotone, est de proposer un moyen de surmonter ce problème ou plus exactement de le contourner.

6.2.1 Un théorème de classe monotone

***Définition* 6.2.** *On appelle λ-système toute famille Λ de parties de X vérifiant :*

(i) $\emptyset\in \Lambda$,

(ii) *Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante ($A_n\subset A_{n+1}$) d'éléments de Λ alors* $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} A_n\in\Lambda$ [stabilité par réunion dénombrable croissante].

(iii) *Si $A, B\in \Lambda$ et $A\subset B$ alors $B\setminus A\in\Lambda$* [stabilité par différence propre].

***Proposition* 6.3.** *(a) Si $\mathscr{E}$ est une famille de parties de X, il existe un plus petit λ-système $\Lambda(\mathscr{E})$ contenant $\mathscr{E}$.*

(b) Si $X \in \Lambda$ et Λ est stable par intersection finie, alors le λ-système Λ est une tribu.

DÉMONSTRATION : (a) Une fois noté que $\mathscr{P}(X)$ est un λ-système contenant $\mathscr{E}$, il suffit de vérifier que $\Lambda(\mathscr{E}) := \bigcap_{\substack{\Lambda \supset \mathscr{E} \\ \Lambda\ \lambda\text{-système}}} \Lambda$ est un λ-système ce qui est immédiat. C'est forcément le plus petit.

(b) Comme $X \in \Lambda$, Λ est donc stable par complémentaire d'après (iii). Reste la stabilité par réunion dénombrable. Comme

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right),$$

il suffit d'établir la stabilité par réunion finie qui se déduit de

$$A \cup B =^c ({}^cA \cap {}^cB) \in \Lambda. \quad \diamondsuit$$

***Théorème* 6.2.** *Soit $\mathscr{E}$ une famille de parties de X, stable par intersection* finie *et contenant X (une telle famille prend le nom de π-système), alors*

$$\Lambda(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E}).$$

DÉMONSTRATION : Il suffit, au vu de la proposition 6.3, d'établir que $\Lambda(\mathscr{E})$ est stable par intersection finie (puisque $X \in \Lambda(\mathscr{E})$).

Soit donc $E \in \mathscr{E}$ fixé et $\Lambda_E := \{A \in \Lambda(\mathscr{E}) : A \cap E \in \Lambda(\mathscr{E})\}$. On vérifie sans difficulté que Λ_E est un λ-système contenant $\mathscr{E}$, donc $\Lambda(\mathscr{E})$ *i.e.*

$$\forall\, E \in \mathscr{E},\ \forall\, A \in \Lambda(\mathscr{E}),\ A \cap E \in \Lambda(\mathscr{E}).$$

Soit maintenant $B \in \Lambda(\mathscr{E})$ et $\Lambda_B := \big\{A \in \Lambda(\mathscr{E}) : A \cap B \in \Lambda(\mathscr{E})\big\}$. Λ_B est un λ-système, contenant $\mathscr{E}$ d'après ce qui précède. Donc $\Lambda_B = \Lambda(\mathscr{E})$ pour tout $B \in \Lambda(\mathscr{E})$.

Finalement $X \in \Lambda(\mathscr{E})$ et $\Lambda(\mathscr{E})$ est stable par intersection finie, c'est donc une tribu et, partant, $\Lambda(\mathscr{E}) \supset \sigma(\mathscr{E})$. Comme une tribu est clairement un λ-système, $\Lambda(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E})$. $\diamondsuit$

6.2.2 Application à la caractérisation d'une mesure

***Corollaire* 6.1.** *Soient μ et ν deux mesures finies sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$ et $\mathscr{E} \subset \mathscr{A}$ un π-système ($X \in \mathscr{E}$, $\mathscr{E}$ stable par intersection finie) engendrant $\mathscr{A}$* (i.e. *$\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{E})$). Si pour tout $E \in \mathscr{E}$, $\mu(E) = \nu(E)$, alors $\mu = \nu$.*

DÉMONSTRATION : Soit $\Lambda := \{A \in \mathscr{A} \,:\, \mu(A) = \nu(A)\}$. Λ est un λ-système et $\Lambda \supset \mathscr{E}$ donc, d'après le théorème 6.2, $\Lambda \supset \sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$. $\Diamond$

Remarque : Le point crucial nécessitant la finitude de μ et ν est la stabilité de Λ par différence propre ; en effet si $A \subset B$ et $\mu(A) < +\infty$,

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A)$$

si μ et ν coïncident sur A et B. On peut cependant partiellement relaxer l'hypothèse de finitude de μ et ν.

***Corollaire* 6.2.** *Soient μ et ν deux mesures sur $(X, \mathscr{A})$ et $\mathscr{E} \subset \mathscr{A}$ vérifiant*

(i) *$\mathscr{E}$ est un π-système et $\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{A}$,*

(ii) $\forall\, A \in \mathscr{E}, \quad \mu(A) = \nu(A)$,

(iii) *il existe une suite $E_n \in \mathscr{E}$, $n \geq 1$, $E_n \subset E_{n+1}$, telle que $X = \displaystyle\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} E_n$ et $\mu(E_n) = \nu(E_n) < +\infty$.*

Alors $\mu = \nu$.

DÉMONSTRATION : On applique le corollaire 6.1 aux mesures finies sur $(X, \mathscr{A})$ définies par $\mu_n := \mu(. \cap E_n)$ et $\nu_n := (. \cap E_n)$, $n \geq 1$. Comme $E_n \in \mathscr{E}$ et $\mathscr{E}$ est stable par intersection finie, $\mathscr{E} \cap E_n \subset \mathscr{E}$ donc μ_n et ν_n coïncident sur $\mathscr{E}$ et, partant, $\mu_n = \nu_n$ pour tout $n \geq 1$. Soit alors $A \in \mathscr{A}$; on écrit $A = \displaystyle\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow}(A \cap E_n)$, d'où, d'après la propriété **P3**,

$$\mu(A) = \lim_n \mu(A \cap E_n) = \lim_n \mu_n(A) = \lim_n \nu_n(A) = \lim_n \nu(A \cap E_n) = \nu(A). \quad \Diamond$$

Remarque : On peut remplacer dans (iii) la suite croissante $(E_n)_{n\geq 1}$ par une *partition* de $X = \bigcup_{n\geq 1} E_n$ avec $\mu(E_n) = \nu(E_n) < +\infty$.

***Application* 6.1.** (a) *Unicité de la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$

On vérifie les hypothèses du corollaire 6.2 ci-avant avec $E_n := [-n, n]$ et $\mathscr{E}$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$. Si λ et λ' sont deux mesures sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant les hypothèses du théorème d'existence et de caractérisation de la mesure de Lebesgue (théorème 6.1 dans l'exemple n° 6), alors, d'après la proposition 6.1, λ et λ' coïncident sur $\mathscr{E}$ et $\lambda([-n, n]) = \lambda'([-n, n]) = 2n < +\infty$. On conclut en montrant, ce qui est immédiat, que $\mathscr{E}$ est un π-système et que $\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. $\Diamond$

(b) *Caractérisation d'une mesure sur* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$

Si deux mesures μ et ν vérifient $\mu([0, x]) = \nu([0, x]) < +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($[0, x]$ désigne ici le segment d'extrémités 0 et x), alors $\mu = \nu$.

On pose $\mathscr{E} := \{[0, x],\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$. La famille $\mathscr{E}$ est clairement un π-système vérifiant les conditions du corollaire 6.2. D'autre part, il est immédiat que $\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ à partir de la caractérisation de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ fournie par l'application 4.1.

6.3 Construction de mesures par prolongement (I)

6.3.1 Théorème de prolongement de Carathéodory

***Définition* 6.3.** *Une famille $\mathscr{C}$ de parties de X est une* algèbre de Boole *si*

(i) $X \in \mathscr{C}$,

(ii) *pour tous* $A,\ B \in \mathscr{C}$, $A \cup B \in \mathscr{C}$ [stabilité par réunion finie],

(iii) *pour tout* $A \in \mathscr{C}$, ${}^{c}A \in \mathscr{C}$ [stabilité par complémentaire].

***Théorème* 6.3** (Carathéodory)**.** *Soient $\mathscr{C}$ une algèbre de Boole sur X et une application $\mu : \mathscr{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) *pour tous* $A,\ B \in \mathscr{C}$ *tels que* $A \cap B = \emptyset$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ [additivité finie],

$$(iii) \begin{cases} \textit{pour toute suite décroissante } (A_n)_{n\geq 1} \textit{ d'éléments de } \mathscr{C} \\ \textit{si } \mu(A_1) < +\infty \textit{ et } \bigcap_{n\geq 1}^{\downarrow} A_n = \emptyset \ \textit{ alors } \ \lim_n \mu(A_n) = 0, \end{cases}$$

$$(iv) \begin{cases} \textit{Il existe une suite croissante } (E_n)_{n\geq 1} \textit{ d'éléments de } \mathscr{C} \textit{ vérifiant} \\ \begin{cases} (\alpha) \ X = \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} E_n, \\ (\beta) \ \textit{pour tout } n \geq 1,\ \mu(E_n) < +\infty \\ (\gamma) \ \textit{pour tout } A \in \mathscr{C},\ \lim_n^{\uparrow} \mu(A \cap E_n) = \mu(A). \end{cases} \end{cases}$$

Il existe alors une unique mesure $\tilde{\mu}$ sur la tribu $\sigma(\mathscr{C})$ coïncidant avec μ sur $\mathscr{C}$.

Terminologie : La condition (iii) est appelée *propriété de Carathéodory* ou parfois aussi *continuité de la mesure en* $\emptyset$.

Ce théorème est à la base de la construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Sa démonstration, longue et délicate, fait intervenir la notion de *mesure extérieure*. Elle est détaillée dans la section 6.5. Le paragraphe 6.5.2 est, lui, plus particulièrement consacré à la mesure de Lebesgue elle-même et aux mesures de Stieltjes qui en sont une généralisation. Enfin, une troisième application, la construction de produits infinis de mesures, est proposée à la section 11.4.

Notons cependant dès maintenant que l'unicité de $\tilde{\mu}$ découle directement des résultats de caractérisation établis à la section 6.2 : en effet, une algèbre de Boole est en particulier un π-système.

Remarques et compléments : • Si $\mu(X) < +\infty$, l'hypothèse (iv) est toujours vérifiée avec la suite $E_n := X,\ n \geq 1$.

• Dans la formulation du théorème, la condition de Carathéodory a été privilégiée pour des raisons historiques. Cette condition exprime la continuité “à droite” de μ

le long des suites d'éléments de $\mathscr{C}$ décroissant vers l'ensemble vide. Cependant, il est souvent utile de remarquer que, sous l'hypothèse d'additivité finie de μ sur $\mathscr{C}$, il y a équivalence entre, d'une part, (iii) et $(iv)(\gamma)$ et, d'autre part, la propriété de continuité "à gauche" de μ sur $\mathscr{C}$:

Pour toute suite croissante pour l'inclusion $(A_n)_{n\geq 1}$ de $\mathscr{C}$,

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{C} \implies \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \lim_n{}^{\uparrow} \mu(A_n).$$

DÉMONSTRATION :($\Leftarrow$) : Pour (iii), on s'appuie sur l'additivité finie de μ sur $\mathscr{C}$ et l'on raisonne sur la suite décroissante $A'_n := A_1 \setminus A_n$. Le reste est évident.

($\Rightarrow$) : Si $\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} A_n\Big) < +\infty$, on pose $A'_k := \Big(\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} A_n\Big) \setminus A_k$. On conclut en notant que la suite $(A'_k)_{k\geq 1}$ est décroissante et que $\bigcap_{k\geq 1}^{\downarrow} A'_k = \emptyset$.

Si $\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} A_n\Big) = +\infty$, le cas précédent montre néanmoins que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\varliminf_n \mu(A_n) \geq \varliminf_n \mu(A_n \cap E_p) = \lim_n{}^{\uparrow} \mu(A_n \cap E_p) = \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} A_n \cap E_p\Big).$$

Or, d'après $(iv)(\gamma)$ on a

$$\varliminf_p \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} A_n \cap E_p\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} A_n\Big).$$

Par suite, il vient $\varliminf_n \mu(A_n) = +\infty$. $\Diamond$

• De la même façon, on montre que, sous l'hypothèse d'additivité finie de μ sur $\mathscr{C}$, les conditions (iii) et $(iv)(\gamma)$ sont équivalentes à la σ-additivité de μ le long des suites d'éléments deux à deux disjoints de $\mathscr{C}$ dont la réunion est dans $\mathscr{C}$.

6.3.2 Principes de construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

On considère

$$\mathscr{C} := \big\{I_1 \cup \cdots \cup I_n,\ n \geq 1,\ I_k \text{ intervalles de } \mathbb{R} \text{ deux à deux disjoints}\big\}.$$

$\mathscr{C}$ est bien une algèbre de Boole. On définit alors la fonction long : $\mathscr{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par

$$\text{long}\,(I_1 \cup \cdots \cup I_n) := \sum_{k=1}^{n} \text{long}(I_k).$$

Cette définition est consistante car long $(I_1 \cup \cdots \cup I_n)$ ne dépend pas de la décomposition en intervalles disjoints choisie. La fonction long vérifie les hypothèses

(i)-(iv) du théorème de Carathéodory avec $E_n := [-n, n],\ n \geq 1$. La mesure de Lebesgue λ est alors définie comme l'unique prolongement de la fonction long à $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Pour finir, il reste à établir l'invariance de la mesure λ par les translations de $\mathbb{R}$. Or, si $a \in \mathbb{R}$, il est clair que λ et $\lambda(.+a)$ sont deux mesures sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ coïncidant avec la mesure de longueur long sur le π-système générateur $\mathscr{C}$. D'où $\lambda = \lambda(\cdot + a)$.

Pour plus de détails, notamment sur la consistance de la définition de la fonction long et sur ses propriétés, se reporter au chapitre 6.5 ci-après.

Remarque : On peut, de façon analogue, construire directement la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ en utilisant les hyperpavés en lieu et place des intervalles. Nous verrons cependant au chapitre 11 une méthode alternative fondée sur la notion de mesure produit.

6.4 Régularité de la mesure de Lebesgue

La régularité est une propriété importante de la mesure de Lebesgue : c'est le résultat-clé des théorèmes d'approximation et de densité en théorie de l'intégration.

***Théorème* 6.4.** *Soit λ_d la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$. Alors*

$$\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \quad \lambda_d(A) = \begin{cases} \sup \left\{\lambda_d(K),\ K \subset A,\ K \text{ compact}\right\} \\ \inf \left\{\lambda_d(O),\ O \supset A,\ O \text{ ouvert}\right\} \end{cases}. \tag{6.2}$$

La mesure λ_d est dite (intérieurement et extérieurement) régulière.

Ce théorème est en fait un cas particulier du résultat plus général suivant, établi à la section 6.6.

***Théorème* 6.5.** *Si (X, d) est un espace métrique et μ une mesure sur les boréliens $\mathscr{B}(X)$ vérifiant :*

(a) (X, d) *est* localement compact séparable *et μ est* finie *sur les* compacts,
ou
(b) (X, d) *est* complet séparable *et μ est* finie,

alors μ est régulière *au sens de (6.2).*

Remarque : C'est la propriété de *régularité extérieure*

$$\mu(A) = \inf \left\{\mu(O),\ O \supset A,\ O \text{ ouvert}\right\}$$

qui est à la base des théorèmes de densité (*cf.* sections 9.4 et 9.7). On verra que celle-ci est vérifiée dès qu'il existe une suite d'ouverts $(E_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$\forall n \geq 1,\ E_n \subset E_{n+1}, \quad X = \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} E_n \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ \mu(E_n) < +\infty.$$

6.5 ♣ Construction de mesures par prolongement (II)

Le propos de cette section de compléments est d'établir le théorème de Carathéodory, énoncé sans démonstration à la section 6.3, et d'en déduire une construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ puis, par extension, de la mesure de Stieltjes.

6.5.1 Démonstration du théorème de Carathéodory

Rappel : Une famille $\mathscr{C}$ de parties de X est une *algèbre de Boole* (sur X) si

(i) $X\in\mathscr{C}$,

(ii) pour tous $A,\ B\in\mathscr{C}$, $A\cup B\in\mathscr{C}$ [stabilité par réunion finie],

(iii) pour tout $A\in\mathscr{C}$, ${}^{c}\!A\in\mathscr{C}$ [stabilité par complémentaire].

Une algèbre de Boole est stable par intersection finie puisque $A\cap B={}^{c}({}^{c}A\cup^{c}B)$; d'autre part, $\emptyset={}^{c}X\in\mathscr{C}$.

***Théorème* 6.6** (Carathéodory)**.** *Soit $\mathscr{C}$ une algèbre de Boole sur un ensemble X et une application $\mu:\mathscr{C}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :*

(i) $\mu(\emptyset)=0,$

(ii) *pour tous $A,B\in\mathscr{C}$ tels que $A\cap B=\emptyset$, $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$* [additivité finie],

$$(iii)\left\{\begin{array}{l}\textit{pour toute suite décroissante } (A_n)_{n\geq1} \textit{ d'éléments de } \mathscr{C},\\ \textit{si } \mu(A_1)<+\infty \textit{ et } \displaystyle\bigcap_{n\geq1}^{\downarrow}A_n=\emptyset,\ \textit{ alors }\ \lim_n\mu(A_n)=0,\end{array}\right.$$

$$(iv)\left\{\begin{array}{l}\textit{il existe une suite croissante } (E_n)_{n\geq1} \textit{ d'éléments de } \mathscr{C} \textit{ vérifiant}\\ \left\{\begin{array}{l}-\ X=\bigcup_{n\geq1}^{\uparrow}E_n,\\ -\ \textit{pour tout } n\geq1,\ \mu(E_n)<+\infty\\ -\ \textit{pour tout } A\in\mathscr{C},\ \displaystyle\lim_n{}^{\uparrow}\mu(A\cap E_n)=\mu(A).\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Alors, il existe une unique mesure $\tilde{\mu}$ sur la tribu $\sigma(\mathscr{C})$ engendrée par $\mathscr{C}$ et coïncidant avec μ sur $\mathscr{C}$.

***Définition* 6.4.**

(a) *Par analogie avec le cadre général, une application $\mu:\mathscr{C}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant (i)-(iii) (resp. (i)-(iv)) est appelée une mesure (resp. mesure σ-finie) sur l'algèbre de Boole $\mathscr{C}$.*

(b) *Une application $m:\mathscr{P}(X)\to\overline{\mathbb{R}}_+$ est appelée* mesure extérieure *si elle vérifie*

(i) $m(\emptyset)=0,$

(ii) *pour tous $A,B\in\mathscr{P}(X)$ tels que $A\subset B$, $m(A)\leq m(B)$* [croissance],

(iii) *pour toute suite $(A_n)_{n\geq1}$ de parties de X*

$$m\Big(\bigcup_{n\geq1}A_n\Big)\leq\sum_{n\geq1}m(A_n)\quad[\sigma\text{-sous-additivité}].$$

On notera bien qu'une mesure extérieure est toujours définie sur l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ de toutes les parties de X.

Remarque : Il est immédiat qu'une mesure μ sur une algèbre de Boole $\mathscr{C}$ vérifie les propriétés **P1** (croissance) et **P2** (additivité "forte") de la section 6.1.1 $i.e.$

P1 : pour tous $A,\ B\in\mathscr{C}$ tels que $A\subset B$ on a $B\backslash A = B\cap {}^cA\in\mathscr{C}$ et $\mu(B)=\mu(A)+\mu(B\backslash A)\geq\mu(A)$.

P2 : pour tous $A,\ B\in\mathscr{C}$, $\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)=\mu(A)+\mu(B)$.

DÉMONSTRATION DE LA PARTIE UNICITÉ DU THÉORÈME : L'unicité de $\tilde{\mu}$ est une conséquence immédiate du corollaire 6.2 (section 6.2) sur la caractérisation d'une mesure. En effet, une algèbre de Boole est en particulier un π-système. $\Diamond$

La démonstration de l'existence occupe les deux paragraphes suivants.

Existence de $\tilde{\mu}$ lorsque $\mu(X)<+\infty$

Dans ce cadre, μ étant croissante, $\mu(A)\leq\mu(X)<+\infty$, pour toute partie $A\in\mathscr{C}$ et l'hypothèse (iv) est vide ($E_n:=X$ convient). Procédons par étapes.

<u>Étape 1</u> *Propriété d'une mesure définie sur une algèbre de Boole* :

Si μ est une mesure finie sur l'algèbre $\mathscr{C}$, alors

(a) μ est σ-additive sur $\mathscr{C}$ au sens où, pour toute suite $(A_n)_{n\geq1}$ d'éléments de $\mathscr{C}$ deux à deux disjoints,

$$\bigcup_{n\geq1}A_n\in\mathscr{C}\implies\mu\Big(\bigcup_{n\geq1}A_n\Big)=\sum_{n\geq1}\mu(A_n).$$

(b) μ est "continue à droite" au sens où, pour toute suite croissante $(A_n)_{n\geq1}$ d'éléments de $\mathscr{C}$,

$$\text{si }\bigcup_{n\geq1}^{\uparrow}A_n\in\mathscr{C},\ \text{ alors }\ \mu\Big(\bigcup_{n\geq1}^{\uparrow}A_n\Big)=\lim_n{}^{\uparrow}\mu(A_n).$$

(c) μ est σ-sous-additive sur $\mathscr{C}$ au sens où, pour toute suite $(A_n)_{n\geq1}$ d'éléments de $\mathscr{C}$,

$$\text{si }\bigcup_{n\geq1}A_n\in\mathscr{C},\quad\text{alors}\quad\mu\Big(\bigcup_{n\geq1}A_n\Big)\leq\sum_{n\geq1}\mu(A_n).$$

DÉMONSTRATION : (a) Pour tout $n\geq1$, on pose

$$A'_n:=\bigcup_{k\geq n+1}A_k=\Big(\bigcup_{k\geq1}A_k\Big)\backslash\Big(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\Big)\in\mathscr{C}.$$

Les $A_1, \dots, A_n$ et A'_n sont deux à deux disjoints et $A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A'_n = \bigcup_{k\geq 1} A_k$ donc

$$\mu\Big(\bigcup_{k\geq 1} A_k\Big) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) + \mu(A'_n)$$

par additivité finie. Or $A'_{n+1} \subset A'_n$ et $\cap_n A'_n = \emptyset$ car les A_k sont deux à deux disjoints, si bien que, d'après (iii), $\mu(A'_n) \downarrow 0$. D'où le résultat annoncé.

(b) et (c) se démontrent en recopiant les preuves des propriétés **P3** et **P5** de la section 6.1.1, une fois vérifié que tous les ensembles considérés sont dans $\mathscr{C}$. $\diamondsuit$

<u>Étape 2</u> *Construction d'une mesure extérieure μ^* prolongeant μ :*

Pour tout $A \subset X$, on pose

$$\mu^*(A) := \inf\Big\{\sum_{n\geq 1}\mu(B_n),\ A \subset \bigcup_{n\geq 1} B_n,\ B_n \in \mathscr{C}\Big\}.$$

μ^* est une mesure extérieure coïncidant avec μ sur $\mathscr{C}$ (donc μ^* est finie).

DÉMONSTRATION : Commençons par montrer que $\mu^* = \mu$ sur $\mathscr{C}$. Soit $A \in \mathscr{C}$. En spécifiant $B_1 := A \in \mathscr{C}$, $B_k := \emptyset \in \mathscr{C}$, $k \geq 2$, il vient $\mu^*(A) \leq \mu(A)$.

Soient $B_n \in \mathscr{C}$, $n \geq 1$, vérifiant $A \subset \bigcup_{n\geq 1} B_n$; $A = \bigcup_{n\geq 1} \underbrace{(A\cap B_n)}_{\in\mathscr{C}}$ donc, la σ-sous-additivité de μ sur $\mathscr{C}$ établie à l'étape 1 entraîne

$$\mu(A) \leq \sum_{n\geq 1}\mu(A\cap B_n) \leq \sum_{n\geq 1}\mu(B_n) \qquad (\mu \text{ est croissante sur } \mathscr{C}).$$

D'où $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. Finalement μ et μ^* coïncident sur $\mathscr{C}$.

Vérifions maintenant que μ^* est bien une mesure extérieure.

– $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ car $\emptyset \in \mathscr{C}$,

– μ^* est clairement croissante pour l'inclusion,

– σ-sous-additivité : Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties de X. Par définition de μ^*, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geq 1$ une suite $(B_k^{(n)})_{k\geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{C}$ telle que

$$\forall\, n \geq 1, \qquad A_n \subset \bigcup_{k\geq 1} B_k^{(n)} \ \text{ et } \ \sum_{k\geq 1}\mu(B_k^{(n)}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

D'où il vient, en sommant en n, $\displaystyle\sum_{n,k\geq 1}\mu(B_k^{(n)}) \leq \varepsilon + \sum_{n\geq 1}\mu^*(A_n)$.

Or $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1} A_n \subset \bigcup_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} B_k^{(n)}$ et $(\mathbb{N}^*)^2$ est dénombrable donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \leq \sum_{n\geq 1}\mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

D'où le résultat. $\diamondsuit$

Étape 3 *Fabrication de $\tilde{\mu}$ par restriction de la mesure extérieure μ^* :*

(a) $\mathcal{T}^* := \{A \subset X : \forall\, B \subset X,\ \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap {}^cA)\}$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$ et, par conséquent, $\sigma(\mathcal{C})$.

(b) La restriction de μ^* à $\mathcal{T}^*$ est une mesure sur $(X, \mathcal{T}^*)$. Par suite $\tilde{\mu} := \mu^*_{|\sigma(\mathcal{C})}$ est une solution au problème de prolongement.

DÉMONSTRATION : Les assertions (a) et (b) s'établissent simultanément.

– $\emptyset \in \mathcal{T}^*$ car $\mu^*(\emptyset) = 0$,

– Si $A \in \mathcal{T}^*$, ${}^cA \in \mathcal{T}^*$ par un simple argument de symétrie : ${}^c({}^cA) = A$.

– *Stabilité par réunion finie* : soient $A,\ A' \in \mathcal{T}^*$ et $B \subset X$.

$$\begin{aligned}
\mu^*(B) &= \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap {}^cA), \\
&= \mu^*((B \cap A) \cap A') + \mu^*((B \cap A) \cap {}^cA') + \mu^*((B \cap {}^cA) \cap A') \\
&\quad + \mu^*((B \cap {}^cA) \cap {}^cA'), \\
&= \mu^*(B \cap (A \cap A')) + \mu^*(B \cap (A \cap {}^cA')) + \mu^*(B \cap ({}^cA \cap A')) \\
&\quad + \mu^*(B \cap {}^c(A \cup A')).
\end{aligned}$$

Or $A \cup A' = (A \cap A') \cup (A' \cap {}^cA) \cup (A \cap {}^cA')$. La mesure extérieure μ^* étant sous-additive, il vient en intersectant par B,

$$\mu^*(B \cap (A \cap A')) + \mu^*(B \cap (A \cap {}^cA')) + \mu^*(B \cap ({}^cA \cap A')) \geq \mu^*(B \cap (A \cup A'))$$

et partant $\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap (A \cup A')) + \mu^*(B \cap {}^c(A \cup A'))$.

L'autre inégalité découle directement de la sous-additivité de μ^*. Il y a donc égalité et par conséquent $A \cup A' \in \mathcal{T}^*$; ceci montre que $\mathcal{T}^*$ est une algèbre de Boole.

– *Stabilité par réunion dénombrable et σ-additivité de μ^* sur $\mathcal{T}^*$* : On constate d'abord que si $A,\ A' \in \mathcal{T}^*$ et $A \cap A' = \emptyset$, alors pour tout $B \subset X$,

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap {}^cA) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A'),$$

l'inégalité découlant de la croissance de μ^* et de l'inclusion $A' \subset {}^cA$. Une récurrence immédiate montre alors que, pour tous $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}^*$, deux à deux disjoints,

$$\forall\, B \subset X, \quad \mu^*(B) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(B \cap A_i). \tag{6.3}$$

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{T}^*$. On pose $A'_1 := A_1$ et $A'_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A'_k$ pour tout $n \geq 2$. Les A'_n sont deux à deux disjoints. D'autre part, il est immédiat par récurrence que $A'_n \subset A_n = \bigcup_{1\leq k\leq n} A'_k$ et partant $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} A'_n$. Enfin, $\mathscr{T}^*$ étant une algèbre de Boole, chacun des A'_k est dans $\mathscr{T}^*$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\bigcup_{n\geq 1} A'_n \in \mathscr{T}^*$. Soit $B \subset X$. Comme $A_n = \bigcup_{1\leq k\leq n} A'_k \in \mathscr{T}^*$, il vient

$$\mu^*(B) = \mu^*\Big(B \cap \bigcup_{1\leq k\leq n} A'_k\Big) + \mu^*\Big(B \cap {}^c\bigcup_{1\leq k\leq n} A'_k\Big).$$

Or $B \cap \Big(\bigcup_{1\leq k\leq n} A'_k\Big) = \bigcup_{1\leq k\leq n} (B \cap A'_k)$. Cette dernière réunion étant disjointe, l'inégalité (6.3) implique donc

$$\begin{aligned} \forall\, n \geq 1, \quad \mu^*(B) &\geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(B \cap A'_k) + \mu^*\Big(B \cap {}^c\big(\bigcup_{1\leq k\leq n} A'_k\big)\Big) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(B \cap A'_k) + \mu^*\Big(B \cap {}^c\big(\bigcup_{k\geq 1} A'_k\big)\Big), \end{aligned}$$

d'où, avec $n \to +\infty$, $\quad \mu^*(B) \geq \sum_{k\geq 1} \mu^*(B \cap A'_k) + \mu^*\Big(B \cap {}^c\big(\bigcup_{k\geq 1} A'_k\big)\Big). \quad (6.4)$

La σ-sous-additivité de la mesure extérieure μ^* entraîne alors

$$\mu^*(B) \geq \mu^*\Big(B \cap \big(\bigcup_{n\geq 1} A'_n\big)\Big) + \mu^*\Big(B \cap {}^c\big(\bigcup_{n\geq 1} A'_n\big)\Big).$$

Finalement, la σ-sous-additivité de la mesure extérieure μ^* assure l'inégalité opposée, d'où, pour toute partie B de X,

$$\mu^*(B) = \mu^*\Big(B \cap \big(\bigcup_{n\geq 1} A'_n\big)\Big) + \mu^*\Big(B \cap {}^c\big(\bigcup_{n\geq 1} A'_n\big)\Big). \tag{6.5}$$

En conséquence, $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} A'_n \in \mathscr{T}^*$. $\mathscr{T}^*$ est donc bien une tribu.

Enfin, en posant $B := \bigcup_{n\geq 1} A'_n$ dans (6.4), il vient pour toute suite $(A'_n)_{n\geq 1}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathscr{T}^*$:

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n\geq 1} A'_n\Big) = \sum_{n\geq 1} \mu^*(A'_n).$$

En conclusion, μ^* est σ-additive sur $\mathscr{T}^*$, c'est donc une mesure sur $(X, \mathscr{T}^*)$.

– *La tribu $\mathscr{T}^*$ contient $\sigma(\mathscr{C})$* : Soient $A \in \mathscr{C}$ et $B \subset X$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(B_n^\varepsilon)_{n\geq 1}$ de parties de $\mathscr{C}$ telles que $B \subset \bigcup_{n\geq 1} B_n^\varepsilon$ et $\sum_{n\geq 1} \mu(B_n^\varepsilon) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$.

L'additivité de μ sur l'algèbre de Boole $\mathscr{C}$ et l'appartenance à $\mathscr{C}$ de $B_n^\varepsilon \cap A$ et $B_n^\varepsilon \cap {}^cA$ pour tout $n \geq 1$, entraînent

$$\mu^*(B) \geq \sum_{n\geq 1} \mu^*(B_n^\varepsilon \cap A) + \sum_{n\geq 1} \mu^*(B_n^\varepsilon \cap {}^cA) - \varepsilon,$$

d'où par sous-additivité de μ^*, $\mu^*(B) \geq \mu^*(B\cap A) + \mu^*(B \cap {}^cA) - \varepsilon$. L'inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, il vient

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B\cap A) + \mu^*(B \cap {}^cA).$$

L'égalité se déduit de la sous-additivité de μ^* ce qui montre que $A \in \mathscr{T}^*$. $\diamondsuit$

Le cas général : μ σ-finie

On réintroduit en lieu et place de $\mu(X) < +\infty$ l'hypothèse de "σ-finitude" (iv) :

Il existe une suite croissante $(E_p)_{p\geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{C}$ telle que

$$\forall\, p \geq 1,\ \mu(E_p) < +\infty,\ X = \bigcup_{p\geq 1}^{\uparrow} E_p, \text{ et } \forall\, A \in \mathscr{C},\ \mu(A \cap E_p) \uparrow \mu(A).$$

Pour tout $p \geq 1$, on pose $\mu_p := \mu(.\cap E_p)$. Ceci définit clairement une suite de mesures finies sur l'algèbre $\mathscr{C}$ qui se prolongent en autant de mesures finies $\tilde{\mu}_p$ sur la tribu $\sigma(\mathscr{C})$.

D'autre part $\tilde{\mu}_{p+1}(\,.\cap E_p) = \tilde{\mu}_p$ puisque, d'après le théorème de caractérisation (section 6.2), ces deux mesures finies coïncident sur le π-système générateur $\mathscr{C}$. Par suite,

$$\forall\, A \in \sigma(\mathscr{C}),\ \forall\, p \geq 1, \qquad \tilde{\mu}_p(A) = \tilde{\mu}_{p+1}(A \cap E_p) \leq \tilde{\mu}_{p+1}(A)$$

$i.e.$ la suite $(\tilde{\mu}_p(A))_{p\geq 1}$ est croissante. On pose alors

$$\forall\, A \in \sigma(\mathscr{C}), \qquad \tilde{\mu}(A) := \lim_p{}^{\uparrow} \tilde{\mu}_p(A).$$

Vérifions alors que $\tilde{\mu}$ est une mesure sur $\sigma(\mathscr{C})$:

– $\tilde{\mu}(\emptyset) = \lim_p \tilde{\mu}_p(\emptyset) = 0$,

– Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\sigma(\mathscr{C})$ deux à deux disjoints. Pour tout $p \geq 1$,

$$\tilde{\mu}_p\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \sum_{n\geq 1} \tilde{\mu}_p(A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \tilde{\mu}(A_n)$$

d'où il vient $$\tilde{\mu}\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \lim_p \tilde{\mu}_p\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \leq \sum_{n\geq 1} \tilde{\mu}(A_n).$$

D'autre part, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $p \geq 1$, $\tilde{\mu}_p\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \geq \sum_{k=1}^{n} \tilde{\mu}_p(A_k)$, donc, pour tout $n \geq 1$, $\tilde{\mu}\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \geq \sum_{k=1}^{n} \tilde{\mu}(A_k)$ d'où $\tilde{\mu}\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \geq \sum_{k\geq 1} \tilde{\mu}(A_k)$. Ceci établit la σ-additivité de $\tilde{\mu}$ sur $\sigma(\mathscr{C})$.

Soit $A \in \mathscr{C}$. Il vient, grâce à (iv) et par construction de $\tilde{\mu}_p$,

$$\tilde{\mu}(A) = \lim_p \tilde{\mu}_p(A) = \lim_p \mu(A \cap E_p) = \mu(A). \qquad \Diamond$$

La propriété de Carathéodory est essentielle pour assurer l'existence de la mesure μ comme le montre l'exemple suivant.

Exemple : On se place sur l'ensemble $\mathbb{N}$ que l'on munit de l'algèbre de Boole

$$\mathscr{C} := \{A \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) : A \text{ ou } {}^cA \text{ est finie}\}.$$

On pose $\mu(A) := 0$ si A est fini et $\mu(A) := 1$ si ${}^cA$ est fini. On vérifie aussitôt que μ est une mesure sur l'algèbre $\mathscr{C}$ *i.e.* $\mu(\emptyset) = 0$ et μ est finiment additive. Cependant μ ne vérifie pas la propriété de Carathéodory : on considère, pour tout $n \geq 1$, $A_n := \{n, n+1, \ldots\}$. Il est clair que $\cap_n A_n = \emptyset$ alors que, pour tout $n \geq 1$, $A_n \in \mathscr{C}$ et $\mu(A_n) = 1$.

Effectivement, μ ne peut se prolonger en une mesure $\tilde{\mu}$ sur $\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \sigma(\mathscr{C})$; en effet, si une telle mesure existait tout ensemble infini A aurait pour mesure 0 puisque

$$\tilde{\mu}(A) = \lim_n{}^{\uparrow} \mu(A \cap \{1, 2, \ldots, n\}) = 0.$$

Par suite, on aurait $\tilde{\mu}(\mathbb{N}) = 0 = \mu(\mathbb{N}) = 1$!

6.5.2 Construction de mesures sur $\mathbb{R}$: Lebesgue, Stieltjes

Pour construire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ – qui est notre but essentiel – nous allons encore appauvrir la structure d'algèbre de Boole.

Semi-algèbres et fonctions additives

***Définition* 6.5.** *Une famille $\mathscr{S}$ de parties de X est une semi-algèbre si*

(i) $\emptyset \in \mathscr{S}$,

(ii) *pour tous* $A, B \in \mathscr{S}$, $A \cap B \in \mathscr{S}$ [stabilité par intersection finie],

(iii) *pour tout* $A \in \mathscr{S}$, *il existe* $n \geq 1$ *et* $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{S}$ *deux à deux disjoints, tels que* ${}^cA = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Exemple (essentiel) : La famille $\mathscr{S}_I := \{I \subset \mathbb{R},\ I$ intervalle (quelconque) de $\mathbb{R}\}$ est clairement une semi-algèbre puisque $\emptyset \in \mathscr{S}_I$, $\mathscr{S}_I$ est stable par intersection et, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, ${}^cI = I_1 \cup I_2$ où I_1 et I_2 sont deux intervalles disjoints (éventuellement vides).

Remarque : Comme le montre l'exemple ci-dessus, une semi-algèbre n'est généralement pas stable par réunion finie.

***Proposition* 6.4.** *Soit $\mathscr{S}$ une semi-algèbre.*

(a) $\mathscr{C}(\mathscr{S}) := \left\{\bigcup_{i=1}^n A_i,\ A_i \in \mathscr{S},\ \text{deux à deux disjoints},\ n \geq 1\right\}$ est la plus petite algèbre de Boole contenant $\mathscr{S}$.

(b) Soit $\mu : \mathscr{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une application vérifiant $\mu(\emptyset) = 0$ et la propriété d'additivité finie suivante : pour toute famille finie $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de $\mathscr{S}$ deux à deux disjoints dont l'union est dans $\mathscr{S}$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Alors μ admet un unique prolongement $\overline{\mu}$ à $\mathscr{C}(\mathscr{S})$ vérifiant la propriété d'additivité finie (au sens du point (ii) du théorème de Carathéodory).

DÉMONSTRATION : (a) Toute algèbre de Boole contenant $\mathscr{S}$ contient $\mathscr{C}(\mathscr{S})$ (stabilité par réunion finie). Reste à montrer que $\mathscr{C}(\mathscr{S})$ est une algèbre.

– $\emptyset \in \mathscr{S} \subset \mathscr{C}(\mathscr{S})$.

– $\mathscr{C}(\mathscr{S})$ est stable par intersection finie car d'une part

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^m B_j\right) = \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j),$$

et d'autre part, les $A_i \cap B_j$ sont deux à deux disjoints dès que les familles A_i, $1 \leq i \leq n$, et B_j, $1 \leq j \leq m$, sont constituées de parties deux à deux disjointes. La stabilité par réunion finie découlera de la stabilité par passage au complémentaire.

– Soit $A := \bigcup_{i=1}^n A_i,\ A_i \in \mathscr{S}$; par hypothèse chaque ${}^cA_i$ s'écrit ${}^cA_i = \bigcup_{k=1}^{m(i)} B_k^{(i)}$ où les $B_k^{(i)}$ sont des parties de $\mathscr{S}$ deux à deux disjointes. Quitte à rajouter des $B_k^{(i)} := \emptyset$, on peut remplacer les $m(i)$ par leur maximum $m := \max_{1\leq i\leq n} m(i)$. D'où il vient

$${}^cA = \bigcap_{i=1}^n {}^cA_i = \bigcap_{i=1}^n \left(\bigcup_{k=1}^m B_k^{(i)}\right) = \bigcup_{1\leq k_1,\ldots,k_n\leq m} \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^n B_{k_i}^{(i)}\right)}_{\in\mathscr{S}}.$$

Par suite ${}^cA\in\mathscr{C}(\mathscr{S})$ puisque les ensembles $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} B^{(i)}_{k_i}$, $1\le k_1,\dots,k_n\le m$, sont clairement deux à deux disjoints.

(b) Pour tout $A:=\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\in\mathscr{C}(\mathscr{S})$ $(A_i\in\mathscr{S}$, deux à deux disjoints), on pose

$$\overline{\mu}(A):=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i).$$

Cette définition est consistante ; en effet, si A admet une décomposition $A:=\displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} A'_j$ de même type, alors $A=\displaystyle\bigcup_{i,j}(A_i\cap A'_j)$ et l'on a bien, par additivité de μ sur $\mathscr{S}$,

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)=\sum_{i,j}\mu(A_i\cap A'_j)=\sum_{j=1}^{m}\mu(A'_j).$$

En outre $\overline{\mu}$ est ainsi entièrement déterminée par les valeurs de μ sur $\mathscr{S}$, d'où l'unicité. L'additivité finie de $\overline{\mu}$ est évidente au vu de sa définition. $\Diamond$

Remarque : De l'additivité finie de $\overline{\mu}$, on déduit immédiatement

– sa croissance : $A\subset B\Rightarrow\overline{\mu}(A)\le\overline{\mu}(B)$ pour tous $A,\ B\in\mathscr{C}(\mathscr{S})$,

– sa "forte" additivité : pour tous $A,\ B\in\mathscr{C}(\mathscr{S})$,

$$\overline{\mu}(A\cup B)+\overline{\mu}(A\cap B)=\overline{\mu}(A)+\overline{\mu}(B),$$

– et enfin, par récurrence, sa sous-additivité finie :

$$\forall\, A_1,\dots,A_n\in\mathscr{C}(\mathscr{S}),\quad \overline{\mu}(A_1\cup\cdots\cup A_n)\le\overline{\mu}(A_1)+\cdots+\overline{\mu}(A_n).$$

Construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$; la *longueur* $\mathrm{long}(I)$ de I est définie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$\mathrm{long}(I):=\sup I-\inf I\le+\infty\ \text{ si } I\neq\emptyset \ \text{ et }\ \mathrm{long}(\emptyset)=0.$$

On rappelle d'autre part que la semi-algèbre $\mathscr{S}_I:=\{I, I \text{ intervalle de}\mathbb{R}\}$ vérifie (*cf.* application 4.1, section 4.1) : $\sigma(\mathscr{S}_I)=\sigma(\{[a,+\infty[,\ a\in\mathbb{R}\})=\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Théorème 6.7. *Il existe une unique mesure sur* $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$*, notée* λ*, coïncidant avec la mesure de longueur* long *sur* $\mathscr{S}_I$*.* λ *est appelée la* mesure de Lebesgue *sur* $\mathbb{R}$*. Elle vérifie*

$$\lambda([0,1])=1 \quad \textit{et} \quad \forall\, a\in\mathbb{R},\ \lambda=\lambda(.+a).$$

Ces deux propriétés caractérisent la mesure de Lebesgue.

DÉMONSTRATION : La mesure de longueur long est clairement finiment additive sur $\mathscr{S}_I$ au sens de la proposition 6.4(b) puisque, plus généralement, si I et J sont deux intervalles vérifiant $I \cap J = \emptyset$, $\mathrm{long}(I \cup J) = \mathrm{long}(I) + \mathrm{long}(J)$.

D'après la proposition 6.4 ci-avant, elle admet donc un unique prolongement $\overline{\mathrm{long}}$ à l'algèbre $\mathscr{C}(\mathscr{S}_I) = \{I_1 \cup \cdots \cup I_n,\ I_k$ intervalles 2 à 2 disjoints, $n \geq 1\}$ qui soit finiment additif au sens de la condition (ii) du théorème de Carathéodory (théorème 6.6). Le point (i) étant évident, reste à établir (iii) et (iv).

Étape 1 *Vérification de* (iii) :

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante pour l'inclusion d'éléments de $\mathscr{C}(\mathscr{S}_I)$ vérifiant $\overline{\mathrm{long}}\,(A_1) < +\infty$ et $\displaystyle\bigcap_{n\geq 1}^{\downarrow} A_n = \emptyset$. L'ensemble A_1 est borné comme réunion finie d'intervalles de longueur globale finie ; pour tout $n \geq 1$, on écrit :

$A_n = I_1^{(n)} \cup \cdots \cup I_{p_n}^{(n)}$ où les $I_k^{(n)}$ sont des intervalles deux à deux disjoints.

Si pour un certain n, $A_n = \emptyset$, le résultat est évident. Sinon, les p_n sont non nuls. Soit $\varepsilon > 0$; on pose

$$J_k^{(n)} := \left[\alpha_k^{(n)} + \frac{\varepsilon}{p_n 2^{n+1}}, \beta_k^{(n)} - \frac{\varepsilon}{p_n 2^{n+1}}\right] \quad \text{si} \quad \beta_k^{(n)} - \alpha_k^{(n)} \geq \frac{\varepsilon}{p_n 2^n}$$

et $J_k^{(n)} := \emptyset$ sinon, où $\alpha_k^{(n)}$ et $\beta_k^{(n)}$ désignent respectivement les bornes inférieures et supérieures de $I_k^{(n)}$. L'intervalle $J_k^{(n)}$ est un compact (éventuellement vide) contenu dans $I_k^{(n)}$. On pose alors, pour tout $n \geq 1$, $A'_n := \displaystyle\bigcup_{k=1}^{p_n} J_k^{(n)}$. Il est immédiat que $A'_n \in \mathscr{C}(\mathscr{S}_I)$, $A'_n \subset A_n$ et

$$\overline{\mathrm{long}}\,(A_n \setminus A'_n) \leq \sum_{k=1}^{p_n} \frac{2\varepsilon}{p_n 2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Par construction les A'_n sont compacts, donc fermés dans le compact $\overline{A_1}$, et $\displaystyle\bigcap_{n\geq 1} A'_n$ est vide, il existe donc $n_\varepsilon \geq 1$ tel que $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n_\varepsilon} A'_k = \emptyset$. Or, d'après les lois de Morgan appliquées à l'espace de référence $A_{n_\varepsilon} = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n_\varepsilon} A_k$, il vient

$$\begin{aligned} A_{n_\varepsilon} = \bigcap_{k=1}^{n_\varepsilon} A_k = \left(\bigcap_{k=1}^{n_\varepsilon} A_k\right) \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{n_\varepsilon} A'_k\right) &= \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} \left(\left(\bigcap_{j=1}^{n_\varepsilon} A_j\right) \setminus A'_k\right) \\ &\subset \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} (A_k \setminus A'_k). \end{aligned}$$

D'où $\overline{\text{long}}\,(A_{n_\varepsilon}) \leq \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \overline{\text{long}}\,(A_k \setminus A'_k) \leq \varepsilon$. Finalement, pour tout $n \geq n_\varepsilon$, il vient $\overline{\text{long}}\,(A_n) \leq \overline{\text{long}}\,(A_{n_\varepsilon}) \leq \varepsilon$. On a donc bien établi que $\lim_n \overline{\text{long}}\,(A_n) = 0$.

<u>Étape 2</u> *Vérification de* (iv) :

On pose $E_n := [-n, n]$. On a $E_n \subset E_{n+1}$, $\bigcup_n E_n = \mathbb{R}$ et $\overline{\text{long}}\,(E_n) = 2n$.

Soit $A \in \mathscr{C}(\mathscr{S}_I)$. Si $\overline{\text{long}}\,(A) < +\infty$, A est borné donc, pour n assez grand, $A \subset E_n$ et $\overline{\text{long}}\,(A \cap E_n) = \overline{\text{long}}\,(A)$. Si $\overline{\text{long}}\,(A) = +\infty$, l'un des intervalles constituant A n'est pas borné, il suffit donc de vérifier (iv) pour ceux-ci ; or, pour n assez grand, $\overline{\text{long}}\,\big([a, +\infty[\, \cap E_n\big) = \overline{\text{long}}\,([a, n]) = n - a$, donc

$$\lim_n \overline{\text{long}}\,\big([a, +\infty[\, \cap E_n\big) = +\infty = \overline{\text{long}}\,([a, +\infty[)\ ;$$

idem pour les autres intervalles non bornés.

<u>Étape 3</u> *Propriétés de la mesure de Lebesgue* :

La mesure de Lebesgue $\lambda := \widetilde{\overline{\text{long}}}$ ainsi construite sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est unique grâce aux résultats d'unicité du théorème de prolongement et de la proposition 6.4(b) ci-avant (on peut également conclure en notant que $\mathscr{S}_I$ est un π-système contenant les $E_n = [-n, n]$ et engendrant $\mathscr{B}(\mathbb{R})$).

La mesure $\lambda(. + a)$ (*cf.* section 6.1) coïncide avec λ sur $\mathscr{S}_I$ puisque l'on a $\text{long}(I + a) = \text{long}(I)$ pour tout $I \in \mathscr{S}_I$. Elles coïncident donc sur $\sigma(\mathscr{S}_I) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. D'autre part $\lambda([0, 1]) = \text{long}([0, 1]) = 1 - 0 = 1$.

Le fait que l'invariance par translation et la longueur 1 de l'intervalle unité caractérisent la mesure de Lebesgue parmi toutes les mesures sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ a déjà été établi dans l'application 6.1 (section 6.2.2). $\diamondsuit$

Remarque : On aurait tout aussi bien pu construire directement la mesure de Lebesgue λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ en nous appuyant sur la semi-algèbre des hyperpavés

$$\mathscr{S}_{I,d} := \left\{ \prod_{i=1}^{d} I_i,\ I_i \text{ intervalle de } \mathbb{R} \right\},$$

et la mesure d'hypervolume Vol définie par

$$\text{Vol}(I_1 \times \cdots \times I_d) = \prod_{i=1}^{d} \text{long}(I_i) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

(toujours avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$).

Mesures de Stieltjes sur $\mathbb{R}$

La notion de mesure de Stieltjes est une généralisation naturelle de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ consistant à attribuer à chaque intervalle $]a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$, non plus sa longueur, mais une masse $F(b)-F(a)$ où F est une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue à droite.

On peut également voir la notion de mesure de Stieltjes de la façon suivante : on définit la “fonction de répartition” d'une mesure μ sur $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ par

$$F_\mu(t):=\begin{cases}\mu(]0,t]) & \text{si } t\geq 0\\ -\mu(]t,0]) & \text{si } t\leq 0\end{cases}.$$

Si μ est finie sur les compacts, alors F_μ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ croissante, continue à droite, nulle en 0. Une question naturelle est de savoir si cette propriété admet une réciproque. Les mesures de Stieltjes apportent une réponse affirmative à cette question.

***Théorème* 6.8.** *(Stieltjes) Soit $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction croissante continue à droite. Il existe une unique mesure $\mu_{_F}$ sur $\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$, appelée* mesure de Stieltjes associée à F*, vérifiant :*

$$\forall\, a,\, b\in\mathbb{R},\qquad \mu_{_F}(]a,b])=F(b)-F(a).$$

La démonstration de ce théorème est très proche de la construction de la mesure de Lebesgue, particulièrement lorsque $F(\pm\infty):=\lim\limits_{\pm\infty}F=\pm\infty$. En particulier, si $F(x):=x$, la mesure $\mu_{_F}$ alors construite n'est autre que la mesure de Lebesgue elle-même.

DÉMONSTRATION : <u>Étape 1</u> *Construction du “germe” de $\mu_{_F}$:*

Soit $\mathscr{S}'_I:=\{]a,b],\,]a,+\infty[,\,-\infty\leq a\leq b<+\infty\}$. $\mathscr{S}'_I$ est clairement une semi-algèbre sur laquelle l'application $\mathrm{long}_F:\mathscr{S}'_I\to\mathscr{S}'_I$ définie par

$$\mathrm{long}_F(]a,b]):=F(b)-F(a)\quad\text{ et }\quad \mathrm{long}_F(]a,+\infty[)=F(+\infty)-F(b)$$

est clairement finiment additive. En effet,

$$\begin{aligned}\mathrm{long}_F(]a,b]\cup]b,c])&=\mathrm{long}_F(]a,c])=F(c)-F(a)\\&=(F(c)-F(b))+(F(b)-F(c))\\&=\mathrm{long}_F(]a,b])+\mathrm{long}_F(]b,c]),\end{aligned}$$

idem pour $]a,b]$ et $]b,+\infty[$. D'après la proposition 6.4 ci-avant, long_F admet donc un unique prolongement $\overline{\mathrm{long}}_F$ à l'algèbre

$$\mathscr{C}(\mathscr{S}'_I):=\left\{I_1\cup\cdots\cup I_n,\ I_k\in\mathscr{S}'_I,\ n\geq 1\right\}$$

qui soit finiment additif au sens de la condition (ii) du théorème de Carathéodory (théorème 6.6).

D'autre part, comme $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]a, +\infty[,\ a \in \mathbb{R}\})$ (*cf.* application 4.1, section 4.1), il est immédiat que $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathscr{S}'_I)$ *i.e.* $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{C}(\mathscr{S}'_I))$.

À ce stade, le point (i) étant évident, reste à établir (iii) et (iv).

Étape 2 *Vérification de (iii) et (iv) lorsque $F(\pm\infty) = \pm\infty$:*

– Assertion (iii) : Comme $F(\pm\infty) = \pm\infty$, il est clair que, pour toute partie $A \in \mathscr{C}(\mathscr{S}'_I)$, A est bornée dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{\mathrm{long}}_F(A) < +\infty$.

Soit donc $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante pour l'inclusion d'éléments de $\mathscr{C}(\mathscr{S}_I)$ vérifiant $\overline{\mathrm{long}}\,(A_1) < +\infty$ et $\bigcap\limits_{n\geq 1}^{\downarrow} A_n = \emptyset$. L'ensemble A_1 est borné comme réunion finie d'intervalles de longueur globale finie ; pour tout $n \geq 1$, on écrit ensuite : $A_n = I_1^{(n)} \cup \cdots \cup I_{p_n}^{(n)}$ où les $I_k^{(n)} =]\alpha_k^{(n)}, \beta_k^{(n)}]$, $1 \leq k \leq p_n$, sont deux à deux disjoints.

Si pour un certain n, $A_n = \emptyset$, le résultat est évident. Sinon, tous les p_n sont non nuls. Soit $\varepsilon > 0$; on construit alors, pour tout n et tout k, $J_k^{(n)} :=]\tilde{\alpha}_k^{(n)}, \beta_k^{(n)}]$ de façon que, d'une part, $\overline{J_k^{(n)}} \subset I_k^{(n)}$ et, d'autre part,

$$F(\tilde{\alpha}_k^{(n)}) - F(\alpha_k^{(n)}) \leq \frac{\varepsilon}{p_n 2^n}.$$

Chaque intervalle $\overline{J_k^{(n)}}$ est compact (éventuellement vide). On pose alors, pour tout $n \geq 1$, $A'_n := \bigcup\limits_{k=1}^{p_n} J_k^{(n)}$. Il est immédiat que $A'_n \in \mathscr{C}(\mathscr{S}'_I)$, $A'_n \subset A_n$ et

$$\overline{\mathrm{long}}\,(A_n \setminus A'_n) \leq \sum_{k=1}^{p_n} \frac{\varepsilon}{p_n 2^n} = \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Par construction les $\overline{A'}_n := \bigcup\limits_{k=1}^{p_n} \overline{J_k^{(n)}}$ sont compacts, donc fermés dans le compact $\overline{A_1}$, et $\bigcap\limits_{n\geq 1} A'_n = \emptyset$, il existe donc $n_\varepsilon \geq 1$ tel que $\bigcap\limits_{k=1}^{n_\varepsilon} A'_k \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n_\varepsilon} \overline{A'}_k = \emptyset$. On en déduit comme dans le théorème 6.7 que $\overline{\mathrm{long}}_F(A_{n_\varepsilon}) \leq \varepsilon$. On a donc bien établi que

$$\lim_n \overline{\mathrm{long}}_F(A_n) = 0.$$

– Assertion (iv) : elle s'établit comme dans le théorème 6.7 à partir des intervalles $E_n :=]-n, n]$.

Le prolongement $\widetilde{\overline{\mathrm{long}}}_F$ répond alors à la question posée.

Étape 3 *Cas général* : Supposons par exemple que $F(+\infty) \in \mathbb{R}$ et $F(-\infty) = -\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un réel L_ε tel que $F(+\infty) - F(L_\varepsilon) \leq \varepsilon$. On reprend la démonstration de l'assertion (iii) ci-avant en notant que $A_n \cap]-\infty, L_\varepsilon]$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{C}(\mathscr{S}'_I)$ et que $A_n \cap]-\infty, L_\varepsilon] \in \mathscr{C}(\mathscr{S}'_I)$ est borné dans $\mathbb{R}$. En outre $\overline{\text{long}}_F(A_n) = \overline{\text{long}}_F(A_n \cap]-\infty, L_\varepsilon]) + \overline{\text{long}}_F(A_n \cap]L_\varepsilon, +\infty])$.

D'après l'étape 2, $\overline{\lim_n}\left(\overline{\text{long}}_F(A_n \cap]-\infty, L_\varepsilon])\right) \leq \varepsilon$. D'autre part, il est immédiat *via* la croissance de F que $\overline{\text{long}}_F(A_n \cap]L_\varepsilon, +\infty]) \leq F(+\infty) - F(L_\varepsilon) \leq \varepsilon$. D'où, $\overline{\lim_n}\left(\overline{\text{long}}_F(A_n)\right) \leq 2\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$ *i.e.* $\lim_n \overline{\text{long}}_F(A_n) = 0$.

Les autres cas se traitent de façon analogue. Quant à l'assertion (iv) elle est inchangée. $\diamondsuit$

Notation : On adopte, pour des raisons de maniabilité formelle, la notation dF au lieu de μ_F dans la plupart des applications courantes.

Remarque : L'existence de la mesure de Stieltjes acquise, il est immédiat que, pour tous a, b, $-\infty < a \leq b < +\infty$,

$$\mu_F([a, b]) = F(b) - F(a_-) \quad \text{(en particulier } \mu(\{a\}) = \Delta F(a) := F(a) - F(a_-)).$$

6.6 ♣ Régularité d'une mesure sur un espace métrique

Dans cette section, l'espace ambiant X est un espace métrique dont la distance sera notée d. Toutes les mesures considérées sont définies sur la tribu borélienne $\mathscr{B}(X) = \sigma(\mathscr{O}(X))$ relative à la topologie définie par d.

Le but poursuivi ici est de montrer que, à défaut de pouvoir décrire précisément la tribu borélienne, il est généralement possible d'encadrer avec une précision arbitraire la mesure de tout borélien par celles d'un ouvert plus grand et d'un fermé (ou d'un compact) plus petit.

Ceci conduit à poser les définitions suivantes

***Définition* 6.6.** (a) *Une mesure μ sur $(X, \mathscr{B}(X))$ est* extérieurement régulière *si*

$$\forall\, A \in \mathscr{B}(X),\ \ \mu(A) = \inf\, \big\{\mu(O),\ O \text{ ouvert},\ A \subset O\big\}.$$

(b) *Une mesure μ sur $(X, \mathscr{B}(X))$ est* intérieurement régulière *si*

$$\forall\, A \in \mathscr{B}(X),\ \ \mu(A) = \sup\, \big\{\mu(K),\ K \text{ compact},\ A \supset K\big\}.$$

(c) *Une mesure μ sur $(X, \mathscr{B}(X))$ est* régulière *si elle est à la fois extérieurement et intérieurement régulière.*

6.6.1 Le cas d'une mesure finie

***Proposition* 6.5.** *Soit μ une mesure positive finie sur $(X, \mathscr{B}(X))$. Alors, pour tout $A \in \mathscr{B}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O et un fermé F tels que*

$$F \subset A \subset O \quad \text{et} \quad \mu(O \backslash F) \leq \varepsilon. \tag{6.6}$$

DÉMONSTRATION : Le principe de la démonstration est de montrer que

$$\mathscr{T} := \big\{A \in \mathscr{B}(X) : A \text{ vérifie (6.6)}\big\}$$

est une tribu contenant $\mathscr{O}(X)$, et par conséquent $\mathscr{B}(X)$.

– *$\mathscr{T}$ contient $\mathscr{O}(X)$* : Soient $A \in \mathscr{O}(X)$ et $\varepsilon > 0$; on pose $O := A$ et, pour tout $\delta > 0$,

$$F_\delta := \big\{x \in X : d(x, {}^c\!A) \geq \delta\big\}.$$

La fonction $x \mapsto d(x, {}^c\!A)$ est continue (cf. proposition 3.7(a)) donc F_δ est fermé et

$$\bigcup_{p\geq 1}^{\uparrow} F_{\frac{1}{p}} = \big\{x \in X : d(x, {}^c\!A) > 0\big\} = {}^c(\overline{{}^c\!A}) = A.$$

La continuité à gauche d'une mesure (**P3**, section 6.1.1), entraîne

$$\lim_p{}^{\uparrow} \mu(F_{\frac{1}{p}}) = \mu(O).$$

Donc, $\mu(O)$ étant finie, $\lim\limits_p \mu(O \setminus F_{\frac{1}{p}}) = 0$; finalement, pour p assez grand, on a $\mu(O \setminus F_{\frac{1}{p}}) < \varepsilon$. On a ainsi montré que $\mathscr{O}(X) \subset \mathscr{T}$.

– *$\mathscr{T}$ est stable par union dénombrable* : Soient A_n, $n \geq 1$, une suite d'éléments de $\mathscr{T}$ et $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe pour tout $n \geq 1$ des ensembles F_n et O_n respectivement fermés et ouverts tels que

$$\forall\, n \geq 1, \quad F_n \subset A_n \subset O_n \;\text{ et }\; \mu(O_n \backslash F_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Or $\bigcup\limits_{n\geq 1} F_n \subset \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n \subset \bigcup\limits_{n\geq 1} O_n$ et l'on vérifie d'autre part sans peine que

$$\Big(\bigcup_{n\geq 1} O_n\Big) \setminus \Big(\bigcup_{n\geq 1} F_n\Big) \subset \bigcup_{n\geq 1} (O_n \setminus F_n).$$

D'où il ressort par σ-sous additivité (propriété **P5**, section 6.1.1) que

$$\mu\bigg(\Big(\bigcup_{n\geq 1} O_n\Big) \setminus \Big(\bigcup_{n\geq 1} F_n\Big)\bigg) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(O_n \backslash F_n) \leq \sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, comme $\bigcup\limits_{n\geq 1} F_n = \bigcup\limits_{n\geq 1}^{\uparrow} \Big(\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k\Big)$, il existe $n_\varepsilon \geq 1$ tel que

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} F_n\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} F_k\Big) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose alors $O := \bigcup_{n\geq 1} O_n$ et $F := \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} F_k$. L'ensemble O est ouvert, F est fermé et l'on a $F \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n \subset O$. Enfin, $\mu(O)$ étant finie,

$$\mu(O\setminus F) = \mu(O) - \mu(F) = \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} O_n\Big) - \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} F_n\Big) + \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} F_n\Big) - \mu(F) \leq \varepsilon.$$

– *$\mathscr{T}$ est stable par complémentaire* : Soit $A \in \mathscr{T}$ et $\varepsilon > 0$, F et O tels que $F \subset A \subset O$ et $\mu(O\setminus F) \leq \varepsilon$. Il est clair que ${}^cO \subset {}^cA \subset {}^cF$. ${}^cO$ est fermé, ${}^cF$ est ouvert et ${}^cF\setminus{}^cO = O\setminus F$ donc $\mu({}^cF\setminus{}^cO) = \mu(O\setminus F) \leq \varepsilon$. $\diamondsuit$

La proposition précédente aurait pu s'énoncer de façon équivalente sous la forme suivante

$$\forall\, A \in \mathscr{B}(X), \quad \mu(A) = \begin{cases} \sup\big\{\mu(F),\ F \text{ fermé},\ F \subset A\big\} \\ \inf\big\{\mu(O),\ O \text{ ouvert},\ A \subset O\big\}. \end{cases}$$

C'est cette dernière formulation que nous allons maintenant essayer d'étendre à certaines mesures de masse infinie, sous réserve qu'elles soient cependant finies sur des boréliens “suffisamment gros”.

6.6.2 Le cas d'une mesure σ-finie

Définition 6.7. *Une mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$ est dite* σ-finie *s'il existe une suite croissante $(E_n)_{n\geq 1}$ de boréliens vérifiant*

$$X = \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} E_n \quad \textit{et} \quad \mu(E_n) < +\infty \ \textit{ pour tout } n \geq 1.$$

Par extension, l'espace $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est dit σ-fini.

Théorème 6.9. (a) *Si μ est une mesure σ-finie sur $(X, \mathscr{B}(X))$, alors*

$$\forall\, A \in \mathscr{B}(X),\ \mu(A) = \sup\{\mu(F),\ F \textit{ fermé},\ F \subset A\}.$$

(b) *Si, en outre, $X = \bigcup_{n\geq 1} \mathring{E}_n$, alors la mesure μ est* extérieurement régulière $i.e.$

$$\forall\, A \in \mathscr{B}(X),\ \mu(A) = \inf\{\mu(O),\ O \textit{ ouvert},\ A \subset O\}.$$

(c) *Enfin, si l'on peut choisir les boréliens E_n compacts, la mesure μ est* intérieurement régulière $i.e.$

$$\forall\, A \in \mathscr{B}(X),\ \mu(A) = \sup\{\mu(K),\ K \textit{ compact},\ A \supset K\}.$$

DÉMONSTRATION : (a) Cas 1 $\mu(A)<+\infty$:

Soit $\varepsilon>0$; $A=\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow}(A\cap E_n)$ donc il existe, toujours par la propriété **P3**), un entier $n_\varepsilon\geq 1$ tel que $\mu(A)\leq \mu(A\cap E_{n_\varepsilon})+\frac{\varepsilon}{2}$ *i.e.* $\mu(A\cap {}^cE_{n_\varepsilon})\leq\frac{\varepsilon}{2}$. On pose alors $\tilde\mu:=\mu(.\cap E_{n_\varepsilon})$; $\tilde\mu$ est une mesure finie sur $(X,\mathscr{B}(X))$ (cf. section 6.1) donc, d'après la proposition 6.5 ci-avant, il existe F, fermé, $F\subset A$, tel que $\tilde\mu(A\backslash F)\leq\frac{\varepsilon}{2}$. Partant,

$$\begin{aligned}\mu(A\backslash F)&=\mu((A\backslash F)\cap E_{n_\varepsilon})+\mu((A\backslash F)\cap {}^cE_{n_\varepsilon})\\&\leq\tilde\mu(A\backslash F)+\mu(A\cap {}^cE_{n_\varepsilon})\\&\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Cas 2 $\mu(A)=+\infty$:

Toujours d'après **P3**, $\mu(A)=\lim_n^{\uparrow}\mu(A\cap E_n)$; or d'après le cas 1,

$$\begin{aligned}\mu(A\cap E_n)&=\sup\left\{\mu(F),\ F\subset A\cap E_n,\ F\text{ fermé}\right\}\\&\leq\sup\left\{\mu(F),\ F\subset A,\ F\text{ fermé}\right\}.\end{aligned}$$

D'où $\mu(A)\leq\left\{\sup\{\mu(F),\ F\subset A,\ F\text{ fermé}\right\}$. L'autre inégalité est évidente.

(b) On pose, pour tout $n\geq 1$, $\mu_n:=\mu(\cdot\cap E_n)$. Soit $A\in\mathscr{B}(X)$ et $\varepsilon>0$. D'après la proposition 6.5, il existe donc, pour tout $n\geq 1$, $O_n\in\mathscr{O}(X)$ tel que $A\subset O_n$ et $\mu_n(O_n\setminus A)\leq\varepsilon/2^n$, soit encore

$$A\subset O_n\quad\text{et}\quad\mu(O_n\cap E_n)\leq\mu(A\cap E_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Nous allons établir par récurrence sur n la propriété

$$\mathscr{P}_n\equiv\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}(O_k\cap E_k)\right)\leq\mu(A\cap E_n)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{6.7}$$

$\mathscr{P}_1$ est immédiate. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie. Comme $\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1}(O_k\cap E_k)\Big)$ est finie, la forte additivité de μ (propriété **P2**, section 6.1.1) et l'hypothèse de récurrence entraînent

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1}(O_k\cap E_k)\right)&=\mu(O_{n+1}\cap E_{n+1})+\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}(O_k\cap E_k)\right)\\&\quad-\mu\left((O_{n+1}\cap E_{n+1})\cap\bigcup_{k=1}^{n}(O_k\cap E_k)\right)\\&\leq\mu(A\cap E_{n+1})+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}+\mu(A\cap E_n)\\&\quad+\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2^k}-\mu\left((O_{n+1}\cap E_{n+1})\cap\bigcup_{k=1}^{n}(O_k\cap E_k)\right).\end{aligned}$$

Or, on a simultanément

$$A\cap E_n \subset \bigcup_{k=1}^{n}(A\cap E_k)\subset \bigcup_{k=1}^{n}(O_k\cap E_k) \text{ et } A\cap E_n \subset A\cap E_{n+1}\subset O_{n+1}\cap E_{n+1} \;;$$

d'où il vient

$$\mu(A\cap E_n)\leq \mu\Bigg((O_{n+1}\cap E_{n+1})\cap\Big(\bigcup_{k=1}^{n}(O_k\cap E_k)\Big)\Bigg)<+\infty,$$

si bien que

$$\mu\Bigg(\bigcup_{k=1}^{n+1}(O_k\cap E_k)\Bigg)\leq \mu(A\cap E_{n+1})+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

$\mathscr{P}_{n+1}$ est donc établie. L'ouvert $\bigcup_{n\geq 1}(O_n\cap \mathring{E}_n)$ étant contenu dans $\bigcup_{n\geq 1}(O_n\cap E_n)$, passer à la limite dans l'inégalité conduit à

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1}(O_n\cap \mathring{E}_n)\Big)\leq \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1}(O_n\cap E_n)\Big)\leq \mu(A)+\varepsilon.$$

Reste à montrer que $\bigcup_{n\geq 1}(O_n\cap \mathring{E}_n)$ contient A. Or, comme $X=\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow}\mathring{E}_n$ par hypothèse, $A=\bigcup_{n\geq 1}(A\cap \mathring{E}_n)\subset \bigcup_{n\geq 1}(O_n\cap \mathring{E}_n)$.

(c) On remarque simplement que les ensembles $F\cap E_n$ sont compacts comme fermés dans des compacts et que $\mu(F)=\lim_n^{\uparrow}\mu(F\cap E_n)$. ◊

6.6.3 Régularité des mesures de Borel

Les mesures de Borel sont un premier exemple où l'ensemble des hypothèses du théorème 6.9 sont remplies.

***Définition* 6.8.** *Une mesure μ sur $(X,\mathscr{B}(X))$ est appelée* mesure de Borel *si, pour tout compact K de X, $\mu(K)$ est fini.*

Pour l'essentiel, on ne s'intéresse qu'aux mesures de Borel définies sur un espace séparable ($i.e.$ possédant une suite dense, voir section 3.4) et localement compact.

***Définition* 6.9.** *Un espace métrique (X,d) est* localement compact *si tout point $x\in X$ admet un voisinage compact K_x $i.e.$ tel que $x\in \mathring{K}_x$.*

On montre que, dans un tel espace, tout voisinage de x contient un voisinage compact de x (cf. [18]).

Exemple fondamental : $\mathbb{R}^d$, muni de sa structure d'e.v.n. est un espace localement compact séparable. En revanche, un e.v.n. de dimension infinie n'est jamais localement compact. La mesure de Lebesgue λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ est une mesure de Borel puisque, tout compact K étant borné, il existe $M>0$ tel que $K \subset [-M, M]^d$, d'où $\lambda(K) \leq (2M)^d < +\infty$.

Le théorème de régularité des mesures de Borel s'énonce ainsi.

***Théorème* 6.10.** *Toute mesure de Borel sur un espace métrique localement compact et séparable est régulière* $i.e.$

$$\forall\, A \in \mathscr{B}(X), \quad \mu(A) = \begin{cases} \inf\{\mu(O),\ A \subset O,\ O \textit{ ouvert}\} \\ \sup\{\mu(K),\ K \subset A,\ K \textit{ compact}\}. \end{cases} \tag{6.8}$$

DÉMONSTRATION : À ce stade la démonstration est purement topologique. En effet, au vu du théorème 6.9, il suffit de montrer l'existence d'une suite de compacts $(L_n)_{n\geq 1}$ vérifiant $X = \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} \mathring{L}_n$ et $L_n \subset L_{n+1}$.

Étape 1 (X, d) *est* σ*-compact* :

Par σ-compact, on entend $X = \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} K_n$, $K_n \subset K_{n+1}$, K_n compact.

Soit $I := \big\{(n, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Q}_+^* : \overline{B}(x_n, r) \text{ compact}\big\}$; I étant (au plus) infini dénombrable, on peut l'écrire comme réunion dénombrable d'une suite croissante d'ensembles finis $I_p,\ p \geq 1$.

Soit $x \in X$; x admet un voisinage compact K_x. Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $x \in \overline{B}(x_n, r) \subset \mathring{K}_x$. Par suite $X = \bigcup_{(n,r)\in I} \overline{B}(x_n, r)$. On pose $K_p := \bigcup_{(n,r)\in I_p} \overline{B}(x_n, r)$. Il est clair que $X = \bigcup_{p\geq 1}^{\uparrow} K_p$ et que les K_p sont compacts comme réunion finie de compacts. D'où le résultat.

Étape 2 *Construction des* L_n *par récurrence* :

On pose $L_1 := K_1$; puis l'on suppose construits des compacts $L_1, \ldots, L_n$ tels que $K_k \subset L_k$, $1 \leq k \leq n$ et $L_{k-1} \subset \mathring{L}_k$, $2 \leq k \leq n$. L'ensemble $K_{n+1} \cup L_n$ est compact et, par locale compacité de X, tout $x \in K_{n+1} \cup L_n$ a un voisinage compact V_x. Or, $x \in \mathring{V}_x$ par hypothèse donc la famille $(\mathring{V}_x)_{x\in K_{n+1}\cup L_n}$ forme un recouvrement ouvert dont on peut extraire un recouvrement fini $\mathring{V}_{x_1} \cup \cdots \cup \mathring{V}_{x_p}$. On pose alors $L_{n+1} := V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_p}$. L'ensemble L_{n+1} ainsi construit est compact comme réunion finie de compacts, $K_{n+1} \subset L_{n+1}$ et $L_n \subset \mathring{V}_{x_1} \cup \cdots \cup \mathring{V}_{x_p} \subset \mathring{L}_{n+1}$. La suite de compacts ainsi construite vérifie finalement

$$X = \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} K_n \subset \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} L_n \subset \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} \mathring{L}_{n+1} \subset \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} \mathring{L}_n \subset X. \quad \Diamond$$

***Application* 6.2.** Toute mesure de Borel μ sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ ($i.e.$ finie sur les compacts) est régulière ; c'est évidemment le cas de la *mesure de Lebesgue* λ_d mais aussi de toutes les mesures à densité de la forme $\mu = f.\lambda_d$ où f est borélienne positive et localement Lebesgue intégrable $i.e.$

$$\forall\, K \subset \mathbb{R}^d,\ K \text{ compact}, \qquad \int_K f\, d\lambda_d < +\infty.$$

Compléments topologiques : (a) Un espace métrique σ-compact est toujours séparable. En effet un espace métrique compact, notons-le K, est toujours séparable. Pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^*$, on peut, par compacité, recouvrir K par un nombre fini de boules de rayon r :

$$K = \bigcup_{1 \le i \le n_r} \mathring{B}(x_i^{(r)}, r).$$

Il est alors immédiat que $\{x_i^{(r)},\ 1 \le i \le n_r,\ r \in \mathbb{Q}_+^*\}$ est dénombrable et dense dans K. Si maintenant un espace métrique X est réunion dénombrable de compacts, ceux-ci sont séparables et partant X l'est car une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable (cf. proposition 2.5).

(b) En combinant l'assertion (a) et l'étape 1 du théorème 6.10 ci-avant, on obtient que, dans un espace métrique (X, d) localement compact, il y a équivalence entre séparabilité et σ-compacité :

(c) En fait, le *théorème de métrisabilité d'Urysohn* entraîne que, si un espace topologique séparé, non métrisé $a\ priori$, est localement compact et admet une base dénombrable d'ouverts, alors il est métrisable au sens où sa topologie (voir section 3.3) est engendrée par une distance (voir [21], p. 218 ([2])).

6.6.4 Régularité des mesures finies sur un espace polonais

La régularité peut également être obtenue sous des hypothèses de complétude lorsque μ est finie.

***Définition* 6.10.** *Un espace métrique* (X, d) *est appelé* polonais *s'il est à la fois* séparable *et* complet.

***Théorème* 6.11.** *Soit* (X, d) *un espace polonais. Toute mesure* μ finie *sur l'espace* $(X, \mathscr{B}(X))$ *vérifie*

(a) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, K_\varepsilon \subset X$, K_ε *compact tel que* $\mu({}^cK_\varepsilon) \le \varepsilon$.

(b) μ *est régulière au sens de (6.8).*

---

2. Le résultat subsiste si l'on remplace l'hypothèse de locale compacité par celle, plus faible, de *régularité* qui stipule que tout voisinage d'un point $x \in X$ contient un voisinage fermé.

DÉMONSTRATION : (a) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dense dans X et $\varepsilon > 0$; pour tout $p \geq 1$, il existe $n_p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mu\left({}^c\left(\bigcup_{n=1}^{n_p} B(x_n, 1/p)\right)\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^p} \quad \text{car} \quad X = \bigcup_{n\geq 1} B(x_n, 1/p) \text{ et } \mu(X) < +\infty.$$

On pose alors

$$K_\varepsilon := \overline{\bigcap_{p\geq 1} \bigcup_{n\leq n_p} B(x_n, 1/p)}.$$

$K_\varepsilon \subset \bigcup_{n\leq n_p} \overline{B}(x_n, 1/p)$ pour tout $p \geq 1$, donc K_ε est un ensemble précompact dans l'espace complet (X, d) ; K_ε étant fermé, il est donc compact (cf. [25] p. 137). D'autre part, la σ-additivité de μ entraîne

$$\mu({}^cK_\varepsilon) \leq \mu\left[\bigcup_{p\geq 1} {}^c\left(\bigcup_{n=1}^{n_p} B(x_n, 1/p)\right)\right] \leq \sum_{p\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^p} = \varepsilon.$$

(b) Ce point est une application immédiate de la proposition 6.5 et de l'assertion (a) puisque, si F est fermé et K compact, $F \cap K$ est compact. $\quad\Diamond$

6.6.5 Application à la caractérisation des mesures

A partir des théorèmes précédents et de la proposition 6.5, on retrouve (ou on obtient) des résultats utiles de caractérisation des mesures.

***Théorème* 6.12.** *Soient (X, d) un espace métrique et μ et μ' deux mesures sur $(X, \mathscr{B}(X))$. Si μ et μ' vérifient l'une des trois propriétés suivantes :*

(a) $X = \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} E_n$, E_n ouvert, $\mu(E_n) = \mu'(E_n) < +\infty$ et $\mu_{|\mathscr{O}(X)} = \mu'_{|\mathscr{O}(X)}$ (thm. 6.9),

ou

(b) (X, d) est localement compact, séparable et pour tout compact K de X, $\mu(K) = \mu'(K) < +\infty$ (cf. théorème 6.10),

ou

(c) (X, d) séparable complet, $\mu(X) = \mu'(X) < +\infty$ et pour tout compact K, $\mu(K) = \mu'(K)$ (cf. théorème 6.11),

alors $$\mu = \mu'.$$

6.7 Exercices

$(X, \mathscr{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

Notation : une propriété est vérifiée μ-*p.p.* si elle est vraie sur le complémentaire d'un ensemble mesurable de μ-mesure nulle.

6.1 On considère $(A_n)_{n\geq 0}$ et $(B_n)_{n\geq 0}$ deux suites de $\mathscr{A}$ telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_n\subset B_n$ et $\mu(A_n)<+\infty$. Majorer $\mu(\bigcup_{n\geq 0} B_n\setminus\bigcup_{n\geq 0} A_n)$ et $\mu(\bigcap_{n\geq 0} B_n\setminus\bigcap_{n\geq 0} A_n)$ à l'aide des termes de la suite $(\mu(B_n)-\mu(A_n))_{n\geq 0}$.

6.2 Soient $(Y,\mathscr{B})$ un espace mesurable et $f:(X,\mathscr{A})\to(Y,\mathscr{B})$ une fonction mesurable. Montrer que l'application $\mu_f:\mathscr{B}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ définie par $\mu_f(B):=\mu(f^{-1}(B))$ est une mesure sur $(Y,\mathscr{B})$.

6.3 Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application μ définit une mesure et caractériser les ensembles de mesure nulle :

$a)$ $\mathscr{A}:=\mathscr{P}(X)$ et pour $x\in X$ fixé, $\mu(A):=\mathbb{1}_A(x)$,

$b)$ $X:=\mathbb{R}$, $\mathscr{A}:=\{A\in\mathscr{P}(\mathbb{R}) : A$ ou ${}^cA$ dénombrable$\}$ et $\mu(A):=0$ si A est dénombrable, $\mu(A):=1$ sinon,

$c)$ $X:=\mathbb{N}$, $\mathscr{A}:=\mathscr{P}(\mathbb{N})$ et, $(u_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ étant fixée, $\mu(A):=\sum_{n\in A} u_n$.

6.4 Soit $f:(X,\mathscr{A})\to(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

$a)$ Montrer que si $\mu(X)\neq 0$ alors il existe $A\in\mathscr{A}$, $\mu(A)\neq 0$, tel que f soit bornée sur A.

$b)$ Montrer que si $\mu(\{f\neq 0\})\neq 0$ alors il existe $A\in\mathscr{A}$, $\mu(A)\neq 0$, tel que $|f|$ soit minorée sur A par une constante strictement positive.

6.5 Soient μ une mesure finie sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. On lui associe la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x):=\mu([x,+\infty[)$.

$a)$ Montrer que la mesure μ est uniquement déterminée par la donnée de F.

$b)$ Montrer que F est décroissante et continue à gauche sur $\mathbb{R}$, et calculer les limites en $\pm\infty$ de F.

$c)$ Calculer $\mu(\{x\})$ pour $x\in\mathbb{R}$, puis montrer que F est continue en x si et seulement si $\mu(\{x\})=0$. Que peut-on en déduire sur l'ensemble $D:=\{x\in\mathbb{R} : \mu(\{x\})\neq 0\}$?

6.6 Une partie $N\in\mathscr{P}(X)$ est dite *négligeable* par rapport à la mesure μ, ou μ-*négligeable*, s'il existe $A\in\mathscr{A}$ tel que $N\subset A$ et $\mu(A)=0$. On note $\mathscr{N}$ l'ensemble des parties μ-négligeables et $\overline{\mathscr{A}}:=\{A\cup N : (A,N)\in\mathscr{A}\times\mathscr{N}\}$.

$a)$ Montrer que $C\in\overline{\mathscr{A}}$ si et seulement si il existe $A,B\in\mathscr{A}$ tels que $A\subset C\subset B$ et $\mu(B\setminus A)=0$.

$b)$ Montrer que $\overline{\mathscr{A}}$ est une tribu.

$c)$ On pose pour tout $C\in\overline{\mathscr{A}}$, $\overline{\mu}(C):=\mu(A)$ si $A\subset C\subset B$ et $\mu(B\setminus A)=0$. Montrer que $\overline{\mu}$ définit bien une application et une mesure sur $\overline{\mathscr{A}}$ qui coïncide avec μ sur $\mathscr{A}$.

$d)$ Montrer que la mesure $\overline{\mu}$ est *complète*, *i.e.* $\overline{\mathscr{A}}$ contient toutes les parties $\overline{\mu}$-négligeables.

La tribu $\overline{\mathscr{A}}$ est appelée la tribu complétée de la mesure μ et sera étudiée en détail au chapitre 13.

6.7 On considère $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) := a\,x + b$. Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $f(A) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(f(A)) = |a|\,\lambda(A)$.

6.8 $a)$ Montrer l'existence d'un ouvert dense de $\mathbb{R}$ de mesure arbitrairement petite.

$b)$ En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide tel que, pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(F \cap A) \geq \lambda(A) - \varepsilon$.

6.9 Déterminer $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ tels que $A + B = \mathbb{R}$ et $\lambda(A) = \lambda(B) = 0$.

6.10 Montrer que le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue est une partie λ_{d+1}-négligeable de $\mathbb{R}^{d+1}$.

6.11 Soient (X, d) un espace métrique et μ une mesure finie sur la tribu borélienne $\mathscr{B}(X)$. On dit que $A \in \mathscr{B}(X)$ vérifie la propriété de *régularité* $(*)$ si

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : A \subset O,\ O \in \mathscr{O}(X)\} = \sup\{\mu(F) : F \subset A,\ {}^c F \in \mathscr{O}(X)\}.$$

$a)$ Montrer que tout fermé de X vérifie $(*)$.

$b)$ Montrer que l'ensemble des parties vérifiant $(*)$ est une tribu.

$c)$ En déduire que tout borélien de X vérifie $(*)$.

6.12 Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré de masse totale finie et une suite de fonctions $f_n : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mesurables.

$a)$ Montrer que l'ensemble de convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est défini par

$$C := \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{i,j\geq n} \{|f_i - f_j| \leq 1/k\}.$$

$b)$ On suppose que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge μ-*p.p.* vers une fonction mesurable f, au sens où $\mu({}^c C) = 0$. On définit pour $k, n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n^k := \bigcup_{p=1}^{n} \bigcap_{i\geq p} \{|f_i - f| \leq 1/k\}.$$

Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_{k,\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu({}^c A^k_{n_{k,\varepsilon}}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

$c)$ En déduire le *théorème d'Egoroff : pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $A_\varepsilon \in \mathscr{A}$ *tel que* $\mu({}^c A_\varepsilon) < \varepsilon$ *et* f_n *converge uniformément vers* f *sur* A_ε.

$d)$ Montrer par un exemple simple (sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage ou sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue) que ce résultat est faux en général si $\mu(X) = +\infty$.

6.13 Soient une suite de fonctions $f_n : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mesurables et f mesurable. On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge en mesure* vers f si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \lim_n \mu\big(\{|f_n - f| > \varepsilon\}\big) = 0.$$

$a)$ Montrer que si $\mu(X) < +\infty$ et la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge μ-$p.p.$ vers f, alors elle converge en mesure vers f.

$b)$ Montrer que si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en mesure vers f alors elle possède une sous-suite qui converge μ-$p.p.$ vers f.

6.14 Soit X un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne $\mathscr{B}(X)$ et d'une mesure μ. On définit pour chaque fonction $f : X \to \mathbb{K}$ mesurable, le *support essentiel* de f par

$$S_f^\mu := \bigcap_{F\in\mathscr{S}_f{}^\mu} F \quad \text{où} \quad \mathscr{S}_f{}^\mu := \{F \text{ fermé de } X : f\!=\!0\ \mu\text{-}p.p. \text{ sur } {}^cF\}.$$

$a)$ Montrer que, si f est continue, S_f^μ est contenu dans le support usuel de la fonction f f (*i.e.* $\operatorname{supp} f := \overline{\{f\neq 0\}}$). Montrer qu'il y a égalité si tous les ouverts non vides de X ont une mesure non nulle sous μ.

$b)$ Soit $f : X \to \mathbb{K}$ mesurable. Montrer que $f\!=\!0$ μ-$p.p.$ sur ${}^cS_f^\mu$.

$c)$ Soient $f, g : X \to \mathbb{K}$ mesurables. Montrer que si $|f|\leq|g|$ μ-$p.p.$ alors $S_f^\mu \subset S_g^\mu$, et que si $|f|=|g|$ μ-$p.p.$ alors $S_f^\mu = S_g^\mu$.

$d)$ Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives qui croît vers une fonction f. Montrer que $S_f^\mu = \overline{\bigcup_{n\geq 0}^{\uparrow} S_{f_n}^\mu}$.

6.15 Soit $(X, \mathscr{B}(X))$ un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne. Soit μ une mesure sur $(X, \mathscr{B}(X))$.

$a)$ On pose $\mathscr{O}_\mu := \{O \in \mathscr{O}(X) : \mu(O) = 0\}$. Montrer que $\mathscr{O}$ est non vide et admet un plus grand élément Ω_μ pour l'inclusion. On définit le *support de* μ par $\operatorname{supp}\mu :=^c \Omega_\mu$.

$b)$ Déterminer le support d'une mesure de Dirac δ_a, de la mesure de Lebesgue λ_d, de la mesure de comptage m.

$c)$ Soient $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive et $\nu := f.\mu$. Montrer que $\operatorname{supp}\nu := S_f^\mu$ (support μ-essentiel de f défini à l'exercice 14.

6.16 Soient (X, d) un espace métrique et $\alpha, \varepsilon > 0$. Pour toute partie A de X, on désigne par $\mathscr{R}_\varepsilon(A)$ l'ensemble des recouvrements dénombrables $(B_k)_{k\geq 1}$ de A par des boules B_k de diamètre $\leq\varepsilon$, et on pose

$$\mu_\alpha^\varepsilon(A) := \inf_{\mathscr{R}_\varepsilon(A)} \Big(\sum_{k\geq 1} (\operatorname{diam} B_k)^\alpha \Big).$$

$a)$ Montrer que la fonction $\varepsilon \mapsto \mu_\alpha^\varepsilon(A)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$b)$ Montrer que l'application μ_α^ε est une mesure extérieure (*cf.* définition (6.4)).

$c)$ En déduire que l'application $\mu_\alpha := \lim_{\varepsilon\to 0} \mu_\alpha^\varepsilon$ est une mesure extérieure appelée la *mesure de Hausdorff*.

$d)$ Montrer que, pour toute partie A de X, la fonction $\alpha \mapsto \mu_\alpha(A)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que la fonction $\alpha \mapsto \varepsilon^{-\alpha}\,\mu_\alpha^\varepsilon(A)$, pour tout $\varepsilon > 0$.

6.17 On se place sur l'e.v.n. $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$ et on reprend les notations de l'exercice précédent.

$a)$ Soient $\alpha \geq d$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une constante c_d strictement positive (qui dépend de la norme choisie sur $\mathbb{R}^d$) telle que, pour tout hypercube Q de $\mathbb{R}^d$, $\mu_\alpha^\varepsilon(Q) \leq c_d\, \varepsilon^{\alpha-d}\, \lambda_d(Q)$.

$b)$ En déduire que, pour tout $\alpha > d$ et pour toute partie bornée A de $\mathbb{R}^d$, $\mu_\alpha(A) = 0$.

$c)$ Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^d$. On définit la *dimension de Hausdorff* de A par

$$\mathscr{H}(A) := \inf\{\alpha > 0 : \mu_\alpha(A) = 0\} \in [0, d].$$

Montrer que, pour tout $\alpha > \mathscr{H}(A)$, $\mu_\alpha(A) = 0$ et que, pour tout $\alpha < \mathscr{H}(A)$, $\mu_\alpha(A) = +\infty$.

$d)$ Soit Q un hypercube de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $\mathscr{H}(Q) = d$.

6.18 On définit sur la tribu $\mathscr{A}$ la relation $\mathscr{R}$ par : pour tous $A, B \in \mathscr{A}$, $A \mathscr{R} B$ si $\mu(A \Delta B) = 0$, où Δ désigne la différence symétrique.

$a)$ Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{A}$ et caractériser la classe d'équivalence de l'ensemble Ø.

On note par $\mathscr{A}/\mathscr{R}$ l'ensemble quotient de $\mathscr{A}$ modulo la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ et par $\dot{A}$ la classe d'un élément A de $\mathscr{A}$.

$b)$ Soient $\dot{A}, \dot{B} \in \mathscr{A}/\mathscr{R}$. Montrer que le nombre $\mu(A\Delta B)$ ne dépend pas des représentants A et B dans les classes respectives $\dot{A}$ et $\dot{B}$.

$c)$ Montrer que l'application d définie sur $\mathscr{A}/\mathscr{R} \times \mathscr{A}/\mathscr{R}$ par

$$d(\dot{A}, \dot{B}) := \arctan(\mu(A \,\Delta\, B)), \quad \dot{A}, \dot{B} \in \mathscr{A}/\mathscr{R},$$

est une distance sur $\mathscr{A}/\mathscr{R}$.

$d)$ Soit ν une mesure sur $\mathscr{A}$ telle que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon.$$

Montrer que l'application $\dot{A} \mapsto \nu(A)$ est bien définie et continue sur $(\mathscr{A}/\mathscr{R}, d)$.

6.19 Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on note $-A := \{-a\,;\ a \in A\}$ et $|A| := \{|a|\,;\ a \in A\}$.

$a)$ Montrer que $-A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et $|A| \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$.

$b)$ Montrer que $\lambda(A) = \lambda(-A)$ et $\lambda(|A|) \leq \lambda(A)$.

6.20 Soit espace $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$.

$a)$ Montrer que

$$\big|\mu(A \cap B) - \mu(A)\,\mu(B)\big| \leq \sqrt{\mu(A)(1-\mu(A))\mu(B)(1-\mu(B))} \leq \frac{1}{4}.$$

b) Montrer les deux inégalités

$$\begin{aligned}
&\mu(A\cap B)-\mu(A)\,\mu(B)\ \le \min\big(\mu(A)(1-\mu(B)),\mu(B)(1-\mu(A))\big)\\
\text{et}\quad &\mu(A)\,\mu(B)-\mu(A\cap B)\ \le \min\big(\mu(A)(1-\mu(A)),\mu(B)(1-\mu(B))\big).
\end{aligned}$$

c) Montrer que les inégalités obtenues en b) sont plus fines que celle obtenue en a).

6.21 a) Soit μ la mesure définie sur $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+^*)$ par $\mu(A) := \displaystyle\int_A \frac{dx}{x}$. Montrer que μ est invariante par homothétie de rapport > 0.

b) Soit μ' une mesure sur $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+^*)$, invariante par homothétie, avec $\mu'([1,e]) = 1$. Montrer que $\mu' = \mu$.

c) Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+^*)$ et tout $\alpha > 0$, $A^\alpha \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+^*)$ et

$$\mu(A^\alpha) = \alpha\,\mu(A).$$

6.22 On se place sur un espace X muni d'une tribu $\mathscr{A}$.

a) Montrer qu'une application $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\forall\, A, B \in \mathscr{A},\ A\cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,

(iii) pour toute suite $(A_n)_{n\ge 1}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, *croissante* pour l'inclusion, $\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \lim_n^{\uparrow} \mu(A_n)$,

est une mesure sur $(X,\mathscr{A})$.

b) On considère une suite $(\nu_n)_{n\ge 1}$ croissante majorée de mesures positives *finies* sur $(X,\mathscr{A})$, c'est-à-dire vérifiant

$$\sup_n \nu_n(X) < +\infty \quad \text{et} \quad \forall\, n\in \mathbb{N}^*,\ \forall\, A\in \mathscr{A},\ \nu_n(A) \le \nu_{n+1}(A).$$

Montrer que l'application ν définie sur $\mathscr{A}$ par $\nu(A) := \lim_n \nu_n(A)$ est une mesure finie.

6.23 *Théorème de classe monotone fonctionnelle*

Soient $(X,\mathscr{A})$ un espace mesurable, $\mathscr{H}$ un $\mathbb{R}$-s.e.v. de l'espace des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ un π-système de parties de X. On suppose que $\mathscr{H}$ vérifie

(i) $\forall\, C\in \mathscr{C},\ \mathbb{1}_C \in \mathscr{H}$

(ii) Si $f = \lim_n^{\uparrow} f_n,\ f_n\in \mathscr{H},\ f_n \ge 0,$ alors $f\in \mathscr{H}$.

a) Soit $\mathscr{T} := \{A\subset X : \mathbb{1}_A \in \mathscr{H}\}$. Montrer que $\mathscr{T}$ est un λ-système. En déduire que $\mathscr{H}$ contient toutes les indicatrices d'éléments de $\sigma(\mathscr{C})$.

b) Montrer que $\mathscr{H}$ contient toutes les fonctions bornées $\sigma(\mathscr{C})$-mesurables.

Troisième partie

Intégrale de Lebesgue

Chapitre 7

Intégrale par rapport à une mesure positive

Dans de ce chapitre, $(X, \mathscr{A}, \mu)$ désignera un espace mesuré quelconque. L'usage de $\{f \in B\}$ en lieu et place de $f^{-1}(B)$ pour noter l'image réciproque ensembliste $\{x \in X : f(x) \in B\}$ ainsi que ses diverses variantes $\{f = a\}$, $\{f \neq a\}$, $\{f \leq a\}$, etc., sera généralisé.

On adoptera les *conventions* suivantes :

$$0 \times \mu(A) = 0 \text{ pour tout } A \in \mathscr{A}, \text{ y compris si } \mu(A) = +\infty, \tag{7.1}$$

$$0 \times f(x) = 0 \text{ pour toute fonction } f, \text{ y compris si } f(x) = \pm\infty. \tag{7.2}$$

Ainsi, on posera $0 \times \mu(\{f = 0\}) = 0$ même si $\mu(\{f = 0\}) = +\infty$. De même, le produit $f(x)g(x)$ vaut 0 dès que $f(x)$ ou $g(x)$ vaut 0, même si l'autre terme est infini. Par exemple, la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f} := f\,\mathbb{1}_{\{|f|<+\infty\}}$ vaut 0 en tout point x tel que $f(x) = \pm\infty$.

On synthétise parfois ces conventions à l'aide du raccourci (dangereux)

$$\text{“}0 \times (\pm\infty) = 0\text{”}.$$

7.1 Intégrale d'une fonction étagée positive

Parmi toutes les écritures possibles d'une fonction étagée $f \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(\mathscr{A})$, on distingue sa forme canonique :

$$f = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha\,\mathbb{1}_{\{f=\alpha\}}.$$

C'est sur cette forme canonique que l'on s'appuie pour définir l'intégrale d'une fonction étagée positive.

***Définition* 7.1.** *Soit $f \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{A})$ une fonction étagée* positive *sur $(X, \mathscr{A})$. L'intégrale de f par rapport à la mesure μ est définie par*

$$\int_X f\,d\mu := \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha\,\mu(\{f = \alpha\}) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

***Proposition* 7.1.** *Soit f une fonction étagée. Pour toute décomposition $f := \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ où $(A_i)_{i \in I}$ désigne une partition $\mathscr{A}$-mesurable finie de X,*

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i).$$

DÉMONSTRATION : On vérifie que

$$\sum_{i \in I} \alpha_i\,\mu(A_i) = \sum_{\alpha \in f(X)} \sum_{i:\alpha_i = \alpha} \alpha_i\,\mu(A_i) = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \sum_{i/\alpha_i = \alpha} \mu(A_i).$$

Or, $\displaystyle\bigcup_{i/\alpha_i = \alpha} A_i = \{f = \alpha\}$ pour tout $\alpha \in f(X)$ et les A_i étant deux à deux disjoints par hypothèse, il est clair que $\displaystyle\sum_{i/\alpha_i = \alpha} \mu(A_i) = \mu(\{f = \alpha\})$. D'où le résultat annoncé. $\Diamond$

Notations : On note aussi

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) \quad \text{ou} \quad \int_X f(x)\,\mu(dx) \quad \text{la quantité} \quad \int_X f\,d\mu.$$

En l'absence d'ambiguïté, on omet parfois de mentionner l'espace X.

Remarques : • Si $f \equiv 0$ (fonction nulle), $\displaystyle\int_X f\,d\mu = 0 \times \mu(X) = 0$ (ce point repose sur la convention (7.1) dès que $\mu(X) = +\infty$).

• On constate sur la définition que

$$\int_X f\,d\mu < +\infty \iff \mu(\{f \neq 0\}) < +\infty.$$

(ce point utilise également la convention (7.1)).

Exemples : 1. *Mesure de Dirac :* Soient $\mu := \delta_a$ la mesure de Dirac au point $a \in X$ et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Alors

$$\int_X f\,d\mu = f(a).$$

En effet, $\mu(\{f = f(a)\}) = 1$ et $\mu(\{f = \alpha\}) = 0$ pour tout $\alpha \in f(X) \setminus \{f(a)\}$.

2. *Mesure de comptage :* Soit m la mesure de comptage sur $(X, \mathscr{P}(X))$, définie par $m(A) = \text{card}(A)$ pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$. Alors, si la fonction $f : X \to \mathbb{R}_+$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs,

$$\int_X f\, dm := \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \,\text{card}\,\{f = \alpha\}.$$

– Soit $\text{card}\,\{f \neq 0\} < +\infty$ et il est clair que $\displaystyle\int_X f\, dm = \sum_{x \in X,\, f(x) \neq 0} f(x)$, cette somme ne comportant qu'un $nombre\ fini\ de\ termes$. On la note – abusivement – $\displaystyle\sum_{x \in X} f(x)$.

– Soit $\text{card}\,\{f \neq 0\} = +\infty$ et $\displaystyle\int_X f\, dm = +\infty$. On pose alors, *conventionnellement*, $\displaystyle\sum_{x \in X} f(x) := \int_X f\, dm = +\infty$ de façon que, dans tous les cas, on ait

$$\int_X f\, dm = \sum_{x \in X} f(x).$$

Lorsque $X = \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{N}} f(n)\, dm(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$$

n'est autre que la somme de la série de terme général $f(n)$ (la fonction $n \mapsto f(n)$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs positives).

***Propriétés* 7.1.** *Soient f, g deux fonctions étagées positives définies sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$.*

(a) $\displaystyle\int_X (f + g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu$ [additivité],

(b) $f \leq g \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$ [croissance],

(c) *pour tout* $\lambda \geq 0$, $\displaystyle\int_X \lambda f\, d\mu = \lambda \int_X f\, d\mu$ [positive homogénéité].

Démonstration : (a) On écrit les fonctions f et g sous la forme $f := \displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $g := \displaystyle\sum_{j \in J} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$ où $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$ sont deux partitions $\mathscr{A}$-mesurables finies de X. On a déjà vu qu'alors $f + g = \displaystyle\sum_{(i,j) \in I \times J} (\alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$ où $(A_i \cap B_j)_{(i,j) \in I \times J}$

est une partition $\mathscr{A}$-mesurable finie de X. D'où

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)\,d\mu &= \sum_{(i,j)\in I\times J} (\alpha_i+\beta_j)\mu(A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{i\in I}\alpha_i\sum_{j\in J}\mu(A_i\cap B_j)+\sum_{j\in J}\beta_j\sum_{i\in I}\mu(A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{i\in I}\alpha_i\mu(A_i)+\sum_{j\in J}\beta_j\mu(B_j)=\int_X f\,d\mu+\int_X g\,dm.\end{aligned}$$

(b) On écrit $g=f+(g-f)$. La fonction $g-f$ est positive par hypothèse et étagée car $g-f=\sum_{(i,j)\in I\times J}(\beta_j-\alpha_i)\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}$. Donc $\int_X (g-f)\,d\mu\geq 0$. D'où, d'après l'assertion (a),

$$\int_X g\,d\mu=\int_X f\,d\mu+\int_X (g-f)\,d\mu\geq\int_X f\,d\mu.$$

(c) Si $\lambda=0$, c'est clair.
Si $\lambda\neq 0$, alors $(\lambda f)(X)=\{\lambda\alpha,\,\alpha\in f(X)\}$ et $\{\lambda f=\lambda\alpha\}=\{f=\alpha\}$. D'où finalement

$$\int_X \lambda f\,d\mu=\sum_{\alpha\in f(X)}\lambda\alpha\mu(\{\lambda f=\lambda\alpha\})=\lambda\sum_{\alpha\in f(X)}\alpha\mu(\{f=\alpha\})=\lambda\int_X f\,d\mu.\quad\diamondsuit$$

Le lemme suivant, bien que constitué de résultats très simples, est le premier maillon important de la construction de l'intégrale de Lebesgue.

***Lemme* 7.1.** *(a) Si $A\in\mathscr{A}$ et $f\in\mathscr{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{A})$ alors $\mathbb{1}_A f\in\mathscr{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{A})$ et l'on pose*

$$\int_A f\,d\mu:=\int_X(\mathbb{1}_A f)\,dm.$$

(b) Soient $A,B\in\mathscr{A}$, $A\cap B=\emptyset$ et $f\in\mathscr{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{A})$. Alors

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu=\int_A f\,d\mu+\int_B f\,d\mu.$$

(c) Soit $(E_n)_{n\geq 1}$, une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, croissante pour l'inclusion et vérifiant $X=\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow}E_n$. Alors pour toute $f\in\mathscr{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{A})$,

$$\int_X f\,d\mu=\lim_n{}^{\uparrow}\int_{E_n} f\,d\mu.$$

DÉMONSTRATION : (a) Si $f := \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, alors $\mathbb{1}_A f = \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i\cap A} + 0 \times \mathbb{1}_{^cA}$ est étagée positive car $\{^cA,\ A_i \cap A,\ i\in I\}$ forme une partition $\mathscr{A}$-mesurable finie de X.

(b) découle de l'additivité de l'intégrale et de l'égalité $\mathbb{1}_{A\cup B} f = \mathbb{1}_A f + \mathbb{1}_B f$.

(c) Si $f := \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors, d'après le point (a),

$$\forall n \geq 1, \qquad \int_{E_n} f\,d\mu = \sum_{i\in I} \alpha_i \mu(E_n \cap A_i) \ + \ \underbrace{0 \times \mu(^cE_n)}_{=0 \ via \text{ la convention}} \ ,$$

d'où $\lim_n \int_{E_n} f\,d\mu = \sum_{i\in I} \alpha_i\, \mu(A_i) = \int_X f d\mu$ d'après la propriété **P3** ("continuité à gauche" d'une mesure) puisque $A_i = \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} (A_i \cap E_n)$ pour tout $i\in I$. $\Diamond$

7.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive

On désigne par

$$\mathscr{M}^+(\mathscr{A}) := \big\{f : (X, \mathscr{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)),\ \text{mesurables}\big\}$$

l'ensemble des fonctions mesurables positives, finies ou non, définies sur $(X, \mathscr{A})$.

***Définition* 7.2.** (a) *Si $f \in \mathscr{M}^+(\mathscr{A})$, on pose*

$$\int_X f\,d\mu := \sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu,\ \varphi \leq f,\ \varphi\in \mathscr{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{A})\right\}. \tag{7.3}$$

L'intégrale $\int_X f\,d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$ car la fonction nulle est étagée, d'intégrale nulle et minore f.

(b) *f est μ-intégrable si $\int_X f\,d\mu < +\infty$.*

***Propriétés* 7.2.** (a) *Lorsque la fonction f est en fait étagée positive, la définition (7.3) de $\int_X f\,d\mu$ coïncide avec celle donnée à la section précédente pour de telles fonctions.*

(b) *Si $f,\ g\in \mathscr{M}^+(\mathscr{A})$ et $f \leq g$, alors $\int_X f\,d\mu \leq \int_X g d\mu$.*

DÉMONSTRATION : (a) D'après la propriété de croissance de l'intégrale sur les fonctions étagées établie à la propriété 7.1 (b), pour toute $\varphi\in \mathscr{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{A})$,

$$\int_X \varphi\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu.$$

(b) Si $f \leq g$, alors $\{\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{A}) : \varphi \leq f\} \subset \{\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{A}) : \varphi \leq g\}$ et partant, $\displaystyle\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,dm$. $\diamondsuit$

Le théorème suivant est la clé des propriétés élémentaires de l'intégrale de Lebesgue.

***Théorème* 7.1** (Théorème de Beppo Levi ou théorème de convergence monotone). *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'éléments de $\mathscr{M}^+(\mathscr{A})$ (au sens $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$). Alors*

$$f := \lim_n f_n \in \mathscr{M}^+(\mathscr{A}) \ \textit{ et } \ \int_X f\,d\mu = \lim_n{}^{\uparrow} \int_X f_n\,d\mu.$$

DÉMONSTRATION : <u>étape 1</u> : La mesurabilité de f a été établie dans la proposition 5.7 (c). D'autre part, on déduit de la double inégalité $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ et de la propriété 7.2 (b) ci-avant que $\displaystyle\int_X c\,d\mu \leq \int_X f_{n+1}\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu$.

Par suite on obtient $\displaystyle\lim_n{}^{\uparrow} \int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu$.

<u>étape 2</u> : Soit maintenant $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{A})$, $\varphi \leq f$ et $\lambda \in]0,1[$. On définit pour tout $n \geq 1$, $E_n := \{f_n \geq \lambda\varphi\}$. Il est clair que $E_n = \{f_n - \lambda\varphi \geq 0\} \in \mathscr{A}$ et $E_n \subset E_{n+1}$ car $f_n \leq f_{n+1}$. D'autre part, $X = \displaystyle\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} E_n$ puisque

$$\bigcap_{n\geq 1}^{\downarrow} {}^cE_n = \bigcap_{n\geq 1} \{f_n < \lambda\varphi\} \subset \{f \leq \lambda\varphi\} \cap \{f > 0\} = \emptyset.$$

D'autre part, on vérifie immédiatement que $\mathbb{1}_{E_n}\lambda\varphi \leq f_n$ pour tout $n \geq 1$, d'où, toujours d'après la propriété 7.2 (b),

$$\forall\, n \geq 1, \quad \lambda \int_{E_n} \varphi\,d\mu = \int_{E_n} \lambda\varphi\,d\mu \leq \int_X f_n\,d\mu \leq \lim_k \int_X f_k d\mu.$$

D'après le lemme 7.1 (c) ci-dessus, il vient en passant à la limite en n,

$$\forall\,\lambda \in]0,1[,\ \lambda \int_X \varphi\,d\mu \leq \lim_k \int_X f_k d\mu \quad \text{et partant} \quad \int_X \varphi\,d\mu \leq \lim_k \int_X f_k d\mu.$$

$$\text{Finalement} \ \int_X f\,d\mu = \sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu,\ \varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{A}),\ \varphi \leq f\right\} \leq \lim_k \int_X f_k d\mu. \quad \diamondsuit$$

En fait, le théorème de Beppo Levi n'est pas seulement une étape technique essentielle dans la construction de l'intégrale de Lebesgue, c'est aussi un résultat aux multiples applications pratiques, notamment pour l'étude des suites d'intégrales et des intégrales dépendant d'un paramètre. Cet aspect est illustré par l'application 7.1 proposée en fin de chapitre.

On peut maintenant étendre les propriétés élémentaires déjà établies sur les fonctions étagées.

***Propriétés* 7.3.** *Soient* $f,\ g\in\mathscr{M}^+(\mathscr{A})$.

(a) $f\le g\ \Rightarrow\ 0\le\displaystyle\int_X f\,d\mu\le\int_X g\,dm$ [croissance],

(b) $\displaystyle\int_X(f+g)\,d\mu=\int_X f\,d\mu+\int_X g\,dm$ [additivité],

(c) *pour tout* $\lambda\ge 0$, $\displaystyle\int_X\lambda f\,d\mu=\lambda\int_X f\,d\mu$ [positive homogénéité].

DÉMONSTRATION : (a) a fait l'objet de la proposition 7.2 (b) préliminaire au théorème de Beppo Levi.

(b) L'égalité est vraie si $f,\ g\in\mathscr{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{A})$. D'après le lemme fondamental d'approximation (théorème 5.1), il existe $f_n,\ g_n\in\mathscr{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{A}),\ n\ge 1$, telles que $f_n\uparrow f$ et $g_n\uparrow g$. On conclut *via* le théorème de Beppo Levi, une fois noté que $(f_n+g_n)\uparrow(f+g)$:

$$\begin{aligned}\textstyle\int_X(f+g)\,d\mu=\lim_n\int_X(f_n+g_n)\,d\mu &=\lim_n\left(\int_X f_n\,d\mu+\int_X g_n d\mu\right)\\ &=\int_X f\,d\mu+\int_X g\,dm.\end{aligned}$$

(c) Si $\lambda=0$, le résultat est évident, modulo la convention 7.1 si besoin est. Si $\lambda>0$, on procède comme ci-dessus *via* le lemme d'approximation. $\Diamond$

***Proposition* 7.2.** *Soit* $f\in\mathscr{M}^+(\mathscr{A})$. *Alors,*

$$\int_X f\,d\mu=0\quad\Leftrightarrow\quad\mu(\{f\neq 0\})=0.$$

DÉMONSTRATION : Si f est étagée, l'équivalence est évidente modulo la convention $0\times(+\infty)=0$.

Si $f\in\mathscr{M}^+(\mathscr{A})$, $f=\lim\limits_n{}^{\uparrow} f_n$, $f_n\in\mathscr{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{A})$, d'après le lemme d'approximation. En particulier $\{f\neq 0\}=\{f>0\}=\bigcup\limits_{n\ge 1}^{\uparrow}\{f_n\neq 0\}$ et donc

$$\mu(\{f\neq 0\})=\lim_n{}^{\uparrow}\mu(\{f_n\neq 0\})$$

par “continuité à gauche” de la mesure (propriété **P3**, chapitre 6).

$(\Rightarrow)$ Si $\displaystyle\int_X f\,d\mu=0$, alors, d'après la proposition 7.3 (a) ci-avant, $\displaystyle\int_X f_n\,d\mu=0$ pour tout $n\ge 1$ et partant $\mu(\{f_n\neq 0\})=0$. D'où, $\mu(\{f\neq 0\})=\lim\limits_n\mu(\{f_n\neq 0\})=0$.

$(\Leftarrow)$ Si $\mu(\{f\neq 0\})=0$, alors $\mu(\{f_n\neq 0\})=0$ et donc $\displaystyle\int_X f_n\,d\mu=0$ pour tout $n\ge 1$. Partant, $\displaystyle\int_X f\,d\mu=\lim_n{}^{\uparrow}\int_X f_n\,d\mu=0$ d'après le théorème de Beppo Levi. $\Diamond$

La notation "μ-$p.p.$" : à la formulation $\mu(\{f \neq 0\})=0$, on préfèrera généralement "$f=0$ μ-$p.p.$", l'abréviation $p.p.$ signifiant "$presque\ partout$". Idem avec $f=g$ μ-$p.p.$ pour $\mu(\{f \neq g\})=0$.

Rapidement, on cèdera à la tentation d'étendre le champ d'utilisation de cette notation. Ainsi, si $(f_n)_{n\geq 1}$ et f sont des fonctions mesurables définies sur $(X, \mathscr{A})$, on dira que $f_n \to f$ μ-$p.p.$ pour signifier que $\mu(^c\{x \in X : \lim_n f_n(x) = f(x)\}) = 0$.

Plus généralement, on dira qu'une proposition $\mathscr{P}_x$ est vraie $\mu(dx)$-$p.p.$ si

$$\{x \in X : \mathscr{P}_x \text{ fausse}\} \in \mathscr{A} \quad \text{ et } \quad \mu(\{x \in X : \mathscr{P}_x \text{ fausse}\}) = 0.$$

Parfois même, on dira qu'une proposition $\mathscr{P}_x$ est vraie $\mu(dx)$-$p.p.$ s'il existe $N \in \mathscr{A}$ tel que

$$\{x \in X : \mathscr{P}_x \text{ fausse}\} \subset N \quad \text{et} \quad \mu(N) = 0.$$

***Corollaire* 7.1.** *Soient f, $g \in \mathscr{M}^+(\mathscr{A})$. Si $f=g$ μ-p.p. alors* $\displaystyle\int_X f\, d\mu = \int_X g\, dm.$

DÉMONSTRATION : D'après la proposition 5.7 (c), les fonctions $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont $\mathscr{A}$-mesurables donc la fonction h définie par

$$h := \begin{cases} \max(f,g) - \min(f,g) & \text{sur } \{\min(f,g) < +\infty\}, \\ 0 & \text{sur } \{f=g=+\infty\} \end{cases}$$

l'est aussi([1]). En outre, h est positive par construction. Or, h est nulle sur $\{f=g\}$ donc, par hypothèse, $h=0$ μ-$p.p.$ et partant $\displaystyle\int_X h d\mu = 0$. Comme

$$\max(f,g) = \min(f,g) +, h$$

$\displaystyle\int_X \max(f,g) d\mu = \int_X \min(f,g)\, dm$, si bien que, partant de

$$\int_X \max(f,g)\, dm \geq \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_X f\, d\mu \\ \displaystyle\int_X g\, d\mu \end{array} \right\} \geq \int_X \min(f,g)\, dm,$$

on conclut que $\displaystyle\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$ $\quad\diamondsuit$

***Proposition* 7.3** (Inégalité de Markov)**.** *Soit $f \in \mathscr{M}^+(\mathscr{A})$. Alors,*

$$\forall\, A > 0, \quad \mu(\{f \geq A\}) \leq \frac{1}{A} \int_X f\, d\mu.$$

1. En effet plus généralement si l'on pose $h_1 = \min(f,g)$ et $h_2 = \max(f,g)$, on vérifie que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\{h \geq a\} = \{h_2 \geq h_1 + a\} \cap \{h_1 < +\infty\} \in \mathscr{A}$ et si $a \leq 0$, $\{h \geq a\} = X \in \mathscr{A}$.

DÉMONSTRATION : L'inégalité $f \geq A\mathbb{1}_{\{f\geq A\}}$ et la propriété de croissance de l'intégrale entraînent

$$\int_X f\,d\mu \geq \int_X A\,\mathbb{1}_{\{f\geq A\}}\,d\mu = A\,\mu(\{f\geq A\}). \quad \Diamond$$

***Corollaire* 7.2.** *Si $f\in\mathscr{M}^+(\mathscr{A})$ est μ-intégrable alors $\mu(\{f=+\infty\})=0$.*

DÉMONSTRATION : On vérifie que

$$\{f=+\infty\} = \bigcap_{n\geq 1}^{\downarrow}\{f\geq n\} \quad \text{et} \quad \mu(\{f\geq 1\} \leq \int_X f\,d\mu < +\infty.$$

La propriété de continuité à droite de la mesure (**P4**, chapitre 6) donne

$$\mu(\{f=+\infty\})=\lim_n{}^{\downarrow}\mu(\{f\geq n\}) \leq \lim_n \frac{1}{n}\int_X f\,d\mu = 0. \quad \Diamond$$

Exemples : 1. *Mesure de comptage sur* $\mathbb{N}$ *:* Si $X=\mathbb{N}$, $\mathscr{A}=\mathscr{P}(\mathbb{N})$ et m désigne la mesure de comptage définie par $m(A)=\mathrm{card}(A)$, il est immédiat que

$$\mathscr{M}^+(\mathscr{A}):=\{\text{suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ à valeurs dans } \overline{\mathbb{R}}_+\}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} u_n dm(n)$ d'une suite à termes positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à m n'est autre que la somme de sa série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

En effet, si l'on pose, pour tout $N\in\mathbb{N}$, $u_n^{(N)} := u_n$ pour $n<N$ et $u_n^{(N)} := 0$ pour $n\geq N$, il est clair que $(u_n^{(N)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs pour tout $N\geq 0$ et que $(u_n^{(N)})_{n\in\mathbb{N}} \uparrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $N\uparrow+\infty$. D'autre part, la suite $(u_n^{(N)})_{n\in\mathbb{N}}$ est étagée car elle prend au plus $N+1$ valeurs donc, d'après l'exemple 2 de la section 7.1,

$$\int_{\mathbb{N}} u_n^{(N)} dm(n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^{(N)} = \sum_{n=0}^{N-1} u_n.$$

Finalement,

$$\int_{\mathbb{N}} u_n dm(n) = \lim_N \int_{\mathbb{N}} u_n^{(N)} dm(n) = \lim_N \sum_{n=0}^{N-1} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

2. *Mesure de comptage sur X :* Plus généralement si m désigne la mesure de comptage sur un ensemble $(X,\mathscr{P}(X))$, on obtient la théorie dite "des familles sommables" à termes positifs qui permet de définir la quantité $\displaystyle\sum_{x\in X} u(x)$ – où $u : x\mapsto u(x)$ désigne une fonction quelconque de X dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ – comme l'intégrale $\displaystyle\int_X u(x)dm(x)$.

L'inégalité de Markov montre que, si $\displaystyle\sum_{x\in X} u(x) < +\infty$, alors $\{u \neq 0\}$ est au plus dénombrable. En effet, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\operatorname{card}\big(\{x \in X : u(x) \geq 1/n\}\big) \leq n \sum_{x\in X} u(x) < +\infty.$$

$ATTENTION$! La réciproque du corollaire 7.2 est fausse. Ainsi, sur l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), m)$, si l'on pose $f_0 := 0$, $f_n := \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est m-$p.p.$ finie (en fait f_n est finie partout !) et

$$\int_{\mathbb{N}} f_n \, dm(n) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Des exemples similaires peuvent être construits sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

7.3 L'espace $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ des fonctions intégrables

Comme toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considérera aussi des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\overline{\mathbb{R}}_+$ voire, exceptionnellement, dans le compactifié d'Alexandroff $\overline{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{C}$ ([2]).

Définition 7.3. (a) *Une fonction $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{K}, \mathscr{B}(\mathbb{K}))$ est μ-intégrable si $|f|$ est μ-intégrable (*i.e. $\displaystyle\int_X |f| \, d\mu < +\infty$*).*
(b) *On note*

$$\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathscr{A}, \mu) := \left\{ f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{K}, \mathscr{B}(\mathbb{K})),\ \textit{mesurable},\ \int_X |f| \, d\mu < +\infty \right\},$$

l'ensemble des fonctions μ-intégrables définies sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$. En l'absence d'ambiguïté on écrira généralement $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$, voire $\mathscr{L}^1(\mu)$. Cette définition s'étend aux ensembles de fonctions intégrables à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\overline{\mathbb{R}}$, etc.

Remarques (importantes) : • Si f est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, il découle de l'identité $|f| = f^+ + f^-$, de la croissance et de l'additivité de l'intégrale sur les fonctions mesurables positives, que

$$f \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu) \iff f^{\pm} \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}_+}(\mu).$$

• *Si $f \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ alors $\mu(\{f = \pm\infty\}) = 0$* i.e. *$f$ est μ-p.p. finie.*

En effet, $\{f = \pm\infty\} = \{|f| = +\infty\}$ donc, d'après le corollaire 7.2 ci-avant, $\mu(\{f = \pm\infty\}) = \mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$.

• *Si f et g sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec $f = g$ μ-p.p., alors $f \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ si et seulement si $g \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$.*

2. Voir [25] pour la construction du compactifié d'Alexandroff d'un espace localement compact.

En effet, il est immédiat que $|f|=|g|$ sur $\{f=g\}$. Alors $|f|=|g|$ μ-*p.p.*. D'où $\int_X |f|\,d\mu = \int_X |g|\,d\mu$ d'après le corollaire 7.1 ci-avant. Ces deux nombres sont donc finis simultanément.

• Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, $|\Re(f)|$ et $|\Im(f) \leq |f| \leq |\Re(f)| + |\Im(f)|$.
Donc $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

En outre, on montre comme dans le cas réel que, si f et g sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{C}}$ avec $f=g$ μ-*p.p.*, alors $f \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{C}}}(\mu)$ si et seulement si $g \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{C}}}(\mu)$.

***Définition* 7.4.** (a) *Si* $f \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$, *on pose*

$$\int_X f\,d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

(b) *Si* $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$, *on pose*

$$\int_X f\,d\mu := \int_X \Re(f)\,d\mu + i\int_X \Im(f)\,dm.$$

Remarques (toujours aussi importantes) :

• Si $f=g$ μ-*p.p.* (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$), on vient de voir que $f \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ si et seulement si $g \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$. En outre, $\int_X f^{\pm} d\mu = \int_X g^{\pm} d\mu$ car $f^{\pm} = g^{\pm}$ sur $\{f=g\}$, donc μ-*p.p.* (*cf.* corollaire 7.1). Partant, $\int_X f\,d\mu = \int_X g\,dm$.

• Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$. D'après ce qui précède, si l'on pose $\tilde{f} := f\,\mathbb{1}_{\{f\in\mathbb{R}\}}$, il vient aussitôt, $\tilde{f}=f$ μ-*p.p.*, $\tilde{f} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et $\int_X \tilde{f} d\mu = \int_X f\,d\mu$. $\Diamond$

Au vu de la dernière remarque ci-dessus, on évitera autant que possible de considérer dans la suite des fonctions μ-intégrables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et l'on ne fera plus référence à $\mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$.

Exemples : 1. Sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage m, il y a identité entre fonctions m-intégrables et séries absolument convergentes. En d'autres termes,

$$\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(m) = \ell^1_{\mathbb{K}}(m) := \Big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < +\infty\Big\}.$$

2. Sur $(X, \mathscr{P}(X))$, toujours muni de la mesure de comptage, les fonctions m-intégrables sont les familles dites "absolument sommables".

***Théorème* 7.2.** $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$ $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ *est un* $\mathbb{K}$*-e.v. et* $f \mapsto \int_X f\,d\mu$ *est une forme linéaire positive (au sens :* $f \geq 0 \Rightarrow \int_X f\,d\mu \geq 0$*). Elle est donc croissante :*

$$\forall\, f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu), \quad f \leq g \;\Rightarrow\; \int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,dm.$$

DÉMONSTRATION : *Le cas réel :* Si $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, alors $|f+g| \leq |f| + |g| \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$. D'autre part,

$$f+g = (f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ + g^+ - f^- - g^-,$$

d'où
$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+.$$

Par additivité de l'intégrale sur $\mathscr{M}^+(\mathscr{A})$, il vient :

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \int_X (f+g)^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d \\ &= \int_X (f+g)^- d\mu + \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu < +\infty. \end{aligned}$$

Toutes les intégrales considérées sont donc finies. On en déduit l'additivité sur $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ en revenant à l'ordre originel des termes.

L'homogénéité se traite à partir de la positive homogénéité :

– Si $\lambda \geq 0$, $(\lambda f)^{\pm} = \lambda f^{\pm}$, on conclut par la positive homogénéité sur $\mathscr{M}^+(\mathscr{A})$.

– Si $\lambda < 0$, $(\lambda f)^{\pm} = -\lambda f^{\mp}$ et l'on conclut de même.

Le cas complexe : La $\mathbb{R}$-linéarité de $\Re$ et de $\Im$ assurent l'additivité. Pour l'homogénéité, on commence par $\lambda = i$. On s'appuie ensuite sur le cas réel et sur le développement $(\alpha + i\beta)(\Re(f) + i\Im(f)) = (\alpha\Re(f) - \beta\Im(f)) + i(\alpha\Im(f) + \beta\Re(f))$. $\quad\Diamond$

Remarque (exercice) : $\|f\|_1 := \displaystyle\int_X |f|\, d\mu$ est une semi-norme sur $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ dont le noyau est le $\mathbb{K}$-e.v. $\{f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu) \ : \ f = 0 \ \ \mu\text{-}p.p.\}$ (pour les définitions, voir chapitre 9.3.1).

Proposition 7.4. *(Inégalité triangulaire pour les intégrales)*

(a) *Pour toute* $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$, $\displaystyle\left|\int_X f\, d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu.$

(b) *Cas d'égalité :*

– Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'égalité a lieu si et seulement si, μ-p.p., f est de signe constant.

– Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'égalité a lieu si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, tel que $f = \alpha|f|$ μ-p.p. (en d'autres termes f a un argument μ-p.p. constant).

DÉMONSTRATION : (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\displaystyle\left|\int_X f d\mu\right| = \lambda \int_X f\, d\mu$. On peut toujours choisir $|\lambda| = 1$ et

$$\begin{aligned} \left|\int_X f\, d\mu\right| = \int_X \lambda f\, d\mu = \int_X \underbrace{\Re(\lambda f)}_{\in\mathbb{R}}\, d\mu + i \underbrace{\int_X \Im(\lambda f)\, dm}_{=0} \leq \int_X |\Re(\lambda f)|\, d\mu \\ \leq \int_X |\lambda f| d\mu = \int_X |f|\, d\mu. \qquad (7.4) \end{aligned}$$

(b) Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si il y a égalité dans les deux inégalités de (7.4) *i.e.* si

$$\int_X \underbrace{|\Re(\lambda f)| - \Re(\lambda f)}_{\geq 0}\, d\mu = 0 \quad \text{et} \quad \int_X \underbrace{|\lambda f| - |\Re(\lambda f)|}_{\geq 0}\, d\mu.$$

Par conséquent, d'après la proposition 7.2,

$$\begin{aligned} \text{il y a égalité} \quad & \text{si et seulement si} \quad \Re(\lambda f) \geq 0 \text{ et } \Im(\lambda f) = 0\ \mu\text{-}p.p., \\ & \text{si et seulement si} \quad \lambda f = |\lambda f|\ \mu\text{-}p.p., \\ & \text{si et seulement si} \quad \lambda f = |f|\ \mu\text{-}p.p. \end{aligned}$$

On conclut en posant $\alpha := 1/\lambda$. $\diamondsuit$

7.4 Intégrales de Riemann et de Lebesgue sur un intervalle compact

Nous allons montrer que les intégrales au sens de Riemann et au sens de Lebesgue (par rapport à la mesure de Lebesgue) sur un intervalle compact $[a, b]$ coïncident en un certain sens sur l'ensemble des fonctions Riemann intégrables.

Proposition 7.5. (a) résultat général *: Pour toute fonction $f \in \mathscr{I}_{\mathbb{K}}([a, b])$, il existe une fonction $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}([a, b], \mathscr{B}([a, b]), \lambda)$ telle que :*

(i) $f = g$ λ-p.p., au sens où

$$\exists\, A \in \mathscr{B}([a, b]) \text{ tel que } \lambda(A) = 0 \text{ et } \forall\, x \notin A,\ f(x) = g(x),$$

$$(ii) \int_a^b f = \int_{[a,b]} g\, d\lambda.$$

(b) Point de vue pratique *: En particulier, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est borélienne et Riemann intégrable, alors $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}([a, b], \mathscr{B}([a, b]), \lambda)$ et $\displaystyle\int_a^b f = \int_{[a,b]} f\, d\lambda$.*

Remarques : • Si l'on s'était placé sur la tribu de Lebesgue $\overline{\mathscr{B}([a, b])}^{\lambda}$ *i.e.* la tribu borélienne "complétée" des ensembles "négligeables", on aurait pu reformuler le point (a) en :

$$\mathscr{I}_{\mathbb{K}}([a, b]) \subset \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}\Big([a, b], \overline{\mathscr{B}([a, b])}^{\lambda}, \lambda\Big) \quad \text{et} \quad \int_a^b f = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

La notion de tribu complétée est définie et étudiée en détail au chapitre 13.

• Le point (b) entraîne notamment que l'intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[a, b]$ et l'intégrale au sens de Riemann sur $[a, b]$ coïncident sur les fonctions réglées. En effet, toute fonction réglée est borélienne puisque, par définition, elle est limite (uniforme) d'une suite de fonctions en escalier (*cf.* définition 1.4). Or toute fonction en escalier sur $[a,b]$ est borélienne car étagée.

On montre d'autre part qu'une fonction définie sur $[a,b]$ est réglée si et seulement si elle admet une limite à droite et à gauche en tout point où cela a un sens. Ainsi, toute fonction continue ou monotone (ou à variation finie) est réglée.

DÉMONSTRATION : (a) Soit $f \in \mathscr{I}_{\mathbb{R}}([a,b])$. Par définition de la Riemann intégrabilité, il existe deux suites de fonctions en escalier $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ et $(\Psi_n)_{n\geq 1}$ sur $[a,b]$ vérifiant

$$|\Phi_n - f| \leq \Psi_n, \ \int_a^b \Psi_n \to 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b \Phi_n \to \int_a^b f.$$

Si l'on pose, pour tout $n \geq 1$, $\alpha_n := \Phi_n - \Psi_n$ et $\beta_n := \Phi_n + \Psi_n$, il vient

$$\alpha_n \leq f \leq \beta_n \quad \text{avec} \quad \int_a^b (\beta_n - \alpha_n) \to 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha_n \to \int_a^b f.$$

Remarquons d'abord – mais c'est évident – que si γ est une fonction en escalier sur $[a,b]$, γ est étagée et $\displaystyle\int_a^b \gamma = \int_{[a,b]} \gamma d\lambda$.

On pose $\tilde{\alpha}_n := \max(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ et $\tilde{\beta}_n := \min(\beta_1,\ldots,\beta_n)$. $\tilde{\alpha}_n$ et $\tilde{\beta}_n$ sont étagées et vérifient :

$$\alpha_n \leq \tilde{\alpha}_n \leq \tilde{\alpha}_{n+1} \leq f \leq \tilde{\beta}_{n+1} \leq \tilde{\beta}_n \leq \beta_n.$$

On peut définir $\tilde{\alpha} := \lim_n^{\uparrow} \tilde{\alpha}_n$ et $\tilde{\beta} := \lim_n^{\downarrow} \tilde{\beta}_n$. Les fonctions $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont boréliennes (*cf.* proposition 5.7 (c)) et l'on a : $\tilde{\alpha} \leq f \leq \tilde{\beta}$ avec

$$\int_a^b \alpha_n = \int_{[a,b]} \alpha_n d\lambda \leq \int_{[a,b]} \tilde{\alpha}_n d\lambda \leq \int_{[a,b]} \tilde{\alpha} d\lambda \leq \int_{[a,b]} \tilde{\beta} d\lambda \leq \int_{[a,b]} \tilde{\beta}_n d\lambda = \int_a^b \tilde{\beta}_n \leq \int_a^b \beta_n.$$

D'où, en passant à la limite, $\displaystyle\int_{[a,b]} \tilde{\alpha}\, d\lambda = \int_a^b f$.

On pose maintenant $\gamma := \tilde{\beta} - \tilde{\alpha} \in \mathscr{M}^+(\mathscr{B}([a,b]))$. Il est loisible de définir γ car $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont à valeur finies ; en effet $\alpha_1 \leq \tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta} \leq \beta_1$ et α_1 et β_1 sont bornées en tant que fonctions en escalier. Comme $\displaystyle\int_{[a,b]} \gamma\, d\lambda = 0$ et $\gamma \geq 0$, $\lambda(\{\gamma \neq 0\}) = 0$. On conclut avec $g := \mathbb{1}_{\{\gamma=0\}} = \tilde{\alpha}\mathbb{1}_{\{\gamma=0\}}$. La fonction g est donc borélienne, $g = f$ μ-*p.p.* et

$$\int_{[a,b]} g d\lambda = \int_{[a,b]} \tilde{\alpha}\, \mathbb{1}_{\{\gamma=0\}}\, d\lambda = \int_{[a,b]} \tilde{\alpha}\, d\lambda = \int_a^b f.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on raisonne sur $\Re(f)$ et $\Im(f) \in \mathscr{I}_{\mathbb{R}}([a,b])$.

(b) Ce point découle immédiatement du (a) et du fait qu'alors $f = g$ λ-*p.p.*. $\diamondsuit$

Notation : On utilisera indifféremment les notations $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} f\, d\lambda$ pour désigner l'intégrale sur $[a,b]$ d'une fonction "raisonnable" (au sens borélienne et Lebesgue intégrable).

à partir de la proposition 7.5 et du théorème de convergence dominée établi au chapitre suivant (théorème 8.3), on montre que toute fonction $localement$ Riemann intégrable sur $\mathbb{R}$ (*i.e.* intégrable sur tout compact) d'intégrale absolument convergente est λ-$p.p.$ égale à une fonction borélienne de $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ ayant même intégrale. Dans ce cas on écrira donc indifféremment

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,\ \int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda,\ \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\lambda(dx),\ \int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\lambda(x),\ \text{etc.}$$

Remarque : Si $f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, $f \notin \mathscr{I}_{\mathbb{R}}([0,1])$ (*cf.* chapitre 1) mais $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 0$. En effet, $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est borélien comme réunion dénombrable de fermés (les singletons) donc f est borélienne, d'autre part, si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une numérotation de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$,

$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda = \lambda(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = \sum_{n\geq 1} \lambda(\{r_n\}) = 0.$$

***Application* 7.1.** *Un exemple pratique d'utilisation du théorème de Beppo Levi : étude de la convergence de la suite* $I_n(\alpha) := \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$, *selon les valeurs du paramètre* $\alpha\in\mathbb{R}$.

L'idée de départ consiste à écrire

$$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,e^{\alpha x}\,dx \ \text{ où }\ f_n(x) := \mathbb{1}_{[0,n]}(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n,\ x\geq 0,$$

puis à appliquer le théorème 7.1 de Beppo Levi à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Montrons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. On remarque d'abord que

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ f_n \leq f_{n+1} \iff \forall\, x\in[0,n[,\ \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Pour démontrer cette dernière inégalité, il suffit de vérifier que la fonction g_n définie sur $[0,n[$ par

$$g_n(x) := (n+1)\,\ln\left(1-\frac{x}{n+1}\right) - n\,\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$$

est positive. Or g_n est dérivable sur $[0,n[$ et

$$g_n'(x) = \frac{n}{n-x} - \frac{n+1}{n+1-x} = \frac{x}{(n-x)\,(n+1-x)} \geq 0,$$

donc g_n est croissante sur $[0,n[$ et comme $g_n(0)=0$, g_n est positive.

Il est clair d'autre part que $f_n(x)$ converge simplement vers e^{-x} pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ puisque, dès que $n\geq x$,

$$f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{x}{n})} = e^{-x+no(\frac{x}{n})} \to e^{-x} \quad \text{quand} \quad n\to+\infty.$$

Finalement, il vient, d'après le théorème de Beppo Levi (théorème 7.1),

$$\lim_n I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha<1 \\ +\infty & \text{si } \alpha\geq 1. \end{cases}$$

7.5 Exercices

$(X, \mathscr{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

7.1 $a)$ Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ telle que pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\displaystyle\int_A f d\mu = 0$.
Montrer que $f = 0$ μ-p.p..

$b)$ Soient $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et F un fermé de $\mathbb{R}$ tels que, pour tout $A \in \mathscr{A}$ avec $\mu(A) > 0$, $\displaystyle\frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu \in F$. Montrer que $f \in F$ μ-p.p..

7.2 Montrer que l'espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est σ-fini (*i.e.* $X = \bigcup_{n \geq 0}^{\uparrow} E_n$ où pour tout $n \geq 0$, $E_n \in \mathscr{A}$ et $\mu(E_n) < +\infty$) si et seulement s'il existe une fonction f intégrable et strictement positive.

7.3 Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer l'équivalence

$$f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \iff \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \, \mu\big(\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}\big) < +\infty.$$

7.4 Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré de masse totale finie et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

$a)$ Montrer que $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{n \geq 1} n \, \mu\big(\{n \leq |f| < n+1\}\big) < +\infty$.

$b)$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k \, \mu\big(\{k \leq |f| < k+1\}\big) = \sum_{k=1}^{n} \mu\big(\{|f| \geq k\}\big) - n \, \mu\big(\{|f| \geq n+1\}\big).$$

$c)$ Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante convergeant vers 0 et telle que la suite de terme général $\displaystyle v_n := \sum_{k=1}^{n} u_k - n \, u_{n+1}$ soit bornée. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n < +\infty$.

$d)$ En déduire que $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) < +\infty$.

$e)$ Les résultats de $a)$ et $d)$ subsistent-ils si $\mu(X) = +\infty$?

7.5 $a)$ Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A_\varepsilon) < +\infty$, f soit bornée sur A_ε et $\displaystyle\int_{X \setminus A_\varepsilon} |f| d\mu < \varepsilon$.

$b)$ En déduire la *continuité de l'intégrale par rapport à la mesure* :

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0, \; \forall A \in \mathscr{A}, \quad \mu(A) \leq \delta \;\; \Rightarrow \;\; \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon.$$

Une autre démonstration est proposée dans l'application 8.4, chapitre 8.

7.6 Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) := \int_0^x f(t)dt := \begin{cases} \displaystyle\int_{[0,x]} f d\lambda & \text{si } x \geq 0, \\ \displaystyle -\int_{[x,0]} f d\lambda & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Montrer que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

7.7 $a)$ Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives. Montrer que

$$\int_X \sum_{n\geq 0} f_n \, d\mu = \sum_{n\geq 0} \int_X f_n \, d\mu.$$

$b)$ Soit $(a_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ une famille de $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\sum_{q\geq 0} a_{p,q} = \sum_{q\geq 0}\sum_{p\geq 0} a_{p,q}$.

7.8 Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge vers f sur X.

$a)$ Montrer que s'il existe $n_0 \geq 0$ tel que $f_{n_0} \in \mathscr{L}^1(\mu)$, alors

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

$b)$ Le résultat subsiste-t-il sans l'hypothèse d'intégrabilité du $a)$?

7.9 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. L'oscillation de f au point $x \in [a,b]$ est définie par

$$\omega(x) := \lim_{h\to 0^+} \Big(\sup_{y,z\in I_h(x)} |f(y) - f(z)| \Big) \quad \text{où } I_h(x) := [a,b] \cap [x-h, x+h].$$

$a)$ Montrer que f est continue en x si et seulement si $\omega(x) = 0$.

$b)$ Soient $\big(\sigma_n := \{a = x_n^0 < x_n^1 < \cdots < x_n^n = b\}\big)_{n\geq 1}$ une suite croissante de subdivisions dont le pas tend vers 0, et les suites de fonctions en escalier définies par $\varphi_n(x) := \inf_{I_n^k} f$, $\psi_n(x) := \sup_{I_n^k} f$ si $x \in I_n^k := [x_n^k, x_n^{k+1}[$, $0 \leq k < n$, et $\varphi_n(b) = \psi_n(b) := 0$. Montrer que les suites $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ et $(\psi_n)_{n\geq 1}$ sont monotones et $\lim_n \psi_n - \lim_n \varphi_n = \omega$ λ-p.p..

$c)$ En déduire que f est Riemann intégrable ssi f est continue λ-p.p..

7.10 Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité ($\mu(X) = 1$) ; soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ positive ou bornée, et *convexe*, *i.e.*

$$\forall\, x, y \in I,\ \forall\, t \in [0,1],\quad \varphi(tx + (1-t)y) \leq t\,\varphi(x) + (1-t)\,\varphi(y).$$

$a)$ Soit $x_0 \in I$. Montrer que $\varphi'_d(x_0)$ existe et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \varphi'_d(x_0)\,(x - x_0).$$

$b)$ Montrer que toute fonction $f \in \mathscr{L}^1_I(\mu)$ vérifie *l'inégalité de Jensen* :

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \varphi\circ f \, d\mu.$$

7.11 Soient (X, μ) un espace mesuré et f, g deux fonctions positives intégrables sur (X, μ) telles que $f \ln f$, $f \ln g$ soient intégrables sur (X, μ), $g > 0$ $d\mu$-p.p., $\displaystyle\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu = 1$. Montrer *l'inégalité d'entropie* : $\displaystyle\int_X f \ln f \, d\mu \geq \int_X f \ln g \, d\mu$.

7.12 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ borélienne. Calculer la limite $\displaystyle\lim_n \int_0^1 \frac{n\, f(n\, t)}{\sqrt{1+t}} \, dt$.

7.13 Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) > 0$. Dans cet exercice, la notation f^{-1} désigne la fonction *inverse* $1/f$ de f.

$a)$ Montrer que, pour tous $a, b \geq 0$ et $u, v > 0$,

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \implies \frac{1}{u+v} \leq \frac{a}{u} + \frac{b}{v}.$$

$b)$ Soient $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ positives et non nulles μ-p.p.. Montrer que

$$\|(f+g)^{-1}\|_1 \leq \frac{\|f\|_1^2 \, \|f^{-1}\|_1 + \|g\|_1^2 \, \|g^{-1}\|_1}{(\|f\|_1 + \|g\|_1)^2}.$$

$c)$ En déduire l'inégalité

$$\|f+g\|_1 \, \|(f+g)^{-1}\|_1 \leq \max\Big(\|f\|_1 \, \|f^{-1}\|_1, \|g\|_1 \, \|g^{-1}\|_1\Big).$$

7.14 Montrer l'équivalence

$$I_a := \int_0^{+\infty} \big[(1+x)^a - x^a\big]^2 \, dx < +\infty \iff -\frac{1}{2} < a \leq 0.$$

7.15 Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \geq 0$.

$a)$ Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt$ existe.

$b)$ En considérant la fonction $(f \sin)$ et en utilisant la question $a)$, montrer que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

$c)$ Soit $a > 0$. Montrer que $|f|^a$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $a > 1$.

Chapitre 8

Théorèmes de convergence et applications

Dès la phase de construction de l'intégrale au sens de Lebesgue, un théorème d'un type nouveau a été établi, autorisant sans hypothèse de convergence uniforme, l'interversion des symboles de limite et d'intégrales : le *théorème de Beppo Levi*, dit aussi théorème de convergence monotone. Nous rappelons ci-dessous l'énoncé de ce théorème, démontré au chapitre 7.2 :

***Théorème* 8.1.** *(Beppo Levi) Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite* croissante *de fonctions mesurables* positives. *Alors*

$$\lim_n f_n \text{ est } \mathscr{A}\text{-mesurable} \quad \text{et} \quad \int_X \lim_n f_n \, d\mu = \lim_n \int_X f_n \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Le propos de ce chapitre est de constituer, à partir de ce théorème, un arsenal de nouveaux outils pour résoudre les problèmes de convergence de suites d'intégrales. Ce sont ces outils qui, pour une large part, fondent la supériorité de la théorie de Lebesgue, y compris dans les applications les plus courantes : intégrales dépendant d'un paramètre, fonction définie sous forme intégrale, etc.

Dans la suite du chapitre on se placera, sauf mention contraire, sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A}, \mu)$.

8.1 Lemme de Fatou et théorème de convergence dominée

***Théorème* 8.2** (Lemme de Fatou)**.** *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $\mathscr{A}$-mesurables* positives*, alors :*

$$0 \leq \int_X \underline{\lim}_n f_n d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X f_n d\mu \leq +\infty.$$

DÉMONSTRATION : On pose, pour tout $n \geq 1$, $\varphi_n := \inf_{k \geq n} f_k$. Les fonctions φ_n sont positives, $\mathscr{A}$-mesurables grâce à la proposition 5.7 (a), $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ et φ_n converge simplement vers $\underline{\lim}_n f_n$. Il vient, d'après le théorème de Beppo Levi,

$$\int_X \underline{\lim}_n f_n \, d\mu = \int_X \lim_n \varphi_n \, d\mu = \lim_n \int_X \varphi_n \, d\mu.$$

D'autre part, $\varphi_n \leq f_n$ donc $\int_X \varphi_n \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu$ et, partant,

$$\lim_n \int_X \varphi_n \, d\mu = \underline{\lim}_n \int_X \varphi_n \, d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X f_n d\mu.$$

La conclusion découle de la combinaison des deux séries d'inégalités. $\Diamond$

Exemples d'utilisation : 1. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions intégrables convergeant simplement vers f et vérifiant $\sup_n \int_X |f_n| d\mu < +\infty$. Alors $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ puisque

$$\int_X |f| d\mu = \int_X \lim_n |f_n| d\mu = \int_X \underline{\lim}_n |f_n| d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X |f_n| d\mu \leq \sup_n \int_X |f_n| d\mu < +\infty.$$

2. À l'inverse, si une suite de fonctions positives $(f_n)_{n\geq 1}$ vérifie $\lim_n f_n = +\infty$, le lemme de Fatou entraîne que $\lim_n \int_X f_n \, d\mu = +\infty$ dès que $\mu(X) > 0$.

3. Lemme de Fatou étendu : Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ μ-*p.p.minorées* par une fonction $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.
Si $\lim_n f_n = +\infty$, alors $\lim_n \int_X f_n \, d\mu = +\infty$ dès que $\mu(X) > 0$.

Le lemme de Fatou appliqué à la suite de fonctions positives $(f_n - g)_{n\geq 1}$ montre que

$$0 \leq \int_X \underline{\lim}_n (f_n - g) d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X (f_n - g) \, d\mu \leq +\infty.$$

Or $\underline{\lim}_n (f_n - g) = (\underline{\lim}_n f_n) - g = +\infty$ μ-*p.p.* puisque, g étant intégrable est finie μ-*p.p.*. Il vient alors

$$\int_X (+\infty) \, d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X f_n \, d\mu - \int_X g \, d\mu$$

par linéarité de l'intégrale. On conclut en notant $\int_X g \, d\mu$ est un nombre réel et que $\mu(X) \times (+\infty) = +\infty$.

***Application* 8.1.** *Intégration d'une dérivée* : Soit f une fonction croissante sur $[0,1]$ (donc en particulier Riemann intégrable sur [0,1]), continue en 0 et 1 et dérivable λ-presque partout dans $[0,1]$ (on peut montrer que cette condition est une conséquence de la croissance de la fonction f). Alors l'inégalité suivante est toujours vérifiée

$$\int_0^1 f'(x)\,dx \leq f(1) - f(0).$$

DÉMONSTRATION : On définit sur $[0,1]$ la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ par

$$g_n(x) := \begin{cases} n\,(f(x+1/n) - f(x)) & \text{si } x \leq 1 - 1/n \\ 0 & \text{si } x > 1 - 1/n. \end{cases}$$

Les fonctions g_n sont positives et, pour λ-presque tout $x \in [0,1[$, $g_n(x)$ converge vers $f'(x)$. La fonction f' est positive là où elle existe et on la fixe égale à 0 ailleurs. Comme $\varliminf_n g_n = f'$ λ-*p.p.*, le lemme de Fatou (théorème 8.2) entraîne

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = \int_0^1 \varliminf_n g_n(x)\,dx \leq \varliminf_n \int_0^1 g_n(x)\,dx.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_n(x)\,dx &= n\int_0^{1-1/n} f(x+1/n)\,dx - n\int_0^{1-1/n} f(x)\,dx \\ &= n\int_{1/n}^1 f(x)\,dx - n\int_0^{1-1/n} f(x)\,dx \end{aligned}$$

et en considérant la fonction $F(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, il vient

$$\int_0^1 g_n(x)\,dx = n\ (F(1) - F(1-1/n)) - n\ (F(1/n) - F(0)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1) - f(0)$$

car la continuité de f en 0 et 1 implique $F'(0) = f(0)$ et $F'(1) = f(1)$, d'où le résultat. $\diamondsuit$

Remarque : L'inégalité précédente peut être stricte. Ainsi, la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f := \mathbb{1}_{[1/2,1]}$ est croissante, continue en 0 et 1 et $f'(x) = 0$ si $x \neq 1/2$.

Elle vérifie donc les hypothèses précédentes, cependant

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = 0 < f(1) - f(0) = 1.$$

Dans la proposition 13.2, l'exemple d'une fonction continue sur [0,1] et vérifiant la même inégalité stricte sera proposé ; il s'agit de la fonction de Lebesgue, définie à partir de l'ensemble triadique de Cantor.

Théorème 8.3 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'éléments de* $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ *(*$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) vérifiant :*

(i) $\mu(dx)$*-p.p.,* $f_n(x)$ *converge (dans* $\mathbb{K}$*) quand* $n\to+\infty$*,*

(ii) *il existe* $g\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ *telle que, pour tout* $n\geq 1$, $|f_n(x)|\leq g(x)$ $\mu(dx)$*-p.p..*

Alors, il existe $f\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ *telle que*

(I) $f_n(x)$ *converge vers* $f(x)$ $\mu(dx)$*-p.p.,*

(II) $\lim\limits_n\int_X f_n\,d\mu=\int_X f d\mu$ *(et même* $\lim\limits_n\int_X|f_n-f|\,d\mu=0$*).*

Remarque : Dans les applications courantes, la fonction f est généralement directement disponible dans l'énoncé et l'on prend alors (I) comme hypothèse à la place de (i), l'intégrabilité de f découlant de (ii).

DÉMONSTRATION : Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on pose $f:=\underline{\lim}_n f_n$. La fonction f est mesurable, $\{f_n\xrightarrow{(\mathbb{R})}f\}=\{\underline{\lim}_n f_n=\overline{\lim}_n f_n\in\mathbb{R}\}\in\mathscr{A}$ et d'après (i), $\mu(^c\{f_n\xrightarrow{(\mathbb{R})}f\})=0$.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, on raisonne de façon analogue sur $\Re(f_n)$ et $\Im(f_n)$.

Soit $A:=(\bigcap\limits_{n\geq 1}\{|f_n|\leq g\})\cap\{g<+\infty\}\cap\{f_n\xrightarrow{(\mathbb{K})}f\}$. A est clairement un élément de $\mathscr{A}$, en outre, d'après (i), (ii) et la σ-sous-additivité de la mesure μ,

$$\mu(^cA)\leq\mu(^c\{f_n\xrightarrow{(\mathbb{K})}f\})+\mu(\{g=+\infty\})+\sum_{n\geq 1}\mu(\{|f_n|>g\})=0.$$

Or, sur A, $|f|=\lim_n|f_n|\leq g$ donc $|f|\leq g$ μ-$p.p.$ et, partant :

$$\int_X|f|d\mu\underbrace{=}_{\text{via le corollaire 7.1}}\int_X|f|\mathbb{1}_{\{|f|\leq g\}}d\mu\leq\int_X gd\mu<+\infty.$$

La fonction f est donc bien dans $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Considérons d'autre part la suite de fonctions $(2g-\mathbb{1}_A|f_n-f|)_{n\geq 1}$. Ces fonctions sont clairement $\mathscr{A}$-mesurables et positives, d'où, *via* le lemme de Fatou,

$$\int_X\underline{\lim}_n(2g-\mathbb{1}_A|f_n-f|)d\mu\leq\underline{\lim}_n\int_X(2g-\mathbb{1}_A|f_n-f|)d\mu$$

$$i.e.\quad 2\int_X gd\mu-\int_X\underbrace{\overline{\lim}_n\mathbb{1}_A|f_n-f|}_{=0\text{ ... partout !}}d\mu\leq 2\int_X gd\mu-\overline{\lim}_n\int_A|f_n-f|d\mu$$

d'où $\overline{\lim}_n\int_A|f_n-f|d\mu=0$. Or, $\int_X|f_n-f|d\mu=\int_A|f_n-f|d\mu$ car $\mu(^cA)=0$. D'où finalement,

$$0\leq\underline{\lim}_n\int_X|f_n-f|d\mu\leq\overline{\lim}_n\int_X|f_n-f|d\mu=0,$$

i.e. $\lim_n \int_X |f_n - f| d\mu = 0. \quad \Diamond$

Remarques autour de l'hypothèse de domination (ii) **:** • Dans le cadre élémentaire de l'intégrale de Riemann sur un compact $[a, b]$, on requiert la convergence uniforme de la suite de fonctions (Riemann intégrables) f_n vers f pour assurer la convergence des intégrales correspondantes (*cf.* proposition 1.4). Or, dans une telle situation, il est immédiat qu'il existe une constante réelle positive $C := \sup_n \|f_n\|_{\sup}$ telle que $|f_n| \leq C$. Ceci correspond à une hypothèse de domination particulière puisque la fonction constante égale à C est évidemment intégrable sur l'intervalle $[a, b]$.

En revanche, l'hypothèse de domination peut être vérifiée en l'absence de convergence uniforme. On se place sur $([0, 1], \mathscr{B}([0, 1]), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue restreinte à l'intervalle $[0, 1]$. On pose, pour tout $n \geq 1$,

$$f_n(x) := \min\left(\frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}}, n\right), \quad x \in [0, 1].$$

Il est immédiat que les fonctions f_n sont continues, donc boréliennes, et convergent vers la fonction nulle pour tout $x \in]0, 1]$, donc $\lambda(dx)$-*p.p.*. D'autre part, comme $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cette convergence n'est pas uniforme. En revanche, pour tout $x \in]0, 1]$, $|f_n(x)| = f_n(x) \leq g(x) := 1/\sqrt{x}\, \mathbb{1}_{]0,1]}$. La fonction $g \in \mathscr{L}^1(\lambda)$ donc, par application du théorème de convergence dominée, on obtient $\lim_n \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$.

• Il serait erroné de croire pour autant que l'hypothèse de domination couvre toutes les situations de convergence d'intégrales. Ainsi, sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ on considère une fonction f, continue, nulle en dehors de l'intervalle $[0, 1]$, positive et d'intégrale non nulle. On pose alors, pour tout $n \geq 1$,

$$f_n(x) := \frac{f(x+n)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La suite de fonctions f_n, parfois appelée "bosse glissante", converge vers la fonction nulle lorsque $n \to +\infty$. Par ailleurs, il est immédiat *via* un changement de variable élémentaire – ces intégrales existent au sens de Riemann ! – que la suite d'intégrales $\int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda = \frac{1}{n} \int_0^1 f(x)\, dx$ converge vers 0. Cependant la suite f_n n'est dominée par aucune fonction intégrable g puisque la plus petite fonction dominante possible, $g(x) := \sup_n |f_n(x)|$, a pour intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int_0^1 f(x)\, dx = +\infty$$

(les fonctions f_n sont, en effet, à support deux à deux disjoints).

***Application* 8.2.** *Intégration d'une dérivée (suite)* : Soit f une fonction partout dérivable sur $[0,1]$, de dérivée f' bornée. Alors f est l'intégrale de sa dérivée au sens où

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0).$$

DÉMONSTRATION : On reprend la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ définie dans l'application 8.1 illustrant le lemme de Fatou. Pour tout $x \in [0,1[$, la suite $g_n(x)$ converge vers $f'(x)$. Soit $M := \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$. M est fini par hypothèse. D'après le théorème des accroissements finis, $|g_n(x)| \leq M$ pour tout $x \leq 1 - 1/n$ et l'inégalité est évidente si $x > 1 - 1/n$; la relation de domination $|g_n(x)| \leq M$ est vraie pour tout $x \in [0,1]$. La fonction constante égale à M est intégrable sur $([0,1], \lambda(dx))$ donc la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée (théorème 8.3). Finalement,

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = \lim_n \int_0^1 g_n(x)\,dx.$$

D'autre part, on a comme dans l'application 8.1,

$$\lim_n \int_0^1 g_n(x)\,dx = f(1) - f(0)$$

ce qui établit l'égalité cherchée. $\Diamond$

***Application* 8.3.** *Convergence de la suite* $I_n(\alpha) := \displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}\,dx$ *selon les valeurs du paramètre* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions positives définies par $f_n(x) := \mathbb{1}_{[0,n]}(x)\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n, x \geq 0$. La suite $f_n(x)$ converge vers e^x pour tout $x \geq 0$ donc, d'après le lemme de Fatou,

$$\int_0^{+\infty} e^{(1-\alpha)x}\,dx \leq \underline{\lim}_n\, I_n(\alpha) \quad \text{et donc} \quad \lim_n I_n(\alpha) = +\infty \quad \text{dès que } \alpha \leq 1.$$

Reste à étudier le cas où $\alpha > 1$. On peut remarquer que pour tout $x \geq 0$,

$$e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^k}{n^k} \geq \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k}\right)x^k \geq 0$$

vu que, pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$, $\dfrac{k!\,C_n^k}{n^k} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \leq 1.$

D'où la relation de domination

$$\forall\, x \geq 0,\ 0 \leq f_n(x)\,e^{-\alpha x} \leq e^{(1-\alpha)x} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+) \ \text{ si } \ \alpha > 1.$$

Le théorème de convergence dominée entraîne finalement

$$\lim_n I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{(1-\alpha)x}\,dx = \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{si } \alpha > 1. \quad \Diamond$$

8.2 Application aux séries de fonctions

La puissance et la simplicité d'utilisation des résultats précédents sont particulièrement mises en évidence dans les théorèmes d'interversion des symboles de “somme” et d'“intégrale” pour l'intégration des séries de fonctions.

***Théorème* 8.4.** *Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $\mathscr{A}$-mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.*

(a) *Si les fonctions φ_n sont positives pour tout $n \geq 1$, alors*

$$\int_X \Big(\sum_{n\geq 1} \varphi_n\Big)\, d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X \varphi_n \, d\mu.$$

(b) *Si $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\int_X |\varphi_n| d\mu < +\infty$ alors les fonctions φ_n, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}|\varphi_n|$ et la fonction définie μ-p.p. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\varphi_n$ sont μ-intégrables. En outre*

$$\int_X \Big(\sum_{n\geq 1} \varphi_n\Big)\, d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X \varphi_n \, d\mu.$$

Démonstration : (a) On applique le théorème 8.1 (Beppo Levi) à la suite croissante de fonctions positives $f_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k$, $n \geq 1$, puis on conclut par linéarité de l'intégrale :

$$\int_X \Big(\sum_{n\geq 1} \varphi_n\Big)\, d\mu = \lim_n \int_X \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \, d\mu = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \int_X \varphi_k \, d\mu.$$

(b) Soit $g := \displaystyle\sum_{n\geq 1}|\varphi_n|$. D'après (a), $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$. En particulier, $g < +\infty$ μ-$p.p.$ d'après le corollaire 7.2 et, par conséquent, $\mu(dx)$-$p.p.$ la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\varphi_n(x)$ est absolument convergente (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). La fonction $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\varphi_n$ est donc bien définie, sauf, éventuellement sur un ensemble négligeable, où on lui attribue, par exemple, la valeur 0.

D'autre part, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie en (a) vérifie simultanément $f_n \overset{\mu\text{-}p.p.}{\longrightarrow} \displaystyle\sum_{n\geq 1}\varphi_n$ quand $n \to +\infty$ et $|f_n| \leq g$. La conclusion découle alors du théorème de convergence dominée (théorème 8.3). $\Diamond$

***Application* 8.4.** (a) *Lemme de Borel-Cantelli* : Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une famille de parties de $\mathscr{A}$. Alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty \implies \mu(\overline{\lim_n} A_n) = 0.$$

(b) *Continuité de l'intégrale par rapport à la mesure* : Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathscr{A},\ \ \mu(A) \leq \delta \Longrightarrow \int_A |f|\, d\mu \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, l'intégrale d'une fonction intégrable f sur un ensemble mesurable peut être rendue arbitrairement petite si l'ensemble a une mesure suffisamment petite.

DÉMONSTRATION : (a) D'après le théorème 8.4,

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty,$$

d'où, d'après le corollaire 7.2, la fonction positive et définie par la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n}$ est finie μ-*p.p.*. Son terme général, qui vaut 0 ou 1, tend donc μ-*p.p.* vers 0, ce qui nécessite qu'il stationne en 0. On a donc montré que

$$\mu(\overline{\lim_n} A_n) = \mu(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k) = \mu\left(\{x \in X : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists k \geq n,\ x \in A_k\}\right) = 0.$$

(b) On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ telle que $\mu(A_n) \leq 1/2^n$ et $\displaystyle\int_{A_n} |f|\, d\mu > \varepsilon_0$. D'après le lemme de Borel-Cantelli ci-avant, $\mu(dx)$-*p.p.* $\mathbb{1}_{A_n}(x)|f|(x) = 0$ à partir d'un certain rang. Comme $0 \leq \mathbb{1}_{A_n}|f| \leq |f| \in \mathscr{L}^1(\mu)$, le théorème de convergence dominée entraîne alors $\displaystyle\int_{A_n} |f|\, d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui contredit l'hypothèse. $\diamondsuit$

8.3 Intégrales dépendant d'un paramètre

Rappels : Soient (E,d) un espace métrique, $g : E \to \mathbb{K}$ et $u_\infty \in E$. Alors,

(a) $\lim_{u\to u_\infty} g(u) = \ell$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers u_∞ et $u_n \neq u_\infty$ pour tout $n \geq 1$, $\lim_n g(u_n) = \ell$.

(b) g est continue en u_∞ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers u_∞, $\lim_n g(u_n) = g(u_\infty)$.

Dans ce qui suit, on se donne une application $f : E \times X \to \mathbb{K}$.

***Théorème* 8.5** (Continuité sous le signe intégrale)**.** *Soit* $u_\infty \in E$. *Si*

(i) *pour tout* $u \in E$, $\big(x \mapsto f(u,x)\big)$ *est mesurable de* $(X, \mathscr{A})$ *dans* $(\mathbb{K}, \mathscr{B}(\mathbb{K}))$,

(ii) $\mu(dx)$*-p.p.,* $\big(u \mapsto f(u,x)\big)$ *est continue en* u_∞,

(iii) *il existe* $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ *telle que* $\forall\, u \in E,\ \ |f(u,x)| \le g(x)\ \ \mu(dx)$*-p.p.,*

alors la fonction $F(u) := \displaystyle\int_X f(u,x)\mu(dx)$ *est définie en tout point* $u \in E$ *et est continue en* u_∞.

Remarques : • l'hypothèse (iii) ci-dessus est communément appelée *hypothèse de domination.*

• On peut proposer un énoncé formellement plus précis – mais aussi plus lourd – de l'hypothèse (ii) sous la forme :

$$\exists\, N \in \mathscr{A} \quad \text{tel que} \quad \mu(N) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, x \notin N,\ u \mapsto f(u,x) \text{ est continue en } u_\infty.$$

• On peut, dans l'énoncé précédent, remplacer dans (ii) le terme "continue" par "a pour limite finie $\ell(x)$". La conclusion devient alors : ℓ est μ-intégrable et F a pour limite (finie) $\displaystyle\int_X \ell(x)\,\mu(dx)$ en u_∞.

DÉMONSTRATION : On s'appuie sur la caractérisation séquentielle de la continuité rappelée ci-avant. Soit $u_n \to u_\infty$; on pose, pour tout $n \ge 1$, $f_n := f(u_n, \cdot)$, et $f_\infty := f(u_\infty, \cdot)$. $F(u_n) = \displaystyle\int_X f_n\, d\mu \longrightarrow F(u_\infty) = \int_X f_\infty d\mu$ par simple application du théorème de convergence dominée. $\Diamond$

***Application* 8.5.** (a) *Fonction d'une variable réelle définie par une intégrale de la borne supérieure* : λ désigne ici la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soient $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda)$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Alors, la fonction F définie par

$$u \longmapsto F(u) := \int_a^u f(x)\,\lambda(dx) := \begin{cases} \displaystyle\int_{]a,u]} f d\lambda & \text{si } u \ge a \\ \displaystyle -\int_{[u,a[} f d\lambda & \text{si } u \le a, \end{cases}$$

est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION : On se convainc immédiatement que, ainsi définie, l'intégrale de la borne supérieure vérifie la relation de Chasles. En particulier, $\displaystyle\int_a^u f d\lambda = \int_{-\infty}^u f d\lambda - \int_{-\infty}^a f d\lambda$; il suffit donc d'étudier le cas où $a = -\infty$, *i.e.*

$$F(u) := \int_{]-\infty,u]} f(x)\,\lambda(dx).$$

On pose $\varphi(u,x) := \mathbb{1}_{]-\infty,u]}(x) f(x) = \mathbb{1}_{[x,+\infty[}(u) f(x)$. La fonction φ vérifie clairement (i) et la relation de domination (iii) découle de l'inégalité $|\varphi(u,x)| \le |f(x)|$.

Enfin, si $u_\infty \in \mathbb{R}$, l'ensemble des x pour lesquels la fonction $u \mapsto \varphi(u,x)$ est discontinue en u_∞ est inclus dans $\{u_\infty\}$. Comme $\lambda(\{u_\infty\})=0$, (ii) est à son tour vérifiée. Finalement, F est continue en tout point $u_\infty \in \mathbb{R}$. $\Diamond$

(a') *Une généralisation simple* : Le résultat ci-dessus n'utilise de la mesure de Lebesgue λ que sa propriété de ne charger aucun point. Par suite, si μ *est une mesure diffuse* sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, au sens où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\})=0$, il vient

$$\forall\, f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu), \quad u \mapsto \int_{]-\infty,u]} f(x)\,\mu(dx) \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

On notera au passage que le théorème de “continuité sous le signe d'intégrale” dans le cadre Riemann n'englobait pas, lui, la continuité des intégrales de la borne supérieure.

(a'') *Exercice* : Montrer, en s'appuyant sur la propriété de continuité par rapport à la mesure établie dans l'application 8.4, qu'en fait $u \mapsto \displaystyle\int_a^u f(x)\,\lambda(dx)$ est *uniformément* continue sur $\mathbb{R}$.

(b) *Transformée de Fourier* : Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$, alors la fonction $\hat{f}$ définie en tout point u de $\mathbb{R}$ par

$$\hat{f}(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x)\,\lambda(dx)$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $\hat{f}$ est appelée la *transformée de Fourier* de f. L'étude approfondie de cette transformation fait l'objet du chapitre 15.

La continuité de $\hat{f}$ découle immédiatement du théorème 8.5 puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(u \mapsto e^{iux})$ est une fonction continue à valeurs complexes de module 1.

Il est possible d'améliorer sensiblement ce résultat et d'établir que $\hat{f}$ est *uniformément continue* sur $\mathbb{R}$. En effet, l'inégalité des accroissements finis entraîne que, pour tous u, v, $x \in \mathbb{R}$, $|e^{iux} - e^{ivx}| \leq |ux - vx| = |u-v||x|$ ($y \mapsto e^{iy}$ a pour dérivée $y \mapsto ie^{iy}$ dont le module est constamment égal à 1). Par suite, $|e^{iux} - e^{ivx}| \leq \min(|u-v||x|, 2)$, d'où

$$|\hat{f}(u) - \hat{f}(v)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{iux} - e^{ivx}|\,|f(x)|\,\lambda(dx) \leq \varphi(u-v)$$

$$\text{où} \qquad \varphi(w) := \int_{\mathbb{R}} \min(w|x|, 2)|f(x)|\,\lambda(dx).$$

Le théorème 8.5 assure la continuité de φ et, partant, $\lim\limits_{w \to 0} \varphi(w) = \varphi(0) = 0$. Ceci entraîne alors l'uniforme continuité de $\hat{f}$ *via* l'inégalité précédente.

Il est à noter que la mesure de Lebesgue ne joue ici aucun rôle particulier et peut être remplacée par n'importe quelle mesure positive μ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

(c) *Convolution* : Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda)$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, continue et bornée. Alors la *convolée de f et φ*, définie par

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad (f * \varphi)(u) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(u-x) f(x)\, \lambda(dx),$$

est continue bornée.

On pose $f(u,x) := \varphi(u-x)f(x)$. La fonction $u \mapsto f(u,x)$ est clairement continue pour tout $x \in I$. La relation de domination découle du fait que

$$|f(u,x)| \leq \sup_{v \in \mathbb{R}} |\varphi(v)|\, |f(x)|.$$

On verra au chapitre 14 que cette notion de convolution admet de nombreuses extensions, notamment au cas où φ est seulement intégrable.

(d) *Fonctions définies par une série de fonctions continues* : Si $X := \mathbb{N}$, $\mathscr{A} := \mathscr{P}(\mathbb{N})$ et m la mesure de comptage, on retrouve le résultat classique sur la continuité des séries de fonctions : si les fonctions f_n, $n \geq 1$, sont continues sur E (resp. en $u_0 \in E$) et $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \sup_{u \in E} |f_n(u)| < +\infty$ – on dit que la suite converge *normalement* – alors $u \mapsto \displaystyle\sum_{n \geq 1} f_n(u)$ est continue sur E (resp. en $u_0 \in E$).

***Théorème* 8.6** (Dérivation sous le signe intégrale)**.** *On suppose ici que $E = I$, où I désigne un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit $u_\infty \in I$. Si la fonction f vérifie*

(i) pour tout $u \in I$, $f(u,\cdot) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$,

(ii) $\mu(dx)$-p.p., $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)$ existe,

(iii) il existe $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ telle que

$$\forall\, u \in I, \quad \mu(dx)\text{-p.p. } |f(u,x) - f(u_\infty, x)| \leq g(x)\, |u - u_\infty|,$$

alors la fonction $F(u) := \displaystyle\int_X f(u,x)\mu(dx)$ est définie en tout point $u \in I$, dérivable en u_∞ de dérivée

$$F'(u_\infty) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)\mu(dx).$$

DÉMONSTRATION : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels de I convergeant vers u_∞ sans jamais prendre la valeur u_∞. On pose, pour tout $n \geq 0$,

$$\varphi_n(x) := \frac{f(u_n,x) - f(u_\infty,x)}{u_n - u_\infty}.$$

D'après la condition (ii), $\mu(dx)$-$p.p.$, $\varphi_n(x)$ converge vers $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)$. D'autre part, la condition (iii) entraîne la condition de domination puisque, pour tout $n \geq 0$, $\mu(dx)$-$p.p.$ $|\varphi_n(x)| \leq g(x)$. Il vient donc, par convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{F(u_n)-F(u_\infty)}{u_n-u_\infty}\right)=\int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)\,\mu(dx). \quad \Diamond$$

Remarques : • En fait ce théorème est une application directe de la version "limite finie" du théorème 8.5 de continuité sous le signe intégrale.

• Si l'on remplace (ii) par

$(ii)_d$ $u \mapsto f(u,x)$ est $\mu(dx)$-$p.p.$ dérivable à droite en u_∞,

alors F est dérivable à droite en u_∞ et $F'_d(u_\infty) := \displaystyle\int_X \frac{\partial_d f}{\partial u}(u_\infty, x)\mu(dx)$; idem pour la dérivabilité à gauche.

• On établit de façon tout à fait analogue une version "holomorphe" sur un ouvert de $\mathbb{C}$ et une version "différentiable" sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ du théorème de dérivation ci-avant.

On peut déduire de ce résultat un théorème de dérivabilité global sur l'intervalle I, souvent très utile dans les applications courantes.

***Corollaire* 8.1** (Dérivation globale sur un intervalle ouvert)**.** *Sous les hypothèses*

(i) *pour tout* $u \in I$, $f(u,.) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$,

$(ii)'$ $\mu(dx)$-*p.p.*, $\big(u \mapsto f(u,x)\big)$ *est dérivable* sur tout l'intervalle I,

$(iii)'$ $\mu(dx)$-*p.p., pour tout* $u \in I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leq g(x)$ *où* $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$,

alors la fonction $F(u) := \displaystyle\int_X f(u,x)\,\mu(dx)$ *est définie et dérivable sur tout l'intervalle* I*, de dérivée*

$$F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\,\mu(dx).$$

DÉMONSTRATION : Soit $u_\infty \in I$ fixé. Les conditions $(ii)'$ et $(iii)'$ alliées au théorème des accroissements finis entraînent immédiatement que, pour tout $u \in I$,

$$\mu(dx)\text{-}p.p. \quad |f(u,x)-f(u_\infty,x)| \leq \sup_{v\in(u,u_\infty)}\left|\frac{\partial f}{\partial u}(v,x)\right||u-u_\infty| \leq g(x)\,|u-u_\infty|.$$

Ceci assure que l'hypothèse (iii) du théorème 8.6 est vérifiée. Il ne reste plus qu'à remarquer que $(ii)'$ implique évidemment (ii) en u_∞. $\quad\Diamond$

Les trois premières des quatre applications ci-après découlent immédiatement du corollaire 8.1, la quatrième ne peut être résolue qu'à l'aide du théorème 8.6, bien que le résultat de dérivation obtenu y soit également global.

***Application* 8.6.** (a) *Transformée de Fourier* : Si f et $(x \mapsto x\,f(x)) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$, alors $\hat{f}(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x)\,\lambda(dx)$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}'(u) = i \int_{\mathbb{R}} e^{iux} x f(x)\,\lambda(dx) = i\,\widehat{xf(x)}(u).$$

Cette fonctionnelle fait l'objet d'une étude approfondie dans le chapitre 15.
(b) *Convolution* : Si $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ et φ est dérivable, bornée à dérivée bornée sur $\mathbb{R}$, alors $f * \varphi(u) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(u-x) f(x)\,\lambda(dx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad (f * \varphi)'(u) = (f * \varphi')(u).$$

Cette opération fait l'objet d'une étude approfondie dans le chapitre 14.
(c) *Fonction définie par une série de fonctions dérivables* : On considère la mesure de comptage m sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ et une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions dérivables sur un intervalle I. Si pour tout $u \in I$, on a

$$\sum_{n\geq 1} |f_n(u)| + \sup_{v\in I} |f_n'(v)| < +\infty,$$

alors la fonction $u \mapsto \sum_{n\geq 1} f_n(u)$ est dérivable sur I de dérivée $u \mapsto \sum_{n\geq 1} f_n'(u)$.
(d) *Un calcul de primitive* : Soient μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ ne chargeant pas un réel t_0 donné, *i.e.* $\mu(\{t_0\}) = 0$, et une fonction $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ telle que $(x \mapsto x\,f(x)) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. On pose

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} (t-x)^+ f(x)\mu(dx) \quad \text{où } u^+ := \max(u,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ u & \text{si } u > 0. \end{cases}$$

La fonction F est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable en t_0 de dérivée

$$F'(t_0) = \int_{]-\infty, t_0]} f(x)\mu(dx).$$

DÉMONSTRATION DE (d) : la fonction F est bien définie sur tout $\mathbb{R}$ car

$$(t-x)^+|f(x)| \leq (|t| + |x|)|f(x)| \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu).$$

D'autre part, pour tout $x \neq t_0$, et donc $\mu(dx)$-*p.p.*, $t \mapsto (t-x)^+ f(x)$ est dérivable en t_0 de dérivée $t \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x < t_0 \\ 0 & \text{si } x > t_0 \end{cases} \equiv f(x)\mathbb{1}_{]-\infty, t_0[}(x)$. Enfin

$$\begin{aligned} |(t-x)^+ f(x) - (t_0 - x)^+ f(x)| &= |\max(t-x, 0) - \max(t_0 - x, 0)||f(x)| \\ &\leq \max(|(t-x) - (t_0 - x)|, 0)|f(x)| \\ &\leq |t - t_0|\,|f(x)|. \end{aligned}$$

d'où la condition de domination (iii). Par conséquent, on peut affirmer d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale (théorème 8.6), que

$$F'(t_0) = \int_{]-\infty,t_0[} f(x)\mu(dx) = \int_{]-\infty,t_0]} f(x)\mu(dx).$$

En particulier, si μ est une mesure *diffuse*, *i.e.* ne chargeant aucun point de $\mathbb{R}$, on a établi que $F(t) := \int_{\mathbb{R}} (t-x)^+ f(x)\mu(dx)$ est une primitive de $t \mapsto \int_{-\infty}^{t} f(x)\mu(dx)$.

***Application* 8.7.** *Étude de la fonction* $F(t) := \int_0^1 \sqrt{\varphi(x)^2 + t}\, dx$ *où* $\varphi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1],\lambda)$.

$\triangleright$ *Existence et continuité sur* $\mathbb{R}_+$: Soit f la fonction définie par $f(t,x) := \sqrt{\varphi(x)^2 + t}$. À t fixé, la fonction $x \mapsto f(t,x)$, composée de la fonction mesurable φ par la fonction continue $y \mapsto \sqrt{y^2+t}$, est donc mesurable. D'autre part, comme $\sqrt{\varphi^2(x)+t} \le |\varphi(x)| + \sqrt{t}$ et φ est $\lambda(dx)$-intégrable sur $[0,1]$ par hypothèse, F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

La continuité sur $\mathbb{R}_+$ de $t \mapsto f(t,x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et la relation de domination

$$\forall\, t \in [0,a], \quad \sqrt{\varphi(x)^2 + t} \le |\varphi(x)| + \sqrt{a} \in \mathscr{L}^1([0,1],\lambda)$$

assurent, *via* le théorème 8.5, la continuité de F sur tout intervalle $[0,a]$ et partant sur $\mathbb{R}_+$.

$\triangleright$ *Dérivabilité sur* $\mathbb{R}_+^*$: Soit $t_0 > 0$. Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable en t_0 et vérifie en outre

$$|f(t,x) - f(t_0,x)| = \frac{|t-t_0|}{\sqrt{\varphi(x)^2+t} + \sqrt{\varphi(x)^2+t_0}} \le \frac{1}{\sqrt{t_0}}\,|t-t_0|.$$

La fonction constante égale à $\frac{1}{\sqrt{t_0}}$ est dx-intégrable sur [0,1]. Donc d'après le théorème 8.6 de dérivation sous le signe intégral, F est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{\varphi(x)^2 + t_0}}.$$

$\triangleright$ *Dérivabilité en* 0 *:* Montrons que F est dérivable (à droite) en 0 si et seulement si la fonction $\frac{1}{\varphi} \in \mathscr{L}^1([0,1],\lambda)$.

Supposons que $\frac{1}{\varphi} \in \mathscr{L}^1([0,1],\lambda)$. Alors, pour λ-presque tout $x \in [0,1]$, $\varphi(x) \neq 0$; or la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable en 0 de dérivée $\frac{1}{2|\varphi(x)|}$ en tout point x tel que $\varphi(x) \neq 0$. En outre, f vérifie la relation de domination suivante

$$\lambda(dx)\text{-}p.p.,\quad |f(t,x) - f(0,x)| = \frac{|t|}{\sqrt{\varphi(x)^2+t} + |\varphi(x)|} \le \frac{|t|}{|\varphi(x)|}\mathbb{1}_{\{\varphi \neq 0\}}(x) \in \mathscr{L}^1([0,1],\, dx).$$

Le théorème 8.6 de dérivation sous le signe intégral entraîne que F est dérivable en 0 avec

$$F'(0) = \int_0^1 \frac{dx}{2|\varphi(x)|}.$$

Réciproquement, supposons F dérivable (à droite) en 0. Soit $(h_n)_{n\ge 1}$ la suite de fonctions positives définies par

$$h_n(x) := \begin{cases} n\left(\sqrt{\varphi(x)^2 + 1/n} - |\varphi(x)|\right) & \text{si } |\varphi(x)| < +\infty \\ 0 & \text{si } |\varphi(x)| = +\infty. \end{cases}$$

Pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(h_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers $\dfrac{1}{2|\varphi(x)|}$. Or d'après le lemme de Fatou,

$$\int_0^1 \frac{1}{2|\varphi(x)|}\,dx \leq \varliminf_n \int_0^1 h_n(x)\,dx = \varliminf_n n\,(F(1/n) - F(0)) = F'(0) < +\infty.$$

Donc $\dfrac{1}{\varphi} \in \mathscr{L}^1([0,1])$.

On peut aussi procéder de la manière suivante pour établir la nécessité de cette condition. En effet, l'expression de $F'(t)$ pour $t > 0$ montre que F' est décroissante positive sur $\mathbb{R}_+$. Ceci entraîne l'existence de $\ell := \lim\limits_{t\to 0_+} F'(t) \in [0,+\infty]$. La fonction F étant par ailleurs continue, il s'ensuit, d'après le théorème de prolongement de la dérivée, que

$$\ell = \lim_{t\to 0_+} \frac{F(t) - F(0)}{t}.$$

La fonction F est dérivable en 0 si et seulement si $\ell < +\infty$. Or, d'après le théorème de Beppo Levi (théorème 7.1) appliqué à la suite croissante de fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{\varphi(x)^2 + 1/n}}$, il vient

$$\ell = \lim_n F'(1/n) = \lim_n \int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{\varphi(x)^2 + 1/n}} = \int_0^1 \frac{dx}{2|\varphi(x)|},$$

d'où la condition annoncée.

8.4 Mesures à densité : première approche

On se place toujours sur l'espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Rappelons que l'intégrale $\int_A f d\mu$ est définie comme $\int (\mathbb{1}_A f) d\mu$ dès qu'elle existe (notamment si $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$).

***Proposition* 8.1.** *(a) Soit $f : (X, \mathscr{A}) \to \mathbb{R}_+$. On pose, pour toute partie $A \in \mathscr{A}$, $\nu(A) := \int_A f d\mu$. Alors ν est une mesure sur $\mathscr{A}$, notée $\nu := f.\mu$ (ou parfois $f d\mu$) vérifiant :*

$$\forall\, A \in \mathscr{A},\;\; \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0 \qquad \text{[convention } 0\times(+\infty) = 0]. \tag{8.1}$$

(b) ν est une mesure finie si et seulement si la fonction $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, auquel cas $\nu(X) = \int_X f d\mu$.
(c) Soit $g : (X\mathscr{A}) \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Alors

$$g \in \mathscr{L}^1(\nu) \qquad \textit{si et seulement si} \qquad gf \in \mathscr{L}^1(\mu)$$

et dans ce cas

$$\int_X g d\nu = \int_X g f d\mu.$$

En outre l'égalité ci-dessus est toujours vérifiée si g est mesurable positive.

DÉMONSTRATION : (a) ν est bien une application de $\mathscr{A}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. D'autre part, $\nu(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = \int_X 0\, d\mu = 0$. Enfin, soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties de $\mathscr{A}$ deux à deux disjointes.

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{n\geq 1} A_n} = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n} = \lim_n{}^{\uparrow} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k} \quad \text{d'où} \quad 0 \leq f\, \mathbb{1}_{\bigcup_{n\geq 1} A_n} = \sum_{n\geq 1} f\, \mathbb{1}_{A_n}.$$

Le théorème de Beppo Levi pour les séries entraîne alors $\nu(A) = \sum_{n\geq 1} \nu(A_n)$.

Si $\mu(A) = 0$ alors $\nu(A) = \int_A f\, d\mu = 0$ car $\mathbb{1}_A f = 0$ μ-p.p..

(b) est évident.

(c) Si $g = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathscr{A}$, l'identité se résume à la définition de ν. On l'étend alors aux fonctions étagées positives par linéarité de l'intégrale, puis aux fonctions mesurables positives par le théorème de Beppo Levi. Si g est de signe quelconque, l'identité est vraie pour les fonctions $g^{\pm}$ (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$). Or g (resp. gf) est ν-intégrable (resp. μ-intégrable) si et seulement si les fonctions $g^{\pm}$ (resp. $(gf)^{\pm}$) le sont (et $(gf)^{\pm} = g^{\pm} f$ car f est positive). Enfin, si les intégrales associées sont finies alors on peut soustraire ces identités membre à membre pour obtenir le résultat annoncé. $\diamondsuit$

***Définition* 8.1.** (a) *Si deux mesures μ et ν vérifient la relation (8.1), la mesure ν est dite* absolument continue *par rapport à μ et l'on note $\nu \ll \mu$.*

(b) *Si $\nu = f.\mu$, f est appelée selon les cas* densité *de ν par rapport à μ ou* dérivée de Radon-Nikodym *de ν par rapport à μ. On la note souvent $\dfrac{d\nu}{d\mu}$.*

Remarque : Sous certaines hypothèses supplémentaires sur les mesures μ et ν, la proposition 8.1 admet une réciproque, autrement plus délicate à établir, appelée théorème de Radon-Nikodym. Ainsi, lorsque μ et ν sont des mesures finies, ce théorème stipule qu'il y a équivalence entre :

(i) μ et ν vérifient la propriété (8.1),

(ii) il existe $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ telle que $\nu = f.\mu$.

La démonstration détaillée du théorème de Radon-Nikodym et de son extension à des mesures (raisonnables) de masse infinie est proposée au chapitre 10.

Exemples : 1. Soit $D \in \mathscr{A}$. La restriction $\mu_D := \mu(.\cap D)$ est absolument continue par rapport à μ et $\mu_D := \mathbb{1}_D.\mu$.

2. Le théorème de changement de variables dans les intégrales multiples qui sera établi au chapitre 12, fait intervenir la mesure $|J_\varphi|.\lambda_d$ où J_φ désigne le Jacobien du changement de variables φ et λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

La notion de dérivée de Radon-Nikodym admet d'importantes applications en probabilités, notamment pour la construction de l'espérance conditionnelle.

8.5 Exercices

$(X, \mathscr{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

8.0 Reprendre les exercices 1.9, 1.11, 1.12, 1.15 1.16, 1.18 en utilisant les théorèmes de convergence de l'intégrale de Lebesgue.

8.1 Soit $A \in \mathscr{A}$. Appliquer le lemme de Fatou à $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par $f_{2n} := \mathbb{1}_A$ et $f_{2n+1} := \mathbb{1}_{^cA}$. Que peut-on en conclure ?

8.2 Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ qui converge uniformément vers f.

$a)$ Montrer que si $\mu(X) < +\infty$ alors $\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

$b)$ Si $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et si $\lim_n \int_X f_n \, d\mu$ existe, la conclusion du $a)$ subsiste-t-elle ?

8.3 Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ qui converge μ-$p.p.$ vers $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et telle que $\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f d\mu$.

$a)$ Montrer le *théorème de Scheffé* : : Si $f_n \geq 0$ μ-p.p. pour tout $n \geq 0$, alors $\lim_n \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$.

$b)$ La convergence obtenue en $a)$ est-elle vraie en général ?

8.4 Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ qui converge μ-p.p. vers $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.
Montrer que $\lim_n \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0 \Leftrightarrow \lim_n \int_X |f_n| \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu$.

8.5 $a)$ Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \Big(\int_X |f_n| \, d\mu \Big) < +\infty \implies \int_X \Big(\sum_{n\geq 0} f_n \Big) d\mu = \sum_{n\geq 0} \int_X f_n \, d\mu.$$

$b)$ Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) := e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.
Calculer $\int_{\mathbb{R}_+} \Big(\sum_{n\geq 1} f_n(x) \, dx \Big)$ et $\sum_{n\geq 1} \Big(\int_{\mathbb{R}_+} f_n(x) \, dx \Big)$ puis conclure.

8.6 $a)$ Soit $(a_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ une famille de réels. Montrer que

$$\sum_{p\geq 0} \sum_{q\geq 0} |a_{p,q}| < +\infty \implies \sum_{p\geq 0} \sum_{q\geq 0} a_{p,q} = \sum_{q\geq 0} \sum_{p\geq 0} a_{p,q}.$$

$b)$ Soit $a_{p,q} := \dfrac{2p+1}{p+q+2} - \dfrac{p}{p+q+1} - \dfrac{p+1}{p+q+3}$.

Calculer $\sum_{p\geq 0} \Big(\sum_{q\geq 0} a_{p,q} \Big)$ et $\sum_{q\geq 0} \Big(\sum_{p\geq 0} a_{p,q} \Big)$ puis conclure.

8.7 $a)$ Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2+1}$.

$b)$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $(x \mapsto e^{ax} f(x))$ soit intégrable. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{zx} f(x)\, dx = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n\,!} \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\, dx.$$

8.8 $a)$ Montrer que le théorème de convergence dominée s'applique aux sommes partielles de $\displaystyle\sum_{n \geq 0} (-x)^n$ sur $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

$b)$ Soit $z \in \mathbb{C}$, $0 < \Re(z) < 1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x}\, dx = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2\,z}{z^2 - n^2}$.

8.9 Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[)$, positive et monotone. Calculer $\displaystyle\lim_n \int_0^1 f(x^n)\, dx$.

8.10 *Constante d'Euler-Mascheroni*

Soit $\displaystyle I_n(a) := \int_0^{+\infty} e^{-n \sin^2 x} e^{-ax}\, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}_+$.

$a)$ On suppose que $a > 0$. Calculer en justifiant $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n(a)$.

$b)$ Montrer que $\displaystyle I_n(0) := \int_{-\pi}^{+\infty} e^{-n \sin^2 x}\, dx$. En déduire la valeur de $I_n(0)$.

8.11 Montrer les égalités suivantes donnant la *constante d'Euler-Mascheroni* γ

$$\lim_n \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x\, dx = \gamma := \lim_n \left(\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x\, dx.$$

8.12 $a)$ Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$. Calculer $\displaystyle\lim_n \int_0^1 x^n f(x) dx$.

$b)$ On suppose que f possède en 1 une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Calculer $\displaystyle\lim_n \int_0^1 n\, x^n f(x)\, dx$.

$c)$ On suppose que $\big(x \mapsto f(x)/(1-x)\big) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$. Calculer $\displaystyle\lim_n \int_0^1 n\, x^n f(x)\, dx$.

8.13 Soit une suite $(b_n)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{R}$ telle que la suite définie par $\displaystyle f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$ converge $\lambda(dx)$-p.p. vers $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ et $\displaystyle\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0$.

$a)$ Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$.

$b)$ Montrer, à l'aide d'une transformation d'Abel, que

$$\forall\, n \geq 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \pi + 1.$$

$c)$ En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}$ est convergente.

$d)$ Montrer que la suite de fonctions définies par $\displaystyle\left(x \mapsto \sum_{k=2}^{n} \frac{\sin(kx)}{\ln k} \right)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle dans $\mathscr{L}^1([-\pi, \pi])$?

8.14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne, bornée et T-périodique.
$a)$ Montrer que, pour tout borélien borné A de $\mathbb{R}$,

$$\lim_n \int_A f(nx)\,\lambda(dx) = \frac{\lambda(A)}{T} \int_0^T f(t)\,dt.$$

$b)$ Soit E l'ensemble des $x \in [0, T]$ tels que la suite $(f(nx))_{n\geq 0}$ converge vers $g(x)$ réel. Montrer, en justifiant l'écriture, que $\displaystyle\int_E g(x)\,\lambda(dx) = \frac{\lambda(E)}{T} \int_0^T f(t)\,dt.$

$c)$ Montrer que $\lambda(E) = 0$ lorsque $f := \cos$.

8.15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\displaystyle f(t) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, e^{-tx}\,dx.$

$a)$ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$b)$ Calculer f'' et les limites en $+\infty$ de f et f'. En déduire une expression de f.

8.16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\displaystyle f(t) := \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{t}{\sinh x}\right) dx.$

$a)$ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais pas dérivable en 0.

$b)$ Donner une expression simple de f'. En déduire des équivalents de f en $0, +\infty$.

8.17 La transformée de Fourier de $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ est $\displaystyle\widehat{f}(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-itx}\,dx$ pour $t \in \mathbb{R}$. à l'aide du théorème de dérivation sous le signe intégral, calculer $\widehat{f}$ dans les deux cas suivants :

$a)$ $f(x) := e^{-x^2}$. $\quad b)$ $f(x) := \dfrac{1}{x^2+1}$. Le calcul se fait en trois étapes :

$i)$ Soit $(g_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\displaystyle g_n(t) := \int_{-n}^{n} \frac{e^{-itx}}{x^2+1}\,dx$.
Montrer que la suite $(g_n')_{n\geq 1}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, $a > 0$. En déduire que la fonction $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $\displaystyle\forall\, t > 0,\ \ (\widehat{f})'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-iu}{u^2+t^2} e^{-iu} du.$

$ii)$ Montrer que $\widehat{f}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $(\widehat{f})'' = \widehat{f}$.

$iii)$ Calculer $\widehat{f}(0)$ et $\displaystyle\lim_{+\infty} \widehat{f}$. En déduire que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \ \widehat{f}(t) = \pi\, e^{-|t|}$.

8.18 *Fonction* Γ *et formule de Stirling*

Soit la *fonction* Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(t) := \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t-1}\, e^{-x}\, dx$ pour $t > 0$.

$a)$ Montrer que Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$b)$ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$.

$c)$ Montrer que $\forall\, t > 0,\ \ \Gamma(t+1) = \sqrt{t}\, t^t\, e^{-t} \displaystyle\int_{-\sqrt{t}}^{+\infty} \Big(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\Big)^t e^{-\sqrt{t}\, y}\, dy.$

$d)$ Montrer que, pour tout $y \geq 0$, la fonction $\big(t \mapsto t\, \ln(1 + y/\sqrt{t}) - y\sqrt{t}\big)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $y \in \,]-\sqrt{t}, 0\,[$, $\ t\, \ln(1 + y/\sqrt{t}) - y\sqrt{t} \leq -y^2/2$.

$e)$ Déduire des questions précédentes et de l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}$, la *formule de Stirling* $\Gamma(t+1) \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}\, t^t\, e^{-t}$.

8.19 Soient $\varphi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) := \displaystyle\int_0^1 |\varphi(x) - t|\, dx.$

$a)$ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

$b)$ Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lambda(\{\varphi = t\}) = 0$ alors f est dérivable en t.

$c)$ Montrer que, réciproquement, si f est dérivable en t alors $\lambda(\{\varphi = t\}) = 0$.

8.20 Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré de masse finie. Une famille $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{K}$ est dite *équiintégrable en probabilité* si

$$\lim_{c \to +\infty} \Big(\sup_{i \in I} \int_{\{|f_i| \geq c\}} |f_i|\, d\mu \Big) = 0.$$

$a)$ Montrer que toute famille finie de $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ est équiintégrable en probabilité.

$b)$ Montrer que la famille $(f_i)_{i \in I}$ est équiintégrable en probabilité ssi

$$\begin{cases} \sup\limits_{i \in I} \|f_i\|_1 < +\infty \qquad \text{et} \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, A \in \mathscr{A}, \quad \mu(A) < \delta \ \Rightarrow\ \forall\, i \in I,\ \displaystyle\int_A |f_i| d\mu < \varepsilon. \end{cases}$$

$c)$ Montrer que si les familles $(f_i)_{i \in I}$ et $(g_i)_{i \in I}$ sont équiintégrables en probabilité, il en est de même de la famille $(f_i + g_i)_{i \in I}$.

$d)$ Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite équiintégrable en probabilité qui converge μ-$p.p.$ vers une fonction f. Montrer que $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $\lim\limits_n \|f_n - f\|_1 = 0$.

8.21 Une famille $(f_i)_{i \in I}$ de $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ est dite *équiintégrable* si

$$\begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, A_\varepsilon \in \mathscr{A}, \qquad \mu(A_\varepsilon) < +\infty \ \text{ et } \ \forall\, i \in I,\ \displaystyle\int_{^c A_\varepsilon} |f_i| d\mu < \varepsilon, \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0,\ \forall\, A \in \mathscr{A}, \ \ \mu(A) < \delta_\varepsilon \implies \forall\, i \in I,\ \displaystyle\int_A |f_i| d\mu < \varepsilon. \end{cases}$$

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ qui converge μ-$p.p.$ vers $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$. On va montrer le *théorème de Vitali* : $\lim\limits_n \|f_n - f\|_1 = 0 \ \Leftrightarrow\ (f_n)_{n \geq 1}$ est équiintégrable.

$a)$ Montrer que toute famille finie de $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ est équiintégrable.

$b)$ Montrer l'implication $(\Rightarrow)$ du théorème de Vitali.

$c)$ Montrer l'implication $(\Leftarrow)$ du théorème de Vitali.

$d)$ Montrer que la condition d'équiintégrabilité n'est pas suffisante si on omet l'hypothèse de convergence μ-$p.p.$ dans le théorème de Vitali.

8.22 Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré de masse finie. On pose, pour toutes fonctions $f, g : X \to \mathbb{K}$ mesurables, $d(f,g) := \displaystyle\int_X (|f-g| \wedge 1)\, d\mu$.

$a)$ Montrer que d définit une distance sur l'ensemble E des classes d'équivalence de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{K}$, *modulo* la relation "d'égalité μ-$p.p.$".

$b)$ Montrer que la convergence en mesure (*cf.* exercice 6.13) est équivalente à la convergence définie par la distance d.

$c)$ On se propose de montrer que (E, d) est un espace complet. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy de E. On procède en quatre étapes :

$i)$ Construire une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que $d(f_{n_{k+1}}, f_{n_k}) < k^{-2}$, $k \geq 1$.

$ii)$ Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{A_k} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \in \mathscr{L}^1(X)$, $A_k := \{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq 1\}$.

$iii)$ Montrer que $\mu\big(\overline{\lim_k}\, {}^c A_k\big) = 0$.

$iv)$ En déduire que $\displaystyle\sum_{k\geq 1} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| < +\infty$ μ-p.p., et conclure.

8.23 Soient $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ tels que $\displaystyle\lim_n \int_X |\mathbb{1}_{A_n} - f|\, d\mu = 0$, où $\mathbb{1}_{A_n}$ est la fonction caractéristique de A_n.

$a)$ Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\{|f| > 2\} \subset \big\{|\mathbb{1}_{A_n} - f| > 1\big\}$.

$b)$ Montrer que $\displaystyle\int_X \mathbb{1}_{\{|f|>2\}}\, d\mu \leq \int_X \mathbb{1}_{\{|\mathbb{1}_{A_n} - f|>1\}}\, d\mu \leq \int_X |\mathbb{1}_{A_n} - f|\, d\mu$.
En déduire que $|f| \leq 2$ μ-p.p. sur X.

$c)$ Montrer à l'aide de la question $b)$ que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_X \big|\mathbb{1}_{A_n} - f^2\big|\, d\mu = 0$.

$d)$ En déduire $f^2 = f$ μ-p.p. sur X, et en conclure que f coïncide presque partout avec une fonction caractéristique d'une partie A de X telle que $\mu(A) < +\infty$.

$e)$ Montrer que si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mu(A_n \,\Delta\, A) < +\infty$ alors $\mathbb{1}_{A_n} \overset{\mu\text{-}p.p.}{\longrightarrow} \mathbb{1}_A$.

8.24 On considère l'espace métrique quotient $(\mathscr{A}/\mathscr{R}, d)$ de l'exercice 6.18. Soient $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathscr{A}$ et $A \in \mathscr{A}$.

$a)$ Montrer que si $\lim_n d(\dot{A}_n, \dot{A}) = 0$ alors il existe une sous-suite $(A_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ telle que $A\,\mathscr{R}\,\big(\underline{\lim}_n\, A_{\varphi(n)}\big)$ et $A\,\mathscr{R}\,\big(\overline{\lim}_n\, A_{\varphi(n)}\big)$.

$b)$ On suppose que $\mu(X) < +\infty$. Montrer que si $A\,\mathscr{R}\,\big(\underline{\lim}_n\, A_n\big)$ et $A\,\mathscr{R}\,\big(\overline{\lim}_n\, A_n\big)$ alors $\lim_n d(\dot{A}_n, \dot{A}) = 0$.

8.25 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

$a)$ Soit $\varphi \in C_K(\mathbb{R})$ positive. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} (f_d'(x) - f_g'(x))\,\varphi(x)\,dx \le \varliminf_n \left[n \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\big(\varphi(x+\tfrac{1}{n}) + \varphi(x-\tfrac{1}{n}) - 2\varphi(x)\big)\,dx \right].$$

$b)$ En déduire que f est dérivable λ_1-$p.p.$ sur $\mathbb{R}$.

8.26 Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$ et soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

$a)$ Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(y) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x) - y|\,\mu(dx)$ est 1-lipschitzienne et convexe.

$b)$ Montrer que F est dérivable en tout point y de $\mathbb{R}$ tel que $\mu(\{f = y\}) = 0$, et que $F'(y) = \mu\big(\{f \le y\}\big) - \mu\big(\{f \ge y\}\big) = 2\,\mu\big(\{f \le y\}\big) - 1$.

$c)$ En déduire que si la mesure μ est *diffuse*, *i.e.* $\mu(\{f = y\}) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, alors F atteint son minimum dans l'intervalle fermé $\big\{y \in \mathbb{R} : \mu(\{f \le y\}) = \frac{1}{2}\big\}$.

8.27 $a)$ Calculer $\displaystyle\lim_n \int_0^{+\infty} \frac{\sin(n\,x^n)}{n\,x^{n+\frac{1}{2}}}\,dx$, après avoir justifié l'intégrabilité.

$b)$ Calculer la limite $\displaystyle\lim_n \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^n)}{1 + n\,x^2}\,dx.$

$c)$ Calculer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n}\,dx$.

8.28 Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x|^p\,\mu(dx) < +\infty$ où $p \in [1, +\infty[$. On définit la fonction *distorsion* par

$$D_n^{\mu,p}(x) := \int_{\mathbb{R}} \min_{1\le i\le n} |x_i - u|^p\,\mu(du),\ x \in \mathscr{S}^+ := \big\{y \in \mathbb{R}^n : y_1 < y_2 < \cdots < y_n\big\}.$$

$a)$ Montrer que la fonction D_n^p est continue sur $\mathscr{S}^+$.

$b)$ On fait l'hypothèse que la mesure μ est diffuse (*i.e.* $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Montrer que $D_n^{\mu,p}$ est continûment différentiable en tout point de $\mathscr{S}^+$ et que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\displaystyle\frac{\partial D_n^{\mu,p}}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = p \int_{\tilde{x}_{i-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{i+\frac{1}{2}}} \operatorname{sgn}(x_i - u)\,|x_i - u|^{p-1} \mu(du)$ où $\widetilde{x}_{\frac{1}{2}} := -\infty$, $\widetilde{x}_{i-\frac{1}{2}} := \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, $2 \le i \le n$, $\widetilde{x}_{n+\frac{1}{2}} := +\infty$.

8.29 Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $\Re(z) \ge 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(x^2+z)\,t^2}}{x^2 + z}\,dx, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_+.$$

$a)$ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

$b)$ Montrer que $\displaystyle f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + z} = \frac{\pi}{\sqrt{z}}$ où $\sqrt{z} := \sqrt{|z|}\,e^{i\,\arg z/2}$ avec $\arg z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, est la détermination principale de la racine carré de z.

c) Déterminer, à l'aide de l'exercice 1.15, la valeur de $f'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$.
d) En déduire que *l'intégrale de Fresnel* est donnée par la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\,t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \Re(z) \geq 0,$$

qui est semi-convergente si $\Re(z) = 0$.

8.30 a) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ décroissante et tendant vers 0. Montrer que la série $f(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$ converge pour tout $x \in [0, \pi]$, uniformément sur $[\delta, \pi]$ pour tout $\delta \in]0, \pi]$.

b) Montrer, à l'aide de l'exercice 8.13 b), que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} \sin(nx)$ converge uniformément sur $[0, \pi]$.

c) On suppose que $f \in \mathscr{L}^1([0, \pi])$. Déduire de la convergence du a) sur $[\delta, \pi]$ et de la convergence du b) sur $[0, \pi]$, que $\forall\, n \geq 1,\ \ b_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$.

d) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}$ est convergente.

e) En déduire que la fonction $\Big(x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln n}\Big)$ n'appartient pas à $\mathscr{L}^1([0, \pi])$.

f) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathscr{L}^1([-\pi, \pi])$ telle que

$$\forall\, n \geq 2, \quad \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

8.31 a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ décroissant vers 0 et telle que pour tout $n \geq 1$, $a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n \geq 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\,(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) < +\infty$.

b) Montrer que le noyau de Fejér F_n, $n \geq 1$, vérifie

$$F_n(x) := 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{k}{n}\Big) \cos(kx) = \frac{1}{n}\Big(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\Big)^2 \quad \text{pour tout } x \in]0, \pi].$$

En déduire que la suite définie par $f_n(x) := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(a_{k-1} + a_{k+1} - 2a_k)\, F_k(x)$ pour $x \in]0, \pi]$, converge dans $\mathscr{L}^1([0, \pi])$ vers une fonction positive $f \in \mathscr{L}^1([0, \pi])$.

c) En rappelant que pour une fonction 2π-périodique réelle f dans $\mathscr{L}^1([-\pi, \pi])$, ses coefficients de Fourier réels sont définis pour $k \in \mathbb{N}$, par

$$\begin{cases} a_0 := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt, \quad a_k := \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt \quad \text{pour } k \geq 1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad b_k := \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt, \end{cases}$$

calculer pour $n \geq 1$ les coefficients de Fourier de F_n et de f_n, puis montrer que

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \big[a_k + (n-k)a_{n+1} - (n+1-k)a_n\big] \cos(kx) \quad \text{pour tout } x \in]0, \pi].$$

$d)$ En déduire que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(kx)$, $\lambda(dx)$-p.p. sur $[0, \pi]$.

$e)$ Montrer que la fonction $\Big(x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{\ln n}\Big)$ appartient à $\mathscr{L}^1([0, \pi])$.

Remarque : Des exercices 8.30 et 8.31 on déduit le résultat assez surprenant :

$$\Big(x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{\ln n}\Big) \in \mathscr{L}^1([0, \pi]) \quad \text{et} \quad \Big(x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln n}\Big) \notin \mathscr{L}^1([0, \pi]).$$

8.32 Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ deux suites de fonctions mesurables sur un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$, vérifiant $0 \leq f_n \leq g_n$ μ-p.p., $f_n \to f$ et $g_n \to g$ μ-p.p..

$a)$ Montrer le *lemme de Pratt* :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X g_n \, d\mu = \int_X g \, d\mu < +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

$b)$ Étudier le cas où μ est la mesure de Lebesgue sur $A = \mathbb{R}$, $f_n(x) := \dfrac{1}{(x+n)^2 + 1}$ et $g_n(x) := 1$ pour $x \in \mathbb{R}$. Que peut-on en conclure ?

8.33 Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\varphi(x)\,\lambda_d(dx) = 0$.

$a)$ Montrer que pour chaque ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^d$, il existe une suite (φ_n) de $C_c^\infty(\Omega)$ bornée par une constante, qui converge $\lambda_d(dx)$-p.p. vers $f/|f|\,1_{\{f\neq 0\}}$ sur Ω.

$b)$ En déduire que $f = 0$ $\lambda_d(dx)$-p.p. sur $\mathbb{R}^d$.

8.34 *Asymptotique du flot d'un système différentiel*

Soit $a \in C^1_\sharp(\mathbb{R}^2)$ et $\mathbb{Z}^2$-périodique – *i.e.* $a(x_1, x_2)$ est périodique de période 1 par rapport aux variables x_1 et x_2 – et strictement positive sur $\mathbb{R}^2$, et soit ξ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. On considère pour $x \in \mathbb{R}^2$ fixé, la solution $X(\cdot, x)$ du système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t}(t, x) = a\big(X(t, x)\big)\,\xi, \quad t \geq 0 \\ X(0, x) = x. \end{cases}$$

La fonction vectorielle X est appelée le *flot* du système différentiel.

a) Justifier le développement en série de Fourier de la fonction $1/a$:

$$\forall\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{1}{a(x)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \alpha_n\, e^{2i\pi\,(x\cdot n)} \quad \text{où} \quad \begin{cases} (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}^2} \in \ell^1(\mathbb{Z}^2) \\ x\cdot n := n_1\, x_1 + n_2\, x_2. \end{cases}$$

b) Montrer que $\forall\,(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2,\ X(t,x) = F_x^{-1}(t)\,\xi + x,\ F_x(t) := \displaystyle\int_0^t \frac{ds}{a(s\,\xi + x)}$.

c) Montrer que

$$\begin{aligned} \forall\,(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \quad F_x(t) = {} & t \sum_{n\in\mathbb{Z}^2\,:\,\xi\cdot n = 0} \alpha_n\, e^{2i\pi\,(x\cdot n)} \\ & + \sum_{n\in\mathbb{Z}^2\,:\,\xi\cdot n \neq 0} \alpha_n\, e^{2i\pi\,(x\cdot n)}\, e^{i\pi\,t\,(\xi\cdot n)}\, \frac{\sin\big(\pi\,t\,(\xi\cdot n)\big)}{\pi\,(\xi\cdot n)} \end{aligned}$$

d) En déduire que $\displaystyle \forall\, x \in \mathbb{R}^2, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{F_x(t)}{t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2\,:\,\xi\cdot n=0} \alpha_n\, e^{2i\pi\,(x\cdot n)} > 0,$

puis que $\displaystyle \forall\, x \in \mathbb{R}^2, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{X(t,x)}{t} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^2\,:\,\xi\cdot n=0} \alpha_n\, e^{2i\pi\,(x\cdot n)}\Big)^{-1} \xi.$

e) On suppose le vecteur $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ *incommensurable* dans $\mathbb{R}^2$, *i.e.* $\xi_1/\xi_2 \notin \mathbb{Q}$.

Montrer que $\displaystyle \forall\, x \in \mathbb{R}^2, \ \lim_{t\to+\infty} \frac{X(t,x)}{t} = \underline{a}\,\xi \quad \text{où} \quad \underline{a} := \Big(\int_{[0,1]^2} \frac{dy}{a(y)}\Big)^{-1},$ *i.e.* $\underline{a}$ est la moyenne harmonique de a.

8.35 *Problème de Bâle* 5

Soit f_r, $r \in [0,1[$, la fonction définie par $\displaystyle f_r(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} r^n\, \frac{\sin^2(nx)}{n^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\displaystyle \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_r''(t) = \frac{d}{dt}\left[\arctan\left(\frac{r\,\sin(2t)}{1 - r\,\cos(2t)}\right)\right].$

b) En déduire que $\displaystyle \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_r(x) = \int_0^x \arctan\left(\frac{r\,\sin(2t)}{1 - r\,\cos(2t)}\right) dt\,.$

c) Montrer que $\displaystyle \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad f_1(x) := \lim_{r\to1^-} f_r(x) = \int_0^x \arctan\big(\mathrm{cotan}(t)\big)\, dt\,.$

d) En déduire que $\displaystyle \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$

8.36 *Constante d'Apéry* $\zeta(3)$ ([1])

On pose $\displaystyle C_n(t) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2kt)}{k}$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. R. Apéry, "Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$", *Astérisque*, **61** (1979), 11-13.

a) Montrer, à l'aide de la somme classique des $\sin(k\,t)$, que

$$\forall\,\theta\in]0,\tfrac{\pi}{2}[,\quad C_n(\tfrac{\pi}{2}-\theta)-C_n(\theta)=\int_\theta^{\frac{\pi}{2}-\theta}\frac{\cos\big((2n+1)\,t\big)-\cos(t)}{\sin(t)}\,dt.$$

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\,\big(C_n(\tfrac{\pi}{2}-\theta)-C_n(\theta)\big)\,d\theta=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\,.$

c) Montrer, à l'aide de l'inégalité $\sin(t)\geq\frac{2}{\pi}\,t$ pour $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, qu'il existe une constante $c>0$ telle que

$$\forall\,\delta\in]0,\tfrac{\pi}{4}],\qquad\left|\int_0^\delta\theta\left(\int_\theta^{\frac{\pi}{2}-\theta}\frac{\cos\big((2n+1)\,t\big)}{\sin(t)}\,dt\right)d\theta\right|\leq c\,\delta^2\,|\ln(\delta)|.$$

d) Montrer, à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue (*cf.* exercice 1.2 a)) combiné avec le théorème de convergence dominée de Lebesgue, que l'on a pour $\delta\in]0,\frac{\pi}{4}]$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}\theta\left(\int_\theta^{\frac{\pi}{2}-\theta}\frac{\cos\big((2n+1)\,t\big)}{\sin(t)}\,dt\right)d\theta\right|=0.$$

e) En déduire que $\displaystyle\zeta(3):=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\,\ln\big(\tan(\theta)\big)\,d\theta\,.$

8.37 Reprendre les exercices 8.35 et 8.36 en utilisant la détermination principale du logarithme complexe $\log z:=\ln|z|+i\,\arg(z)$ où $\arg(z)\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, qui vérifie

$$\log'(z)=\frac{1}{z}\quad\text{et}\quad\forall\,|z|\leq 1,\ \Re(z)>0,\ \ \log(1-z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}\,.$$

a) Dans l'exercice 8.35, montrer que $\forall\,t\in\mathbb{R},\ \ f_r'(t)=\arg\big(1-r\,e^{2it}\big)$.

b) Dans l'exercice 8.36, montrer que $\forall\,t\in]0,\pi[,\ \ C_n(t)=\Re\big[\log\big(1-e^{2it}\big)\big]$.

8.38 *Problème de Bâle* 6, tiré de l'article ([2])

a) Montrer que $\displaystyle I:=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=2\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x}\,dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$

b) Montrer que la fonction f définie par $\displaystyle f(t):=\int_0^1\frac{\ln(1-2\,x\cos t+x^2)}{x}\,dx$ pour $t\in\mathbb{R}$, est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $\forall\,t\in]0,\pi[,\ \ f'(t)=\pi-t$.

d) Déduire de a) et c) que $\forall\,t\in[0,\pi],\quad f(t)=2\,I-\dfrac{\pi^2}{2}+\pi\,t-\dfrac{t^2}{2}$, puis les valeur de I et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\,.$

2. H. Haruki & S. Haruki, Euler's integrals, *Amer. Math. Monthly*, **90** (7) (1983), 464-466.

Chapitre 9

Espaces L^p

Ce chapitre est consacré à l'étude des espaces vectoriels constitués de fonctions ayant une puissance donnée intégrable. Ces ensembles qui généralisent l'espace $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ des fonctions μ- intégrables ont des propriétés analogues.

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment le corps des réels ou le corps des complexes. Enfin, le triplet $(X, \mathscr{A}, \mu)$ désignera un espace mesuré quelconque.

9.1 Espaces $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$: définition et premières propriétés

***Définition* 9.1.** *Pour tout réel $p > 0$, on définit*

$$\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathscr{A}, \mu) := \left\{ f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{K}, \mathscr{B}(\mathbb{K})) \text{ mesurable} : \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}.$$

Sauf situation ambiguë, on privilégiera la notation plus concise $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Exemple : Si m est la mesure de comptage (*i.e.* $m(A) = \operatorname{card} A$) sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$, alors

$$\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(m) = \ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) := \left\{ (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n \geq 0} |a_n|^p < +\infty \right\}.$$

***Proposition* 9.1.** *Pour tout $p > 0$, $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ est un $\mathbb{K}$- e.v.*

DÉMONSTRATION : On vérifie que $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ est un s.e.v. du $\mathbb{K}$- e.v. $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ des fonctions de X dans $\mathbb{K}$. Tout d'abord, il est immédiat la fonction nulle est dans $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f,\ g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

$$\begin{aligned} |\lambda f + g|^p &\leq (|\lambda|\,|f| + |g|)^p \leq (2\max(|\lambda|\,|f|, |g|))^p \\ &\leq 2^p\,|\lambda|^p\,|f|^p + 2^p\,|g|^p \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \int_X |\lambda f + g|^p d\mu \leq 2^p\,|\lambda|^p \int_X |f|^p d\mu + 2^p \int_X |g|^p d\mu < +\infty. \quad \diamondsuit$$

Proposition 9.2. *(a) Si $\mu(X) < +\infty$, alors*

$$0 < p \leq q \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu) \subset \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu).$$

(b) Si m est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, alors

$$0 < p \leq q \quad \Rightarrow \quad \ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \subset \ell^q_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}).$$

DÉMONSTRATION : (a) Si $0 < p \leq q$ alors $|f|^p \leq |f|^q \, \mathbb{1}_{\{|f|\geq 1\}} + \mathbb{1}_{\{|f|\leq 1\}}$. Donc, dès que $f \in \mathscr{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \int_X |f|^q d\mu + \mu(\{|f| \leq 1\}) < +\infty.$$

(b) Si $0 < p \leq q$ et $\sum_{n\geq 0} |a_n|^p < +\infty$ alors $\lim_n a_n = 0$; donc à partir d'un certain rang N, $|a_n| \leq 1$. D'où $|a_n|^q \leq |a_n|^p$ pour $n \geq N$, et $\sum_{n\geq 0} |a_n|^q < +\infty$. $\quad\Diamond$

Remarques : • L'assertion (b) s'étend immédiatement au cas de la mesure de comptage m sur un ensemble $(X, \mathscr{P}(X))$ quelconque et aux espaces de familles de puissance p-ème sommable indexées par X, en l'espèce

$$\ell^p_{\mathbb{K}}(m) := \Big\{(a_x)_{x\in X} \in \mathbb{K}^X : \sum_{x\in X} |a_x|^p < +\infty\Big\}.$$

• Sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue λ, on observe que

$$\frac{\mathbb{1}_{]0,1]}}{\sqrt{\cdot}} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda) \setminus \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\lambda) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{(\cdot)^2 + 1}} \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\lambda) \setminus \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda),$$

donc il n'y a aucune inclusion entre $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ et $\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\lambda)$.

9.2 Inégalités de Hölder et de Minkowski

Pour toute fonction $f : (X, \mathscr{A}) \to \mathbb{K}$ et pour tout réel $p > 0$, on définit la quantité

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq +\infty \quad \text{convention : } (+\infty)^{\frac{1}{p}} = +\infty$$

appelée "*norme $\mathscr{L}^p$*" de f. Cette terminologie – inappropriée dans bien des situations – sera justifiée plus loin (*cf.* théorème 9.2) lorsque $p \geq 1$.

Remarque : Il est souvent utile de noter que $\|\,.\,\|_p$ possède la propriété de "croissance" suivante : si $|f| \leq |g|$ alors $\|f\|_p \leq \|g\|_p$.

***Théorème* 9.1** (Inégalité de Hölder)**.** *Soient $f, g : X \to \mathbb{K}$ mesurables et $p, q > 1$ vérifiant $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.*

(a) Si f et g sont réelles et positives alors

$$0 \le \int_X fg\,d\mu \le \|f\|_p\,\|g\|_q \le +\infty. \tag{9.1}$$

En outre, lorsque $\|f\|_p + \|g\|_q < +\infty$, il y a égalité dans (9.1) si et seulement si il existe $(\alpha,\beta)\in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\alpha\, f^p = \beta\, g^q$ μ-p.p..

(b) Si $f\in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $g\in \mathscr{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$ alors $fg\in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ et

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p\,\|g\|_q. \tag{9.2}$$

En outre, il y a égalité si et seulement si il existe $(\alpha,\beta)\in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\alpha\,|f|^p = \beta\,|g|^q$ μ-p.p..

DÉMONSTRATION : (a) étape 1 *Inégalité de Young* : On pose pour tout $\alpha\in\,]0,1[$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\varphi_\alpha(x) := x^\alpha - \alpha\, x$. La fonction φ_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi_\alpha'(x) = \alpha\,(x^{\alpha-1}-1)$. Par suite, $\varphi_\alpha'(x) < 0$ sur $]1,+\infty[$ et $\varphi_\alpha'(x) > 0$ sur $]0,1[$. Finalement, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\varphi_\alpha(x) \le \varphi_\alpha(1)$ avec égalité si et seulement si $x = 1$. Soit encore, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $x^\alpha \le \alpha\, x + 1 - \alpha$ avec égalité si et seulement si $x = 1$.

Par conséquent, en posant $x = \dfrac{u}{v}$ lorsque $u\ge 0$ et $v>0$, il vient

$$u^\alpha\, v^{1-\alpha} \le \alpha\, u + (1-\alpha)\, v \quad \text{avec égalité si et seulement si } u = v. \tag{9.3}$$

L'examen du cas $u\in\mathbb{R}_+$ et $v=0$ montre que (9.3) est valide pour tous $u,\ v\in\mathbb{R}_+$. Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Young.

étape 2 *Inégalité de Hölder* :

– Soit $\|f\|_p$ ou $\|g\|_q = 0$ et f ou $g = 0$ μ-p.p.. Dans ce cas $fg=0$ μ-p.p.. et il y a donc trivialement égalité (f et g sont supposées à valeurs dans $\mathbb{K}$).

– Soit ces deux quantités sont non nulles et, si $\|f\|_p$ ou $\|g\|_q = +\infty$, l'inégalité est évidente.

– Soit, enfin, $\|f\|_p$ et $\|g\|_q$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$. On pose alors

$$\alpha := \frac{1}{p}\ (\text{d'où } 1-\alpha = \frac{1}{q}),\quad u := \frac{f^p(x)}{\|f\|_p^p} \quad \text{et} \quad v := \frac{g^q(x)}{\|g\|_q^q}.$$

Il vient alors, d'après l'inégalité (9.3),

$$\forall\, x\in X,\quad \frac{f(x)\,g(x)}{\|f\|_p\,\|g\|_q} \le \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{\|g\|_q^q},$$

avec égalité en les points $x \in X$ vérifiant $\dfrac{f^p(x)}{\|f\|_p^p} = \dfrac{g^q(x)}{\|g\|_q^q}$. L'intégration par rapport à μ conduit à

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_X fg\, d\mu \quad &\leq \|f\|_p\, \|g\|_q \underbrace{\left(\frac{1}{p}\int_X \frac{f^p(x)}{\|f\|_p^p}\, \mu(dx) + \frac{1}{q}\int_X \frac{g^q(x)}{\|g\|_q^q}\, \mu(dx)\right)}_{=1} \\ &= \|f\|_p\, \|g\|_q < +\infty. \end{aligned}$$

L'égalité a lieu si et seulement si $\dfrac{f^p(x)}{\|f\|_p^p} = \dfrac{g^q(x)}{\|g\|_q^q}\ \mu(dx)$-*p.p.*. En effet, si les fonctions φ et ψ vérifient $0 \leq \varphi \leq \psi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, alors $\displaystyle\int_X \varphi\, d\mu = \int_X \psi\, d\mu$ si et seulement si $\varphi = \psi$ μ-*p.p.*.

Finalement, il n'y a égalité dans l'inégalité (9.1) que dans les deux cas suivants :

– f ou $g = 0$ μ-*p.p.*,

– il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha\, f^p = \beta\, g^q$ μ-*p.p.*.

D'où la caractérisation de l'énoncé.

(b) On applique (a) à $|f|$ et $|g|$. $\diamondsuit$

Définition 9.2. *Deux réels p, $q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ sont appelés* exposants conjugués.

Remarques : • Extension immédiate : Dans le théorème 9.1 (a), on peut considérer que les fonctions f et g sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, sous réserve d'appliquer la convention $0 \times (+\infty) = 0$ aux produits $f(x)g(x)$.

• *Retour sur le cas d'égalité* : En revanche, si $\|f\|_p$ ou $\|g\|_q = +\infty$, il peut y avoir égalité dans l'inégalité (9.1) sans que f^p et g^q soient proportionnelles. Ainsi si $X = \mathbb{R}$, $p = q = 2$ et $\mu = \lambda$, $f(x) := x^{-\frac{3}{4}}\, \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$ et $g(x) := x^{-\frac{1}{4}}\, \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$, on vérifie que $0 < \|f\|_2 < +\infty$, $\|g\|_2 = +\infty$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\, \lambda(dx) = +\infty$. Il y a donc égalité dans (9.1) bien que f^2 et g^2 soient clairement non proportionnelles.

Corollaire 9.1. *(a) Si $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $g \in \mathscr{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$ alors* $\displaystyle\left|\int_X fg\, d\mu\right| \leq \|f\|_p\, \|g\|_q$.

(b) Si $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall\, f, g \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu), \quad f\,\overline{g} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu) \ \ \textit{et} \ \ \left|\int_X f\, \overline{g}\, d\mu\right| \leq \|f\|_2\, \|g\|_2 \tag{9.4}$$

avec égalité si et seulement si $f = 0$ μ-p.p. ou $g = c\, f$ μ-p.p., $c \in \mathbb{C}$.

DÉMONSTRATION : (a) est une application évidente de l'inégalité triangulaire pour les intégrales

$$\left|\int_X fg\, d\mu\right| \leq \int_X |fg|\, d\mu \leq \|f\|_p\, \|g\|_q.$$

(b) On applique (a) à f et $\overline{g}$. Le cas d'égalité s'obtient en combinant les différents cas d'égalité. Supposons que $f(x)$ ne soit pas $\mu(dx)$-$p.p.$ nulle. Alors le cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder (9.2) entraîne : $|g|^2 = \rho^2\,|f|^2$ μ-$p.p.$, où $\rho = \sqrt{\alpha/\beta}$. Par suite, $|g| = \rho\,|f|$ μ-$p.p.$. Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire (*cf.* proposition 7.4 (b)) entraîne à son tour : $f\,\overline{g} = e^{i\theta}\,|fg|$ μ-$p.p.$. D'où

$$f\,\overline{g} = \rho\, e^{i\theta}\,|f|^2 = \rho\, e^{i\theta}\, f\,\overline{f},\ \ \mu\text{-}p.p..$$

Sur $\{f \neq 0\}$, on a donc $g = c\,f$ μ-$p.p.$ avec $c = \rho\, e^{-i\theta}$ et, sur $\{f = 0\}$, $g = 0$, l'égalité $g = c\,f$ restant donc valable. Réciproquement, si $g = c\,f$, l'égalité dans (9.4) est évidente. $\Diamond$

Remarque : Un traitement direct, fondé sur le fait que

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{C},\quad \int_X |\lambda\, f + g|^2\, d\mu \geq 0,$$

permet évidemment de retrouver plus rapidement le résultat du corollaire 9.1 (b), y compris le cas d'égalité. L'adaptation au cas réel est immédiate.

***Corollaire* 9.2.** *Si μ est une mesure de probabilité* i.e. $\mu(X) = 1$*, alors l'application $r \mapsto \|f\|_r$ est croissante. En outre, s'il existe $r,\ s \in [1, +\infty[$, $r < s$, tels que $\|f\|_r = \|f\|_s < +\infty$, alors $|f|$ est μ-p.p. constante.*

DÉMONSTRATION : Soient $r,\ s \in [1, +\infty[$, $r < s$. On applique l'inégalité de Hölder aux fonctions f et $\mathbb{1}$ avec le couple d'exposants conjugués $p := \frac{s}{r}$ et $q := \frac{s}{s-r}$. il vient

$$\|f\|_r^r = \int_X |f|^r \mathbb{1}\, d\mu \leq \left(\int_X |f|^{r\frac{s}{r}} d\mu\right)^{\frac{r}{s}} \left(\int_X \mathbb{1}^{\frac{s}{s-r}} d\mu\right)^{\frac{s-r}{s}} = \|f\|_s^r \mu(X)^{\frac{s-r}{s}} = \|f\|_s^r.$$

Le cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder entraîne immédiatement que $|f|$ est μ-$p.p.$ proportionnelle à $\mathbb{1}$ en cas d'égalité de $\|f\|_r$ et $\|f\|_s$ dans $\mathbb{R}_+$. $\Diamond$

L'une des applications essentielles de l'inégalité de Hölder est sans nul doute l'inégalité de Minkowski.

***Théorème* 9.2** (Inégalité de Minkowski)**.** (a) *Si $p \in [1, +\infty[$, alors $\left(\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_p\right)$ est un $\mathbb{K}$- e.v. semi-normé. En particulier*

$$\forall f,\ g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu),\quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{9.5}$$

(b) *Cas d'égalité : De plus,*

– si $p > 1$, il y a égalité si et seulement si $f = 0$ μ-p.p. ou $g = \alpha\, f$ μ-p.p., pour un $\alpha \geq 0$,

– si $p = 1$, il y a égalité si et seulement si $f\,\overline{g} \geq 0$ μ-p.p.

DÉMONSTRATION : (a) Le seul point non trivial est l'inégalité triangulaire. Soit $p\in [1,+\infty[$. En intégrant par rapport à μ l'inégalité

$$|f+g|^p \leq |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1} \text{ (convention } x^0=1,\ x\geq 0), \quad (9.6)$$

il vient : $$\|f+g\|_p^p \leq \int_X |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu + \int_X |g|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu.$$

Si $p=1$ l'inégalité (9.5) est établie. Sinon, l'inégalité de Hölder entraîne :

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \|g\|_p \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

où les exposants p et q sont conjugués ; en particulier, $(p-1)\,q=p$ et, partant,

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\,\|f+g\|_p^{p-1}.$$

Comme $f+g\in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, $\|f+g\|_p<+\infty$, on peut donc simplifier, l'inégalité étant triviale si $\|f+g\|_p=0$.

(b) *Cas d'égalité :*

– Si $p>1$, il vient par double application du cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder, $\beta\,|f+g|^p=\gamma\,|f|^p$ μ-$p.p.$ et $\delta\,|f+g|^p=\varepsilon\,|g|^p$ μ-$p.p.$ où (β,γ) et (δ,ε) sont dans $\mathbb{R}_+^2\setminus\{(0,0)\}$.

Si f ou $g=0$ μ-$p.p.$, il y a évidemment égalité.

Supposons maintenant f et g non μ-$p.p.$ nulles. Il ne peut y avoir égalité lorsque $f+g=0$ μ-$p.p.$ car $\|f\|_p$ et $\|g\|_p$ sont alors strictement positifs. Donc $f+g$ n'est pas μ-$p.p.$ nulle et, partant, les quatre coefficients $\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ sont strictement positifs. En particulier, $|g|^p=\frac{\gamma\delta}{\beta\varepsilon}\,|f|^p$ μ-$p.p.$, soit encore $|g|=\alpha\,|f|$ μ-$p.p.$, $\alpha>0$. On en déduit en outre que $f=g=0$ μ-$p.p.$ sur $\{f+g=0\}$.

D'autre part, on doit avoir égalité μ-$p.p.$ dans l'inégalité (9.6), c'est-à-dire $|f+g|=|f|+|g|$ μ-$p.p.$ sur $\{f+g\neq 0\}$. En élevant au carré, il vient alors

$$|f|^2+|g|^2+2\,\Re(f\overline{g}) = |f|^2+|g|^2+2\,|f|\,|g| \quad \mu\text{-}p.p. \text{ sur } \{f+g\neq 0\}.$$

étant donné que $|f|\,|g|=|f\,\overline{g}|$ et que $\Re(z)=|z|$ si et seulement si $z\in\mathbb{R}_+$, on a donc nécessairement $f\,\overline{g}=|fg|\geq 0$ μ-$p.p.$ sur $\{f+g\neq 0\}$. Par conséquent, $f\,|g|^2=|f|\,|g|\,g$ μ-$p.p.$ sur $\{f+g\neq 0\}$. On déduit aussi que $f\neq 0$ et $g\neq 0$ μ-$p.p.$ sur $\{f+g\neq 0\}$; on peut donc écrire que $g=\frac{|g|}{|f|}\,f=\alpha\,f$ μ-$p.p.$ sur $\{f+g\neq 0\}$. Comme $f=g=0$ μ-$p.p.$ sur $\{f+g=0\}$, on a évidemment $g=\alpha\,f$ μ-$p.p.$ sur $\{f+g=0\}$. Ceci établit que le cas d'égalité avec $p>1$ a lieu si et seulement si

$$f=0 \text{ ou } g=0\ \mu\text{-}p.p. \text{ ou } g=\alpha\,f\ \mu\text{-}p.p. \text{ pour un } \alpha>0,$$

i.e. si et seulement si $f=0$ ou $g=\alpha\,f$ μ-$p.p.$ pour un $\alpha\geq 0$.

– Si $p=1$, le cas d'égalité se réduit à $|f+g|=|f|+|g|$ μ-$p.p.$ ce qui, conformément aux calculs précédents, est équivalent à $f\,\overline{g}\geq 0$. $\diamondsuit$

***Application* 9.1.** *Inégalités de Hölder et Minkowski inverses* :

Soit $p\in]0,1[$. Pour toutes fonctions mesurables $f,\ g : (X,\mathscr{A},\mu) \to \mathbb{R}_+^*$, l'inégalité de Hölder inverse est vérifiée *i.e.*

$$\int_X fg\,d\mu \geq \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{où} \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

De même, l'inégalité de Minkowski s'inverse en

$$\left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

DÉMONSTRATION :

– *Inégalité de Hölder inverse* : Soient les réels

$$q := \frac{p}{p-1} < 0, \quad p' := \frac{1}{p} \in]1,+\infty[, \quad q' := -\frac{q}{p} = 1-q \in]1,+\infty[.$$

En écrivant $f^p = g^{-p}\,(fg)^p$ et en notant que (p',q') est un couple d'exposants conjugués, il vient d'après l'inégalité de Hölder (9.2) appliquée à g^{-p} et $(fg)^p$ pour le couple (p',q') :

$$\int_X f^p\,d\mu = \int_X g^{-p}\,(fg)^p\,d\mu \leq \left(\int_X g^{-pq'}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_X (fg)^{pp'}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$i.e.\ \int_X f^p\,d\mu \leq \left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{-\frac{p}{q}} \left(\int_X fg\,d\mu\right)^{p}.$$

La racine p-ème de l'inégalité ci-dessus donne alors

$$\left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{-\frac{1}{q}} \int_X fg\,d\mu.$$

à ce stade, on distingue les trois cas habituels :

– $\left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{-\frac{1}{q}} = 0$, auquel cas $g=0$ μ-$p.p.$ car $-\frac{1}{q}>0$. Ceci est impossible par hypothèse.

– $\left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{-\frac{1}{q}} = +\infty$, auquel cas l'inégalité annoncée est immédiate (le terme de droite est alors nul).

– $\left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{-\frac{1}{q}} \in \mathbb{R}_+^*$ et l'inégalité de Hölder inverse apparaît en multipliant par $\left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$.

– *Inégalité de Minkowski inverse* : On décompose $(f+g)^p$ comme dans la démonstration de l'inégalité de Minkowski naturelle 9.5 en

$$(f+g)^p = f\,(f+g)^{p-1} + g\,(f+g)^{p-1}.$$

L'inégalité de Hölder inverse associée au couple d'exposants (p,q) conduit à

$$\int_X (f+g)^p\,d\mu \geq \left[\left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

L'inégalité de Minkowski inverse s'en déduit en divisant par le dernier terme à droite de l'inégalité (cette quantité est non nulle et si elle est infinie, le résultat est trivial). $\diamondsuit$

9.3 Les espaces de Banach $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$

9.3.1 Préliminaires sur les espaces semi-normés

***Définition* 9.3.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle semi-norme toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant*

(i) $N(0_E) = 0$ *où* 0_E *désigne le vecteur nul de* E*,*

(ii) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$*,*

(iii) $\forall\, x,\, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$*.*

Toute norme est donc une semi-norme et une semi-norme est une norme si, outre l'axiome (i), elle vérifie : $N(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0_E$.

D'autre part, il est utile de noter que l'axiome (iii) entraîne l'inégalité triangulaire "complète" *i.e.* $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$.

***Définition* 9.4.** *Soit (E,N) un $\mathbb{K}$-e.v. semi-normé. Alors l'ensemble*

$$V := \{x \in E : N(x) = 0\}$$

est un $\mathbb{K}$- s.e.v. de E appelé noyau *de la semi-norme N (on le note parfois* $\operatorname{Ker} N$*).*

Le fait que V soit un $\mathbb{K}$-e.v. est immédiat puisque $0_E \in V$ et si $x,\, y \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $N(\lambda\, x + y) \leq |\lambda|\, N(x) + N(y) = 0$.

à ce stade on souhaite associer canoniquement à cet espace semi-normé un $\mathbb{K}$-e.v. normé qui soit aussi "proche" que possible de (E,N). Pour ce faire on introduit la relation binaire sur E définie par

$$\forall\, x,\, y \in E, \quad x \sim y \ \Leftrightarrow\ x - y \in V.$$

On vérifie que $\sim$ est une relation d'équivalence, compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire (*i.e.* si $x \sim x'$ et $y \sim y'$ alors $\lambda\, x + y \sim \lambda\, x' + y'$). En conséquence, l'ensemble quotient $\overline{E} = \{\overline{x} : x \in E\}$ des classes d'équivalence de la relation $\sim$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{K}$-e.v., dite structure d'*e.v. quotient*, définie à partir des opérations :

$$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x + y} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \overline{x} := \overline{\lambda \cdot x}.$$

L'ensemble $\overline{E}$, généralement noté E/V, est appelé *l' espace quotient de* E *par* V. On le munit alors de

$$\overline{N}(\overline{x}) := N(x).$$

Cette définition est cohérente car la valeur de $N(x)$ est constante lorsque x varie au sein d'une classe d'équivalence. En effet, si $x \sim y$, $x - y \in V$ et partant, $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) = 0$.

On vérifie alors immédiatement que $(E/V, \overline{N})$ est un $\mathbb{K}$- e.v. normé. On a ainsi construit le $\mathbb{K}$- e.v. normé canoniquement associé au $\mathbb{K}$- e.v. semi-normé (E, N).

En règle générale, on abandonne la notation $\overline{N}$ pour la norme sur l'e.v. quotient au profit de la lettre N. Ceci constitue un abus de notation manifeste mais inévitable en pratique.

9.3.2 Construction et propriétés

Lorsque $p \geq 1$, les espaces normés $L^p(\mu)$ se construisent à partir des espaces semi-normés $(\mathscr{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ par simple application de la procédure canonique décrite ci-avant. D'où la définition suivante.

Définition 9.5. *On pose* $L^p_{\mathbb{K}}(\mu) := \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) : \{\|\cdot\|_p = 0\}$. $(L^p_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_p)$ *forme est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé (avec l'abus de notation usuel concernant* $\|\cdot\|_p$*).*

Interprétation : $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $|f|^p = 0$ μ-*p.p.*, donc $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $f = 0$ μ-*p.p.*. En conséquence, la classe d'équivalence $\overline{f}$ de $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ est de la forme

$$\overline{f} = \left\{g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) : g = f \ \mu\text{-}p.p.\right\}.$$

ATTENTION! Dans la pratique, on désignera indifféremment par f, la fonction $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ ou sa classe $\overline{f} \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Ceci constitue un nouvel abus de notation, aussi systématique qu'inévitable.

Remarque : Si le seul ensemble mesurable de mesure nulle sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est Ø, il est évident que la seule fonction μ-*p.p.* nulle est la fonction identiquement nulle. En conséquence, le noyau de $\|\,.\|_p$ sera réduit à $\{0\}$ et les espaces $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ coïncideront puisque $\overline{f} = \{f\}$. Cette situation n'est pas qu'anecdotique puisqu'elle se rencontre dès que l'on munit un espace X de la mesure de comptage. Ainsi

$$L^p(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), m) = \mathscr{L}^p(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), m) = \ell^p(\mathbb{N}) = \left\{(a_n)_{n\geq 0} : \textstyle\sum_{n\geq 0} |a_n|^p < +\infty\right\}.$$

Théorème 9.3 (Riesz-Fisher). (a) *Pour tout* $p\in[1,+\infty[$, *l'espace vectoriel normé* $(L^p_{\mathbb{K}}(\mu),\|\cdot\|_p)$ *est complet (*i.e. *toute suite de Cauchy pour la norme* $\|\cdot\|_p$ *converge pour cette norme).*

(b) *Soient* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'éléments de* $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ *et* $f\in\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. *Si* $f_n\stackrel{\|\cdot\|_p}{\longrightarrow} f$, *il existe une suite extraite* $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *et une fonction* $g\in\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ *telles que* $|f_{\varphi(n)}|\leq g$ μ*-p.p. et* $f_{\varphi(n)}\stackrel{\mu\text{-}p.p.}{\longrightarrow} f$.

Ce théorème repose sur deux lemmes.

Lemme 9.1 (Inégalité de Minkowski généralisée). *Soit* $f_n:(X,\mathscr{A})\to\overline{\mathbb{R}}_+$, $n\geq 1$, *une suite de fonctions positives. Alors, pour tout* $p\in[1,+\infty[$,

$$\Big\|\sum_{n\geq 1} f_n\Big\|_p\leq\sum_{n\geq 1}\|f_n\|_p\leq+\infty.$$

DÉMONSTRATION : Pour toutes fonction $\mathscr{A}$-mesurables positives f, g, $\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p\leq+\infty$ (si $\|f\|_p+\|g\|_p<+\infty$ il s'agit de l'inégalité de Minkowski classique, sinon c'est évident). On en déduit par récurrence que, pour tout $n\geq 1$,

$$\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_p\leq\sum_{k=1}^n\|f_k\|_p\leq\sum_{k\geq 1}\|f_k\|_p\leq+\infty.$$

On conclut par le théorème de Beppo Levi après avoir remarqué que

$$\left(\sum_{k=1}^n f_k\right)^p\uparrow\left(\sum_{k\geq 1} f_k\right)^p\quad\text{quand } n\to+\infty.\quad\Diamond$$

Lemme 9.2. *Soit* $(E,\|\cdot\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-e.v. normé.* $(E,\|\cdot\|)$ *est un espace de Banach (*i.e. *un espace complet) si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.*

DÉMONSTRATION : ($\Rightarrow$) Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de E et $S_n:=u_0+\cdots+u_n$. On remarque simplement que

$$\|S_{n+p}-S_n\|\leq\sum_{k=n+1}^{n+p}\|u_k\|.$$

Donc, si la série de terme général $\|u_n\|$ converge, elle est de Cauchy et, par suite, $(S_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, donc convergente puisque $(E,\|\cdot\|)$ est complet.

($\Leftarrow$) (le sens utile ici !) On considère une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergera dès qu'une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergera. Or, grâce à la propriété de Cauchy, on peut construire de proche en proche $\varphi(0):=0$ et

$$\varphi(n):=\min\{k>\varphi(n-1):\forall\,\ell\geq k,\ \|x_\ell-x_k\|<2^{-n}\},\ n\geq 1.$$

Pour tout $n \geq 1$, $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| < 2^{-n}$. On pose alors $u_n := x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n-1)}$ si $n \geq 1$ et $u_0 := x_0$. Il est clair que $x_{\varphi(n)} = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et que $\|u_k\| < 2^{1-k}$, pour tout $k \geq 2$. Donc la série $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|$ est convergente. Partant, la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E d'où le résultat. $\Diamond$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE RIESZ-FISHER : (a) Soit une série de terme général u_n, $n \geq 0$, absolument convergente dans $(L^p_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_p)$, *i.e.* vérifiant que $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|_p < +\infty$. D'après le lemme 9.1, $\|\sum_{n\geq 0} |u_n|\|_p < +\infty$ donc, en particulier, pour μ presque tout x, la série $\sum_{n\geq 0} |u_n(x)|$ est convergente. Le corps $\mathbb{K}$ étant complet, la série de terme général $u_n(x)$ converge alors dans $\mathbb{K}$. On pose donc

$$U(x) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n(x) & \text{sur } \left\{x \in X : \sum_{n\geq 1} |u_n(x)| < +\infty\right\} \\ 0 & \text{sur } {}^c\left\{x \in X : \sum_{n\geq 1} |u_n(x)| < +\infty\right\}. \end{cases}$$

Or, $|U - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k| \leq \sum_{k\geq n+1} |u_k|$ μ-*p.p.*. Il vient donc, toujours *via* le lemme 9.1,

$$\|U - \sum_{k=1}^{n} u_k\|_p = \|\sum_{k\geq n+1} |u_k|\|_p \leq \sum_{k\geq n+1} \|u_k\|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \overset{\mu\text{-}p.p.\text{ et }\|\cdot\|_p}{\longrightarrow} U.$

On conclut via le lemme 9.2.

(b) En reprenant la démonstration du sens réciproque dans le lemme 9.2 ci-avant, on constate que, si $f_n \overset{\|\cdot\|_p}{\longrightarrow} f$, alors il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ telle que $\sum_{n\geq 0} \|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_p < +\infty$. La démonstration du point (a) montre alors à son tour que $f_{\varphi(n)}$ converge μ-*p.p.* et dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. L'unicité de la limite dans $(L^p_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_p)$ entraîne que celle-ci ne peut être que f. D'où le résultat, puisque

$$|f_{\varphi(n)}| \leq g := |f_{\varphi(0)}| + \sum_{n\geq 0} |f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}| \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu). \quad \Diamond$$

***Corollaire* 9.3.** *$L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ muni du produit scalaire*

$$(f, g)_2 := \int_X f\, \overline{g}\, d\mu$$

est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ ($\overline{g}$ désigne ici la fonction conjuguée de g lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

DÉMONSTRATION : Il est immédiat que $(\cdot\,,\,\cdot)_2$ est bilinéaire (resp. sesquilinéaire), symétrique (resp. hermitienne), définie positive si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On a évidemment $(f,f)_2 = \|f\|_2^2$. La complétude de $(L^2_{\mathbb{K}}(\mu), (\cdot,\cdot)_2)$ résulte du théorème de Riesz-Fisher. $\Diamond$

L'étude plus approfondie de l'espace $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ fera l'objet de la section 9.6.

Pour conclure ce paragraphe, il est utile d'examiner la nature des liens existants entre convergence L^p et μ-*p.p.*.

Liens entre convergence L^p et convergence μ-*p.p.* :

Exemple de convergence L^p non μ-p.p. : Soient $X := [0,1]$, $\mathscr{A} := \mathscr{B}([0,1])$ et $\mu := \lambda$. On pose pour $n \geq 0$ et $k \in \{0,\ldots,2^n-1\}$, $f_{2^n+k} := \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}[}$. On vérifie que ceci définit bien une suite $(f_n)_{n\geq 1}$. Il est clair que $\|f_{2^n+k}\|_p = 2^{-\frac{n}{p}} \to 0$ quand $n \to +\infty$. à l'inverse si, x étant fixé dans $[0,1[$, on considère la suite de ses approximations dyadiques par défaut : $\frac{k_n^x}{2^n} \leq x < \frac{k_n^x+1}{2^n}$, $k_n^x \in \{0,\ldots,2^n-1\}$, il est clair que $f_{2^n+k_n^x}(x) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Finalement, il vient pour tout $p \in [1,+\infty[$,

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} 0 \text{ quand } n \to +\infty \quad \text{et} \quad \forall\, x \in [0,1[,\ \forall\, n \geq 0,\quad f_{2^n+k_n^x}(x) = 1.$$

Convergence μ-p.p. L^p-dominée : La convergence μ-*p.p.* de fonctions de $\mathscr{L}^p(\mu)$ entraîne-t-elle la convergence dans $L^p(\mu)$? La réponse est négative en général : le résultat est déjà faux pour $p = 1$ (*cf.* seconde remarque après le théorème de convergence dominée dans le chapitre 8). La fabrication d'une variante L^p est immédiate. Il reste que, sous une hypothèse de domination L^p, ce passage devient valide. C'est l'objet de la proposition ci-dessous, simple variante du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

***Proposition* 9.3** (Convergence L^p-dominée)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ convergeant μ-p.p. vers une fonction f.*

(a) Si $\sup\limits_n \|f_n\|_p < +\infty$, la fonction f appartient à $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

(b) S'il existe une fonction $g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ telle que $|f_n| \leq g$ μ-p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $f_n \xrightarrow{L^p(\mu)} f$.

DÉMONSTRATION : (a) est une conséquence immédiate du lemme de Fatou appliqué à la suite $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n := |f - f_n|$. Par hypothèse, la suite g_n converge μ-*p.p.* vers la fonction nulle. D'autre part, en dehors de l'ensemble de mesure nulle $\cup_{n\in\mathbb{N}}\{|f_n| > g\}$, il est clair que $|f| \leq g$.

D'où, μ-*p.p.*, $g_n^p = |f - f_n|^p \leq (2g)^p = 2^p g^p \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Le théorème de convergence dominée entraîne alors que $\displaystyle\int_X |f - f_n|^p d\mu \to 0$ quand $n \to +\infty$. $\Diamond$

***Application* 9.2.** *Continuité de $f \mapsto g \circ f$* :

Soient r, $s \in [1,+\infty[$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si la fonction g vérifie la condition

$$\exists\, c \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ |g(y)| \leq c\,|y|^{r/s}, \tag{9.7}$$

alors l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}^r_{\mathbb{R}}(X,\mathscr{A},\mu) & \longrightarrow & \mathscr{L}^s_{\mathbb{R}}(X,\mathscr{A},\mu) \\ f & \longmapsto & g\circ f \end{array}$ est continue.

DÉMONSTRATION : Soit $f \in \mathscr{L}^r_{\mathbb{R}}(X,\mathscr{A},\mu)$; la fonction $g\circ f$ est mesurable comme composée d'une fonction continue et d'une fonction mesurable. La condition (9.7) entraîne

$$|\Phi(f)(x)|^s = |g(f(x))|^s \leq c^s\,|f(x)|^r \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$$

donc $\Phi(f) \in \mathscr{L}^s_{\mathbb{R}}(\mu)$ et Φ est bien définie de $\mathscr{L}^r_{\mathbb{R}}(\mu)$ dans $\mathscr{L}^s_{\mathbb{R}}(\mu)$. De plus, Φ vérifie

$$\forall\, f \in \mathscr{L}^r_{\mathbb{R}}(\mu),\ \|\Phi(f)\|_s \leq c\,\|f\|_r^{r/s}.$$

Pour montrer que Φ est continue, on s'appuie sur la caractérisation séquentielle de la continuité. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{L}^r_{\mathbb{R}}(\mu)$ convergeant vers f pour la norme $\|\cdot\|_r$. La suite des normes $\|\Phi(f_n)-\Phi(f)\|_s$ est bornée dans $\mathbb{R}_+$ d'après la majoration précédente, elle possède donc au moins une valeur d'adhérence, soit ℓ. Or, d'après le théorème 9.3 (b) (Riesz-Fisher), il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant μ-*p.p.* vers f en restant dominée par une fonction $h \in \mathscr{L}^r(\mu)$, *i.e.* $|f_{\varphi(n)}| \leq h$ μ-*p.p.*, et telle que $\ell = \lim\limits_n \|\Phi(f_{\varphi(n)}) - \Phi(f)\|_s$.

La suite $\Phi(f_{\varphi(n)})$ converge μ-*p.p.* vers $\Phi(f)$ car g est continue sur $\mathbb{R}$. En outre, on a la relation de domination

$$\mu\text{-}p.p.\quad |\Phi(f_{\varphi(n)}) - \Phi(f)|^s \leq c^s\left(|f_{\varphi(n)}|^{r/s} + |f|^{r/s}\right)^s \leq c^s\,2^s\,|h|^r \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu).$$

Donc d'après le théorème de convergence dominée 8.3, la suite $\Phi(f_{\varphi(n)})$ converge vers $\Phi(f)$ dans $\mathscr{L}^s_{\mathbb{R}}(\mu)$ et par conséquent $\ell = 0$. La suite bornée de terme général $\|\Phi(f_n) - \Phi(f)\|_s$ possède 0 comme unique valeur d'adhérence, elle converge donc vers 0. D'où la continuité de Φ en f. $\diamondsuit$

En fait la condition (9.7) est nécessaire lorsque $(X,\mathscr{A},\mu) = (\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\mu)$ (*cf.* exercice 9.12).

9.4 Théorèmes de densité dans les $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, $1\leq p<+\infty$, (I)

Cette section est consacrée à une première approche des théorèmes de densité. Hormis quelques résultats élémentaires, on s'y cantonnera au cas de la droite réelle et de la mesure de Lebesgue. Un exposé plus exhaustif est proposé dans la section 9.7, comprenant notamment le théorème de Lusin.

Nous persévérons dans l'abus consistant à confondre une fonction et son représentant dans le quotient $L^p(\mu)$. Ainsi, nous nous autoriserons à écrire que tel sous-ensemble $\mathscr{E}$ de $\mathscr{L}^p(\mu)$ est dense dans $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$, pour exprimer que le sous-ensemble de $L^p(\mu)$ constitué des classes d'équivalence ayant un représentant dans $\mathscr{E}$ est dense dans $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$.

Rappel : Il a été établi au chapitre 7 qu'une fonction étagée φ – fonction mesurable ne prenant qu'un nombre fini de valeurs finies – est intégrable si et seulement si $\mu(\{\varphi \neq 0\}) < +\infty$. Ce résultat s'appuie sur la convention (7.1) : $0 \times \mu(A) = 0$, pour tout $A \in \mathscr{A}$. En outre, dans ce cas, $\varphi \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

***Proposition* 9.4.** *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.*

DÉMONSTRATION : Toute fonction $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ s'écrit comme combinaison linéaire d'au plus quatre fonctions de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$. On peut donc supposer $f \geq 0$. Or, d'après le lemme fondamental d'approximation 5.1, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions étagées positives croissant vers f. D'où $\varphi_n \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et, d'après le théorème de convergence dominée, $\varphi_n \overset{\|\cdot\|_p}{\longrightarrow} f$ car $|f - \varphi_n|^p \leq f^p \in \mathscr{L}^1(\mu)$. $\Diamond$

Pour établir les autres théorèmes de densité, nous avons besoin du lemme topologique élémentaire suivant, dont la validité ne se limite d'ailleurs pas aux espaces L^p.

***Lemme* 9.3.** *Soient $\mathscr{C} \subset \mathscr{D} \subset \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Si $\mathscr{C}$ est $\|\cdot\|_p$-dense dans $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$ est $\|\cdot\|_p$-dense dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ alors $\mathscr{C}$ est $\|\cdot\|_p$-dense dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.*

DÉMONSTRATION : Soit $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Par densité de $\mathscr{D}$ dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, il existe $g_n \in \mathscr{D}$ tel que $\|f - g_n\|_p \leq \frac{1}{2n}$. Par densité de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{D}$, il existe $h_n \in \mathscr{C}$ tel que $\|g_n - h_n\|_p \leq \frac{1}{2n}$. Finalement, pour tout $n \geq 1$, $\|f - h_n\|_p \leq \frac{1}{n}$ ce qui assure le résultat. $\Diamond$

***Théorème* 9.4.** *On se place sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, λ mesure de Lebesgue. Alors :*

(a) L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans tous les espaces $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda)$, $1 \leq p < +\infty$.

(b) L'ensemble $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ des fonctions continues à support compact est dense dans tous les espaces $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda)$, $1 \leq p < +\infty$.

DÉMONSTRATION : (a) D'après la proposition 9.4 et le lemme 9.3, le problème se réduit à approcher en (semi-)norme $\|\cdot\|_p$ une fonction étagée (positive) par une suite de fonctions en escalier à support compact. Il suffit même, par linéarité, d'approcher l'indicatrice $\mathbb{1}_A$ d'un borélien $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ de mesure de Lebesgue $\lambda(A)$ finie.

La mesure de Lebesgue étant extérieurement régulière (*cf.* théorème 6.10, section 6.6), on a

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(O) : A \subset O,\ O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\}.$$

Il existe donc une suite d'ouverts $(\Omega_n)_{n\ge 1}$ telle que $A\subset\Omega_n$ et $\lambda(\Omega_n)\to\lambda(A)$. On pose alors $\widetilde{\Omega}_n := \Omega_n \cap]-n,n[$. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega}_n}$ est à support compact et

$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega}_n}-\mathbb{1}_A\right\|_p &= \left\|\mathbb{1}_{]-n,n[}(\mathbb{1}_{\Omega_n}-\mathbb{1}_A)+\mathbb{1}_{A\cap]-n,n[}-\mathbb{1}_A\right\|_p\\ &\le \|\mathbb{1}_{\Omega_n}-\mathbb{1}_A\|_p+\left\|\mathbb{1}_{A\setminus]-n,n[}\right\|_p\\ &\le (\lambda(\Omega_n)-\lambda(A))^{\frac1p}+(\lambda(A\setminus]-n,n[))^{\frac1p}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

car $A\setminus]-n,n[\,\downarrow\emptyset$ et $\lambda(A)<+\infty$. On conclut en notant que tout ouvert borné Ω de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts (bornés) deux à deux disjoints, *i.e.*

$$\mathbb{1}_\Omega=\sum_{n\ge1}\mathbb{1}_{I_n}=\lim_n{}^{\uparrow}\sum_{k=1}^n\mathbb{1}_{I_k}\quad(I_k\text{ intervalles ouverts, éventuellement vides}).$$

La convergence a lieu dans $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda)$ par convergence dominée.

(b) Au vu de (a) il suffit d'approcher dans $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda)$ l'indicatrice $\mathbb{1}_I$ d'un intervalle ouvert borné $I=]a,b[$ par des fonctions continues à support compact. Par exemple, pour tout $n>\frac{2}{b-a}$, on définit $\varphi_n\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par $\varphi_n:=1$ sur $]a+\frac1n,b-\frac1n[$, φ_n est affine sur $]a,a+\frac1n]\cup[b-\frac1n,b[$ et φ_n est nulle hors de I. On vérifie immédiatement que

$$\|\mathbb{1}_I-\varphi_n\|_p=\left(\frac{2}{n(p+1)}\right)^{1/p}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.\quad\Diamond$$

Remarques et compléments : • Ce théorème s'étend à d'autres cadres que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on généralise à $\mathbb{R}^d$ la notion de fonction en escalier en :

$$f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{K}\quad\text{est en escalier si}\quad f=\sum_{k=1}^n\alpha_k\,\mathbb{1}_{P_k},$$

où les P_k sont des pavés de la forme : $P_k=\prod_{i=1}^d I_k^i$, I_k^i intervalles de $\mathbb{R}$. On montre aisément, en adaptant la démonstration précédente, que le théorème 9.4 (a) s'étend aux mesures μ sur $(\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ *finies sur les compacts*. Il reste donc en particulier vrai pour la mesure de Lebesgue λ_d sur $\mathbb{R}^d$.

La difficulté lorsque $d\ge2$ provient du fait qu'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ n'est généralement pas une réunion de pavés ouverts deux à deux disjoints (autrement dit ses composantes connexes ne sont pas nécessairement des pavés ouverts !). En revanche, c'est une réunion dénombrable de pavés ouverts : $\Omega=\bigcup_{n\ge1}P_n$. Il suffit alors de remarquer que toute réunion finie de pavés s'écrit comme une réunion finie de pavés deux à deux disjoints, *i.e.*

$$\forall\,n\ge1,\quad\bigcup_{k=1}^nP_k=\bigcup_{k=1}^{p_n}P_k^n\quad\text{où les }P_k^n\text{ sont des pavés deux à deux disjoints.}$$

On obtient donc

$$\mathbb{1}_\Omega = \lim_n^{\uparrow} \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^n P_k} = \lim_n^{\uparrow} \sum_{k=1}^{p_n} \mathbb{1}_{P_k^n}.$$

Le reste de la démonstration est inchangé.

Le point (b) s'étend également aux mesures μ sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ finies sur les compacts et apparaît comme un cas particulier du théorème 9.10, section 9.7.

• Plus généralement encore, on peut montrer (*cf.* exercice 9.18) que si X est un espace métrique *localement compact* [1] *séparable* (un tel espace possède une base dénombrable d'ouverts d'après la proposition 3.5) et si μ est une mesure sur $(X, \mathscr{B}(X))$ *finie sur les compacts* de X, alors l'ensemble

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k \, \mathbb{1}_{O_k} : \alpha_k \in \mathbb{K},\ O_k \in \mathscr{O}(X) \text{ et } \mu(O_k) < +\infty \right\}$$

est dense dans tous les $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Cette dernière généralisation consiste à remarquer que de telles mesures sont extérieurement régulières puis à reproduire le début de la démonstration de l'assertion (a).

***Application* 9.3.** Soit $Y := [0,1]^d$, $d \geq 1$. Pour tout $p \geq 1$, on désigne par $\mathscr{L}^p_{\#}(Y, \lambda_d)$ l'ensemble des fonctions boréliennes f définies sur $\mathbb{R}^d$ avec $|f|^p$ λ_d-intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^d$, et Y-périodiques, au sens où $f(y + e_i) = f(y)$ λ_d-*p.p.* pour tout vecteur e_i, $1 \leq i \leq d$, de la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Soient p, q deux exposants conjugués finis. Alors, pour toute fonction $f \in \mathscr{L}^p_{\#}(Y, \lambda_d)$ et toute fonction $g \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d)$ *nulle hors d'un compact*,

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}^d} f(nx)\, g(x)\, dx = \int_Y f(y)\, dy \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, dx.$$

DÉMONSTRATION : étape 1 : Soient $\alpha > 0$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ et $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive ou intégrable sur αA. Alors l'égalité suivante est vérifiée

$$\int_A h(\alpha x)\, dx = \alpha^{-d} \int_{\alpha A} h(y)\, dy \quad \text{où } \alpha A := \{\alpha x,\ x \in A\}.$$

Ce résultat est un cas particulier du théorème général de changement de variables (*cf.* proposition 12.1) qui sera établi au chapitre 12.

étape 2 *Pour tout pavé compact* $Q := \prod_{1 \leq i \leq d} [a_i, b_i]$ *et toute fonction* $h \in \mathscr{L}^1_{\#}(Y, \lambda_d)$,

$$\lim_n \int_Q h(nx)\, dx = \lambda_d(Q) \int_Y h(y)\, dy.$$

Pour $n > \max_{1 \leq i \leq d} (b_i - a_i)^{-1}$, on considère le pavage disjoint $\{Y_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{Z}^d}$ de $\mathbb{R}^d$ défini par

$$Y_\kappa := \frac{1}{n}\kappa + \frac{1}{n}[0,1[^d,\ \ \kappa \in \mathbb{Z}^d,$$

1. Est localement compact tout espace topologique dont chaque point admet un voisinage compact.

et l'on pose

$$I_n := \{\kappa \in \mathbb{Z}^d : Y_\kappa \subset Q\} \quad \text{et} \quad J_n := \{\kappa \in \mathbb{Z}^d : Y_\kappa \cap \partial Q \neq \emptyset\}.$$

On définit ensuite, pour tout $n \ge 1$, les pavés de $\mathbb{R}^d$

$$\underline{Q}_n := \prod_{i=1}^{d} [a_i + \tfrac{1}{n}, b_i - \tfrac{1}{n}] \subset Q \subset \overline{Q}_n := \prod_{i=1}^{d} [a_i - \tfrac{1}{n}, b_i + \tfrac{1}{n}].$$

Il est facile de vérifier que si $\kappa \in J_n$ alors $Y_\kappa \subset \overline{Q}_n \setminus \underline{Q}_n$. En outre, les Y_κ étant deux à deux disjoints,

$$\lambda_d\Big(\bigcup_{\kappa\in J_n} Y_\kappa\Big) = \sum_{\kappa\in J_n} \lambda_d(Y_\kappa) = n^{-d}\,\mathrm{card}\, J_n \le \lambda_d(\overline{Q}_n \setminus \underline{Q}_n) = O(n^{-1}). \tag{9.8}$$

De même,

$$\lambda_d(Q) = \lambda_d\Big(\bigcup_{\kappa\in I_n} Y_\kappa\Big) + \lambda_d\Big(\bigcup_{\kappa\in J_n} Y_\kappa \cap Q\Big) = \sum_{\kappa\in I_n} \lambda_d(Y_\kappa) + O(n^{-1}) = n^{-d}\,\mathrm{card}\, I_n + O(n^{-1}), \tag{9.9}$$

d'où $n^{-d}\mathrm{card}\, I_n = \lambda_d(Q) + O(n^{-1})$. D'autre part, on peut écrire

$$\int_Q h(nx)\,dx = \sum_{\kappa\in I_n} \int_{Y_\kappa} h(nx)\,dx + \sum_{\kappa\in J_n} \int_{Y_\kappa\cap Q} h(nx)\,dx.$$

L'étape 1, la Y-périodicité de h et le fait que la mesure de Lebesgue λ_d ne charge pas les hyperplans entraînent

$$\int_{Y_\kappa} h(nx)dx = n^{-d}\int_{nY_\kappa} h(y)dy = n^{-d}\int_{[0,1[^d+\kappa} h(y)dy = n^{-d}\int_{[0,1[^d} h(y)dy = n^{-d}\int_Y h(y)dy. \tag{9.10}$$

De même

$$\left|\int_{Y_\kappa\cap Q} h(nx)\,dx\right| \le \int_{Y_\kappa} |h(nx)|\,dx = n^{-d}\int_Y |h(y)|\,dy. \tag{9.11}$$

En combinant les résultats obtenus en (9.8), (9.9), (9.10) et (9.11), on obtient

$$\int_Q h(nx)\,dx = n^{-d}\,\mathrm{card}\, I_n \int_Y h(y)\,dy + O(n^{-d}\,\mathrm{card}\, J_n) = \lambda_d(Q)\int_Y h(y)\,dy + O(n^{-1}),$$

ce qui conduit aussitôt au résultat annoncé.

<u>étape 3</u> *(Cas général)* :

Soient $g \in \mathscr{L}^q_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$, nulle hors d'un pavé compact Q de $\mathbb{R}^d$, et $p > 1$ tel que $1/p + 1/q = 1$. D'après le théorème de densité 9.4 – adapté à $L^p(\mathbb{R}^d)$ selon la remarque qui suit le théorème – il existe, pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction φ, combinaison linéaire de fonctions indicatrices de pavés de $\mathbb{R}^d$ aux côtés parallèles aux axes, telle que $\|g - \varphi\|_q < \varepsilon$. Quitte à changer φ en $\mathbb{1}_Q\,\varphi$, on peut supposer que φ est nulle hors de Q, puisque $\|g - \mathbb{1}_Q\,\varphi\|_q \le \|g - \varphi\|_q < \varepsilon$.

Remarquons d'abord qu'en vertu de l'étape 1, $x \mapsto f(nx) \in \mathscr{L}^p_{\#}(Y, \lambda_d)$. Par suite, sa restriction à Q appartient à $\mathscr{L}^p(Q)$. Comme $g \in \mathscr{L}^q(Q)$, l'inégalité de Hölder assure l'intégrabilité de la fonction $x \mapsto f(nx)\,g(x)$ sur Q. On écrit alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(nx)\,g(x)\,dx = \int_Q f(nx)\,\varphi(x)\,dx + \int_Q f(nx)\,(g(x) - \varphi(x))\,dx.$$

Soit $h := |f|^p$. La fonction h est dans $\mathscr{L}^1_{\#}(Y, \lambda_d)$ car la restriction de λ_d à Y étant finie, $\mathscr{L}^p_{\#}(Y, \lambda_d)$ est inclus dans $\mathscr{L}^1_{\#}(Y, \lambda_d)$. On peut donc appliquer l'étape 2 à h et, partant, la suite des normes $\|f(n\,.\,)\|_{L^p(Q)}$ converge vers un réel. L'inégalité de Hölder fournit alors les majorations

$$\left|\int_Q f(nx)\,(g(x) - \varphi(x))\,dx\right| \le \|f(nx)\|_{L^p(Q)}\,\|g - \varphi\|_{L^q(Q)} < c_1\,\varepsilon$$

$$\text{et} \quad \left|\int_Q g(x)\,dx - \int_Q \varphi(x)dx\right| \le \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_Q(x)|g(x) - \varphi(x)|dx \le (\lambda_d(Q))^{1/p}\,\|g - \varphi\|_q \le c_2\,\varepsilon$$

qui impliquent

$$\left|\int_Q f(nx)g(x)dx - \int_Y f(y)dy\int_Q g(x)dx\right| \le \left|\int_Q f(nx)\varphi(x)dx - \int_Y f(y)\,dy\int_Q \varphi(x)dx\right| + c\,\varepsilon.$$

D'autre part, de nouveau grâce à l'étape 2, on a

$$\lim_n \int_Q f(nx)\,\varphi(x)\,dx = \int_Y f(y)\,dy\int_Q \varphi(x)\,dx.$$

On en déduit donc que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\overline{\lim_n}\left|\int_Q f(nx)\,g(x)\,dx - \int_Y f(y)\,dy\int_Q g(x)\,dx\right| \le c\,\varepsilon,$$

d'où la limite cherchée. $\Diamond$

9.5 L'espace $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ $(\mu \neq 0)$

Dans cette section, on suppose que la mesure μ sur $(X, \mathscr{A})$ n'est pas nulle.

Définition 9.6. *Soit $f : (X, \mathscr{A}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$. On définit le* supremum essentiel *de f par*

$$\text{supess}\,(f) := \inf\,\big\{M > 0 : \mu(\{f > M\}) = 0\big\} \ge 0,$$

avec la convention classique $\inf \emptyset = +\infty$.

Proposition 9.5. *Si* supess $(f) < +\infty$, *alors*

$$\text{supess}\,(f) := \min\big\{M : \mu(\{f > M\}) = 0\big\},$$

i.e.

(a) $\forall\, M \ge$ supess (f), $\mu(\{f > M\}) = 0$,

(b) $\forall\, M <$ supess (f), $\mu(\{f > M\}) > 0$.

DÉMONSTRATION : $M \mapsto \{f > M\}$ est décroissante pour l'inclusion donc la fonction $M \mapsto \mu(\{f > M\})$ est décroissante positive. Le seul point à vérifier est la valeur de $\mu(\{f > M\})$ en $M =$ supess (f). Or

$$\begin{aligned}\mu\big(\{f > \text{supess}\,(f)\}\big) &= \mu\Big(\bigcup_{n\ge 1}^{\uparrow}\{f > \text{supess}\,(f) + 1/n\}\Big)\\ &= \lim_n{}^{\uparrow}\,\mu\big(\{f > \text{supess}\,(f) + 1/n\}\big) = 0. \quad \Diamond\end{aligned}$$

Définition 9.7. (a) *Soit $f : (X, \mathscr{A}) \to \mathbb{K}$, on pose $\|f\|_\infty :=$* supess $(|f|)$.

(b) *On note $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) := \big\{f : (X, \mathscr{A}) \to \mathbb{K} : \|f\|_\infty < +\infty\big\}$ l'ensemble des fonctions μ- essentiellement bornées.*

Remarques : • Si $f = g$ μ-*p.p.* alors supess $(f) =$ supess (g).

• Si la fonction $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{K}, \mathscr{B}(\mathbb{K}))$ est mesurable bornée alors $f \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{\sup} := \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$, car $\mu(\{|f| > \|f\|_{\sup}\}) = \mu(\emptyset) = 0$.

• Soit $(X, \mathscr{B}(X), \mu)$ un espace topologique muni de sa tribu borélienne et d'une mesure μ chargeant *tous les ouverts non vides*. Alors, si $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{K}, \mathscr{B}(\mathbb{K}))$ est continue, $\|f\|_\infty = \|f\|_{\sup}$. En effet, si $\|f\|_\infty < \|f\|_{\sup}$, l'ensemble $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ est alors un ouvert non vide, donc nécessairement chargé par μ. D'où la contradiction.

Les fonctions μ-essentiellement bornées se caractérisent à l'aide des fonctions bornées usuelles :

***Lemme* 9.4.** *Soit $f : (X, \mathscr{A}) \to \mathbb{K}$ une fonction mesurable. $f \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ si et seulement si il existe une fonction $g : (X, \mathscr{A}) \to \mathbb{K}$ mesurable bornée telle que $f = g$ μ-p.p. et $\|g\|_\infty = \|g\|_{\sup} = \|f\|_\infty$.*

DÉMONSTRATION : $(\Rightarrow)$ On pose $g := f\,\mathbb{1}_{\{|f| \leq \|f\|_\infty\}}$.
Alors $f = g$ μ-*p.p.* et $|g| \leq \|f\|_\infty$, donc $\|g\|_{\sup} \leq \|f\|_\infty = \|g\|_\infty$. De plus, par la remarque précédente, $\|g\|_\infty \leq \|g\|_{\sup}$.
$(\Leftarrow)$ Ce sens est évident vu que $f = g$ μ-*p.p.* entraîne $|f| = |g|$ μ-*p.p.*. ◊

***Théorème* 9.5.** (a) $\left(\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_\infty\right)$ *est un $\mathbb{K}$- e.v. semi-normé et*

$$\{\|\cdot\|_\infty = 0\} = \{f : f = 0 \ \mu\text{-}p.p.\}.$$

(b) *L'e.v.n. quotient $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) := \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) : \{\|\cdot\|_\infty = 0\}$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ est complet,* i.e. *est un espace de Banach.*

DÉMONSTRATION : (a) On vérifie immédiatement à l'aide du lemme 9.4 que $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ est un $\mathbb{K}$- s.e.v. de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. On procède de même pour vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une semi-norme, sachant que $\|\cdot\|_{\sup}$ est une norme sur l'ensemble des fonctions bornées. Soient f_1, $f_2 \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ et g_1, g_2 mesurables bornées telles que $f_i = g_i$ μ-*p.p.* et $\|f_i\|_\infty = \|g_i\|_{\sup}$, $i = 1$, 2. Alors $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ μ-*p.p.* donc

$$\|f_1 + f_2\|_\infty = \|g_1 + g_2\|_\infty \leq \|g_1 + g_2\|_{\sup} \leq \|g_1\|_{\sup} + \|g_2\|_{\sup} = \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty.$$

Soient $f \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et g fonction mesurable bornée vérifiant $f = g$ μ-*p.p.* et $\|f\|_\infty = \|g\|_{\sup}$. Il vient $\lambda f = \lambda g$ μ-*p.p.* donc, d'après le lemme 9.4,

$$\|\lambda f\|_\infty = \|\lambda g\|_{\sup} = |\lambda| \|g\|_{\sup} = |\lambda| \|f\|_\infty.$$

Enfin $\|0\|_\infty = 0$, donc $\|\,.\,\|_\infty$ est bien une semi-norme. Déterminons-en le noyau. Soient $f \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$, $\|f\|_\infty = 0$ et g mesurable bornée associée à f *via* le lemme 9.4. Il est clair que $\|g\|_{\sup} = 0$ *i.e.* $g \equiv 0$ d'où $f = 0$ μ-*p.p.*.
(b) Pour la complétude, on s'appuie à nouveau sur l'espace $\mathscr{B}(X, \mathbb{K})$ des fonctions bornées de X dans $\mathbb{K}$. En effet $\mathscr{B}(X, \mathbb{K})$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_{\sup}$, est complet. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ de Cauchy dans $\left(\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_\infty\right)$.

On pose alors

$$A_\infty := \Big(\bigcup_{n\geq 1}\{|f_n| > \|f_n\|_\infty\}\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{n,m}\{|f_n - f_m| > \|f_n - f_m\|_\infty\}\Big),$$

$\mu(A_\infty) = 0$ comme réunion dénombrable d'ensembles négligeables. On définit alors les fonctions bornées $g_n := f_n \mathbb{1}_{{}^cA_\infty}$. Ces fonctions vérifient

$$|g_n - g_m| = |f_n - f_m|\,\mathbb{1}_{{}^cA_\infty} \leq \|f_n - f_m\|_\infty \quad \text{d'où} \quad \|g_n - g_m\|_{\sup} \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

La suite $(g_n)_{n\geq 1}$ est donc de Cauchy dans l'espace complet $(\mathscr{B}(X,\mathbb{K}), \|\cdot\|_{\sup})$. Par conséquent, $g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\sup}} g$. En particulier, $g_n \xrightarrow{S} g$ (convergence simple) donc g est mesurable puisque les g_n le sont.

Enfin,
$$\begin{aligned} \|f_n - g\|_\infty &\leq \|(g_n - g)\,\mathbb{1}_{{}^cA_\infty}\|_\infty + \underbrace{\|(f_n - g_n)\,\mathbb{1}_{{}^cA_\infty}\|_\infty}_{=0} \\ &\leq \|g_n - g\|_\infty \leq \|g_n - g\|_{\sup} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \Diamond \end{aligned}$$

Poursuivons par deux propriétés classiques.

Proposition 9.6. *(a) (Inégalité de Hölder) Pour tous p, $q \in [1,+\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $f \in \mathscr{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$, alors*

$$fg \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu) \quad et \quad \int_X |fg|\,d\mu \leq \|f\|_p\,\|g\|_q < +\infty.$$

(b) Pour toute fonction mesurable $f : (X,\mathscr{A}) \to \mathbb{K}$, $\|f\|_\infty \leq \varliminf_{p\to+\infty} \|f\|_p$(2).

(c) La notation $\|\cdot\|_\infty$ se justifie notamment par la propriété suivante :

$$\forall\, f \in \bigcup_{p>0} \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu), \quad \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

DÉMONSTRATION : (a) Le seul cas à étudier est $p=1$ et $q=+\infty$. Or,

$$|fg| \leq |f|\,\|g\|_\infty \;\; \mu\text{-}p.p. \;\; \text{donc} \quad \int_X |fg|\,d\mu \leq \|f\|_1\,\|g\|_\infty.$$

(b) Si $\|f\|_\infty = 0$, $f = 0$ μ-$p.p.$ donc $\|f\|_p = 0$ pour tout $p > 0$. Si $\|f\|_\infty > 0$, pour tout $A \in]0,\|f\|_\infty[$, $|f|^p \geq A^p\,\mathbb{1}_{\{|f|\geq A\}}$. Là, deux cas sont possibles :

– soit il existe $A_0 \in]0,\|f\|_\infty[$ tel que $\mu(\{|f| \geq A_0\}) = +\infty$ et $\|f\|_p = +\infty$ pour tout $p > 0$, partant $\varliminf_{p\to+\infty} \|f\|_p = +\infty \geq \|f\|_\infty$;

2. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose

$$\varliminf_{x\to+\infty} F(x) := \lim_{x\to+\infty}{}^{\uparrow}(\inf_{y>x} F(y)) \in \overline{\mathbb{R}} \;\text{ et }\; \varlimsup_{x\to+\infty} F(x) := \lim_{x\to+\infty}{}^{\downarrow}(\sup_{y>x} F(y)) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

– soit, pour tout $A \in]0, \|f\|_\infty[$, $\mu(\{|f| \geq A\}) < +\infty$. Alors, il vient $\|f\|_p \geq A\,\mu(\{|f| \geq A\})^{\frac{1}{p}}$. Comme $0 < \mu(\{|f| \geq A\}) < +\infty$, $\mu(\{|f| \geq A\})^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{p} 1$ donc $\underline{\lim}_p \|f\|_p \geq A$ pour tout $A \in]0, \|f\|_\infty[$; par suite $\underline{\lim}_p \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$.

(c) Soit $f \in \mathscr{L}^r_{\mathbb{K}}(\mu)$. Au vu du point (b), il suffit d'établir que $\overline{\lim}_p \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$. En outre, on peut supposer que $0 < \|f\|_\infty < +\infty$. Il vient $|f(x)|/\|f\|_\infty \leq 1$ μ-*p.p.* d'où, pour tout $p \geq r$,

$$\frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_\infty} \leq \frac{|f(x)|^r}{\|f\|^r_\infty}\ \mu\text{-}p.p.\ \text{ et partant }\ \|f\|_p \leq \left(\frac{\|f\|_r}{\|f\|_\infty}\right)^{r/p} \|f\|_\infty.$$

Finalement, $\overline{\lim}_p \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$. D'où le résultat. $\diamondsuit$

Remarques : • Sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $f := \mathbb{1} \notin \mathscr{L}^p(\lambda)$ pour tout $p \in [1, \infty[$, c'est-à-dire $\|f\|_p = +\infty$ bien que $\|f\|_\infty = 1$. On a donc $\underline{\lim}_p \|f\|_p > \|f\|_\infty$. Cette situation s'étend à tout espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$ où $\mu(X) = +\infty$.

• Si l'on se place maintenant sur $(X, \mathscr{A}) = (\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage, on vérifie immédiatement que

$$\forall\, p > 0,\ \ \ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) := \Big\{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty\Big\}.$$

En outre, d'après la proposition 9.6 (b), on a donc

$$\forall\, f \in \bigcup_{r > 0} \ell^r_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}),\ \ \lim_{p \to +\infty} \Big(\sum_{n \geq 1} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

• On rappelle que, si $\mu(X) < +\infty$, $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) \subset \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ pour tout $p > 0$.

• Il est à noter que les théorèmes de densité énoncés à la section 9.4 pour les espaces $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$, sont faux dans le cas $p = +\infty$. Ainsi,

$$\overline{\mathscr{C}_K(\mathbb{R}, \mathbb{K})}^{\|\cdot\|_\infty} = \Big\{f \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) : \exists\, g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K}),\ f = g\ \mu\text{-}p.p.\ \text{et} \lim_{|x| \to +\infty} |g(x)| = 0\Big\}.$$

On dispose uniquement du résultat de densité ci-après.

Théorème 9.6. *L'ensemble des fonctions étagées est dense dans* $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$.

DÉMONSTRATION : C'est une conséquence immédiate du lemme fondamental d'approximation : lemme 5.1, chapitre 5. $\diamondsuit$

Terminons par un résultat qui illustre également bien la différence entre les espaces L^p, $1 \leq p < +\infty$, d'une part et l'espace L^∞ d'autre part. Pour simplifier, on l'énonce sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

Proposition 9.7. *L'espace normé* $L^p_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$ *est séparable* (i.e. *contient une partie dénombrable dense) si* $1 \leq p < +\infty$ *et n'est pas séparable si* $p = +\infty$.

DÉMONSTRATION : *Cas* $p < +\infty$ *:* On considère le sous-espace D de fonctions en escalier sur $\mathbb{R}^d$ défini par

$$D := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \mathbb{1}_{\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[} \; ; \; \alpha_k, \, a_i, \, b_i \in \mathbb{Q}, \; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Il est clair que D est une partie dénombrable de $L^p(\mathbb{R}^d)$. De plus, D est dense dans $L^p_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$ en vertu du théorème 9.4 adapté à $\mathbb{R}^d$ (*cf.* la remarque qui suit le théorème).

Cas $p = +\infty$ *:* Soit A une partie borélienne bornée de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue non nulle. Montrons que

$$\forall \, \alpha, \alpha' \in \mathbb{R}^d, \; \alpha \neq \alpha', \; B(\mathbb{1}_{\alpha+A}, 1/4) \cap B(\mathbb{1}_{\alpha'+A}, 1/4) = \emptyset,$$

où $B(f, r)$ désigne la boule (ouverte) de centre f et de rayon r dans $L^\infty_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$. S'il existe $\varphi \in B(\mathbb{1}_{\alpha+A}, 1/4) \cap B(\mathbb{1}_{\alpha'+A}, 1/4)$ alors par l'inégalité triangulaire,

$$\|\mathbb{1}_{\alpha+A} - \mathbb{1}_{\alpha'+A}\|_\infty \leq \|\mathbb{1}_{\alpha+A} - \varphi\|_\infty + \|\varphi - \mathbb{1}_{\alpha'+A}\|_\infty < 1/4 + 1/4 < 1.$$

Or, $\|\mathbb{1}_{\alpha+A} - \mathbb{1}_{\alpha'+A}\|_\infty$, ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1, vaut donc 0. D'autre part, on remarque que $\mathbb{1}_{\alpha+A}(x) = \mathbb{1}_A(x-\alpha)$. L'invariance de la norme L^∞ par translation entraîne alors immédiatement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|\mathbb{1}_{n(\alpha'-\alpha)+A} - \mathbb{1}_{(n-1)(\alpha'-\alpha)+A}\|_\infty = \|\mathbb{1}_{\alpha'-\alpha+A} - \mathbb{1}_A\|_\infty = \|\mathbb{1}_{\alpha'+A} - \mathbb{1}_{\alpha+A}\|_\infty = 0.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *via* l'inégalité triangulaire

$$\|\mathbb{1}_{n(\alpha'-\alpha)+A} - \mathbb{1}_A\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{n} \|\mathbb{1}_{k(\alpha'-\alpha)+A} - \mathbb{1}_{(k-1)(\alpha'-\alpha)+A}\|_\infty = 0.$$

Or, l'ensemble A étant borné, il existe un n_0 telle que $A \cap [n_0(\alpha'-\alpha)+A] = \emptyset$. L'égalité $\mathbb{1}_{n_0(\alpha'-\alpha)+A} = \mathbb{1}_A$ n'est donc possible que si les deux indicatrices sont nulles λ_d-*p.p.*. Ceci est impossible par hypothèse ($\lambda_d(A) \neq 0$).

Supposons à présent l'existence d'une partie $D := \{f_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ dénombrable dense dans $L^\infty_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$. Il existe alors, pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}^d$, un (plus petit) entier $n(\alpha) \in \mathbb{N}$ tel que $f_{n(\alpha)} \in B(\mathbb{1}_{\alpha+A}, 1/4)$. On définit ainsi une application $\big(\alpha \mapsto n(\alpha)\big)$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{N}$. Cette application est clairement injective d'après ce qui précède. Ceci est impossible car $\mathbb{R}^d$ n'est pas dénombrable. $\lozenge$

Remarque : On a en fait établi dans la proposition ci-dessus que le $\mathbb{R}$ sous-espace vectoriel de $(L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d), \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ engendré par la famille de fonctions indicatrices $\{\mathbb{1}_{\alpha+A}, \, \alpha \in \mathbb{R}^d\}$ n'est pas séparable. Ce sous-espace vectoriel est évidemment beaucoup plus petit que $(L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d), \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

***Application* 9.4.** *Applications linéaires locales continues sur $L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$:*

Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré de masse totale finie et Φ une application linéaire continue de $L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. On suppose qu'en outre, Φ est *locale*, *i.e.* pour toute fonction $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et toute partie $A \in \mathscr{A}$

$$\mathbb{1}_A f = 0 \ \mu\text{-}p.p. \Rightarrow \mathbb{1}_A \Phi(f) = 0 \ \mu\text{-}p.p..$$

Alors il existe $\varphi \in L^\infty(\mu)$ tel que pour toute fonction $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, $\Phi(f) = \varphi f$.

DÉMONSTRATION : étape 1 : Si $A \in \mathscr{A}$ et $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ alors $\Phi(\mathbb{1}_A f) = \mathbb{1}_A \Phi(f)$.

Soient $g := \Phi(\mathbb{1}_A f) - \mathbb{1}_A \Phi(f)$ et $h := \Phi(\mathbb{1}_{^cA} f) - \mathbb{1}_{^cA} \Phi(f)$. Le caractère local de Φ entraîne que

$$\mathbb{1}_A h = \mathbb{1}_{^cA} g = 0 \ \ \mu\text{-}p.p. \ \text{ d'où } \ gh = (\mathbb{1}_A g + \mathbb{1}_{^cA} g)\, h = 0 \ \mu\text{-}p.p.$$

La linéarité de Φ entraîne à son tour

$$g + h = \Phi(\mathbb{1}_A f + \mathbb{1}_{^cA} f) - (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{^cA})\,\Phi(f) = \Phi(f) - \Phi(f) = 0 \ \ \mu\text{-}p.p..$$

Donc $g^2 = -gh = 0$ μ-$p.p.$ et par conséquent $\Phi(\mathbb{1}_A f) = \mathbb{1}_A \Phi(f)$ μ-$p.p.$.

étape 2 : $\varphi := \Phi(\mathbb{1}_X) \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mu)$ et $\|\varphi\|_\infty \le \|\Phi\|$.

D'après l'étape 1, si $A \in \mathscr{A}$ alors $\Phi(\mathbb{1}_A) = \Phi(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_X) = \mathbb{1}_A \varphi$, d'où

$$\int_A |\varphi|\, d\mu = \|\mathbb{1}_A \varphi\|_1 = \|\Phi(\mathbb{1}_A)\|_1 \le \|\Phi\|\, \|\mathbb{1}_A\|_1 = \|\Phi\|\, \mu(A).$$

En particulier, pour $A := \{|\varphi| > \|\Phi\|\}$ on a

$$\int_A \underbrace{(|\varphi| - \|\Phi\|)}_{>0}\, d\mu \le 0,$$

donc $\mu(A) = 0$ *i.e.* $|\varphi| \le \|\Phi\|$ μ-$p.p.$, ce qui établit le résultat.

étape 3 : $\forall f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, $\Phi(f) = \varphi f$.

D'après l'étape 1, pour toute partie $A \in \mathscr{A}$ on a $\Phi(\mathbb{1}_A) = \varphi \mathbb{1}_A$. L'égalité est vérifiée par toute fonction étagée intégrable par linéarité. La densité des fonctions étagées intégrables dans l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ (*cf.* proposition 9.4), combinée avec la continuité de Φ, entraîne l'égalité pour toute fonction de $L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. $\Diamond$

9.6 Propriétés hilbertiennes de $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$

Le but de cette section n'est pas de développer la théorie complète des espaces de Hilbert mais essentiellement de parvenir au théorème de représentation des formes linéaires continues sur L^2 qui nous servira en particulier dans la démonstration du théorème de Radon-Nikodym à la section suivante.

9.6.1 L'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$

L'application définie sur $L^2_{\mathbb{K}}(\mu) \times L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ par

$$(f, g)_2 := \int_X f\, \overline{g}\, d\mu$$

est une *forme sesquilinéaire*, *i.e.* elle vérifie les propriétés suivantes :

$(i)\ \forall\, f_1,\ f_2,\ g\in L^2_{\mathbb{K}}(\mu),\ \forall\,\lambda\in\mathbb{K},\ (\lambda\, f_1+f_2,g)_2=\lambda\,(f_1,g)_2+(f_2,g)_2,$
$(ii)\ \forall\, f,\ g\in L^2_{\mathbb{K}}(\mu),\ (f,g)_2=\overline{(g,f)_2},$
$(iii)\ \forall\, f\in L^2_{\mathbb{K}}(\mu),\ (f,f)_2\geq 0$ et $(f,f)_2=0\Leftrightarrow f=0.$

L'application $\|f\|_2:=\sqrt{(f,f)_2}$ définit une norme sur $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$, appelée *norme hilbertienne*. D'après le théorème de Riesz-Fisher, l'espace $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ muni de cette norme forme un $\mathbb{K}$-e.v.n. complet, c'est donc un *espace de Hilbert*.

Remarque : Comme nous l'avons indiqué en préambule, nous n'allons pas étudier les espaces de Hilbert de manière générale mais en donner quelques propriétés fondamentales dans le cadre $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$. Toutefois, ce cadre apparemment particulier n'est pas une réelle restriction car on peut montrer que tout espace de Hilbert est isométriquement isomorphe à un espace du type $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$. En outre I est un ensemble dénombrable lorsque l'espace de Hilbert est séparable.

9.6.2 Théorème de projection

***Théorème* 9.7** (Projection orthogonale)**.** *Soit F un s.e.v. fermé de $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$. Alors toute fonction g de $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ peut se décomposer de manière unique sous la forme*

$$g=f+h\ \text{ où }\ f\in F\ \text{ et }\ (\varphi,h)_2=0\,\forall\,\varphi\in F; \tag{9.12}$$

autrement dit, $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ se décompose en somme directe sous la forme

$$L^2_{\mathbb{K}}(\mu)=F\oplus F^{\perp}\ \text{ où }\ F^{\perp}:=\{u\in L^2_{\mathbb{K}}(\mu):\forall\,\varphi\in F,\ (\varphi,u)_2=0\}. \tag{9.13}$$

La fonction f est appelée la projection orthogonale *de g sur F. Elle est aussi caractérisée par l'égalité*

$$\|g-f\|_2=\min_{\varphi\in F}\|g-\varphi\|_2. \tag{9.14}$$

La démonstration de ce théorème repose notamment sur l'identité classique suivante :

***Lemme* 9.5** (Identité du parallélogramme)**.** *Pour toutes fonctions $f,\ g\in L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$*

$$\|f+g\|_2^2+\|f-g\|_2^2=2\left(\|f\|_2^2+\|g\|_2^2\right). \tag{9.15}$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que

$$\|f+g\|_2^2=\|f\|_2^2+\|g\|_2^2+2\,\Re(f\,\overline{g}).\quad\Diamond$$

Démonstration du théorème 9.7 : Soit $d:=\inf\limits_{\varphi\in F}\|g-\varphi\|_2\in\mathbb{R}_+$. Il existe une suite asymptotiquement minimisante $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ *i.e.* telle que $d=\lim_n\|g-\varphi_n\|_2$. Montrons que cette suite est de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$. D'après l'identité (9.15),

$$\left\|\frac{\varphi_m+\varphi_n}{2}-g\right\|_2^2+\left\|\frac{\varphi_m-\varphi_n}{2}\right\|_2^2=2\left\|\frac{\varphi_m-g}{2}\right\|_2^2+2\left\|\frac{\varphi_n-g}{2}\right\|_2^2$$

d'où, puisque $\dfrac{\varphi_m + \varphi_n}{2} \in F$,

$$\|\varphi_m - \varphi_n\|_2^2 \leq 2\left(\|\varphi_m - g\|_2^2 + \|\varphi_n - g\|_2^2 - 2\,d^2\right).$$

La propriété de Cauchy découle alors de la définition de la suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$.

Le s.e.v. F étant fermé, $(F, \|\,.\,\|_2)$ est donc complet et la suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ converge donc vers une fonction $f \in F$. Il est immédiat par construction que f vérifie l'égalité (9.14).

Montrons à présent que f vérifie l'égalité (9.12). Soit $h := g - f$ et $\varphi \in F$. Pour tout $t > 0$, $f + t\,\varphi \in F$ donc

$$\|h\|_2^2 = \|g-f\|_2^2 \leq \|g-(f+t\,\varphi)\|_2^2 = \|h-t\,\varphi\|_2^2 = \|h\|_2^2 + t^2\,\|\varphi\|_2^2 - 2\,t\,\Re(h,\varphi)_2$$

d'où $0 \leq t\,\|\varphi\|_2^2 - 2\,\Re(h,\varphi)_2$. En faisant tendre t vers 0, il vient $\Re(h,\varphi)_2 \leq 0$ pour toute $\varphi \in F$. En particulier, $\Re(h,\varphi)_2 = -\,\Re(h,-\varphi)_2 \geq 0$ d'où $\Re(h,\varphi)_2 = 0$.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on obtient directement (9.12). Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la sesquilinéarité de $(\cdot,\cdot)_2$ entraîne $\Im(h,\varphi)_2 = \Re\left(-i\,(h,\varphi)_2\right) = \Re(h, i\,\varphi)_2 = 0$ d'où (9.12).

Il reste à montrer l'unicité du couple (f,h). Supposons que l'identité (9.12) ait lieu avec un autre couple (f',h'). On a $f' - f = h - h'$ alors, puisque $f',\ f \in F$, $(f'-f, f')_2 = (f'-f, f)_2 = 0 = (f'-f, f'-f)_2$ donc $f' = f$ et $h' = h$. $\quad\diamondsuit$

Terminons cette section par le théorème de représentation des formes linéaires continues sur $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$.

9.6.3 Représentation d'une forme linéaire continue

***Théorème* 9.8** (Lemme de Riesz-Fisher)**.** *Soit $\Phi : L^2_{\mathbb{K}}(\mu) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Alors il existe une unique fonction $g \in L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ telle que*

$$\forall\, f \in L^2_{\mathbb{K}}(\mu),\ \Phi(f) = \int_X f\,\overline{g}\,d\mu. \tag{9.16}$$

DÉMONSTRATION : $F := \Phi^{-1}\{0\}$ est un s.e.v. fermé de $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ car Φ est continue. Si $\Phi = 0$ alors la fonction nulle convient. Sinon, il existe d'après la décomposition (9.13) du théorème 9.7, $h \in F^{\perp} \setminus \{0\}$. On pose alors

$$g := \frac{\overline{\Phi(h)}}{\|h\|_2^2}\,h \in F^{\perp}.$$

Soit $f \in L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$. Comme $\Phi(g) \neq 0$, on peut poser $\lambda := \dfrac{\Phi(f)}{\Phi(g)} \in \mathbb{K}$. On a alors $\Phi(f - \lambda\,g) = 0$ d'où $f - \lambda\,g \in F$ et par suite $(f - \lambda\,g, g)_2 = 0$ car $g \in F^{\perp}$. On obtient donc $\lambda = \dfrac{(f,g)_2}{\|g\|_2^2}$ et partant $\Phi(f) = \dfrac{\Phi(g)}{\|g\|_2^2}\,(f,g)_2 = (f,g)_2$. $\quad\diamondsuit$

9.7 ♣ Théorèmes de densité dans les $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, $p<+\infty$, (II)

Avant d'entrer dans le vif du sujet, le lemme préliminaire suivant propose une méthode d'approximation d'une fonction indicatrice d'ouvert par des fonctions lipschitziennes dans un espace métrique. Cette méthode s'appuie sur la notion de distance à un ensemble développée à la section 3.6 dans la première partie et se révèle un outil indispensable dans les théorèmes de densité.

***Lemme* 9.6.** *Pour tout ouvert $O\in\mathscr{O}(X)\setminus\{X\}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction φ_k sur X par $\varphi_k(x):=\min\left(kd(x,{}^cO),1\right)$. La fonction φ_k est k-lipschitzienne et vérifie*

$$0\le\varphi_k\le\varphi_{k+1}\le\mathbb{1}_O \ \ et\ \ \lim_k{}^{\uparrow}\varphi_k=\mathbb{1}_O.$$

DÉMONSTRATION : La fonction $u\mapsto\min(ku,1)$ est k-lipschitzienne de $\mathbb{R}_+$ dans $[0,1]$ et ne s'annule qu'en 0. Si $u\neq 0$, $\lim_k{}^{\uparrow}\min(ku,1)=1$. La fonction φ_k est donc $k\times 1=k$-lipschitzienne par composition, et $\lim_k{}^{\uparrow}\varphi_k=\mathbb{1}_{\{x:d(x,{}^cO)>0\}}=\mathbf{1}_O$. $\Diamond$

9.7.1 Densité des fonctions lipschitziennes dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$

Le théorème principal ci-après fait intervenir l'espace

$$\mathrm{Lip}_b(X,\mathbb{K}):=\{f:X\longrightarrow\mathbb{K},\ f \text{ lipschitzienne bornée}\},\qquad \text{où } \mathbb{K}=\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

***Théorème* 9.9.** *Soit (X,d) un espace métrique et μ une mesure sur $(X,\mathscr{B}(X))$, supposée* extérieurement régulière *au sens où*

$$\forall\, A\in\mathscr{B}(X),\ \ \mu(A):=\inf\left\{\mu(O),\ A\subset O,\ O \textit{ ouvert}\right\}.$$

Alors, pour tout $p\in[1,+\infty[$,

$$\mathrm{Lip}_b(X,\mathbb{K})\cap\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)\ \textit{est}\ \|\cdot\|_p\textit{-dense dans}\ \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu).$$

DÉMONSTRATION : Rappelons d'abord que

$$\mathbb{1}_A\in\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)\iff\mu(A)<+\infty\iff\mathbb{1}_A\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu).$$

Les fonctions étagées μ-intégrables étant denses dans tous les $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ pour tout $p\in[1,+\infty[$, d'après la proposition 9.4, il suffit d'approcher de telles fonctions dans $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Enfin, toute fonction étagée intégrable se décomposant en une combinaison linéaires d'au plus quatre fonctions étagées intégrables positives, il suffit d'établir le résultat dans ce dernier cadre.

<u>Étape 1 :</u> Soient $f:=\mathbb{1}_A\in\mathscr{L}^p(\mu)$ et $\varepsilon>0$; $\mu(A)<+\infty$ donc, par hypothèse, il existe $O_\varepsilon\in\mathscr{O}(X)$ tel que $A\subset O_\varepsilon$ et $\mu(O_\varepsilon\setminus A)\le\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$. Les fonctions φ_n, $n\ge 1$, relatives à O_ε construites au lemme 9.6 vérifient :

$$|\mathbb{1}_{O_\varepsilon}-\varphi_n|^p\le\mathbb{1}_{O_\varepsilon}\in\mathscr{L}^1(\mu)\quad\text{et}\quad|\mathbb{1}_{O_\varepsilon}-\varphi_n|^p\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Donc, par convergence dominée, il existe $n_\varepsilon \geq 1$ tel que $\|\mathbb{1}_{O_\varepsilon} - \varphi_{n_\varepsilon}\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Finalement

$$\|\varphi_{n_\varepsilon} - \mathbb{1}_A\|_p \leq \|\varphi_{n_\varepsilon} - \mathbf{1}_{O_\varepsilon}\|_p + \|\mathbb{1}_{O_\varepsilon} - \mathbb{1}_A\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu(O_\varepsilon \setminus A)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

Étape 2 : Soit $f := \sum_{1\leq i\leq N} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$ une fonction étagée positive de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$. On peut supposer les λ_i tous non nuls et partant tous les $\mu(A_i)$, $i=1,\cdots,N$ finis. L'étape 1 fournit alors des fonctions $f_i^\varepsilon \in \mathrm{Lip}_b(X,[0,1]) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ tq $\|\mathbb{1}_{A_i} - f_i^\varepsilon\|_p \leq \frac{\varepsilon}{N\lambda_i}$. D'où il vient $\|f - \sum_{1\leq i\leq N} \lambda_i f_i^\varepsilon\|_p \leq \varepsilon$; or $\sum_{1\leq i\leq N} \lambda_i f_i^\varepsilon$ est à la fois clairement lipschitzienne et dans $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ comme combinaison linéaire positive de fonctions lipschitziennes de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$. $\Diamond$

Remarque : On peut *a fortiori* remplacer $\mathrm{Lip}_b(X,\mathbb{K})$ par l'ensemble

$$\mathscr{C}_b(X,\mathbb{K}) := \big\{f : X \to \mathbb{K},\ \text{lipschitzienne bornée}\big\}.$$

En combinant le résultat ci-dessus avec le théorème 6.9(b) sur la régularité extérieure des mesures, on en déduit plusieurs résultats sur les mesures *σ-finies le long d'une suite croissante d'ouverts épuisant X.*

***Corollaire* 9.4.** *Soit μ une mesure σ-finie vérifiant : il existe une suite croissante d'*ouverts *$(E_n)_{n\geq 1}$ telle que*

$$\forall\, n \geq 1,\ \mu(E_n) < +\infty \quad \textit{et} \quad X = \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} E_n. \tag{9.17}$$

Alors, pour tout $p \in [1,+\infty[$, $\mathrm{Lip}_b(X,\mathbb{K}) \cap \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ est $\|\,.\,\|_p$-dense dans $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

***Application* 9.5.** (a) L'exemple le plus important est sans nul doute la mesure de Lebesgue λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ (on considère les hypercubes $E_n :=]-n,n[^d$).

(b) Plus généralement, la démonstration du théorème 6.10 (consacré à la régularité des mesures de Borel) montre que toute mesure de Borel sur un espace métrique (X,d) localement compact, séparable, vérifie la condition (9.17) de σ-finitude le long d'une suite d'ouverts.

***Corollaire* 9.5.** *Soient μ et μ' deux mesures vérifiant la condition (9.17) de σ-finitude le long d'une suite d'ouverts. Alors*

$$\forall\, f \in \mathrm{Lip}_b(X,\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu'),\quad \int_X f d\mu = \int_X f d\mu' \implies \mu = \mu'.$$

Démonstration : Soit $O \in \mathscr{O}(X)$ et $n \geq 1$. Les fonctions φ_k, $k \geq 1$, relatives à l'ouvert $O \cap E_n$ introduites dans le lemme 9.6 sont bien dans les espace $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu')$. Donc, par densité et par continuité "à gauche" des mesures, μ et μ' coïncident sur $\mathscr{O}(X)$. D'après le corollaire 6.2, elles sont donc égales car σ-finies. $\Diamond$

9.7.2 Densité des fonctions lipschitziennes à support compact

Nous allons maintenant affiner les résultats précédents dans le cas où l'espace X est localement compact et séparable. En effet, il est alors possible, si μ est une mesure de Borel, de se restreindre aux fonctions lipschitziennes *à support compact*.

***Théorème* 9.10.** *Soient (X,d) un espace métrique localement compact séparable et μ une mesure de Borel. On pose*

$$\mathrm{Lip}_K(X,\mathbb{K}) := \big\{ f : X \to \mathbb{K},\ \textit{lipschitzienne à support compact} \big\}.$$

Alors, pour tout $p \in [1,+\infty[$, $\mathrm{Lip}_K(X,\mathbb{K})$ est $\|\,.\,\|_p$-dense dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

DÉMONSTRATION : Si $f \in \mathrm{Lip}_K(X,\mathbb{K})$, f est en particulier continue à support compact donc

$$\int_X |f|^p \, d\mu \le \|f\|_\infty^p \, \mu(\mathrm{supp}(f)) < +\infty,$$

d'où $\mathrm{Lip}_K(X,\mathbb{K}) \subset \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Il reste maintenant à approcher les fonctions lipschitziennes bornées de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. On introduit à cette fin (*cf.* démonstration du théorème 6.10) une suite de compacts $(L_n)_{n\ge 1}$ vérifiant $X = \bigcup_{n\ge 1} L_n$ et $L_n \subset \mathring{L}_{n+1}$. On considère ensuite les $\varphi_{n,k}(x) := \min(kd(x, {}^c(\mathring{L}_n)), 1)$; l'entier n étant fixé, $\varphi_{n,k} \uparrow \mathbb{1}_{\mathring{L}_n}$ pour $k \to +\infty$. Or $\mu(\mathring{L}_n) < +\infty$ car μ est une mesure de Borel donc $\mathbf{1}_{\mathring{L}_n} \in \mathscr{L}^p(\mu)$ et $\varphi_{n,k} \to \mathbf{1}_{\mathring{L}_n}$ dans $\mathscr{L}^p(\mu)$. Il existe donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\varphi}_n \in \mathrm{Lip}_K(X,\mathbb{K})$ telle que $\|\mathbf{1}_{\mathring{L}_n} - \widetilde{\varphi}_n\|_p \le \frac{1}{n}$. Or, pour toute $f \in \mathrm{Lip}_b(X,\mathbb{K}) \cap \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$,

$$\begin{aligned}
\|f - f\widetilde{\varphi}_n\|_p &\le \|f - f\mathbb{1}_{\mathring{L}_n}\|_p + \|f\mathbb{1}_{\mathring{L}_n} - f\widetilde{\varphi}_n\|_p \\
&\le \underbrace{\left(\int_{{}^c\mathring{L}_n} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_{\to 0 \text{ quand } n\to+\infty} + \|f\|_\infty \underbrace{\|\mathbf{1}_{\mathring{L}_n} - \widetilde{\varphi}_n\|_p}_{\le 1/n}.
\end{aligned}$$

On conclut en notant que $f\widetilde{\varphi}_n \in \mathrm{Lip}_K(X,\mathbb{K})$ puisque $(\tilde{\varphi}_n)_{|\,{}^cL_n} = 0$. $\Diamond$

***Application* 9.6.** L'application essentielle est évidemment fournie par les espaces $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, (équipés d'une norme quelconque d'e.v.n. et) munis de la mesure de Lebesgue λ_d voire, plus généralement, d'une mesure de Borel.

9.7.3 Théorème de Lusin

Si μ est une mesure de Borel régulière sur un espace métrique (X,d), on peut établir un raffinement du théorème 9.9 sous la forme du théorème de Lusin :

***Théorème* 9.11** (Lusin)**.** *Soit μ une mesure de Borel régulière sur un espace métrique (X,d) et $p \in [1,+\infty[$. Alors, pour toute $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) \cap \mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ telle que*

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{\sup} \le \|f\|_\infty, \quad \mu\big(\{f \ne \varphi_\varepsilon\}\big) \le \varepsilon \quad \textit{et} \quad \|f - \varphi_\varepsilon\|_p \le \varepsilon. \tag{9.18}$$

En outre, si f est positive, on peut choisir φ_ε positive également.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur un lemme de séparation classique qui s'établit de faÁon élémentaire en topologie métrique à l'aide des fonctions "distance à un ensemble" $x \mapsto d(x, A)$.

Lemme 9.7. *(Urysohn) Soit O un ouvert et K un compact contenu dans O. La fonction $\rho_{K,O}$ définie par*

$$\rho_{K,O}(x) := \frac{d(x, {}^cO)}{d(x, {}^cO) + d(x, K)}$$

est définie et continue sur tout X. Elle vérifie en outre $\mathbb{1}_K \leq \rho_{K,O} \leq \mathbb{1}_O$.

DÉMONSTRATION : Remarquons d'abord que la fonction $x \mapsto d(x, {}^cO)$ atteint son minimum sur le compact K en un point $x_\infty \in K$. Cette distance est forcément non nulle sinon x_∞ serait dans l'adhérence du fermé ${}^cO$ *i.e.* dans ${}^cO$ lui-même. Or, $K \subset O$ par hypothèse. D'autre part, pour toute partie A non vide de X, la fonction $x \mapsto d(x, A) := \inf_{a\in A} d(x, a)$ est 1-lipschitzienne. Enfin, pour toutes parties non vides A et B de X, pour tout $x \in X$,

$$d(A, B) := \inf_{a\in A,\, b\in B} d(a, b) \leq d(x, A) + d(x, B).$$

La fonction $\rho_{K,O}$ est donc continue comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. $\diamondsuit$

Remarque : La fonction $\rho_{K,O}$ est lipschitzienne de rapport (majoré par) $\dfrac{1}{d({}^cO, K)}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE LUSIN : On procède en plusieurs étapes.
<u>Étape 1</u> *Fonctions indicatrices de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$* :

Soit $A \in \mathscr{B}(X)$ et $f := \mathbb{1}_A$. $f \in \mathscr{L}^p(\mu) \Leftrightarrow \mu(A) < +\infty$.

– Soit $\mu(A) = 0$ et l'on pose simplement $\varphi_\varepsilon := 0$.

– Soit $\mu(A) \neq 0$. La mesure μ étant régulière, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset A \subset O_\varepsilon$ tels que $\mu(O_\varepsilon \backslash K_\varepsilon) \leq \varepsilon^p$, *i.e.* $\|\mathbb{1}_{O_\varepsilon} - \mathbf{1}_{K_\varepsilon}\|_p \leq \varepsilon$. On pose alors $\varphi_\varepsilon := \rho_{K_\varepsilon, O_\varepsilon}$. Comme $\varphi_\varepsilon \leq \mathbb{1}_{O_\varepsilon}$, $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$; d'autre part, $|\varphi_\varepsilon - \mathbb{1}_A| \leq |\mathbb{1}_{O_\varepsilon} - \mathbf{1}_{K_\varepsilon}|$, d'où $\|\varphi_\varepsilon - \mathbb{1}_A\|_p \leq \varepsilon$.

D'autre part $\{f \neq \varphi_\varepsilon\} \subset O_\varepsilon \setminus K_\varepsilon$ donc $\mu(\{f \neq \varphi_\varepsilon\}) \leq \mu(O_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon^p$. Quitte à remplacer ε par $\varepsilon \wedge 1$, on peut toujours supposer que $\varepsilon \leq 1$ et, partant, que $\varepsilon^p \leq \varepsilon$. Enfin $\|\varphi_\varepsilon\|_{\sup} \leq 1 = \|\mathbb{1}_A\|_\infty = \|f\|_\infty$.

<u>Étape 2</u> *Fonctions de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ à valeurs dans* $]0, 1]$:

Soit $f : X \to]0, 1]$ une fonction de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ strictement positive avec $\|f\|_\infty = 1$. Une variante immédiate du lemme fondamental d'approximation (théorème 5.1) montre que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \geq 1$, par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} < f \leq \frac{k+1}{2^n}\}} + n\mathbb{1}_{\{f>n\}} = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} < f \leq \frac{k+1}{2^n}\}}$$

converge vers f quand $n \to +\infty$. Par suite, si l'on pose $f_0 := 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $\varphi_n := 2^n(f_n - f_{n-1})$, il vient immédiatement $f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi_n}{2^n}$.

D'autre part, on vérifie aisément que φ_n ne peut prendre que les valeurs 0 et 1 car, sur $\{f_{n-1} = \frac{k}{2^{n-1}}\} = \{\frac{k}{2^{n-1}} < f \leq \frac{k+1}{2^{n-1}}\}$, la fonction f_n ne peut prendre que les valeurs $\frac{2k}{2^n}$ et $\frac{2k+1}{2^n}$. En conséquence, si l'on pose

$$A_n := \{\varphi_n = 1\} = \bigcup_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left\{\frac{2k+1}{2^n} < f \leq \frac{2(k+1)}{2^n}\right\},$$

$\varphi_n := \mathbb{1}_{A_n}$ et $f := \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \mathbb{1}_{A_n}$. Comme f est dans $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ et $\mathbb{1}_{A_n} \leq 2^n f$, φ_n est aussi dans $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$.

Par conséquent, d'après l'étape 1, $\varepsilon > 0$ étant fixé, il existe pour tout $n \geq 1$, $\varphi_{n,\varepsilon} \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu) \cap \mathscr{C}(X, [0,1])$ tel que

$$\|\varphi_{n,\varepsilon} - \varphi_n\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad \mu(\{\varphi_{n,\varepsilon} \neq \varphi_n\}) \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \text{ et } \|\varphi_{n,\varepsilon}\|_{\sup} \leq \|\varphi_n\|_\infty \leq 1.$$

Il est immédiat que $\varphi_\varepsilon := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi_{n,\varepsilon}}{2^n}$ vérifie à la fois

$$\|\varphi_\varepsilon - f\|_p \leq \varepsilon, \quad \mu(\{\varphi_\varepsilon \neq f\}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \text{ et } \|\varphi_\varepsilon\|_{\sup} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 = \|f\|_\infty.$$

Enfin, la convergence de la série définissant φ_ε étant normale et les $\varphi_{n,\varepsilon}$ étant continues, il en est de mÍme de φ_ε.

Étape 3 *Fonctions de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$, positives et essentiellement bornées* :

Soient $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$, positive, de norme $L^\infty(\mu)$ finie, non nulle et $\delta \in]0, \|f\|_\infty[$, fixé. On pose $f_\delta := \frac{f+\delta}{\|f\|_\infty + \delta}$. Comme f est positive, f_δ l'est strictement et, en outre, $\|f_\delta\|_\infty = 1$. Un réel $\varepsilon > 0$ étant fixé, il existe, d'après l'étape 2, une fonction $\varphi_{\delta,\varepsilon} \in \mathscr{C}(X, [0,1])$ telle que

$$\|\varphi_{\delta,\varepsilon} - f_\delta\|_p \leq \varepsilon', \quad \mu(\{\varphi_{\delta,\varepsilon} \neq f_\delta\}) \leq \varepsilon' \text{ et } \|\varphi_{\delta,\varepsilon}\|_{\sup} \leq 1.$$

où $\varepsilon' := \min\left\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty + \delta}\right\}$. On pose $\tilde{\varphi}_\varepsilon := (\|f\|_\infty + \delta)\varphi_{\delta,\varepsilon} - \delta$, et $\varphi_\varepsilon := \max(\tilde{\varphi}_\varepsilon, 0)$. On vérifie que

— $\{\varphi_\varepsilon \neq f\} \subset \{\tilde{\varphi}_\varepsilon \neq f\} = \{\varphi_{\delta,\varepsilon} \neq f_\delta\}$ car f est positive,
— $\|\varphi_\varepsilon\|_{\sup} \leq \|\tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{\sup} \leq \|f\|_\infty$ car $\delta \in]0, \|f\|_\infty[$ et
— $\|\varphi_\varepsilon - f\|_p = \|\max(\tilde{\varphi}_\varepsilon, 0) - \max(f, 0)\|_p \leq \|\tilde{\varphi}_\varepsilon - f\|_p \leq \varepsilon$ car la fonction $x \mapsto \max(x, 0)$ est 1-lipschitzienne.

Étape 4 *Fonctions de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ essentiellement bornées de signe quelconque* :

Remarquons d'abord que le résultat de l'étape 2 s'étend à une fonction f μ-*p.p.* positive (évident au vu des conditions (9.18)). Si f est μ-essentiellement bornée et positive, il existe donc, pour tout $\varepsilon>0$, une fonction $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ continue et positive vérifiant les conditions (9.18) pour la fonction $f+\|f\|_\infty$. On pose alors $\varphi_\varepsilon:=\tilde{\varphi}_\varepsilon-\|f\|_\infty$. Le seul point à vérifier dans (9.18) est l'inégalité sur les normes $\|\,.\,\|_{\sup}$ et $\|\,.\,\|_\infty$ respectivement de φ_ε et f. Or,

$$-\|f\|_\infty \le \tilde{\varphi}_\varepsilon - \|f\|_\infty \le \|(f+\|f\|_\infty)\|_\infty - \|f\|_\infty \le \|f\|_\infty$$

donc $|\tilde{\varphi}_\varepsilon - \|f\|_{\sup}| \le \|f\|_{\sup}$ *i.e.* $\|\varphi_\varepsilon\|_{\sup} \le \|f\|_\infty$.

Étape 5 *Fonctions de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$* :

Si $f\in\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$, on peut considérer $f^{(A)}:=f\mathbb{1}_{\{|f|\le A\}}$ et considérer A_ε tel que $\|f-f^{(A_\varepsilon)}\|_p\le\varepsilon/2$, puis on applique l'étape 4 à $f^{(A_\varepsilon)}$ et $\varepsilon/2$ après avoir noté que $\{f\neq f^{(A_\varepsilon)}\}=\{|f|>A_\varepsilon\}$.

Étape 6 *Fonctions de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$* :

Soit $f\in\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$. On pose $g:=\dfrac{f}{|f|}\mathbb{1}_{\{f\neq 0\}}$ de façon que $f=|f|\,g$. La fonction g se décompose en $g:=g_1+ig_2$.

Nous allons d'abord résoudre le problème pour g. D'après l'étape 4, il existe, pour tout $\varepsilon>0$, des fonctions continues $\tilde{\gamma}_{1,\varepsilon}$ et $\tilde{\gamma}_{2,\varepsilon}$ relatives à g_1 et g_2 vérifiant (9.18) avec $\varepsilon/2$. On pose alors

$$\gamma_{i,\varepsilon}:=\frac{\tilde{\gamma}_{i,\varepsilon}}{\max(\tilde{\gamma}^2_{1,\varepsilon}+\tilde{\gamma}^2_{2,\varepsilon},1)},\qquad i=1,2.$$

Comme $g_1^2+g_2^2=1$, il est immédiat que, pour $i=1,\ 2$,

$$\{\gamma_{1,\varepsilon}\neq g_1\}\cup\{\gamma_{2,\varepsilon}\neq g_2\}\subset\{\tilde{\gamma}_{1,\varepsilon}\neq g_1\}\cup\{\tilde{\gamma}_{2,\varepsilon}\neq g_2\}$$

On définit alors la fonction $\gamma_\varepsilon=\gamma_{1,\varepsilon}+i\gamma_{2,\varepsilon}$. Étant donné que, pour tous $z,z'\in\mathbb{C}$, $|z'|=1$, on a

$$\left|z'-\frac{z}{\max\{|z|^2,1\}}\right|\le|z'-z|,$$

on obtient donc la majoration $\|g-\gamma_\varepsilon\|_p\le\|g-(\tilde{\gamma}_{1,\varepsilon}+i\tilde{\gamma}_{2,\varepsilon})\|_p\le 2\,\varepsilon/2=\varepsilon$. L'inégalité en norme $L^\infty(\mu)$ est évidente.

On pose alors, $\varepsilon>0$ étant fixé, $\varepsilon':=\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{2(1+\|f\|_p)}\right)$. Il existe $\psi_{\varepsilon'}$ une fonction continue vérifiant (9.18) pour $|f|$ et ε'. On vérifie finalement sans difficulté que la fonction $\varphi_\varepsilon:=\psi_{\varepsilon'}\,\gamma_{\varepsilon'}$ vérifie le bouquet de conditions (9.18). ◊

Exercice : Reprendre le cas complexe en utilisant la représentation trigonométrique mesurable de toute fonction complexe f en $f(x)=\rho(x)e^{2i\pi\theta(x)}$ où ρ et θ sont des fonctions mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}_+$ et $]0,1]$.

9.8 Exercices

$(X, \mathscr{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

9.1 Soit $\mathbb{K}^d$ le $\mathbb{K}$-e.v. canonique de dimension $d \in \mathbb{N}^*$.

$a)$ Soient $p, q \in [1, +\infty]$, $p \leq q$. Déterminer les constantes optimales a, b telles que $a \|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q \leq b \|\cdot\|_p$.

$b)$ Montrer directement que $\lim\limits_{p \to +\infty} \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_\infty$.

$c)$ Soit $p \in]1, +\infty[$. Montrer que

$$\forall\, x \neq y \in \mathbb{K}^d, \;\; \|x\|_p = \|y\|_p = 1 \;\Rightarrow\; \|x+y\|_p < 2.$$

Le résultat subsiste-t-il pour $p=1$ ou $p=+\infty$?

9.2 $a)$ Soient des fonctions $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurables positives telles que $fg \geq 1$. Montrer que $\displaystyle\int_X f\, d\mu \int_X g\, d\mu \geq \mu(X)^2$.

$b)$ Que peut-on dire de la mesure μ s'il existe $f : X \to \mathbb{R}_+^*$ telle que f et $1/f$ soient μ-intégrables ?

9.3 Soient $p, q \in [1, +\infty]$, $p \leq q$.

$a)$ Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré de masse finie. Montrer que l'injection canonique $i : L^q_{\mathbb{K}}(\mu) \hookrightarrow L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ est une application linéaire continue et calculer sa norme. Pour quelles fonctions est-elle atteinte ?

$b)$ Montrer que l'injection canonique $i : \ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \hookrightarrow \ell^q_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ est une application linéaire continue, et calculer sa norme.

9.4 On considère les deux énoncés suivants :

- (i) Pour tous $p, q \in [1, +\infty[$, $p \neq q$, $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) \neq \mathscr{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$,
- (ii) Il existe une suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathscr{A}$ vérifiant $0 < \mu(A_n) < +\infty$.

$a)$ Montrer que (i) implique (ii).

$b)$ Soient $p, q \in [1, +\infty[$, $p \neq q$ et $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n \geq 0}$ de $\mathbb{R}_+$ telle que, parmi les sommes $\displaystyle\sum_{n \geq 0} b_n^p a_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 0} b_n^q a_n$, l'une est finie et l'autre infinie.

$c)$ Déduire du $b)$ que (ii) implique (i).

9.5 Soient $p, q \in [1, +\infty]$, $p \neq q$. Déterminer une suite de $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui soit bornée dans $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ mais pas dans $\mathscr{L}^q_{\mathbb{R}}(\mu)$.

9.6 Soient $p, q \in [1, +\infty]$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de $L^p_{\mathbb{K}}(\mu) \cap L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$ qui converge vers 0 dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et qui est de Cauchy dans $L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$. Montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 dans $L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$.

9.7 On considère $p \in]1,+\infty[$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite positive de $L^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ qui converge vers f dans $L^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$. Montrer que, pour tout $r \in [1,p]$, la suite $(f_n^r)_{n\geq 0}$ converge vers f^r dans $L^{p/r}_{\mathbb{R}_+}(\mu)$.

9.8 Soient $p \in [1,+\infty[$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ qui converge μ-p.p. vers une fonction f de de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\lim_n \|f_n - f\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_n \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

9.9 On considère $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré de masse finie, $p \in]1,+\infty]$, et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ qui converge μ-p.p. vers une fonction f.

$a)$ Montrer que $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

$b)$ Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans $\mathscr{L}^r_{\mathbb{K}}(\mu)$ pour tout $r \in [1,p[$.

$c)$ Le résultat du $b)$ subsiste-t-il si $\mu(X)=+\infty$?

9.10 On considère $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré de masse finie, $r,s \in [1,+\infty[$, une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et Φ l'application définie sur $L^r_{\mathbb{R}}(\mu)$ par $\Phi(f) := g\circ f$.

$a)$ On suppose que g vérifie la condition suivante :

$$\exists\, c>0,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \ |g(y)| \leq c\left(|y|^{r/s}+1\right). \quad (*)$$

Montrer que Φ est une application continue de $L^r_{\mathbb{R}}(\mu)$ dans $L^s_{\mathbb{R}}(\mu)$.

$b)$ On se place sur l'espace mesuré $([0,1],\mathscr{B}([0,1]),\lambda)$ et on suppose que g ne vérifie pas la condition $(*)$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathscr{L}^r_{\mathbb{R}}(\lambda)$ telle que $g\circ f \notin \mathscr{L}^s_{\mathbb{R}}(\lambda)$.

9.11 Montrer que la convergence λ-p.p. n'est pas métrisable.

9.12 On considère $p\in[1,+\infty]$ et la famille des translations τ_a, $a\in\mathbb{R}$, définies sur $L^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ par $\tau_a(f) := f(\cdot + a)$.

$a)$ Montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}$, τ_h est une isométrie de $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda)$.

$b)$ Soit $f\in L^p_{\mathbb{K}}(\lambda)$, $p<+\infty$. Montrer que

$$\lim_{a\to 0} \|\tau_a(f) - f\|_p = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{a\to+\infty} \|\tau_a(f) - f\|_p = 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_p.$$

$c)$ Le résultat du $b)$ s'étend-il au cas $p=+\infty$?

9.13 Soit $p \in [1,+\infty]$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit l'application s_N sur l'espace $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ par $s_N((a_n)_{n\geq 0}) := (a_{n+N})_{n\geq 0}$ (s_N est appelé *opérateur de décalage* ou *shift*).

$a)$ Montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}$, s_N est une application linéaire continue sur $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, et calculer sa norme.

$b)$ Soit $a := (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, $p\in[1,+\infty[$. Calculer $\lim_N \|s_N(a)\|_p$. Que vaut cette limite si $p=+\infty$?

9.14 Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et non μ-p.p. nulle ; soient θ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\theta(p) := \int_X |f|^p \, d\mu$ et $I := \{p \in \mathbb{R}_+^* : \theta(p) < +\infty\}$.

$a)$ Montrer que I est un intervalle et donner un exemple pour lequel I est un singleton.

$b)$ Montrer que $\ln\theta$ est convexe sur I et θ continue sur I.

$c)$ Montrer que, pour tous $p, q \in I$ et $r \in [p,q]$, $\theta(r)^{1/r} \le \max\{\theta(p)^{1/p}, \theta(q)^{1/q}\}$.

9.15 On considère $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace probabilisé ($\mu(X) = 1$). Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $\theta(q_0) := \int_X |f|^{q_0} \, d\mu \in]0, +\infty[$ pour un $q_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

$a)$ Montrer que, pour tout $p \in]0, +\infty]$, $\theta(p)^{\frac{1}{p}} \ge \exp\Big(\int_X \ln|f| \, d\mu\Big)$ (conventions : $\exp(-\infty) := 0$ et $\theta(+\infty)^{+\infty} = \|f\|_\infty$).

$b)$ Montrer que $\lim_{p \to 0^+} \theta(p) = \mu(\{f \ne 0\})$.

$c)$ Montrer que $\lim_{p \to 0^+} \int_X \frac{1}{p}(|f|^p - 1) d\mu = \int_X \ln|f| d\mu \in [-\infty, +\infty[$.

$d)$ En déduire que $\lim_{p \to 0^+} \theta(p)^{\frac{1}{p}} = \exp\Big(\int_X \ln|f| \, d\mu\Big)$.

9.16 *Inégalité de Hardy*

Soit $p \in]1, +\infty[$. À toute fonction $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$, on associe la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt$.

$a)$ Justifier la définition de F et montrer que toute fonction $f \in \mathscr{C}_K(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$ vérifie le cas d'égalité dans

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p \, dx \le \frac{p}{p-1} \int_0^{+\infty} f(x) \, F(x)^{p-1} \, dx, \quad (\mathrm{H}^+)$$

et *l'inégalité de Hardy* :

$$\|F\|_p \le \frac{p}{p-1} \|f\|_p. \quad (\mathrm{H})$$

$b)$ Montrer que l'inégalité de Hardy est vérifiée par toute fonction $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$.

$c)$ Montrer que toute fonction positive $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}_+)$ vérifie l'inégalité (H^+).

$d)$ Montrer que la fonction g vérifie l'égalité dans l'inégalité de Hardy si et seulement si $g = 0$ λ-p.p..

$e)$ Montrer que la constante $\frac{p}{p-1}$ est optimale dans l'inégalité de Hardy.

$f)$ Étudier les cas $p = 1$ et $p = +\infty$.

$g)$ Soit $r \in]-\infty, p-1[$. Montrer que toute fonction $f \in \mathscr{C}_K(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$ vérifie

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p \, x^r \, dx = \frac{p}{p-r-1} \int_0^{+\infty} f(x) \, F(x)^{p-1} \, x^r \, dx.$$

En déduire que toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ Lebesgue-mesurable positive vérifie l'inégalité

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p\, x^r\, dx \le \Big(\frac{p}{p-r-1}\Big)^p \int_0^{+\infty} f(x)^p\, x^r\, dx.$$

9.17 *Inégalité de Weyl*

Soient $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ et, pour $c \in \mathbb{R}$ fixé, F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt + c$.

$a)$ On suppose, dans cette question, que $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ et $(x \mapsto xF(x)) \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$. Montrer que $F \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ et que

$$\int_0^{+\infty} F^2(x)\, dx = -2 \int_0^{+\infty} x\, F(x)\, f(x)\, dx.$$

$b)$ Montrer que toute fonction $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ vérifie *l'inégalité de Weyl*

$$\left(\int_0^{+\infty} F^2(x)\, dx\right)^2 \le 4 \int_0^{+\infty} x^2\, F^2(x)\, dx \int_0^{+\infty} f^2(x)\, dx. \quad \text{(W)}$$

$c)$ Sous les hypothèses du $a)$, montrer que l'inégalité (W) est une égalité si et seulement si il existe une constante $b \in \mathbb{R}$ telle que $F(x) = c\, e^{-bx^2}$.

9.18 Soient $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

$a)$ Établir *l'inégalité de Young*

$$\forall\, a, b \ge 0, \quad a\, b \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

et montrer qu'il y a égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

$b)$ Soient $h \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ et f, g 2 fonctions mesurables positives telles que $f^p, g^q \le h$ μ-p.p.. Montrer l'inégalité

$$\int_X (h - fg)\, d\mu \ge \left(\int_X (h - f^p)\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X (h - g^q)\, d\mu\right)^{1/q}$$

et qu'il y a égalité si et seulement si $f^p = g^q$ μ-p.p..

9.19 $a)$ Soit $p \in [1, +\infty[$. Montrer que $\ell^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ est séparable.

$b)$ Montrer que $\ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ n'est pas séparable.

9.20 Soient X un espace métrique localement compact séparable, μ une mesure de Borel sur $\mathscr{B}(X)$ ($i.e.$ finie sur les compacts) et $p \in]1, +\infty[$.

$a)$ Montrer qu'il existe une base dénombrable d'ouverts de X d'adhérence compacte $\mathscr{U} := \{U_n\}_{n \ge 0}$ stable par intersection finie.

On note D le $\mathbb{K}$-e.v. engendré par la famille de fonctions indicatrices $\{\mathbb{1}_{U_n}\}_{n\geq 0}$.
$b)$ Montrer que, pour tout $\Omega \in \mathscr{O}(X)$ de mesure finie, $\mathbb{1}_\Omega \in \overline{D}$ où $\overline{D}$ désigne l'adhérence de D dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.
$c)$ Montrer que, plus généralement, pour tout $A \in \mathscr{B}(X)$ de mesure finie, $\mathbb{1}_A \in \overline{D}$.
$d)$ En déduire que D est dense dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ puis que $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ est séparable.

9.21 Montrer que l'espace métrique $(\mathscr{A}/\mathscr{R}, d)$ de l'exercice 6.18 est complet.

9.22 On se place sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour toute fonction $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ ou simplement borélienne positive et pour tout $h > 0$, on pose

$$M_h(f)(x) := \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt.$$

$a)$ Montrer que, pour toute $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$, $\|M_h(f)\|_1 \leq \|f\|_1$.
$b)$ Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$. Montrer que $M_h(f)$ tend vers f dans $L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ lorsque le paramètre h tend vers 0.

9.23 *Espace de Marcinkiewicz*

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $p > 1$. On dit qu'une fonction mesurable f appartient *l'espace de Marcinkiewicz* ou $\mathscr{L}^p_{\text{faible}}(\mu)$ s'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $t > 0$, on ait $\mu\big(\{|f| > t\}\big) \leq c/t^p$.
$a)$ Soient $f \in \mathscr{L}^p_{\text{faible}}(\mu)$, $A \in \mathscr{A}$ et $t > 0$. Soient les parties $A_n := A \cap \{|f| > t\,n\}$ et $B_n := A_n \setminus A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer les inégalités

$$\int_A |f|\, d\mu \leq \sum_{n\geq 0} t\,(n+1)\,\mu(B_n) = \sum_{n\geq 0} t\,\mu(A_n) \leq t\,\mu(A) + C\,t^{1-p},$$

où $C > 0$ est une constante réelle.
$b)$ En déduire que $f \in \mathscr{L}^p_{\text{faible}}(\mu)$ si et seulement si il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toute partie $A \in \mathscr{A}$, on ait $\displaystyle\int_A |f|\, d\mu \leq c\,\mu(A)^{1-1/p}$.
$c)$ On suppose que $\mu(X) < +\infty$. Montrer que si $f \in \mathscr{L}^p_{\text{faible}}(\mu)$ alors pour tout $q \in [1, p[$, $f \in \mathscr{L}^q(\mu)$.
$d)$ Donner un exemple d'espace mesuré pour lequel $\mathscr{L}^p_{\text{faible}}(\mu) \neq \mathscr{L}^p(\mu)$.

9.24 *Inégalité de Minkowski inverse*

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) > 0$. Dans cet exercice, la notation f^{-1} désigne la fonction *inverse* $1/f$ de f. Soit $p \geq 1$ et $f, g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$. On suppose que f et g sont μ-p.p. non nulles.
$a)$ Montrer à l'aide de la question $b)$ que, pour tous $a, b \geq 0$ tels que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$,

$$\|(f+g)^{-1}\|_p^p \leq \|(f+g)^{-1}\|_p^{p-1} \left(a\|f^{-1}\|_p + b\|g^{-1}\|_p\right).$$

$b)$ Vérifier que si $\|(f+g)^{-1}\|_p = +\infty$, alors $\|f^{-1}\|_p = \|g^{-1}\|_p = +\infty$.
$c)$ En déduire *l'inégalité de Minkowski inverse :*

$$\frac{1}{\|f^{-1}\|_p} + \frac{1}{\|g^{-1}\|_p} \leq \frac{1}{\|(f+g)^{-1}\|_p}.$$

Chapitre 10

Théorèmes de représentation et applications

10.1 ♣ Théorème de représentation de Riesz

La présentation de la théorie de l'intégrale de Lebesgue et de la construction de la mesure de Lebesgue développée jusqu'à maintenant n'est pas la seule possible. Cette présentation – dite par la *mesure abstraite* – si elle illustre paradoxalement le caractère concret de la notion de mesure semble créer une sorte de fossé entre intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann, la première, plus puissante, se construisant sans référence à la seconde. Cette situation est relativement singulière en Mathématiques où, le plus souvent, l'amélioration d'un outil ou d'une théorie se fait par approfondissement de résultats ou de notions existantes, plutôt que par bifurcation. En fait, il existe une présentation – dite *approche fonctionnelle* – permettant de faire apparaître l'intégrale de Lebesgue comme une simple extension de l'intégrale de Riemann des fonctions continues à support compact à de plus vastes classes de fonctions. Cette approche est essentiellement constituée par le théorème de représentation de Riesz.

10.1.1 Cas des formes linéaires positives

***Théorème* 10.1** (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soient (X,d) un espace métrique localement compact séparable et Φ une forme linéaire positive sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}_K(X,\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact définies sur X. Alors, il existe une unique mesure μ définie sur la tribu borélienne $\mathscr{B}(X)$ telle que*

$$\forall\, f \in \mathscr{C}_K(X,\mathbb{R}),\;\; \Phi(f) = \int_X f\, d\mu. \tag{10.1}$$

En outre, μ est une mesure de Borel caractérisée par

$$\forall\, \Omega \in \mathscr{O}(X),\;\; \mu(\Omega) = \sup\big\{\Phi(f),\; f \in \mathscr{C}_K(X,[0,1]) \text{ et } f \leq \mathbb{1}_\Omega\big\}, \tag{10.2}$$

ou

$$\forall K \textit{ compact}, \quad \mu(K) = \inf\big\{\Phi(f),\ f \in \mathscr{C}_K(X,\mathbb{R}) \textit{ et } \mathbb{1}_K \le f\big\}. \tag{10.3}$$

Remarques : • En fait, l'hypothèse de locale compacité de X est suffisante pour obtenir *l'existence* d'une mesure μ vérifiant (10.1), (10.2) et (10.3). En revanche, l'unicité de la mesure nécessite impérieusement l'hypothèse de séparabilité comme le montre le contre-exemple ci-après.

• On a vu (*cf.* compléments topologiques, paragraphe 6.6.3) que dans un espace métrique localement compact, il y a équivalence entre séparabilité et σ-compacité.

Exemple de non-unicité sur un espace métrique non séparable : Soit $X := \mathbb{R}$ muni de la *distance ultramétrique* d_u : $d_u(x,y) := 0$ si $x = y$ et $d(x,y) := 1$ si $x \neq y$. $(\mathbb{R}, d_u)$ est localement compact car les singletons sont à la fois ouverts et compacts. En revanche, $(\mathbb{R}, d_u)$ n'est pas séparable car toute partie de $(\mathbb{R}, d_u)$ est fermée. Seul $\mathbb{R}$ lui-même est donc dense dans $(\mathbb{R}, d_u)$ et donc aucune partie dénombrable ne peut l'être. D'autre part $\mathscr{B}_{d_u}(\mathbb{R}) = \mathscr{O}((\mathbb{R}, d_u)) = \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Les compacts de $(\mathbb{R}, d_u)$ sont les parties finies donc $\mathscr{C}_K((\mathbb{R}, d_u), \mathbb{R})$ est constitué par les fonctions nulles sauf en un nombre fini de points.

Soient μ et ν les mesures définies par

$$\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}), \qquad \mu(A) := \operatorname{card}(A \cap \mathbb{N}) \quad \text{et} \quad \nu(A) := \mu(A) + m(A \setminus \mathbb{N}),$$

où m est la mesure définie sur $(\mathbb{R}, \mathscr{P}(\mathbb{R}))$ par $m(A) := 0$ si A est dénombrable et $m(A) := +\infty$ sinon. Les mesures μ et ν coïncident notamment sur les parties finies de $\mathbb{R}$, *i.e.* les compacts de $(\mathbb{R}, d_u)$, mais $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = 0 \neq \nu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = +\infty$ donc $\mu \neq \nu$ et ν ne vérifie pas (10.2). Cependant,

$$\forall f \in \mathscr{C}_K(X, \mathbb{R}), \quad \Phi(f) := \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f\, d\nu = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n).$$

La démonstration du Théorème de représentation de Riesz repose en partie sur la notion de mesure extérieure développée lors de l'étape 3 du théorème de Carathéodory (cf. section 6.5). Le résultat utile est réénoncé dans la proposition 10.1 ci-après. Un autre ingrédient important est un lemme d'Urysohn, lemme classique de séparation des fermés par des fonctions continues. Ce lemme s'appuie lui-même sur les propriétés des fonctions distance à un ensemble introduites à la section 3.6.

***Proposition* 10.1.** *Soient X un ensemble non vide et μ^* une* mesure extérieure *sur X* ([1]). *Alors l'ensemble des parties A de X telles que*

$$\forall B \in \mathscr{P}(X), \quad \mu^*(A \cap B) + \mu^*({}^c\!A \cap B) \le \mu^*(B). \tag{10.4}$$

constitue une tribu sur laquelle la restriction de μ^* définit une mesure (l'inégalité ci-dessus se muant en égalité sur cette tribu).

1. μ^* est une application de $\mathscr{P}(X)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ croissante et σ-sous-additive, telle que $\mu^*(\varnothing) = 0$.

***Lemme* 10.1** (Urysohn). *Soit (X, d) un espace métrique localement compact.*

(a) Soient F et F' deux fermés disjoints de X. Alors il existe U et V deux ouverts disjoints de X tels que $F \subset U$ et $F' \subset V$. En outre, si F ou F' est compact, on peut choisir U et V de façon que $\overline{U}$ et $\overline{V}$ soient disjoints.

(b) Soient K un compact de X et Ω un ouvert de X contenant K. Alors il existe $\varphi \in \mathscr{C}_K(X, [0,1])$ telle que $\mathbb{1}_K \leq \varphi \prec \mathbb{1}_\Omega$, où $\varphi \prec \mathbb{1}_\Omega$ signifie $\varphi \leq \mathbb{1}_\Omega$ et $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$.

(c) Soient K un compact de X et $(\Omega_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille d'ouverts de X telle que $K \subset \bigcup_{k=1}^n \Omega_k$. Il existe une famille $(\varphi_k)_{1\leq k\leq n}$ de $\mathscr{C}_K(X, [0,1])$ telle que

$$\forall\, k\in \{1,\dots,n\}, \quad \varphi_k \prec \mathbb{1}_{\Omega_k}, \quad \textit{et} \quad \mathbb{1}_K \leq \sum_{k=1}^n \varphi_k \leq \mathbb{1}.$$

DÉMONSTRATION : (a) Les ouverts $U := \{x \in X : d(x, F') > d(x, F)\}$ et $V := \{x\in X : d(x, F) > d(x, F')\}$ conviennent.

Si, *e.g.*, F est compact, la fonction continue $x \mapsto d(x, F')$ atteint son minimum ε_0, nécessairement strictement positif car $F \cap F' = \emptyset$. On considère alors les ouverts $U := \{x\in X : d(x, F') > \frac{\varepsilon_0}{3}\}$ et $V := \{x\in X : d(x, F') < \frac{\varepsilon_0}{3}\}$.

(b) Comme X est localement compact, tout point $x\in X$ admet un voisinage compact K_x. La partie K étant compacte, il existe n points $x_1, \dots, x_n$ dans K tels que $K \subset \cup_{1\leq i\leq n}\mathring{K}_{x_i}$. Soient U et V les ouverts associés au compact K et au fermé ${}^c\Omega$. Il est clair que $O := U \cap \left(\cup_{1\leq i\leq n}\mathring{K}_{x_i}\right)$ vérifie $O \in \mathscr{O}(X)$, $\overline{O}$ est compact comme fermé dans le compact $\cup_{1\leq i\leq n}K_{x_i}$ et contenu dans $\overline{U}$ donc dans Ω. Vu que $K \subset O$, $d(x, K) + d(x, {}^cO) > 0$ pour tout $x\in X$ et l'on peut donc poser

$$\forall\, x\in X, \quad \varphi(x) := \frac{d(x, {}^cO)}{d(x, K) + d(x, {}^cO)}. \tag{10.5}$$

La fonction φ vérifie $\varphi \prec \mathbb{1}_\Omega$ car $\operatorname{supp}\varphi = \overline{O} \subset \Omega$, et $\varphi \equiv 1$ sur K.

(c) Soient $x\in K$ et $k\in \{1\dots,n\}$ tels que $x\in \Omega_k$. X étant localement compact, il existe un voisinage ouvert U_x d'adhérence compacte vérifiant $\overline{U}_x \subset \Omega_k$. K étant compact, il existe m points $x_1, \dots, x_m$ de K tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}$. Pour chaque $k\in \{1,\dots,n\}$, on définit K_k, comme la réunion des $\overline{U}_{x_j}$ inclus dans Ω_k. D'après le point (a), il existe pour tout $k\in \{1,\dots,n\}$ un ouvert O_k d'adhérence compacte tel que $K_k \subset O_k \subset \overline{O_k} \subset \Omega_k$. Comme $K \subset \bigcup_{k=1}^n K_k \subset \bigcup_{k=1}^n O_k$, il vient $d(x, K) + \sum_{i=1}^n d(x, {}^cO_i) > 0$. On peut donc définir les fonctions $\varphi_k \in \mathscr{C}_K(X, [0,1])$ par

$$\varphi_k(x) := \frac{d(x, {}^cO_k)}{d(x, K) + \sum_{\ell=1}^n d(x, {}^cO_\ell)}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Les φ_k vérifient clairement $\varphi_k \prec \mathbb{1}_{\Omega_k}$ car $\operatorname{supp}\overline{O}_k \subset \Omega_k$, et $\sum_{k=1}^n \varphi_k \equiv 1$ sur K. $\Diamond$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE RIESZ : Pour tout $\Omega \in \mathscr{O}(X)$, on définit $\mu^*(\Omega)$ par la relation suivante – légèrement différente de (10.2) –

$$\mu^*(\Omega) := \sup\,\{\Phi(f),\ f \in \mathscr{C}_K(X,[0,1])\ \mathit{et}\ f \prec \mathbb{1}_\Omega\}, \tag{10.6}$$

puis,

$$\forall\, E \in \mathscr{P}(X), \quad \mu^*(E) = \inf\,\{\mu^*(\Omega),\ E \subset \Omega, \Omega \in \mathscr{O}(X)\}. \tag{10.7}$$

étape 1 μ^* *est une mesure extérieure* :

Il est immédiat par construction que $\mu^*(\emptyset) = 0$ et que μ^* est croissante pour l'inclusion. Reste à établir la σ-sous-additivité de μ^*. Commençons par les familles finies d'ouverts.

$$\forall\, (\Omega_k)_{1 \le k \le n} \in \mathscr{O}(X)^n, \quad \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \mu^*(\Omega_k). \tag{10.8}$$

En fait, il suffit de montrer (10.8) pour $n = 2$, le cas général découlant d'une récurrence immédiate sur n. Soit $f \in \mathscr{C}_K(X,[0,1])$ telle que $f \prec \mathbb{1}_{\Omega_1 \cup \Omega_2}$, on note $K := \operatorname{supp} f \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$. On considère, comme dans le lemme 10.1(c), les fonctions $\varphi_k \in \mathscr{C}_K(X,[0,1])$ telles que $\varphi_k \prec \mathbb{1}_{\Omega_k}$, $k = 1,\ 2$, et $\mathbb{1}_K \le \varphi_1 + \varphi_2 \le 1$.

Soit $f \in \mathscr{C}_K(X,[0,1])$ vérifiant $f \prec \mathbb{1}_{\Omega_1 \cup \Omega_2}$. De $f = f\mathbb{1}_K \le \varphi_1 f + \varphi_2 f$, on déduit immédiatement

$$\Phi(f) = \Phi(\varphi_1 f) + \Phi(\varphi_2 f) \le \mu^*(\Omega_1) + \mu^*(\Omega_2).$$

L'inégalité (10.8) en découle aussitôt.

Soit à présent une suite $(E_n)_{n \ge 1}$ de parties quelconques de X ; si $\mu^*(E_k) = +\infty$ pour un certain $k \ge 1$, alors

$$\mu^*(\bigcup_{n \ge 1} E_n) \le \sum_{n \ge 1} \mu^*(E_n) = +\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \ge 1$, il existe un ouvert de X tel que $E_n \subset \Omega_n$ et $\mu^*(\Omega_n) \le \mu^*(E_n) + \varepsilon/2^n$. On pose $\Omega := \bigcup_{n \ge 1} \Omega_n \in \mathscr{O}(X)$; soit $f \in \mathscr{C}_K(X,[0,1])$ telle que $f \prec \mathbb{1}_\Omega$. $\operatorname{supp} f$ étant compact, il existe $n_\varepsilon \ge 1$ tel que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} \Omega_k$, d'où, d'après (10.8),

$$\Phi(f) \le \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} \Omega_k\right) \le \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \mu^*(\Omega_k) \le \sum_{k=1}^{n} (\mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}) \le \sum_{n \ge 1} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

D'où, finalement,

$$\mu^*(\bigcup_{n \ge 1} E_n) \le \mu^*(\Omega) \le \sum_{n \ge 1} \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Ceci montre que μ^* est bien une mesure extérieure.

étape 2 *La restriction μ de μ^* à $\mathscr{B}(X)$ est une mesure* :

Au vu de la proposition 10.1, le problème se ramène à montrer que l'inégalité (10.4) est vérifiée pour tout $A \in \mathscr{O}(X)$.

– Si $\mu(B) = +\infty$, l'inégalité (10.4) est évidente.

– Si $B \in \mathscr{O}(X)$ et $\mu(B) < +\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f \in \mathscr{C}_K(X, [0,1])$ telle que $f \prec \mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mu^*(A \cap B) \leq \Phi(f) + \varepsilon$. Or supp f et ${}^cA$ sont deux fermés disjoints, donc d'après le lemme 10.1 (a), il existe deux ouverts U et V disjoints tels que supp $f \subset U$ et ${}^cA \subset V$. Soit $g \in \mathscr{C}_K(X, [0,1])$ telle que $g \prec \mathbb{1}_{V\cap B}$ et $\mu^*(V \cap B) \leq \Phi(g) + \varepsilon$, alors

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cap B) + \mu^*({}^cA \cap B) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(V \cap B) &\leq \Phi(f) + \Phi(g) + 2\,\varepsilon \\ &= \Phi(f + g) + 2\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Or, $f + g \prec \mathbb{1}_B$ car $f + g \leq \mathbb{1}_{A\cap B} + \mathbb{1}_{V\cap B} = \mathbf{1}_{(A\cup V)\cap B} \leq \mathbb{1}_B$ et

$$\text{supp}\,(f + g) \subset \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g) \subset (A \cap B) \cup (V \cap B) \subset B.$$

Par conséquent, $\Phi(f + g) \leq \mu^*(B)$ et

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*({}^cA \cap B) \leq \mu^*(B) + 2\,\varepsilon,$$

pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui donne l'inégalité (10.4).

– Si $B \in \mathscr{P}(X)$ avec $\mu^*(B) < +\infty$, il existe, $\varepsilon > 0$ étant fixé, $\Omega \in \mathscr{O}(X)$ tel que $B \subset \Omega$ et $\mu^*(\Omega) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$. Il vient, d'après le cas précédent,

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*({}^cA \cap B) \leq \mu^*(A \cap \Omega) + \mu^*({}^cA \cap \Omega) \leq \mu^*(\Omega) \leq \mu^*(B) + \varepsilon,$$

pour tout $\varepsilon > 0$. D'où l'inégalité (10.4), cette fois en toute généralité. En conclusion $\mu := (\mu^*)_{|\mathscr{B}(X)}$ est une mesure sur $(X, \mathscr{B}(X))$ vérifiant notamment (10.6).

étape 3 *La mesure μ est finie sur les compacts* :

Soit K un compact. Comme X est localement compact, il existe $\Omega \in \mathscr{O}(X)$ d'adhérence compacte telle que $K \subset \Omega$. D'après le lemme 10.1 (b), il existe $\varphi \in \mathscr{C}_K(X, \mathbb{R})$ telle que $\mathbb{1}_K \leq \varphi \prec \mathbb{1}_\Omega$. Par suite, si $f \in \mathscr{C}_K(X, [0,1])$ et $f \prec \mathbb{1}_{\mathring{K}}$, alors $f \leq \mathbf{1}_{\mathring{K}} \leq \mathbb{1}_K \leq \varphi$. La définition 10.6 de μ (et μ^*) sur $\mathscr{O}(X)$ et la croissance de la forme linéaire Φ entraînent

$$\mu(\mathring{K}) = \sup\,\{\Phi(f),\ f \in \mathscr{C}_K(X, [0,1]),\ f \prec \mathbb{1}_{\mathring{K}}\} \leq \Phi(\varphi) < +\infty.$$

Ceci est en particulier vérifié par le compact $\overline{\Omega}$, or $\Omega \subset \mathring{\overline{\Omega}}$ donc

$$\mu(K) \leq \mu(\Omega) \leq \mu(\mathring{\overline{\Omega}}) < +\infty.$$

étape 4 *Pour tout* $\Omega \in \mathcal{O}(X)$ *d'adhérence* $\overline{\Omega}$ *compacte, il existe une suite croissante* $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ *de* $\mathcal{C}_K(X,[0,1])$ *telle que* $0 \leq \varphi_n \uparrow \mathbb{1}_\Omega$ *et* $\lim_n^{\uparrow} \Phi(\varphi_n) \geq \mu(\Omega)$:

On pose, pour tout $n \geq 1$, $K_n := \{x \in X : d(x, {}^c\Omega) \geq 1/n\}$. K_n est inclus dans Ω, on considère donc la fonction φ_n de $\mathcal{C}_K(X,[0,1])$ associée au couple (K_n, Ω) et fournie par le lemme 10.1(b). Comme $\Omega = \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} K_n$, on a clairement $\operatorname{supp} \varphi_n \subset \Omega$ pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq \varphi_n \uparrow \mathbb{1}_\Omega$ quand n tend vers $+\infty$.

Il reste à présent à étudier la suite $(\Phi(\varphi_n))_{n\geq 1}$. $\overline{\Omega}$ étant compact, $\mu(\Omega)$ est fini ; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $f \in \mathcal{C}_K(X,[0,1])$ telle que $f \prec \mathbb{1}_\Omega$ et $\mu(\Omega) \leq \Phi(f) + \varepsilon$.

Définissons $\theta_n := \min\{f, \varphi_n\}$, $n \geq 1$. Les fonctions θ_n sont dans $\mathcal{C}_K(X,[0,1])$ et, pour tout $x \in K_n$, $\varphi_n(x) = 1$ et $\theta_n(x) = f(x)$, d'où

$$\operatorname{supp}(f - \theta_n) \subset \Omega \cap \overline{\Omega \setminus K_n} = \Omega \setminus \mathring{K}_n \subset \Omega \setminus K_{n-1}.$$

car $K_{n-1} \subset \mathring{K}_n$. Les fonctions θ_n vérifient donc $f - \theta_n \prec \mathbb{1}_{\Omega \setminus K_{n-1}}$, et, par conséquent,

$$\Phi(f) = \Phi(\theta_n) + \Phi(f - \theta_n) \leq \Phi(\varphi_n) + \mu(\Omega \setminus K_{n-1}).$$

Or $\lim_n \mu(\Omega \setminus K_{n-1}) = 0$ car $K_n \subset K_{n+1}$, $\bigcup_n K_n = \Omega$ et $\mu(\Omega) < +\infty$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu(\Omega) - \varepsilon \leq \Phi(f) \leq \lim_n^{\uparrow} \Phi(\varphi_n),$$

ce qui donne le résultat recherché.

étape 5 *Démonstration de la propriété de représentation (10.1)* :

Commençons par montrer que $\Phi(f) \leq \displaystyle\int_X f\, d\mu$ pour $f \in \mathcal{C}_K(X, \mathbb{R}_+)$. Quitte à remplacer f par $\frac{f}{1+\|f\|_{\sup}}$, on peut supposer que $f(X) \subset [0,1[$. Soit $n \geq 1$; on pose, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$E_k := \left\{\frac{k}{n} \leq f < \frac{k+1}{n}\right\} \cap K \quad \text{où} \quad K := \operatorname{supp} f.$$

Les $E_k \in \mathcal{B}(X)$ car f est continue, donc borélienne, et E_k est de mesure finie car $E_k \subset K$. Il existe donc $\Omega_k \in \mathcal{O}(X)$ tel que $E_k \subset \Omega_k$ et $\mu(\Omega_k) \leq \mu(E_k) + \mu(K)/^2$. De plus, comme

$$K = \bigcup_{k=0}^{n-1} E_k \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} \Omega_k,$$

le lemme 10.1(c) fournit des fonctions $\varphi_k \in \mathcal{C}_K(X,[0,1])$, $0 \leq k \leq n-1$, telles que $\varphi_k \prec \mathbb{1}_{\Omega_k}$ et $\mathbb{1}_K \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k$. En conséquence, $f = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k f$ et

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad \varphi_k f \prec \mathbb{1}_{\Omega_k} \text{ et } \varphi_k f \leq \varphi_k \frac{k+1}{n}.$$

$$\text{D'où}\qquad \Phi(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(\varphi_k f) \;\leq\; \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(\varphi_k)\,\frac{k+1}{n} \;\leq\; \sum_{k=0}^{n-1} \mu(\Omega_k)\,\frac{k+1}{n},$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \mu(E_k)\,\frac{k+1}{n} + \frac{\mu(K)}{n}.$$

D'autre part, les E_k étant deux à deux disjoints, il vient

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{E_k} f\,d\mu \geq \sum_{k=0}^{n-1} \mu(E_k)\,\frac{k}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(E_k)\,\frac{k+1}{n} - \frac{\mu(K)}{n}.$$

On en déduit $\Phi(f) \leq \int_X f\,d\mu + 2\,\mu(K)/n$ pour $n \geq 1$, donc $\Phi(f) \leq \int_X f\,d\mu$.

Soit à présent $f \in \mathscr{C}_K(X,\mathbb{R})$ de signe quelconque. Il existe $\Omega \in \mathscr{O}(X)$ tel que $\overline{\Omega}$ compact et $K := \operatorname{supp} f \subset \Omega$. Considérons la suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de l'étape 4 attachée à Ω. Pour $n \geq 1$, $\mathbb{1}_K \leq \varphi_n$ car $K \subset K_n$, donc il existe une constante $c > 0$ telle que $f + c\,\varphi_n \geq 0$ et, d'après ce qui précède

$$\Phi(f) + c\,\Phi(\varphi_n) \leq \int_X f\,d\mu + c\int_X \varphi_n\,d\mu.$$

Or, d'après l'étape 4 et le théorème de Beppo Levi,

$$\lim_n{}^{\uparrow}\,\Phi(\varphi_n) \geq \lim_n{}^{\uparrow} \int_X \varphi_n\,d\mu = \mu(\Omega),$$

donc $\Phi(f) \leq \int_X f\,d\mu$. En changeant f en $-f$ on obtient l'égalité (10.1).

<u>étape 6</u> *La propriété (10.1) entraîne la caractérisation (10.3) ; unicité de* μ :

Soit ν une mesure définie sur $\mathscr{B}(X)$ vérifiant (10.1). Soient K un compact et $f \in \mathscr{C}_K(X,\mathbb{R})$ vérifiant $\mathbb{1}_K \leq f \leq \mathbb{1}$. Alors on a

$$\nu(K) = \int_X \mathbb{1}_K\,d\nu \leq \int_X f\,d\nu = \Phi(f),$$

donc $\nu(K) \leq \inf\big\{\Phi(f) : \mathbb{1}_K \leq f \leq \mathbb{1}\big\}$. En particulier, ν est une mesure de Borel (*i.e.* finie sur les compacts).

Passons à l'inégalité contraire. Soient $\Omega \in \mathscr{O}(X)$ d'adhérence compacte et $K \subset \Omega$. On pose $\Omega_n := \big\{x \in X : d(x,K) < 1/n\big\} \cap \Omega$, $n \geq 1$. Les Ω_n décroissent pour l'inclusion, leur intersection est égalée à K et $\nu(\Omega_n) \leq \nu(\overline{\Omega}) < +\infty$, d'où $\lim_n{}^{\downarrow}\nu(\Omega_n \setminus K) = 0$. Considérons les fonctions φ_n du lemme 10.1(b) associées aux couples (Ω_n, K). Pour tout $n \geq 1$, $\operatorname{supp}\varphi_n \subset \Omega_n \subset \Omega_{n-1}$ et $\mathbb{1}_k \leq \varphi_n \leq \mathbb{1}_{\Omega_n}$. On a donc $\Phi(\varphi_n) \leq \nu(\Omega_n) \leq \nu(K) + \nu(\Omega_n \setminus K)$, d'où, pour $n \geq 1$,

$$\nu(K) \geq \Phi(\varphi_n) - \nu(\Omega_n \setminus K),$$
$$\geq \inf\big\{\Phi(\varphi)\ \ \varphi \in \mathscr{C}_K(X,[0,1]) \text{ et } \mathbb{1}_K \leq f\big\} - \nu(\Omega_n \setminus K).$$

En conséquence la mesure ν vérifie nécessairement la relation (10.3). C'est en particulier le cas de la mesure $\mu := (\mu^*)_{|\mathscr{B}(X)}$ construite dans les étapes antérieures. D'autre part, si ν désigne maintenant une autre mesure ayant la propriété de représentation (10.1), μ et ν coïncident nécessairement sur les compacts par (10.3) donc elles sont égales d'après le théorème 6.12(b) puisque X est localement compact séparable.

<u>étape 7</u> *équivalence des définitions* (10.2) *et* (10.6) :

Il est clair que pour tout $\Omega \in \mathscr{O}(X)$,

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) &:= \sup\left\{\Phi(f), f \in \mathscr{C}_K(X,[0,1])\, f \prec \mathbb{1}_\Omega\right\}\\ &\leq \sup\left\{\Phi(f), f \in \mathscr{C}_K(X,[0,1]),\ f \leq \mathbb{1}_\Omega\right\}.\end{aligned}$$

Réciproquement, si $f \in \mathscr{C}_K(X,[0,1])$ et $f \leq \mathbb{1}_\Omega$ alors, d'après l'étape 5,

$$\Phi(f) = \int_X f\, d\mu \leq \int_X \mathbb{1}_\Omega\, d\mu = \mu(\Omega),$$

donc, en passant au sup, $\sup\{\Phi(f),\ f \in \mathscr{C}_K(X,[0,1])\ et\ f \leq \mathbb{1}_\Omega\} \leq \mu(\Omega)$, d'où l'égalité. $\lozenge$

Comme indiqué dans le chapeau de ce chapitre, on pourrait, à partir de ce théorème – présenté de façon légèrement différente – reconstruire l'ensemble de la théorie de la mesure et de l'intégration au sens de Lebesgue sur un espace localement compact et séparable. Nous nous contenterons de montrer qu'il fournit une construction alternative de la mesure de Lebesgue à partir de l'intégrale de Riemann.

Application à une (nouvelle) construction de la mesure de Lebesgue.

On considère sur $\mathscr{C}_K(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'application Φ définie par

$$\Phi(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dots\, dx$ désigne l'intégrale (faussement généralisée) au sens de Riemann telle qu'elle est esquissée dans le chapitre 1. L'application Φ est clairement une application linéaire positive ; il existe donc une unique mesure de Borel μ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant les conditions (10.1), (10.2) et (10.3).

Il est immédiat par un changement de variable élémentaire que, pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_K(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\Phi(f) = \Phi(f \circ \tau_a)$. L'unicité de la mesure dans le théorème de représentation entraîne l'invariance de μ par translation.

D'autre part, on considère, pour tout $n \geq 2$, les fonctions continues à support compact

$$f_n(x) := \big[\min\big(nx, 1, n(1-x)\big)\big]^+ \qquad \text{où } u^+ := \max(u, 0).$$

Celles-ci vérifient $0 \leq f_n \leq \mathbb{1}_{]0,1[}$ et $\Phi(f_n) = 1 - 1/n \to 1$ quand n tend vers $+\infty$. On déduit immédiatement de la caractérisation (10.2) que $\mu(]0,1[) \geq 1$.

De même, on montre que $\mu([0,1]) \leq 1$ en s'appuyant sur la caractérisation (10.3) et sur les fonctions

$$g_n(x) := \left[\min\left(n(x+1/n), 1, n(1-x+1/n)\right)\right]^+, \; n \geq 2,$$

qui majorent $\mathbb{1}_{[0,1]}$.

En conséquence, $\mu([0,1]) = 1$. C'est donc bien la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (*cf.* théorème 6.1) qui est ainsi construite par le théorème de représentation de Riesz : en d'autres termes $\mu = \lambda$.

10.1.2 Mesures de Radon

***Définition* 10.1.** *Soit X un espace métrique localement compact. On appelle* mesure de Radon *sur X toute forme linéaire continue sur $(\mathscr{C}_K(X,\mathbb{K}), \|\,.\,\|_{\sup})$.*

Cette définition n'est pas la plus générale possible puisqu'elle induit la finitude d'une telle mesure dès que X est métrique localement compact séparable (*cf.* théorème 10.2). Nous reviendrons brièvement sur ce point en fin de section.

Le théorème de représentation de Riesz s'étend aux mesures de Radon réelles ou complexes de la manière suivante :

***Théorème* 10.2.** (a) *Soient X un espace métrique localement compact et Φ une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}_K(X,\mathbb{R})$. Alors, il existe deux mesures finies μ^+ et μ^- telles que*

$$\forall\, f \in \mathscr{C}_K(X,\mathbb{R}), \;\; \Phi(f) = \int_X f\, d\mu^+ - \int_X f\, d\mu^-. \tag{10.9}$$

(b) *Soit Φ une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}_K(X,\mathbb{C})$. Alors, il existe quatre mesures finies $\mu_r^{\pm}$ et $\mu_i^{\pm}$ telles que*

$$\forall\, f \in \mathscr{C}_K(X,\mathbb{C}), \;\; \Phi(f) = \int_X f\, d\mu_r^+ - \int_X f\, d\mu_r^- + i\int_X f\, d\mu_i^+ - i\int_X f\, d\mu_i^-. \tag{10.10}$$

Remarque : *Dans le cas réel, on peut utiliser la notation*

$$\Phi(f) = \int_X f\, d\mu \quad \textit{avec la “mesure signée”}\ \mu := \mu^+ - \mu^-.$$

Dans le cas complexe,

$$\Phi(f) = \int_X f\, d\mu \quad \textit{avec la “mesure complexe”}\ \mu := \mu_r + i\,\mu_i.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 10.2 : (b) Supposons acquis le cas réel (a). Soit Φ une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}_K(X,\mathbb{C})$. Les applications Φ_r et Φ_i définies sur $\mathscr{C}_K(X,\mathbb{R})$ par $\Phi_r(f) := \Re(\Phi(f))$ et $\Phi_i(f) := \Im(\Phi(f))$ sont clairement des formes linéaires sur $\mathscr{C}_K(X,\mathbb{R})$. Alors d'après le cas (a), il existe quatre mesures de Borel $\mu_r^{\pm}$ et $\mu_i^{\pm}$ telles que, pour toute fonction $g \in \mathscr{C}_K(X,\mathbb{R})$,

$$\Phi_r(g) = \int_X g\,d\mu_r^+ - \int_X g\,d\mu_r^- \quad \text{et} \quad \Phi_i(g) = \int_X g\,d\mu_i^+ - \int_X g\,d\mu_i^- .$$

Soit $f := u+i\,v \in \mathscr{C}_K(X,\mathbb{C})$. Par linéarité de Φ, on a

$$\begin{aligned}
&\Phi(f) = \Phi(u) + i\,\Phi(v) = \Phi_r(u) + i\,\Phi_i(u) + i\big(\Phi_r(v) + i\,\Phi_i(v)\big)\\
&= \Phi_r(u) + i\,\Phi_r(v) + i\big(\Phi_i(u) + i\,\Phi_i(v)\big)\\
&= \int_X (u+i\,v)\,d\mu_r^+ - \int_X (u+i\,v)\,d\mu_r^- + i\int_X (u+i\,v)\,d\mu_i^+ - i\int_X (u+i\,v)\,d\mu_i^-,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire la décomposition (10.10).

(a) Le cas réel est une conséquence du théorème 10.1 de représentation des formes linéaires positives et du théorème 10.3 de décomposition des formes linéaires réelles continues sur un e.v.n. établi ci-dessous. Plus précisément, on applique ce théorème à Φ et $(\mathscr{C}_K(X,\mathbb{R}), \|\,.\,\|_{\sup})$ pour produire deux formes linéaires positives $\Phi^{\pm}$ définies par (10.12) et vérifiant (10.11). On obtient ainsi, *via* la remarque suivant le théorème de représentation de Riesz (théorème 10.1), deux mesures de Borel $\mu^{\pm}$ représentant respectivement $\Phi^{\pm}$ et vérifiant la propriété de régularité (10.2). En appliquant celle-ci à l'ouvert X, il vient alors d'après la définition de $\Phi^{\pm}$

$$\begin{aligned}
\mu^{\pm}(X) &\le \sup\big\{\Phi^{\pm}(\varphi),\ \varphi\in \mathscr{C}_K(X,[0,1]),\ 0\le\varphi\le \mathbb{1}_{K_n}\big\}\\
&\le \|\Phi^{\pm}\| < +\infty. \qquad \Diamond
\end{aligned}$$

***Théorème* 10.3.** *Soit Y un ensemble non vide. On considère un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel E de $\mathscr{F}(Y,\mathbb{R})$, supposé muni d'une norme $\|\cdot\|$. On note E_+ le cône des fonctions positives appartenant à E. On suppose que E vérifie*

(i) *E est stable par valeur absolue :*

$$\forall\, f\in E,\ |f|\in E_+ \ \text{ et } \ \|\,|f|\,\| = \|f\|\ ;$$

(ii) *la norme $\|\cdot\|$ est croissante :*

$$\forall\, f,g\in E_+,\ f\le g \ \Rightarrow\ \|f\|\le\|g\|.$$

Soit Φ une forme linéaire (réelle) continue sur E. Alors Φ se décompose sous la forme

$$\Phi = \Phi^+ - \Phi^- \tag{10.11}$$

où Φ^+ et Φ^- sont des formes linéaires continues, positives, définies pour toute fonction positive f de E, par

$$\begin{cases} \Phi^+(f) := \sup\big\{\Phi(\varphi) : \varphi\in E_+ \text{ et } \varphi\le f\big\}\\ \Phi^-(f) := -\inf\big\{\Phi(\varphi) : \varphi\in E_+ \text{ et } \varphi\le f\big\}. \end{cases} \tag{10.12}$$

Les formes linéaires Φ^+ et Φ^- sont appelées respectivement partie positive *et* partie négative *de Φ, et sont caractérisées par*

$$\begin{cases} \Phi^+(f) := \min\big\{\Phi_1(f) : \Phi_1 \textit{ et } \Phi_1-\Phi \textit{ linéaires positives sur } E\big\} \\ \Phi^-(f) := \max\big\{\Phi_2(f) : \Phi_2 \textit{ et } \Phi_2+\Phi \textit{ linéaires positives sur } E\big\}. \end{cases} \tag{10.13}$$

Remarque : Les espaces normés $\big(\mathscr{C}_K(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup}\big)$, $\big(L^p_{\mathbb{R}}(\mu), \|\cdot\|_p\big)$, $p\in[1,+\infty[$, vérifient les hypothèses du théorème 10.3.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 10.3 :
Soit Φ^+ l'application définie sur $E_+ := \{f\in E : f\geq 0\}$ par (10.12).

<u>étape 1</u> Φ^+ *est positive et finie sur* E_+ :

Soit $f \in E_+$. Comme $0\in E_+$, $\Phi^+(f) \geq 0$. Soit maintenant $\varphi \in E_+$ telle que $0 \leq \varphi \leq f$. Par continuité de la fonction Φ et par croissance de la norme, on a $\Phi(\varphi) \leq \|\Phi\|\,\|\varphi\| \leq \|\Phi\|\,\|f\|$, d'où en passant au sup

$$0 \leq \Phi^+(f) \leq \|\Phi\|\,\|f\| < +\infty. \tag{10.14}$$

<u>étape 2</u> Φ^+ *est additive sur* E_+ :

Soient $f_1, f_2 \in E_+$ et $\varphi \in E_+$ telle que $\varphi \leq f_1+f_2$. On décompose φ en

$$\varphi = \min(f_1,\varphi)+\max(\varphi-f_1,0) \quad \text{où} \quad \min(f_1,\varphi) \leq f_1 \text{ et } \max(\varphi-f_1,0) \leq f_2.$$

Or $\min(f_1,\varphi)=\frac{1}{2}(f_1+\varphi-|f_1-\varphi|) \in E_+$ et $\max(\varphi-f_1,0)=\varphi-\min(f_1,\varphi) \in E_+$. Il vient alors, par définition de Φ^+, $\Phi(\varphi) \leq \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2)$, d'où, finalement,

$$\Phi^+(f_1+f_2) = \sup_{0\leq\varphi\leq f_1+f_2} \Phi(\varphi) \leq \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2).$$

Passons à l'inégalité contraire. Soit $\varepsilon>0$. D'après la définition de Φ^+, il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in E_+$ telles que $0 \leq \varphi_i \leq f_i$ et $\Phi^+(f_i) \leq \Phi(\varphi_i) + \varepsilon$ pour $i=1,2$. Comme $0 \leq \varphi_1+\varphi_2 \leq f_1+f_2$, il vient

$$\forall\,\varepsilon > 0, \quad \Phi^+(f_1+f_2) \geq \Phi(\varphi_1+\varphi_2) = \Phi(\varphi_1)+\Phi(\varphi_2) \geq \Phi^+(f_1)+\Phi^+(f_2)-2\,\varepsilon,$$

et partant, $\Phi^+(f_1+f_2) \geq \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2)$.

<u>étape 3</u> *Définition et additivité de* Φ^+ *sur* E :

Soit $f \in E$. Il est immédiat que $f^\pm := \frac{1}{2}(|f| \pm f) = \max(\pm f, 0) \in E_+$. On pose donc $\Phi^+(f) := \Phi^+(f^+) - \Phi^+(f^-)$.

Soient f, $g\in E$. On décompose classiquement $f+g$ en

$$\begin{aligned} f+g = (f+g)^+ - (f+g)^- &= f^+ - f^- + g^+ - g^-, \\ \text{d'où} \qquad (f+g)^+ + f^+ + g^- &= (f+g)^- + f^+ + g^+. \end{aligned}$$

L'additivité de Φ^+ sur E_+ entraîne alors

$$\Phi^+((f+g)^+) + \Phi^+(f^-) + \Phi^+(g^-) = \Phi^+((f+g)^-) + \Phi^+(f^+) + \Phi^+(f^-),$$

soit, finalement, en repartant dans l'autre sens, $\Phi^+(f+g) = \Phi^+(f) + \Phi^+(g)$.

<u>étape 4</u> Φ^+ *est continue sur* E :

Soit $f \in E$. La positivité de Φ^+ entraîne $\Phi^+(|f| \pm f) \geq 0$, d'où, par additivité de Φ^+, $\Phi^+(|f|) \geq \pm\,\Phi^+(f)$ *i.e.* $|\Phi^+(f)| \leq \Phi^+(|f|)$. D'autre part, $(-f)^{\pm} = f^{\mp}$ donc $\Phi^+(-f) = -\Phi^+(f)$. Soient à présent $f_1, f_2 \in E$. L'additivité de Φ^+ et la majoration (10.14) de l'étape 1 impliquent alors

$$\begin{aligned}|\Phi^+(f_1) - \Phi^+(f_2)| = |\Phi^+(f_1 - f_2)| \leq \Phi^+(|f_1 - f_2|) &\leq \|\Phi\|\,\|\,|f_1 - f_2|\,\| \\ &= \|\Phi\|\,\|f_1 - f_2\|,\end{aligned}$$

d'où la continuité de Φ^+. <u>étape 5</u> Φ^+ *est une forme linéaire sur* E :

Soit $f \in E$. L'additivité de Φ^+ et l'égalité $\Phi^+(-f) = -\,\Phi^+(f)$ entraînent $\Phi^+(nf) = n\,\Phi^+(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Soit $r := \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p,\, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$. Il vient

$$\Phi^+(qrf) = q\,\Phi^+(rf) = \Phi^+(pf) = p\,\Phi^+(f),$$

d'où $\Phi^+(rf) = r\Phi^+(f)$. La continuité de Φ^+ sur E et la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ entraînent alors que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Phi^+(\lambda f) = \lambda\Phi^+(f)$. Compte tenu de l'additivité de l'étape 4, Φ^+ est donc une forme linéaire sur E.

<u>étape 6</u> *Vérification des relations (10.12) et (10.13)* :

La forme linéaire Φ^+ étant définie par (10.12), on définit Φ^- par (10.11) *i.e.*,

$$\begin{aligned}\forall\, f \in E, \quad \Phi^-(f) &= \Phi^+(f) - \Phi(f) \\ &= \sup\{\Phi(\psi - f),\, \psi \in E_+,\, \psi \leq f\} \\ &= \sup\{-\Phi(\varphi),\, \varphi \in E_+,\, \varphi \leq f\} \quad (\text{poser } \varphi := f - \psi) \\ &= -\inf\{\Phi(\varphi),\, \varphi \in E_+,\, \varphi \leq f\},\end{aligned}$$

d'où (10.12) pour Φ^-.

Soient Φ_1 et Φ_2 deux formes linéaires positives sur E telles que $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$. Soient $f \in E$ et $\varphi \in E$ telles que $0 \leq \varphi \leq f$. Par positivité de Φ_1 et Φ_2, on a $\Phi_1(f) \geq \Phi_1(\varphi) = \Phi(\varphi) + \Phi_2(\varphi) \geq \Phi(\varphi)$, d'où en passant au sup, $\Phi_1(f) \geq \Phi^+(f)$. On en déduit que $\Phi_2(f) = \Phi(f) - \Phi_1(f) \leq \Phi(f) - \Phi^+(f) = \Phi^-(f)$, d'où (10.13). $\Diamond$

Remarque : L'énoncé donné ici n'est pas le plus général possible lorsque X est σ-compact. On peut munir l'espace $\mathscr{C}_K(X, \mathbb{R})$ de la topologie de la convergence uniforme *dans un compact fixe i.e.* $f_n \to f$ s'il existe un compact K de X tel que $\{f_n \neq 0\} \subset K$ pour tout $n \geq 1$ et $f_{n|K} \to f_{|K}$ uniformément. Il ne s'agit plus d'une topologie d'e.v.n. et le théorème (10.3) ne s'applique plus. Néanmoins, il s'applique toujours sur chacun des s.e.v. $\mathscr{C}_{K_n}(X, \mathbb{R})$ (la trace de la topologie ci-dessus est celle de la convergence uniforme) où K_n est une suite de compacts "épuisant" X (et vérifiant $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$). Si l'on appelle maintenant *mesure de Radon* toute forme linéaire Φ sur $\mathscr{C}_K(X, \mathbb{R})$ continue pour la topologie ci-dessus, on peut donc la représenter *localement* sur chaque $\mathscr{C}_{K_n}(X,\mathbb{R})$, $n \geq 1$, puis "recoller" les représentations ainsi obtenues en s'appuyant sur l'unicité de la représentation. On obtient ainsi une représentation de la forme (10.9) pour Φ par deux mesures de Borel $\mu^{\pm}$. Il s'agit de la forme la plus générale du théorème de représentation de Riesz. Le cas complexe s'étend de même.

10.2 Théorème de Radon-Nikodym

On a vu au chapitre 8 que si $f : (X,\mathscr{A}) \to \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable, alors l'application $\nu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par

$$\forall\, A \in \mathscr{A},\ \nu(A) := \int_A f\, d\mu$$

est une mesure, finie si et seulement si $f \in \mathscr{L}^{\mathbb{1}}_{\mathbb{R}_+}(\mu)$. f est appelée la *densité* ou *dérivée de Radon-Nikodym* de ν par rapport à μ. On la note souvent $f := \dfrac{d\nu}{d\mu}$.

Il est immédiat que ν ainsi définie vérifie la propriété suivante, dite d'absolue continuité et notée $\nu \ll \mu$:

$$\forall\, A \in \mathscr{A},\ \ \mu(A) = 0\ \Rightarrow\ \nu(A) = 0. \tag{10.15}$$

La mesure ν est souvent notée $f.\mu$.

Le théorème de Radon-Nikodym a pour objet d'établir une réciproque à cette construction : si $\nu \ll \mu$, ν a-t-elle nécessairement une densité par rapport à μ ? En toute généralité la réponse est négative comme l'illustre le contre-exemple suivant.

Contre-exemple : On considère l'espace mesurable $([0,1],\mathscr{B}([0,1]))$ respectivement muni de la mesure de comptage m et de la mesure de Lebesgue λ. Il est immédiat que, si $m(A)=0$, $A=\emptyset$ et partant $\lambda(A)=0$. En conséquence $\lambda \ll m$.

Supposons maintenant l'existence d'une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall\, A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \qquad \lambda(A) = \int_A f dm.$$

Comme $\lambda([0,1]) = 1$, $f \in \mathscr{L}^{\mathbb{1}}_{\mathbb{R}_+}(m)$. Par suite (*cf.* exemple 2. à la suite du corollaire 7.2), l'ensemble $D := \{f > 0\}$ est au plus infini dénombrable. ${}^cD$ est donc bien un borélien de mesure de Lebesgue $\lambda({}^cD) = 1$; or il est clair que $\mathbb{1}_{{}^cD} = 0$ $f.dm$-*p.p.* ce qui entraîne que $\displaystyle\int_{{}^cD} f dm = 0$.

Cet exemple montre qu'il nous faut imposer des restrictions sur la mesure de référence μ. Avant de démontrer le théorème dans les deux sections qui suivent, nous allons établir une caractérisation équivalente de l'absolue continuité.

***Proposition* 10.2.** *Soient μ et ν deux mesures sur l'espace mesurable $(X,\mathscr{A})$.*

(a) *Si μ et ν vérifient*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \ \textit{ tel que } \ \forall\, A \in \mathscr{A},\ \ \mu(A) < \eta \ \Rightarrow\ \nu(A) < \varepsilon, \tag{10.16}$$

alors $\nu \ll \mu$.

(b) *Réciproquement, si ν est une* mesure finie *et si $\nu \ll \mu$, alors la condition (10.16) est vérifiée.*

DÉMONSTRATION : (a) Si la condition (10.16) est réalisée, il est immédiat que $\nu \ll \mu$. En effet, si $\mu(A) = 0$, $\mu(A) < \eta_\varepsilon$ donc $\nu(A) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ *i.e.* $\nu(A) = 0$.

(b) Pour la réciproque on raisonne par contraposée. Si la condition (10.16) n'est pas vérifiée, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, il existe $A_n \in \mathscr{A}$ vérifiant $\mu(A_n) < \frac{1}{n^2}$ et $\nu(A_n) \geq \varepsilon_0$. On pose alors $A := \bigcap_{n\geq 1}^{\downarrow} \bigcup_{k\geq n} A_k$. Pour tout $n \geq 1$, on a $\mu\Big(\bigcup_{k\geq n} A_k\Big) \leq \sum_{k\geq n} \dfrac{1}{k^2}$. Or $\sum_{k\geq n} \dfrac{1}{k^2}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc $\mu(A) = 0$ car $\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) < +\infty$. D'autre part, $\nu(\bigcup_{k\geq n} A_k) \geq \nu(A_n) \geq \varepsilon_0$. La mesure ν étant finie, $\nu(A) \geq \varepsilon_0$, ce qui entraîne que $\nu \not\ll \mu$. $\quad\diamondsuit$

10.2.1 Le cas d'une mesure de référence μ finie

***Théorème* 10.4** (Radon-Nikodym)**.** *Soient μ et ν deux mesures finies sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$. Il y a équivalence entre*

(i) $\forall\, A \in \mathscr{A}\ \ \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$,

(ii) $\exists\, f \in \mathscr{L}^{\mathbb{1}}_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ *telle que* $\forall\, A \in \mathscr{A},\ \ \nu(A) = \displaystyle\int_A f\, d\mu.$

En outre, la fonction f est unique (dans $L^{\mathbb{1}}_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ i.e. *à une égalité μ-p.p. près).*

DÉMONSTRATION : Seul le sens direct nécessite une démonstration.

étape 1 $\nu \leq \mu$:

On suppose dans cette étape que $\nu \leq \mu$ (au sens $\nu(A) \leq \mu(A)$ pour tout $A \in \mathscr{A}$ ou encore $\int_X g d\nu \leq \int_X g\, d\mu$ pour toute fonction mesurable positive g). Il est alors clair que μ et ν vérifient la condition (i) ! On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Phi\ :\ L^2_{\mathbb{R}}(\mu)\ &\longrightarrow\ \mathbb{R} \\ f\ &\longmapsto\ \int_X f d\nu. \end{aligned}$$

L'application Φ est clairement continue puisque, pour toute fonction g dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mu)$,

$$\left|\int_X g\, d\nu\right| = \left|\int_X g\, \mathbb{1} d\, \nu\right| \leq \left(\int_X g^2\, d\nu\right)^{\frac{1}{2}} \nu(X)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après le théorème 9.8 de représentation du dual de $L^2_{\mathbb{R}}(\mu)$, il existe une fonction $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mu)$ telle que

$$\forall\, g \in L^2_{\mathbb{R}}(\mu),\ \int_X g\, d\nu = \int_X gf\, d\mu.$$

Comme la mesure μ est finie, $\mathbb{1} \in L^2_{\mathbb{R}}(\mu)$, donc $f \in L^{\mathbb{1}}_{\mathbb{R}}(\mu)$. On peut évidemment assimiler f à l'un de ses représentants dans $\mathscr{L}^{\mathbb{1}}_{\mathbb{R}}(\mu)$. Plus généralement, comme $\mathscr{L}^{\infty}_{\mathbb{R}}(\mu) \subset \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mu)$, il est immédiat que

$$\forall\, A \in \mathscr{A},\ \nu(A) = \int_A f\, d\mu.$$

Montrons enfin que f est μ-*p.p.* à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$. Supposons que $\mu(\{f<0\})>0$; il existe alors un entier $n_0 \geq 1$ tel que $\mu(\{f \leq -\frac{1}{n_0}\})>0$ puisque $\{f<0\} = \bigcup^{\uparrow}_{n\geq 1}\{f \leq -\frac{1}{n}\}$. D'où

$$0 \leq \nu\big(\{f \leq -\tfrac{1}{n_0}\}\big) = \int_{\{f\leq -\frac{1}{n_0}\}} f\, d\mu \leq -\frac{1}{n_0}\,\mu\big(\{f \leq -\tfrac{1}{n_0}\}\big) < 0.$$

La contradiction entraîne donc que $\mu(\{f<0\})=0$ et, quitte à remplacer f par $f\mathbb{1}_{\{f\geq 0\}}$, on peut supposer f positive. De la même façon on peut montrer que $\mu(\{f>1\})=0$ (sinon $\nu(\{f \geq 1+\frac{1}{n_0}\}) \geq (1+\frac{1}{n_0})\,\mu(\{f\geq 1+\frac{1}{n_0}\})$ pour un $n_0 \geq 1$, etc).

étape 2 *Cas général :*

D'après l'étape 1 appliquée aux deux mesures finies μ et $\mu+\nu$, il existe une fonction $f \in \mathscr{L}^1(\mu+\nu)$ telle que

$$\forall\, A \in \mathscr{A},\ \nu(A) = \int_A f d(\mu+\nu)\ \text{ et } 0 \leq f \leq 1\ \mu\text{-}p.p.$$

D'où l'on déduit immédiatement l'égalité entre mesures finies

$$(1-f).\nu = f.\mu.$$

On pose $N := \{f=1\}$; $\mu(N) = \displaystyle\int_N f\, d\mu = \int_N (1-f)d\nu = 0$ donc, d'après l'hypothèse (i), $\nu(N)=0$. Partant, si $A \in \mathscr{A}$

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \underbrace{\nu(A\cap N)}_{=0} + \int_{^cN} \underbrace{\frac{\mathbb{1}_A}{1-f}}_{>0}(1-f)d\nu \\ &= \int_{^cN}\frac{\mathbb{1}_A}{1-f} f\, d\mu = \int_A \mathbb{1}_{^cN}\frac{f}{1-f}d\mu\end{aligned}$$

et comme $\displaystyle\int_{^cN} \frac{f}{1-f} d\mu = \nu(X) < +\infty$, $\mathbf{1}_{^cN} \dfrac{f}{1-f} \in \mathscr{L}^{\mathbb{1}}_{\mathbb{R}_+}(\mu)$.

étape 3 *Unicité :*

Si f et $\tilde{f}$ vérifient (ii) alors

$$\nu(\{f > \tilde{f}\}) = \int_{\{f>\tilde{f}\}} f\, d\mu = \int_{\{f>\tilde{f}\}} \tilde{f}\, d\mu$$

donc $\displaystyle\int_{\{f>\tilde{f}\}} (f - \tilde{f}) d\mu = 0$, par suite $\mu(\{f > \tilde{f}\}) = 0$, et on a $\mu(\{f \neq \tilde{f}\}) = 0$ par symétrie. $\diamondsuit$

Remarque : On a en fait établi dans la démonstration ci-dessus le résultat plus général suivant :

Si μ et ν sont deux mesures finies sur l'espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, alors il existe $f \in \mathscr{L}^{\mathbb{1}}_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ et $N \in \mathscr{A}$, μ-négligeable, tels que

$$\forall A \in \mathscr{A},\ \nu(A) = \nu(A \cap N) + \int_A f\, d\mu. \tag{10.17}$$

En outre, si $\tilde{f}$ et $\tilde{N}$ vérifient (10.17) alors

$$f = \tilde{f}\ \mu\text{-}p.p. \ \text{ et } \mathbb{1}_N = \mathbb{1}_{\tilde{N}}\ \mu\text{-}p.p.\ (i.e.\ \mu(N \Delta \tilde{N}) = 0).$$

10.2.2 Extension au cadre σ-fini

L'énoncé du théorème 10.4 s'étend au cas où les deux mesures μ et ν sont σ-finies, l'intégrabilité de la dérivée de Radon-Nikodym $\frac{d\nu}{d\mu}$ ne pouvant évidemment être conservée dans ce cadre étendu. Plus précisément, il vient

***Théorème* 10.5** (Radon-Nikodym)**.** *Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$. Il y a équivalence entre*

$(i)\ \forall A \in \mathscr{A},\ \ \mu(A) = 0 \ \Rightarrow\ \nu(A) = 0,$

$(ii)\ \exists f : (X, \mathscr{A}) \to \mathbb{R}_+$ *mesurable telle que* , $\forall A \in \mathscr{A},\ \nu(A) = \displaystyle\int_A f\, d\mu.$

En outre, la fonction f est unique (à une égalité μ-p.p. près).

DÉMONSTRATION : Il s'agit pour l'essentiel de se ramener au cadre fini. Les mesures μ et ν étant σ-finies, il existe deux partitions $\mathscr{A}$-mesurables de X, $(F_n)_{n\geq 0}$ et $(G_n)_{n\geq 0}$, vérifiant, pour tout $n \geq 0$, $\mu(F_n) + \nu(G_n) < +\infty$. Il est immédiat que les $E_{k,\ell} := F_k \cap G_\ell$, $k,\ \ell \geq 0$, forment une partition $\mathscr{A}$-mesurable de X vérifiant $\mu(E_{k,\ell}) \leq \mu(F_k) < +\infty$ et $\nu(E_{k,\ell}) \leq \nu(G_\ell) < +\infty$. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ étant équipotent à $\mathbb{N}$, on peut supposer ces ensembles indexés par $\mathbb{N}$. On les notera donc $(E_n)_{n\geq 0}$.

On pose alors, pour tout $n \geq 0$, $\mu_n := \mu(\cdot \cap E_n)$ et $\nu_n := \nu(\cdot \cap E_n)$. D'après le théorème 10.4, il existe donc une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ vérifiant

$f_n \in \mathscr{L}^{\mathbb{1}}_{\mathbb{R}_+}(\mu_n)$ et $\nu_n = f_n.\mu_n = (f_n \mathbb{1}_{E_n}).\mu$. On définit alors $f := \sum_{n\geq 0} f_n \, \mathbb{1}_{E_n}$. D'après le théorème de Beppo Levi pour les séries (*cf.* chapitre 7), il est immédiat que pour tout $A \in \mathscr{A}$,

$$\int_A f\, d\mu = \int_X \mathbb{1}_A \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{E_n} f_n \, d\mu = \sum_{n\geq 0} \int_X \mathbb{1}_A\, f_n \, d\mu_n$$
$$= \sum_{n\geq 0} \nu(A \cap E_n) = \nu(A).$$

Par suite $\nu = f.\mu$. L'unicité se traite comme dans le cas fini. $\quad\Diamond$

10.3 Dualité L^p-L^q

Il est immédiat *via* l'inégalité de Hölder que pour toute fonction $g \in L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$, l'application $f \mapsto \int_X f\, g\, d\mu$ est bien définie, linéaire et continue de norme (inférieure ou égale à) $\|g\|_q$. Le but du théorème de dualité ci-dessous est de montrer que si $1 \leq p < +\infty$, on obtient ainsi toutes les formes linéaires continues sur $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

10.3.1 Formes linéaires réelles positives

***Théorème* 10.6.** *Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, $p \in [1, +\infty[$ et q son exposant conjugué ; soit $\Phi : L^p_{\mathbb{R}}(\mu) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire, continue et positive au sens où, pour tout $f \in L^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, $\Phi(f) \geq 0$. Alors, il existe un unique élément $g \in L^q_{\mathbb{R}}(\mu)$ tel que*

$$\forall\, f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu), \quad \Phi(f) = \int_X f g \, d\mu.$$

En outre, $\|g\|_q = \|\Phi\|$ où $\|\Phi\|$ désigne la norme d'opérateur de Φ.

DÉMONSTRATION : On note tout d'abord que, pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\mathbb{1}_A \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ si et seulement si $\mu(A) < +\infty$ puisque $\|\mathbb{1}_A\|_p = \mu(A)^{1/p}$.

Soit $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'éléments de $\mathscr{A}$ vérifiant $X = \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} E_n$ et $\mu(E_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$. On pose $F_1 := E_1$ et $F_n := E_n \setminus E_{n-1},\ n \geq 2$.

étape 1 *Construction de g* :

Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $A \in \mathscr{A}$, on pose $\nu_n(A) := \Phi(\mathbb{1}_{A\cap F_n})$. Montrons que ν_n est une mesure finie, absolument continue par rapport à μ.

– $\nu_n(A) \geq 0$ car Φ est positive et $\nu_n(X) = \mu(F_n) < +\infty$.

– $\nu_n(\emptyset) = \Phi(0) = 0$.

– Soit $(A_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ deux à deux disjoints. Il est immédiat que $\mathbb{1}_{(\cup_{k\geq 1} A_k)\cap F_n} = \lim_k \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{1}_{A_\ell \cap F_n}$. En outre, la convergence a lieu dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$.

En effet, d'après le théorème de convergence dominée, une série de fonctions positives dont la limite est dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ converge vers cette limite dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$. La continuité de Φ entraîne alors que

$$\begin{aligned}\nu_n\Big(\bigcup_{k\geq 1} A_k\Big) &= \Phi(\mathbb{1}_{(\cup_{k\geq 1}A_k)\cap F_n}) = \Phi\left(\lim_k \sum_{\ell=1}^k \mathbb{1}_{A_\ell\cap F_n}\right)\\ &= \lim_k\ \Phi\left(\sum_{\ell=1}^k \mathbb{1}_{A_\ell\cap F_n}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\Phi(\mathbb{1}_{A_\ell\cap F_n}) = \sum_{k\geq 1}\nu_n(A_k).\end{aligned}$$

– La forme linéaire Φ est continue donc, dès que $\mu(A)=0$,

$$\nu_n(A) = \Phi(\mathbb{1}_{A\cap F_n}) \leq \|\Phi\|\,\|\mathbb{1}_{A\cap F_n}\|_p = \|\Phi\|\mu(A\cap F_n)^{\frac{1}{p}} \leq \|\Phi\|\mu(A)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Le théorème de Radon-Nikodym 10.4 entraîne alors l'existence, pour $n \geq 1$, d'une fonction $g_n \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ vérifiant, pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\nu_n(A) = \displaystyle\int_A g\,d\mu$. De plus, comme $\nu_n(A) = \nu_n(A\cap F_n)$ par définition de ν_n, il est immédiat que, quitte à remplacer g_n par $g_n\mathbb{1}_{F_n}$, on peut supposer g_n nulle en dehors de F_n.

<u>étape 2</u> *Propriété de représentation* :

Les F_n étant deux à deux disjoints, on peut poser $g := \displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$. Soit $f \in L^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$; la série à terme positifs $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f\mathbb{1}_{F_n}$ converge vers f car $X = \bigcup_{n\geq 1} F_n$ (union disjointe). Il en est de même des puissances p-ème et, partant, il y a convergence dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ par convergence dominée. En s'appuyant successivement sur la continuité de Φ et le théorème de Beppo Levi pour les séries de fonctions positives, il vient

$$\Phi(f) = \sum_{n\geq 1}\Phi(f\mathbb{1}_{F_n}) = \sum_{n\geq 1}\int_X f g_n\,d\mu = \int_X f g\,d\mu.$$

La propriété de représentation s'étend aux fonctions réelles de $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ par linéarité à partir de la décomposition classique $f = f^+ - f^-$.

<u>étape 3</u> $g \in L^q_{\mathbb{R}}(\mu)$ *et* $\|\Phi\| = \|g\|_q$ *:*

Supposons d'abord $p > 1$. On pose $f_{m,n} := \mathrm{sgn}(g)g^{q-1}\mathbb{1}_{E_n\cap\{g\leq m\}}$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Par construction, $f_{m,n} \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$. D'après la propriété de représentation établie à l'étape précédente, il vient, en notant que $p(q-1) = q$,

$$\begin{aligned}\Phi(f_{m,n}) &= \int_X f_{n,m}\,g\,d\mu = \int_{E_n} |g|^q\,\mathbb{1}_{\{g\leq m\}}\,d\mu\\ &\leq \|\Phi\|\|f_{m,n}\|_p = \|\Phi\|\left(\int_{E_n}|g|^q\,\mathbb{1}_{\{g\leq m\}}\,d\mu\right)^{1/p} < +\infty.\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que, pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$,

$$\left(\int_{E_n}|g|^q\,\mathbb{1}_{\{g\le m\}}\,d\mu\right)^{1-1/p}\le\|\Phi\|.$$

On passe alors successivement à la limite, en m, puis en n, à l'aide du théorème de Beppo Levi, pour obtenir que $\|g\|_q\le\|\Phi\|$.

Il est clair par l'inégalité de Hölder, que pour $f\in L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$, $|\Phi(f)|\le\|g\|_q\|f\|_p$ et, partant, $\|\Phi\|\le\|g\|_q$. D'où l'égalité.

Si $p=1$, on reprend la démonstration du cas précédent en posant $p':=\frac{r}{r-1}$, $r>1$ et $q:=r$ et l'on constate que $\|g\|_r\le\|\Phi\|$ pour tout $r>1$. La proposition 9.6 (b) entraîne alors que $\|g\|_\infty\le\|\Phi\|<+\infty$. L'autre inégalité découle de l'inégalité de Hölder.

étape 4 *Unicité* :

Soit g' une autre fonction de $L^q_{\mathbb{R}}(\mu)$ assurant la propriété de représentation de la forme linéaire Φ. Pour tout $A\in\mathscr{A}$, $\nu_n(A)=\Phi(\mathbb{1}_{A\cap F_n})=\displaystyle\int_A g'\mathbb{1}_{F_n}\,d\mu$, donc l'unicité dans le théorème de Radon-Nikodym assure que, pour tout entier $n\ge1$, $g'\,\mathbb{1}_{F_n}=g\,\mathbb{1}_{F_n}$ μ-p.p., *i.e.* $g=g'$ *μ-p.p.* $\Diamond$

10.3.2 Formes linéaires réelles ou complexes

On étend sans véritable difficulté le théorème 10.6 de représentation des formes linéaires continues positives aux formes linéaires continues réelles ou complexes, à l'aide du théorème 10.3 de décomposition abstrait établi à la section 10.1 lors de la démonstration du théorème de Riesz. On obtient ainsi le théorème de dualité L^p-L^q ci-après.

***Théorème* 10.7.** *Soient $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré σ-fini, $p\in[1,+\infty[$ et q son exposant conjugué. Alors, le* dual topologique *de $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, i.e. l'ensemble des formes linéaires continues de $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est isométriquement isomorphe à $L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$.*

DÉMONSTRATION : Soit $\Phi:L^p_{\mathbb{R}}(\mu)\to\mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Il suffit de montrer qu'il existe un unique élément $g\in L^q_{\mathbb{R}}(\mu)$ tel que

$$\forall\,f\in L^p_{\mathbb{R}}(\mu),\quad\Phi(f)=\int_X fg\,d\mu\quad\text{et}\quad\|g\|_q=\|\Phi\|.$$

étape 1 *Existence* :

La représentation de Φ par une fonction $g\in L^q_{\mathbb{R}}(\mu)$ est une conséquence directe du théorème 10.6 précédent et du théorème 10.3 de décomposition des formes linéaires continues réelles. D'autre part, l'inégalité de Hölder entraîne

$$\|\Phi\|:=\sup_{\|f\|_p=1}\left|\int_X fg\,d\mu\right|\le\|f\|_p\,\|g\|_q=\|g\|_q.$$

De plus, la fonction $f_g := \mathbb{1}_{\{g\neq 0\}} \frac{\overline{g}}{|g|}|g|^{q-1}$ vérifie $|f_g|^p = |g|^q \in \mathscr{L}^{\mathbb{1}}_{\mathbb{R}}(\mu)$ et, partant,

$$\|g\|_q^q = \int_X f_g g \, d\mu \leq \|\Phi\| \, \|f_g\|^p = \|\Phi\| \, \|g\|_q^{\frac{q}{p}},$$

d'où $\|g\|_q \leq \|\Phi\|$. Donc $\|\Phi\| = \|g\|_q$.

étape 2 *Unicité* :

Soient $g' \in L^q_{\mathbb{R}}(\mu)$ représentant la forme Φ et $f := \mathbb{1}_{\{g'\neq g\}} \frac{\overline{g'-g}}{|g'-g|}|g'-g|^{q-1}$. Les définitions de g' et g entraînent alors

$$0 = \int_X f(g'-g)d\mu = \int_X |g'-g|^q d\mu,$$

d'où $g' = g$. $\quad\Diamond$

Remarques : • En fait, le théorème de dualité reste valable pour $1 < p < +\infty$ même si l'espace mesuré n'est pas σ-fini. Cette extension fait l'objet de l'exercice 10.8 ci-après.

• En revanche, la propriété de représentation tombe en défaut pour $p = 1$ lorsque l'espace n'est pas σ-fini (*cf.* exercice 10.6).

• Le cas $p = +\infty$ est le plus défavorable. En effet, dès que la tribu $\mathscr{A}$ contient une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments deux à deux disjoints vérifiant $0 < \mu(A_n) < +\infty$, il existe des formes linéaires continues positives sur $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ n'admettant aucune représentation par une fonction intégrable. Dans le cadre abstrait, ce résultat s'appuie sur le théorème de Hahn-Banach (*cf.* exercice 10.14).

Ainsi, la propriété de représentation tombe en défaut sur $\ell^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}, m)$ (m mesure de comptage) ou sur $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$.

10.4 Interpolation sur les espaces L^p

Cette section a pour objet les opérateurs qui agissent sur les espaces L^p. On a le résultat suivant.

***Théorème* 10.8** (Marcinkiewicz)**.** *Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et soit T un opérateur (éventuellement non linéaire) de $L^{\mathbb{1}}_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ dans l'espace des fonctions complexes mesurables sur $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ vérifiant*

$$\exists\, k \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, f, g \in L^{\mathbb{1}}_{\mathbb{C}}(X,\mu), \quad |T(f+g)| \leq k\big(|T(f)| + |T(g)|\big). \qquad (10.18)$$

On suppose qu'il existe $p_1, p_2, q_1, q_2 \in [1, +\infty]$ avec

$$p_1 \neq p_2, \quad q_1 \neq q_2, \quad p_i \leq q_i \ \textit{pour}\ i = 1, 2, \qquad (10.19)$$

et $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que, pour $i = 1, 2$,

$$\forall\, f \in L^{p_1}_{\mathbb{C}}(\mu) \cap L^{p_2}_{\mathbb{C}}(\mu), \quad \|T(f)\|_{L^{q_i}(\nu)} \leq M_i \, \|f\|_{L^{p_i}(\mu)}. \qquad (10.20)$$

Alors, pour tout $\theta \in]0,1[$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de $\theta, p_1, p_2, q_1, q_2$, telle que

$$\forall\, f \in L^{p_1}_{\mathbb{C}}(\mu) \cap L^{p_2}_{\mathbb{C}}(\mu), \quad \|T(f)\|_{L^q(\nu)} \le C\, M_1^{\theta}\, M_2^{1-\theta} \|f\|_{L^p(\mu)}, \tag{10.21}$$

où les nombres p et q sont définis par

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{(1-\theta)}{p_2} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{(1-\theta)}{q_2}. \tag{10.22}$$

Remarque : Lorsque T est un opérateur linéaire, on peut prendre $C = 1$ dans l'estimation (10.21), pour tous $p_1, p_2, q_1, q_2 \in [1, +\infty]$ et pour tout $\theta \in [0,1]$. Le résultat est connu sous le nom de théorème de Riesz-Thorin. La démonstration nécessite des outils d'analyse complexe (principe du maximum et théorème de Phragmén-Lindelöf) qui sortent du cadre de cet ouvrage.

DÉMONSTRATION : On s'appuie sur la démarche adoptée par Zygmund dans [15] (Chap. XII), fondée sur la dualité L^p-L^q.

<u>étape 1</u> *Une estimation* via *les fonctions* $\mu(\{|f| > t\})$ (cf. *exercice* 9.23) :

Soit $f \in L^{p_1}_{\mathbb{C}}(\mu) \cap L^{p_2}_{\mathbb{C}}(\mu)$, alors $f \in L^{p}_{\mathbb{C}}(\mu)$ car $p \in [p_1, p_2]$ (*cf.* exercice 9.14). La fonction f peut se décomposer, pour $u \in \mathbb{R}_+$ fixé, sous la forme

$$f = f_1 + f_2 \quad \text{où} \quad f_1 := \mathbb{1}_{\{|f| \le z\}}\, f + \mathbb{1}_{\{|f| > u\}}\, e^{i \arg f}\, u,$$

de sorte que

$$|f_1| = \min\left(|f|, u\right) \quad \text{et} \quad |f| = |f_1| + |f_2|.$$

On suppose que $q_1, q_2 < +\infty$. Le cas contraire sera étudié lors de la dernière étape. Sans restriction aucune, on peut aussi supposer que $p_2 < p_1$. Soient $\theta \in]0,1[$ et les nombres p, q définis par (10.22). La condition (10.18) donne pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\{|T(f)| > 2k\, s\} \subset \{|T(f_1)| > s\} \cup \{|T(f_2)| > s\},$$

qui combinée avec (10.20) implique

$$\begin{aligned} \nu\big\{|T(f)| > 2k\, s\}\big) &\le \nu\big\{|T(f_1)| > s\}\big) + \nu\big\{|T(f_2)| > s\}\big) \\ &\le s^{-q_1}\, \|T(f_1)\|^{q_1}_{L^{q_1}(\nu)} + s^{-q_2}\, \|T(f_2)\|^{q_2}_{L^{q_2}(\nu)} \\ &\le M_1^{q_1}\, s^{-q_1}\, \|f_1\|^{q_1}_{L^{p_1}(\mu)} + M_2^{q_2}\, s^{-q_2}\, \|f_1\|^{q_2}_{L^{p_2}(\mu)}. \end{aligned} \tag{10.23}$$

D'après l'identité (*cf.* exercice 11.4)

$$\int_Y |g|^q\, d\nu = q \int_0^{+\infty} t^{q-1}\, \nu(\{|g| \ge t\})\, dt$$

appliquée à la fonction $g = |T(f)|$ et *via* le changement de variable $t = 2k\, s$, il vient

$$\|T(f)\|^q_{L^q(\nu)} = q\, (2k)^q \int_0^{+\infty} s^{q-1} \nu(\{|T(f)| > 2k\, s\})\, ds. \tag{10.24}$$

La même identité appliquée à f_1 et f_2 donne

$$\begin{aligned}
&\|T(f)\|^q_{L^q(\nu)}\\
&\leq q(2k)^q M_1^{q_1} \int_0^{+\infty} s^{q-q_1-1}\, \|f_1\|^{q_1}_{L^{p_1}(\mu)}\, ds\\
&+ q(2k)^q M_2^{q_2} \int_0^{+\infty} s^{q-q_2-1}\, \|f_1\|^{q_2}_{L^{p_2}(\mu)}\, ds\\
&= q(2k)^q M_1^{q_1} p_1^{\frac{q_1}{p_1}} \int_0^{+\infty} s^{q-q_1-1} \left(\int_0^{+\infty} t^{p_1-1} \mu\big(\{|f_1| > t\}\big)\, dt \right)^{\frac{q_1}{p_1}} ds\\
&+ q(2k)^q M_2^{q_2} p_2^{\frac{q_2}{p_2}} \int_0^{+\infty} s^{q-q_2-1} \left(\int_0^{+\infty} t^{p_2-1} \mu\big(\{|f_2| > t\}\big)\, dt \right)^{\frac{q_2}{p_2}} ds.
\end{aligned}$$

Or, par définition de f_1 et f_2, on a

$$\mu\big(\{|f_1| > t\}\big) \leq \mathbb{1}_{[0,u]}(t)\, \mu\big(\{|f| > t\}\big) \ \text{ et } \ \mu\big(\{|f_2| > t\}\big) = \mu\big(\{|f| > t + u\}\big).$$

On obtient donc l'estimation

$$\begin{aligned}
&\|T(f)\|^q_{L^q(\nu)}\\
&\leq q(2k)^q M_1^{q_1} p_1^{\frac{q_1}{p_1}} \int_0^{+\infty} s^{q-q_1-1} \left(\int_0^{u} t^{p_1-1} \mu\big(\{|f| > t\}\big)\, dt \right)^{\frac{q_1}{p_1}} ds\\
&+ q(2k)^q M_2^{q_2} p_2^{\frac{q_2}{p_2}} \int_0^{+\infty} s^{q-q_2-1} \left(\int_u^{+\infty} (t-u)^{p_2-1} \mu\big(\{|f| > t\}\big)\, dt \right)^{\frac{q_2}{p_2}} ds.
\end{aligned} \tag{10.25}$$

<u>étape 2</u> *Une inégalité obtenue par dualité L^p-L^q :*

Notons tout d'abord que, dans un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$ σ-fini, l'égalité du théorème 10.6 de dualité pour $r \in]1, +\infty[$ et $r' := r/(r-1)$,

$$\|f\|_{L^r(\mu)} = \sup \left\{ \int_X f\, \varphi\, d\mu : \varphi \geq 0,\ \int_X \varphi^{r'}\, d\mu = 1 \right\} \tag{10.26}$$

s'étend à toute fonction f mesurable positive (non nulle), élément ou non de $L^r(\mu)$. La minoration de $\|f\|_{L^r(\mu)}$ dans (10.26) est une conséquence immédiate de l'inégalité de Hölder. Pour montrer l'inégalité inverse, on considère une suite croissante d'ensembles mesurables E_n, $n \in \mathbb{N}$, de mesure finie et la suite de fonctions φ_n définies par

$$\varphi_n := \frac{f^{r-1}\, \mathbb{1}_{E_n}}{\|f\, \mathbb{1}_{E_n}\|^{r-1}_{L^r(\mu)}} \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

vérifiant

$$\|\varphi_n\|_{L^{r'}(\mu)} = 1 \quad \text{et} \quad \{|f| \leq n\} \subset E_n \nearrow X.$$

Le théorème de convergence monotone entraîne alors, lorsque $n \to +\infty$,

$$\int_X f\,\varphi_n\,d\mu = \frac{1}{\|f\,\mathbb{1}_{E_n}\|_{L^r(\mu)}^{r-1}} \int_X f^r\,\mathbb{1}_{E_n}\,d\mu = \|f\,\mathbb{1}_{E_n}\|_{L^r(\mu)} \to \|f\|_{L^r(\mu)} \leq +\infty.$$

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $a, \gamma \in]0, +\infty[$, $r \in]1, +\infty[$, et $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions Lebesgue-mesurables positives vérifiant

$$0 \leq g(s,t) \leq \begin{cases} \mathbb{1}_{[0, a\,t^\gamma]}(s)\,h(t) & \text{si } \alpha > 0 \\ \mathbb{1}_{[a\,t^\gamma, +\infty[}(s)\,h(t) & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

D'après l'égalité de dualité (10.26) appliquée à la mesure $\mu(ds) := s^{\alpha-1}ds$, on a

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} g(s,t)\,dt \right)^r s^{\alpha-1} ds \\ &= \sup \left\{ \left[\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} g(s,t)\,dt \right) \varphi(s)\,s^{\alpha-1} ds \right]^r : \varphi \geq 0, \int_0^{+\infty} \varphi^{r'}(s)\,s^{\alpha-1} ds = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Alors en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} g(s,t)\,dt \right) \varphi(s)\,s^{\alpha-1} ds &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} g(s,t)\,\varphi(s)\,s^{\alpha-1} ds \right) dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} g^r(s,t)\,s^{\alpha-1} ds \right)^{1/r} dt, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé à la seconde ligne l'inégalité de Hölder et $\int_0^{+\infty} \varphi^{r'}(s) s^{\alpha-1} ds = 1$. D'où, par l'hypothèse sur la fonction g et un simple calcul d'intégrales (en distinguant les cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$), il vient

$$\left[\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} g(s,t)\,dt \right) \varphi(s)\,s^{\alpha-1} ds \right]^r \leq \frac{a^{\alpha\gamma}}{|\alpha|} \left(\int_0^{+\infty} h(t)\,t^{\alpha\gamma/r}\,dt \right)^r.$$

Finalement, on obtient l'inégalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} g(s,t)\,dt \right)^r s^{\alpha-1} ds \leq \frac{a^\alpha}{|\alpha|} \left(\int_0^{+\infty} h(t)\,t^{\alpha\gamma/r}\,dt \right)^r. \tag{10.27}$$

L'inégalité reste vraie lorsque $r = 1$ par simple application du théorème de Fubini-Tonelli.

étape 3 *Estimation dans le cas $q_1, q_2 < +\infty$:*

On suppose par exemple que $q_2 < q_1$ ce qui implique $q_2 < q < q_1$ d'après la définition (10.22) de q_1 et q_2. L'autre cas se traite de façon très similaire en prenant alors $\gamma < 0$. En injectant dans l'estimation (10.25) l'inégalité (10.27) avec

$$\begin{cases} \alpha := q - q_i, & r = r_i := \frac{q_i}{p_i}, \\ u = u(s) := \left(\frac{s}{a}\right)^{1/\gamma}, & h(t) := t^{p_i - 1}\,\mu\big(\{|f| > t\}\big), \end{cases} \tag{10.28}$$

$(a, \gamma > 0)$, il vient

$$\begin{aligned}
&\|T(f)\|^q_{L^q(\nu)} \\
&\leq q\,(2k)^q\, M_1^{q_1}\, p_1^{r_1}\, \frac{a^{q-q_1}}{q_1 - q} \left(\int_0^{+\infty} t^{p_1 - 1 + (q-q_1)\gamma/r_1} \mu\big(\{|f| > t\}\big)\, dt \right)^{r_1} \\
&+ q\,(2k)^q\, M_2^{q_2}\, p_2^{r_2}\, \frac{a^{q-q_2}}{q - q_2} \left(\int_0^{+\infty} t^{p_2 - 1 + (q-q_2)\gamma/r_2} \mu\big(\{|f| > t\}\big)\, dt \right)^{r_2}.
\end{aligned}$$

En choisissant dans l'inégalité précédente

$$\gamma := r_1\, \frac{p_1 - p}{q_1 - q} = \frac{p}{q}\, \frac{1/p_1 - 1/p_2}{1/q_1 - 1/q_2} = r_2\, \frac{p_2 - p}{q_2 - q} \quad \text{(d'après (10.22))}, \qquad (10.29)$$

on déduit de la formule (10.24) appliquée à f et p,

$$\begin{aligned}
&\|T(f)\|^q_{L^q(\nu)} \\
&\leq q(2k)^q \left[\frac{(p_1/p)^{r_1}}{q_1 - q} M_1^{q_1} a^{q-q_1} \|f\|^{pr_1}_{L^p(\mu)} + \frac{(p_2/p)^{r_2}}{q - q_2} M_2^{q_2} a^{q-q_2}\, \|f\|^{pr_2}_{L^p(\mu)} \right].
\end{aligned}$$

Finalement, en choisissant

$$a := M_1^{q_1/(q_1 - q_2)}\, M_2^{q_2/(q_2 - q_1)}\, \|f\|^{p(r_2 - r_1)/(q_2 - q_1)}_{L^p(\mu)} \qquad (10.30)$$

et en utilisant les définitions (10.22) de p et q, on obtient l'estimation (10.21) avec la constante C donnée par

$$C^q = q\,(2k)^q \left[\frac{(p_1/p)^{r_1}}{q_1 - q} + \frac{(p_2/p)^{r_2}}{q - q_2} \right]. \qquad (10.31)$$

<u>étape 4</u> *Estimation dans le cas $q_1 = +\infty$ ou $q_2 = +\infty$:*

On suppose par exemple que $q_1 = +\infty$. La difficulté dans ce cas vient du fait que l'on ne peut pas majorer $\nu\big(\{|T(f_1)| > s\}\big)$ par $\|T(f_1)\|_{L^\infty(\nu)}$. En rappelant que $|f_1| = \max(|f|, u)$, on doit donc trouver un $u = u(s)$ de sorte que

$$\nu\big(\{|T(f_1)| > s\}\big) = 0$$

et qu'ainsi l'estimation (10.23) de départ soit vérifiée sans le terme avec f_1. À cette fin, on va distinguer deux sous-cas $p_1 = +\infty$ et $p_1 < +\infty$.

Si $p_1 = +\infty$, on définit $u = u(s)$ par $u(s) := s/M_1$ de sorte que

$$\|T(f_1)\|_{L^\infty(\nu)} \leq M_1\, \|f_1\|_{L^\infty(\nu)} \leq M_1\, u(s) = s.$$

Ainsi $\nu\big(\{|T(f_1)| > s\}\big) = 0$. On peut donc reprendre l'étape 3 avec $a := M_1$ et $\gamma := 0$, pour obtenir l'estimation (10.21) avec la constante C donnée par

$$C^q = q\,(2k)^q\, \frac{(p_2/p)^{r_2}}{q - q_2},$$

où par rapport à (10.31) le terme avec p_1 a disparu.

Si à présent $p_1 < +\infty$, on doit à nouveau déterminer un $u = u(s)$ de sorte que $\nu\big(\{|T(f_1)| > s\}\big) = 0$. En extrapolant les valeurs u et a de (10.28) et (10.30) lorsque $q_1 \to +\infty$, on définit

$$u = u(s) := \Big(\frac{s}{a}\Big)^{p_1/(p_1-p)} \quad \text{et} \quad a := \beta\, M_1\, \|f\|_{L^p(\mu)}^{p/p_1}, \tag{10.32}$$

où $\beta > 0$ sera déterminé ultérieurement. Comme par hypothèse

$$\|T(f_1)\|_{L^\infty(\nu)} \le M_1\, \|f_1\|_{L^{p_1}(\nu)} = M_1 \left(p_1 \int_0^{+\infty} t^{p_1-1}\, \mu\big(\{|f_1| > t\}\big)\, dt\right)^{1/p_1},$$

pour obtenir $\|T(f_1)\|_{L^\infty(\nu)} \le s$ il suffit que

$$p_1\, M_1^{p_1} \int_0^{+\infty} t^{p_1-1}\, \mu\big(\{|f_1| > t\}\big)\, dt \le s^{p_1} = a^{p_1}\, z^{p_1-p}.$$

Or, du fait que $|f_1| = \min(|f|, u)$ et $p < p_1$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} t^{p_1-1} \mu\big(\{|f_1| > t\}\big)\, dt \\
&\le \int_0^{u} \Big(\frac{u}{t}\Big)^{p_1-p} t^{p_1-1} \mu\big(\{|f_1| > t\}\big)\, dt = \frac{1}{p}\, \|f\|_{L^p(\mu)}^p u^{p_1-p},
\end{aligned}$$

de sorte que $\|T(f_1)\|_{L^\infty(\nu)} \le s$ lorsque

$$\frac{p_1}{p}\, M_1^{p_1}\, \|f\|_{L^p(\mu)}^p\, u^{p_1-p} \le a^{p_1}\, u^{p_1-p} = \beta^{p_1}\, M_1^{p_1}\, \|f\|_{L^p(\mu)}^p\, u^{p_1-p}.$$

On obtient donc l'égalité $\nu\big(\{|T(f_1)| > s\}\big) = 0$ dès que la constante $\beta > 0$ de (10.32) vérifie l'inégalité $\beta^{p_1} \ge p_1/p$.

10.5 Exercices

$(X, \mathscr{A}, \mu)$ désigne, sauf mention contraire, un espace mesuré σ-fini *i.e.*

$$X = \bigcup_{n\ge 1}{}^{\uparrow} E_n \quad \text{où} \quad E_n \in \mathscr{A} \quad \text{et} \quad \mu(E_n) < +\infty$$

et p et q désignent deux nombres conjugués de $[1, +\infty]$, *i.e.* tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

10.1 Soient $g \in L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$ et Φ l'application définie sur $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ par $\Phi(f) := \displaystyle\int_X f g\, d\mu$. Calculer directement $\|\Phi\|$ et déterminer les fonctions f telles que $|\Phi(f)| = \|\Phi\|$.

10.2 Soit $(a_n)_{n\ge 0}$ une suite de $\mathbb{K}$ telle que, pour toute suite $(b_n)_{n\ge 0} \in \ell^q_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, la série $\sum_{n\ge 0} a_n b_n$ soit convergente dans $\mathbb{K}$. Montrer que $(a_n)_{n\ge 0} \in \ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.

10.3 Soient $p\in [1,+\infty[$ et $f : X \to \mathbb{K}$ une fonction mesurable.

$a)$ On suppose que $f \notin L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Montrer qu'il existe une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ telle que, pour tout $n\geq 1$, $a_n := \|f\mathbb{1}_{A_n}\|_p$ vérifie $n \leq a_n < +\infty$.

$b)$ On suppose que, pour toute $g\in L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$, $fg\in L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$. Montrer que $f\in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

10.4 On va établir le résultat de l'exercice 10.3 par une méthode plus savante. Soient $p \in [1,+\infty[$, $f : X \to \mathbb{K}$ une fonction mesurable telle pour toute $g \in L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$, $fg\in L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$. On considère l'application définie sur $L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$ par $\Phi(g) := \displaystyle\int_X fg\, d\mu$.

$a)$ Soit $h : X \to \mathbb{K}$ une fonction mesurable telle pour toute fonction $g \in L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$, $hg\in L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $\Phi(g)=0$. Montrer que $h=0$ μ-*p.p.*.

$b)$ On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n := E_n \cap \{|f| \leq n\}$ et Φ_n l'application définie sur $L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$ par $\Phi_n(g) := \Phi(g\,\mathbb{1}_{A_n})$. Montrer que $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ est une suite de formes linéaires continues sur $L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$ qui converge simplement vers Φ. En déduire que $\sup_n \|\Phi_n\| < +\infty$ et que Φ est une forme linéaire continue sur $L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$.

$c)$ Montrer que $f\in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

10.5 Reprendre l'exercice 10.3 lorsque $p=+\infty$.

10.6 Soit $X := \{a,b\}$ et soit μ la mesure définie sur $\mathscr{P}(X)$ par $\mu(\{a\}) := 1$, $\mu(\{b\}) := +\infty$ (donc $\mu(X) = +\infty$). Caractériser $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ et le dual de $L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$. Conclure.

10.7 En considérant la forme linéaire Φ définie sur $\mathscr{C}_K(\mathbb{R},\mathbb{K})$ par $\Phi(\varphi) := \varphi(0)$, montrer que le dual de $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ contient strictement $L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$.

10.8 On considère $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré *quelconque* et Φ une forme linéaire continue sur $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, $1<p<+\infty$.

$a)$ Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{A}$, de mesure finie, il existe une unique fonction $g_A \in L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$, nulle sur ${}^cA$, telle que

$$\forall\, f\in L^p_{\mathbb{K}}(\mu),\quad \Phi(f\mathbb{1}_A) = \int_X fg_A d\mu \quad \text{et} \quad \|g_A\|_q \leq \|\Phi\|.$$

$b)$ Soient $A, B \in \mathscr{A}$ tels que $A\subset B$. Montrer que

$$g_A = g_B\mathbb{1}_A \quad \text{et} \quad \int_{B\setminus A} |g_B|^q d\mu = \int_X |g_B|^q d\mu - \int_X |g_A|^q d\mu.$$

$c)$ Montrer qu'il existe une suite croissante $(X_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ de mesure finie telle que $\lim\limits_n \|g_{X_n}\|_q = \sup\{\|g_A\|_q,\, \mu(A) < +\infty\}$ et, qu'en outre, la suite $(g_{X_n})_{n\geq 1}$ converge dans $L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$ vers une fonction g.

$d)$ Montrer que, pour tout $f\in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, $\Phi(f)=\displaystyle\int_X fgd\mu$.

10.9 *Séparabilité de L^p, $p < +\infty$*

Soit X un espace métrique localement compact et séparable, $X = \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} X_n$ où $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante d'ouverts d'adhérence compacte.

$a)$ Montrer l'existence d'une base dénombrable d'ouverts $\mathscr{U} := \{U_n\}_{n\geq 0}$ contenant X, les X_n et stable par intersection finie.

Soient μ une mesure de Borel sur $\mathscr{B}(X)$, $1\leq p<+\infty$ et D le $\mathbb{Q}$-e.v. engendré par la famille de fonctions indicatrices $\{\mathbb{1}_{U_n}\}_{n\geq 0}$.

$b)$ Soit $g \in L^q_{\mathbb{R}}(\mu)$ telle que $\displaystyle\int_X fg\,d\mu = 0$ pour tout $f \in D\cap L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$. Montrer que $g=0$.

$c)$ Montrer que D est dense dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$.

$d)$ En déduire que $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ est séparable.

10.10 *Convergence faible dans L^p, $p > 1$*

Soient $p \in]1, +\infty]$, q son exposant conjugué et $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$ soit séparable ; soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ bornée, *i.e.* la suite $(\|f_n\|_p)_{n\geq 1}$ est bornée.

$a)$ Soit D une partie dénombrable dense de $L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ telle que pour tout $h\in D$, $\displaystyle\lim_n \int_X f_{\varphi(n)} h\,d\mu$ existe dans $\mathbb{K}$.

$b)$ Montrer que pour tout $g\in L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$, $\displaystyle\Phi(g) := \lim_n \int_X f_{\varphi(n)}\, g\,d\mu$ existe dans $\mathbb{K}$.

$c)$ En déduire qu'il existe $f\in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ vérifiant la *convergence faible* dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ de la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ vers f au sens où :

$$\forall\, g\in L^q_{\mathbb{K}}(\mu),\ \ \lim_n \int_X f_{\varphi(n)}\, g\,d\mu = \int_X fg\,d\mu.$$

$d)$ Le résultat précédent subsiste-t-il si $p=1$?

10.11 *Théorème de Vitali-Saks*

Une famille $(\nu_i)_{i\in I}$ de mesures sur $\mathscr{A}$ est dite *absolument équicontinue* par rapport à la mesure μ si

$$\begin{cases} \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, A_\varepsilon\in\mathscr{A}, & \mu(A_\varepsilon)<+\infty \ \text{ et }\ \forall\, i\in I,\ \nu_i(^cA_\varepsilon)<\varepsilon,\\ \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \forall\, A\in\mathscr{A}, & \mu(A)<\delta \implies \forall\, i\in I,\ \nu_i(A)<\varepsilon. \end{cases}$$

On suppose que $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{C})$ où $\mathscr{C}$ est un π-système, *i.e.* $X \in \mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie. On se propose de montrer le *théorème de Vitali-Saks* :

Soit $(\nu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures finies sur $\mathscr{A}$, absolument équicontinue par rapport à μ et telle que pour tout $C\in\mathscr{C}$, $\lim_n \nu_n(C)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, pour tout $A\in\mathscr{A}$, $\nu(A) := \lim_n \nu_n(A)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et ν définit une mesure absolument continue par rapport à μ.

$a)$ Soit $\mathscr{B} := \{A \in \mathscr{A} \,:\, \nu(A) := \lim_n \nu_n(A)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+\}$. Montrer que $\mathscr{B}$ est stable par différence propre.

$b)$ Soient $(B_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathscr{B}$ et B leur réunion. Montrer que $\lim\limits_n \nu_n(B) = \sum\limits_{k\geq 1} \lim\limits_n \nu_n(B_k)$.

$c)$ En déduire que $\mathscr{B}$ est un λ-système puis que $\mathscr{B} = \mathscr{A}$.

$d)$ Montrer que l'application ν est une mesure sur $\mathscr{A}$, absolument continue par rapport à la mesure μ.

10.12 *Convergence faible dans* L^1

On suppose que $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{C})$ où $\mathscr{C}$ est un π-système dénombrable.

$a)$ Montrer que c'est le cas lorsque X est un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne.

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de $L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ bornée (*i.e.* la suite $(\|f_n\|_1)_{n\geq 1}$ est bornée) et équiintégrable (*i.e.* la suite des mesures $(|f_n|.\mu)_{n\geq 1}$ est absolument équicontinue).

$b)$ Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ telle que les deux suites de mesures définies par $\nu_n^{\pm} := f_n^{\pm}.\mu$ vérifient : pour tout $C \in \mathscr{C}$, $\lim\limits_n \nu^{\pm}_{\varphi(n)}(C)$ existent dans $\mathbb{R}$.

$c)$ Montrer qu'il existe $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ vérifiant $\forall\, A \in \mathscr{A},\ \lim\limits_n \int_A f_{\varphi(n)} d\mu = \int_A f\, d\mu$.

$d)$ En déduire la *convergence faible* dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ de $f_{\varphi(n)}$ vers f :

$$\forall\, g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mu),\quad \lim_n \int_X f_{\varphi(n)}\, g\, d\mu = \int_X fg\, d\mu.$$

$e)$ Une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ qui converge faiblement au sens de $d)$ (mais pour la suite elle-même) converge-t-elle nécessairement μ-*p.p.* ou en norme $\|\cdot\|_1$ vers f ?

10.13 On considère une fonction $\theta \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\begin{cases} \theta([0,1[) \subset [0,1[& \text{et} \quad \theta(]1,+\infty[) \subset]1,+\infty[\\ & \text{ou} \\ \theta([0,1[) \subset]1,+\infty[& \text{et} \quad \theta(]1,+\infty[) \subset [0,1[\,; \end{cases}$$

et E le $\mathbb{R}$-e.v. engendré par la famille $\left\{\theta(\frac{p}{q}\cdot)^n\right\}_{n\in\mathbb{N},\, p,q\in\mathbb{N}^*}$.

$a)$ Soit Φ une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. D'après le théorème de représentation de Riesz (*cf.* théorème 10.2), on a

$$\forall\, f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),\quad \Phi(f) = \int_{[0,1]} f\, d\mu^+ - \int_{[0,1]} f\, d\mu^-$$

où $\mu^{\pm}$ sont des mesures de Borel sur $[0,1]$. On suppose que $\Phi_{|E} = 0$. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, p,q \in \mathbb{N}^*,\qquad \int_{[0,1]} e^{-n\theta(\frac{p}{q}x)^n} \mu^+(dx) = \int_{[0,1]} e^{-n\theta(\frac{p}{q}x)^n} \mu^-(dx).$$

$b)$ En déduire que, pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $\mu^+([0,r]) = \mu^-([0,r])$, et que $\mu^+ = \mu^-$.

$c)$ Montrer que E est dense dans $\big(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup}\big)$.

$d)$ En déduire en particulier que, pour tout $a > 0$, les $\mathbb{R}$-e.v. engendrés par les familles $\{x \mapsto x^{na}\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{x \mapsto a^{nx}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont denses dans $\big(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup}\big)$.

10.14 *Dual de* L^∞

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré *quelconque*. On suppose qu'il existe une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathscr{A}$ tels que $0 < \mu(A_n) < +\infty$. Soit $A := \cup_{n\geq 1} A_n$ et M le $\mathbb{K}$-e.v. engendré par la famille $\{\mathbb{1}_A\} \cup \{\mathbb{1}_{A_n}\}_{n\geq 1}$.

$a)$ Soit $f_n := \mathbb{1}_{A_n}/\mu(A_n)$, $n \geq 1$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ telle que, pour toute fonction $g \in M$, $\Phi(g) := \lim_n \int_X f_{\varphi(n)}\, g\, d\mu$ existe dans $\mathbb{K}$.

$b)$ On suppose que le dual de $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ s'identifie à $L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$. Déduire du $a)$ l'existence d'une fonction $f \in L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ telle que, pour toute fonction $g \in M$, $\Phi(g) = \int_X f g\, d\mu$.

$c)$ Montrer que $\int_A f\, d\mu = 1$ et, pour tout $k \geq 1$, $\int_{A_k} f\, d\mu = 0$.

$d)$ En déduire une contradiction puis conclure quant au dual de $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$.

10.15 Soient X un espace métrique et μ une mesure σ-finie sur $\mathscr{B}(X)$ telle que, pour tout ouvert non vide Ω de X, $\mu(\Omega) > 0$. Montrer que le dual de $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ s'identifie à $L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ si et seulement si X est fini.

10.16 Soit $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/(2\pi)^d\mathbb{Z}^d$ le tore de dimension $d \geq 1$, identifié au cube $[-\pi,\pi[^d$. Pour $p \in [1,+\infty[$, on note par $L^p(\mathbb{T}^d)$ l'espace des fonctions f boréliennes complexes et périodiques de période $[-\pi,\pi[^d$, telles que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} := \left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < +\infty.$$

On désigne les coefficients de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ par

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} f(x)\, e^{-i\,(n|x)} dx, \quad n \in \mathbb{Z}^d,$$

où $(n|x)$ désigne le produit scalaire de n par $x \in \mathbb{R}^d$.

$a)$ Montrer que

$$\forall\, f \in L^p(\mathbb{T}^d), \quad \|\hat{f}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}.$$

$b)$ Montrer *l'inégalité de Bessel* :

$$\forall\, f \in L^2(\mathbb{T}^d), \quad \|\hat{f}\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}.$$

c) En déduire que, pour chaque $p \in [1,2]$, il existe une constante $C_p \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall\, f \in L^p(\mathbb{T}^d), \quad \|\hat{f}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)} \leq C_p\, \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} \quad \text{où} \quad q := \frac{p}{p-1}.$$

d) Montrer que pour chaque $p \in [1,2]$, il existe une constante $D_p \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall\, c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^p(\mathbb{T}^d), \quad \|f\|_{L^q(\mathbb{Z}^d)} \leq D_p\, \|c\|_{\ell^p(\mathbb{T}^d)}$$

$$\text{où} \quad f := \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} c_n\, e^{in\cdot x} \in L^2(\mathbb{T}^d).$$

10.17 a) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite positive, décroissante, tendant vers 0. On pose pour $n \geq 1$, $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. Montrer que

$$\forall\, n \geq 1,\ \forall\, p > n,\ \forall\, x \in]0,\pi], \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{p} \cos(kx) \right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{x}.$$

En déduire que la fonction $f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, \cos(nx)$ est bien définie sur $]0,\pi]$ et vérifie $\forall\, n \geq 1,\ \forall\, x \in]0,\pi], \quad |f(x)| \leq A_n + \dfrac{\pi\, a_n}{x}$.

b) Soit $p \in]2,+\infty[$. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\int_0^\pi |f(x)|^p\, dx \leq c \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^p\, n^{-2}.$$

On suppose désormais que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^p\, n^{p-2} < +\infty$.

c) Soient a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $a(x) := a_n$ si $x \in [n-1, n[$, $n \geq 1$, et A définie par $A(x) := \int_0^x a(t)dt$ si $x \in \mathbb{R}_+$.

Montrer, à l'aide de l'exercice 9.16 g), que

$$\int_0^{+\infty} a(x)\, x^{p-2}\, dx < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} A(x)^p\, x^{-2}\, dx < +\infty.$$

En déduire que $f \in L^p\big([-\pi,\pi]\big)$.

d) On considère pour $n \geq 1$, $b_n := n^{-1/q} \ln^{1/2}(n+1)$ où $q := \frac{p}{p-1}$. Montrer que $\hat{f} \notin \ell^q(\mathbb{Z})$. Que peut-on en conclure par rapport à l'exercice 10.16 ?

Chapitre 11

Mesure produit. Théorèmes de Fubini

L'objet de ce chapitre est de donner un sens à la notion de "mesure de surface" sur un espace produit $X \times Y$ à partir de "mesures de longueur" définies sur X et Y. L'intégration par rapport à cette mesure de surface – ou mesure produit – sur $X \times Y$ fournira le cadre naturel et rigoureux pour introduire la notion d'intégrale multiple. Les règles de manipulation et de calcul de telles intégrales sont régies par les deux théorèmes de Fubini.

11.1 Tribu produit

11.1.1 Définition, premières propriétés

***Définition* 11.1.** *Soient $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ deux espaces mesurables. On appelle* tribu produit *de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$, la tribu notée $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ définie par*

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} := \sigma\big(\{A \times B,\ A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{B}\}\big).$$

La tribu $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ est donc engendrée par les rectangles "à côtés mesurables".

Notation : Dans la suite de ce chapitre, la notation $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ désignera l'ensemble $\{A \times B : A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{B}\}$, *i.e.* l'ensemble des rectangles à côtés mesurables. Ainsi, $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \sigma(\mathscr{A} \times \mathscr{B})$.

Remarque : Il est utile de remarquer pour la suite qu'un rectangle à côtés mesurables $A \times B$ s'écrit sous la forme $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$.

La proposition ci-dessous permet de caractériser la tribu produit $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ comme la plus petite tribu rendant les projections canoniques π_X et π_Y de $X \times Y$ sur X et Y mesurables.

***Proposition* 11.1.** *Soient $\pi_X : X\times Y \to X$ et $\pi_Y : X\times Y \to Y$ les projections canoniques sur X et Y définies par $\pi_X((x,y)) := x$ et $\pi_Y((x,y)) := y$ respectivement.*

(a) π_X et π_Y sont respectivement $(\mathscr{A}, \mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$ et $(\mathscr{B}, \mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$-mesurables.

(b) Si une tribu $\mathscr{T}$ sur $X\times Y$ rend π_X et π_Y respectivement $(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ et $(\mathscr{T}, \mathscr{B})$-mesurables alors $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}\subset\mathscr{T}$.

DÉMONSTRATION : (a) Par définition de la mesurabilité (*cf.* chapitre 5) la projection π_X est mesurable de $(X\times Y, \mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$ dans $(X, \mathscr{A})$ si et seulement si pour tout $A\in\mathscr{A}$, $\pi_X^{-1}(A)\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$. Or, si $A\in\mathscr{A}$, $\pi_X^{-1}(A) = A\times Y\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}\subset\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$.
(b) Si π_X et π_Y sont respectivement $(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ et $(\mathscr{T}, \mathscr{B})$-mesurables alors, pour tous $A\in\mathscr{A}$ et $B\in\mathscr{B}$, $A\times B = (A\times Y)\cap(X\times B) = \pi_X^{-1}(A)\cap\pi_Y^{-1}(B)\in\mathscr{T}$; donc $\mathscr{A}\times\mathscr{B}\subset\mathscr{T}$ et, partant, $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{A}\times\mathscr{B})\subset\mathscr{T}$. $\Diamond$

La proposition suivante montre que la mesurabilité des applications à valeurs dans $(X\times Y, \mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$ se ramène à celle de leurs composantes.

***Proposition* 11.2.** *La fonction* $\begin{array}{rccc} f: & (Z,\mathscr{C}) & \longrightarrow & (X\times Y, \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}) \\ & z & \longmapsto & f(z) := (f_X(z), f_Y(z)) \end{array}$ *est $(\mathscr{C}, \mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$-mesurable si et seulement si f_X et f_Y sont respectivement $(\mathscr{C}, \mathscr{A})$ et $(\mathscr{C}, \mathscr{B})$-mesurables.*

DÉMONSTRATION : $(\Rightarrow)$ Si f est mesurable et $A\in\mathscr{A}$, $f_X^{-1}(A) := f^{-1}(A\times Y)\in\mathscr{C}$.
$(\Leftarrow)$ Si f_X et f_Y sont mesurables et $A\in\mathscr{A}$, $B\in\mathscr{B}$, $A\times B = (A\times Y)\cap(X\times B)$. Donc, d'après les formules de Hausdorff, $f^{-1}(A\times B) = f_X^{-1}(A)\cap f_Y^{-1}(B)\in\mathscr{C}$. Par suite, comme $\sigma(\mathscr{A}\times\mathscr{B}) = \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$, f est $(\mathscr{C}, \mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$-mesurable d'après la proposition 5.1. $\Diamond$

Extension : L'extension des définitions et résultats précédents à d espaces mesurables $(X_1, \mathscr{A}_1)$, $\ldots$, $(X_d, \mathscr{A}_d)$ est immédiate en posant

$$\mathscr{A}_1\otimes\cdots\otimes\mathscr{A}_d := \sigma\big(\{A_1\times\ldots\times A_d,\ A_i\in\mathscr{A}_i,\ 1\le i\le d\}\big).$$

Se pose alors la question de l'associativité de "l'opération" $\otimes$ sur les tribus. Elle est résolue par la proposition suivante

***Proposition* 11.3.** *Soient $(X_1, \mathscr{A}_1)$, $(X_2, \mathscr{A}_2)$, $(X_3, \mathscr{A}_3)$ trois espaces mesurables.*

$$(\mathscr{A}_1\otimes\mathscr{A}_2)\otimes\mathscr{A}_3 = \mathscr{A}_1\otimes(\mathscr{A}_2\otimes\mathscr{A}_3) = \mathscr{A}_1\otimes\mathscr{A}_2\otimes\mathscr{A}_3.$$

DÉMONSTRATION : établissons que $(\mathscr{A}_1\otimes\mathscr{A}_2)\otimes\mathscr{A}_3 = \mathscr{A}_1\otimes\mathscr{A}_2\otimes\mathscr{A}_3$ par exemple.

Il est immédiat que l'ensemble $\mathscr{A}_1\times\mathscr{A}_2\times\mathscr{A}_3$ des "parallélépipèdes" à côtés mesurables est contenu dans $(\mathscr{A}_1\otimes\mathscr{A}_2)\otimes\mathscr{A}_3$. Par conséquent,

$$\mathscr{A}_1\otimes\mathscr{A}_2\otimes\mathscr{A}_3\subset(\mathscr{A}_1\otimes\mathscr{A}_2)\otimes\mathscr{A}_3.$$

Réciproquement, soit $A_3 \in \mathscr{A}_3$, fixé, et

$$\mathscr{T}_{A_3} = \{B \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 : B \times A_3 \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \mathscr{A}_3\}.$$

$\mathscr{T}_{A_3}$ est une tribu car

– $\emptyset \times A_3 = \emptyset \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \mathscr{A}_3$ donc $\emptyset \in \mathscr{T}_{A_3}$,

– si $B \in \mathscr{T}_{A_3}$, ${}^cB \times A_3 = X_1 \times X_2 \times A_3 \cap {}^c(B \times A_3) \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \mathscr{A}_3$ puisque $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \mathscr{A}_3$ est une tribu. Donc ${}^cB \in \mathscr{T}_{A_3}$,

– et, enfin, pour toute suite $(B_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{T}_{A_3}$,

$$\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_n\Big) \times A_3 = \bigcup_{n\geq 1} (B_n \times A_3) \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \mathscr{A}_3.$$

D'autre part, $\mathscr{T}_{A_3}$ contient évidemment les rectangles "à côtés mesurables" $A_1 \times A_2$, $A_1 \in \mathscr{A}_1$, $A_2 \in \mathscr{A}_2$, donc $\mathscr{T}_{A_3}$ contient $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$. Partant, $\mathscr{T}_{A_3} = \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ pour tout $A_3 \in \mathscr{A}_3$, *i.e.* $(\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2) \times \mathscr{A}_3 \subset \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \mathscr{A}_3$. On en conclut aussitôt l'inclusion annoncée : $(\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2) \otimes \mathscr{A}_3 \subset \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \mathscr{A}_3$. $\Diamond$

11.1.2 Le cas des tribus boréliennes

Lorsque X et Y sont des espaces métriques (ou topologiques), on peut donc, tout aussi naturellement, munir le produit $X \times Y$ soit de la tribu $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$, produit des tribus boréliennes de X et Y, soit de la tribu borélienne $\mathscr{B}(X \times Y)$ associée à la topologie produit sur $X \times Y$ ([1]).

évidemment la question des relations existant entre ces deux tribus se pose aussitôt de façon cruciale ! Elle est résolue par la proposition ci-dessous.

***Proposition* 11.4.** *Soient X et Y deux espaces métriques topologiques.*

(a) $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y) \subset \mathscr{B}(X \times Y)$,

(b) Si X et Y sont à base dénombrable d'ouverts ([2]), alors :

$$\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y) = \mathscr{B}(X \times Y).$$

DÉMONSTRATION : (a) La projection $\pi_X : X \times Y \to X$ est continue par définition de la topologie produit ; idem pour π_Y. Les projections π_X et π_Y sont donc $\mathscr{B}(X \times Y) = \sigma(\mathscr{O}(X \times Y))$-mesurables. La proposition11.1(b) entraîne alors que $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y) \subset \mathscr{B}(X \times Y)$.

(b) Désignons par $\mathscr{U} := \{U_n,\, n \geq 1\}$ et $\mathscr{V} := \{V_n,\, n \geq 1\}$ les bases dénombrables d'ouverts respectives de X et Y. L'ensemble $\mathscr{U} \times \mathscr{V} := \{U_m \times V_n,\, m,\, n \geq 1\}$ des rectangles associés à $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ est alors une base dénombrable d'ouverts de l'espace produit $X \times Y$ (*cf.* compléments topologiques, section 3.4). Tout ouvert de $X \times Y$

1. Topologie relative, par exemple,à la distance $d((x,y),(x',y')) := d_X(x,x') + d_Y(y,y')$.
2. Voir la section 3.4 pour la définition. On y établit également qu'un espace métrique (X, d_X) est à base dénombrable d'ouverts si et seulement si il contient une suite dense $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

étant union dénombrable d'éléments de $\mathscr{U}\times\mathscr{V}$, il est clair que $\mathscr{O}(X\times Y)$ est inclus dans $\sigma(\mathscr{U}\times\mathscr{V})$ et partant

$$\mathscr{B}(X\times Y)=\sigma(\mathscr{O}(X\times Y))\subset\sigma(\mathscr{U}\times\mathscr{V})\subset\sigma(\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(Y))=\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(Y)$$

puisque $\mathscr{U}\subset\mathscr{B}(X)$ et $\mathscr{V}\subset\mathscr{B}(Y)$. $\Diamond$

Remarques : • $\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(Y)$ est la plus petite tribu sur $X\times Y$ rendant les projections canoniques π_X et π_Y mesurables, alors que $\mathscr{B}(X\times Y)$ est la tribu des boréliens relatifs à la plus petite topologie – au sens comportant le moins d'ouverts – rendant ces mêmes projections continues.

• L'extension au produit de plus de deux espaces est immédiate (par récurrence ou directement).

***Application* 11.1.** ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

(a) *Produits d'espaces* $\mathbb{R}^d$: On a les relations essentielles suivantes

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)=\mathscr{B}(\mathbb{R})\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}) \text{ et } \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)=\underbrace{\mathscr{B}(\mathbb{R})\otimes\cdots\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R})}_{d \text{ termes}}=\mathscr{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$$

puisque $\mathbb{R}$ a pour base dénombrable d'ouverts $\mathscr{U}=\{]\alpha,\beta[,\ \alpha<\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{Q}\}$.

(a') *Produits d'espaces métriques* : Dans le cadre des espaces métriques, la proposition 11.4 s'énonce généralement sous la forme plus commode : si (X,d) et (Y,δ) sont des espaces métriques *séparables*, alors $\mathscr{B}(X\times Y)=\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(Y)$. Ainsi

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^{d+d'})=\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}^{d'}) \text{ et } \mathscr{B}(\mathbb{C}^{d+d'})=\mathscr{B}(\mathbb{C}^d)\otimes\mathscr{B}(\mathbb{C}^{d'}).$$

mais aussi $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}^d)=\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})^{\otimes d}$, etc.

(b) $\mathscr{B}(\mathbb{K})^{\otimes 2}$*-mesurabilité de la somme et du produit* : La fonction $\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{K}\times\mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$ est continue de $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ donc $(\mathscr{B}(\mathbb{K}\times\mathbb{K}),\mathscr{B}(\mathbb{K}))$-mesurable. Comme $\mathscr{B}(\mathbb{K}\times\mathbb{K})=\mathscr{B}(\mathbb{K})\otimes\mathscr{B}(\mathbb{K})$, on en déduit la mesurabilité annoncée ; idem pour le produit.

(c) *Mesurabilité de la somme et du produit de fonctions mesurables* : Si f et g : $(X,\mathscr{A})\to\mathbb{K}$ sont mesurables alors $f+g$ et fg le sont également.

En effet, d'après la proposition 11.2, $(f,g):(X,\mathscr{A})\to(\mathbb{K}\times\mathbb{K},\mathscr{B}(\mathbb{K})\otimes\mathscr{B}(\mathbb{K}))$ est mesurable et, au vu de l'application (b) ci-dessus, l'addition est mesurable de $(\mathbb{K}\times\mathbb{K},\mathscr{B}(\mathbb{K})\otimes\mathscr{B}(\mathbb{K}))$ dans $(\mathbb{K},\mathscr{B}(\mathbb{K}))$. On conclut par composition des applications mesurables ; idem pour le produit.

(d) *Extension* : Plus généralement si $\Phi:\mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ est continue (ou même seulement borélienne) alors $\Phi(f,g)$ est mesurable dès que $f,g:(X,\mathscr{A})\to\mathbb{K}$ le sont.

Remarque : Il est souvent techniquement plus facile d'établir la mesurabilité de Φ pour les tribus $\big(\mathscr{B}(\mathbb{K}\times\mathbb{K}),\mathscr{B}(\mathbb{K})\big)$ que pour les tribus $\big(\mathscr{B}(\mathbb{K})\otimes\mathscr{B}(\mathbb{K}),\mathscr{B}(\mathbb{K})\big)$ bien qu'en fin de compte ce soit la même chose.

11.1.3 Section d'un élément de la tribu produit

La question étudiée dans ce paragraphe est la suivante : si $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, que peut-on dire de la mesurabilité de ses *sections* définies par :

$$\begin{cases} C_x := \{y \in Y : (x,y) \in C\} \\ C^y := \{x \in X : (x,y) \in C\} \end{cases} ?$$

***Proposition* 11.5.** *Pour tout $x \in X$, $C_x \in \mathscr{B}$ et pour tout $y \in Y$, $C^y \in \mathscr{A}$.*

DÉMONSTRATION : Soient $x \in X$, fixé et $\mathscr{T}_x := \{C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} : C_x \in \mathscr{B}\}$. $\mathscr{T}_x$ est une sous-tribu de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ car $(\emptyset)_x = \emptyset$, $(\bigcup_n C^n)_x = \bigcup_n C_x^n$ et $({}^cC)_x = {}^cC_x$. D'autre part, si $C = A \times B$ est un rectangle à côtés mesurables, $C_x = B \in \mathscr{B}$ si $x \in A$ et $C_x = \emptyset \in \mathscr{B}$ si $x \notin A$, donc $\mathscr{A} \times \mathscr{B} \subset \mathscr{T}_x$ et partant $\mathscr{T}_x = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. $\Diamond$

***Corollaire* 11.1.** *Soit $f : (X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}) \to \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, mesurable. Pour tout $x \in X$, la section de f d'abscisse x définie par $f_x(y) := f(x,y)$ est $\mathscr{B}$-mesurable ; de même, pour tout $y \in Y$, la section f^y d'ordonnée y est $\mathscr{A}$-mesurable.*

DÉMONSTRATION : Si $f := \mathbb{1}_C$, $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, le résultat découle de la proposition 11.5 puisque $f_x = \mathbb{1}_{C_x}$. Si $f := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{C_i}$ est étagée, on note que sa section $f_x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{(C_i)_x}$ est évidemment $\mathscr{B}$-mesurable. On conclut en approchant à l'aide du lemme fondamental d'approximation (théorème 5.1) toute fonction $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$-mesurable f par des fonctions étagées f_n. Il est en effet immédiat que $(\lim_n f_n)_x = \lim_n (f_n)_x$. $\Diamond$

11.2 Mesure produit de mesures σ-finies

11.2.1 Construction et caractérisation

***Définition* 11.2.** *Une mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$ est* σ-finie *s'il existe une suite croissante $(E_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ vérifiant*

$$X = \bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} E_n \quad \textit{et} \quad \mu(E_n) < +\infty \ \textit{pour tout}\ n \geq 1.$$

Par extension, l'espace $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est dit lui-même σ-fini.

***Théorème* 11.1** (Mesure produit)**.** *Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis.*

(a) *Il existe une unique mesure m sur $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ vérifiant*

$$\forall A \in \mathscr{A}, \forall B \in \mathscr{B}, \quad m(A \times B) = \mu(A)\, \nu(B). \tag{11.1}$$

Cette mesure est σ-finie. On la note généralement $\mu \otimes \nu$ (au lieu de m).

(b) *Pour tout $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$,* $\quad m(C) = \displaystyle\int_X \nu(C_x)\, \mu(dx) = \int_Y \mu(C^y)\, \nu(dy).$

DÉMONSTRATION : (a) *Unicité* : Soient m et m' deux mesures sur l'espace produit $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ vérifiant la propriété (11.1). Les mesures μ et ν étant σ-finies, il existe deux suites croissantes $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ telles que $A_n \in \mathscr{A}$ et $B_n \in \mathscr{B}$, $\mu(A_n) < +\infty$, $\nu(B_n) < +\infty$ et $X = \bigcup_n A_n$, $Y = \bigcup_n B_n$. On pose alors pour tout $n \geq 1$, $E_n := A_n \times B_n \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$. La suite $(E_n)_{n\geq 1}$ est croissante, $X \times Y = \bigcup_n E_n$ et, pour tout $n \geq 1$, $m(E_n) = m'(E_n) < +\infty$.

D'autre part, $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ contient $X \times Y$ et est stable par intersection finie puisque $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$ donc, d'après le corollaire 6.2 de caractérisation des mesures σ-finies, la coïncidence de m et m' sur $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ entraîne $m = m'$.

Construction : voir le point (b).

(b) On montre dans un premier temps que la relation $m(C) := \displaystyle\int_X \nu(C_x)\, \mu(dx)$ définit bien une mesure (σ-finie) sur la tribu $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

étape 1 *Consistance de la définition* :

D'après la proposition 11.5 ci-avant, $C_x \in \mathscr{B}$, donc $\nu(C_x)$ existe pour tout $x \in X$.

– Supposons d'abord ν finie ; alors

$$\Lambda := \left\{ C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} : x \mapsto \nu(C_x)\ \mathscr{A}\text{-mesurable} \right\}$$

est clairement un λ-système. Λ contient le π-système $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$; en effet, comme $(A \times B)_x = B$ si $x \in A$ et $(A \times B)_x = \emptyset$ sinon, il vient $\nu\left((A \times B)_x\right) = \mathbb{1}_A(x)\, \nu(B)$. Le corollaire 6.1 entraîne alors $\Lambda = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

– Dans le cas général, on remplace ν par $\nu_n := \nu(. \cap B_n)$ puis on utilise le fait que $\nu(C_x) = \lim\limits_n{}^{\uparrow}\, \nu(C_x \cap B_n)$.

La quantité $\displaystyle\int_X \nu(C_x)\, \mu(dx)$ a donc bien un sens puisque $x \mapsto \nu(C_x)$ est toujours $\mathscr{A}$-mesurable positive.

étape 2 *m est une mesure sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$* :

$m(\emptyset) = \displaystyle\int_X \nu(\emptyset_x)\, \mu(dx) = \int_X \nu(\emptyset)\, \mu(dx) = 0$. D'autre part, si $(C_n)_{n\geq 1}$ désigne une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, il est immédiat que les sections $(C_n)_x$, $n \geq 1$, sont deux à deux disjointes et que $(\cup_n C_n)_x = \cup_n (C_n)_x$. La σ-additivité de ν et le théorème de Beppo Levi pour les séries à termes positifs entraînent alors

$$\begin{aligned} m(\cup_n C_n) &= \int_X \nu\left((\cup_n C_n)_x\right)\, \mu(dx) = \int_X \nu\left(\cup_n (C_n)_x\right)\, \mu(dx) \\ &= \sum_{n\geq 1} \int_X \nu\left((C_n)_x\right)\, \mu(dx) = \sum_{n\geq 1} m(C_n). \end{aligned}$$

étape 3 *Caractérisation et interversion* :
Soit $C = A \times B \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$. On a vu que $C_x = B$ si $x \in A$, $C_x = \emptyset$ si $x \notin A$ d'où $\nu(C_x) = \mathbb{1}_A(x)\,\nu(B)$, partant, si $\nu(B) < +\infty$,

$$m(C) = \int_X \nu(C_x)\,\mu(dx) = \nu(B)\int_X \mathbb{1}_A(x)\,\mu(dx) = \mu(A)\,\nu(B).$$

Si $\nu(B) = +\infty$, l'égalité est évidente (avec la convention habituelle). En intervertissant les rôles de μ et ν, on vérifie que la mesure m' définie par $m'(C) := \int_Y \mu(C^y)\,\nu(dy)$ coïncide avec m sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ d'où, *via* l'unicité établie en (a), $m' = m$, ce qui achève la démonstration. $\diamondsuit$

Remarques sur la σ-finitude : • Si μ ou ν n'est pas σ-finie, le théorème tombe généralement en défaut, même lorsque l'on peut définir à la fois m et m'. Ainsi, soit $X = Y = \mathbb{R}$. On munit X de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ (σ-finie) et Y de la tribu $\mathscr{P}(Y)$ de toutes ses parties et de la mesure de comptage $\nu(B) := \mathrm{card}(B)$. On considère la diagonale de $\mathbb{R}^2$: $\Delta := \{(x,x),\ x \in \mathbb{R}\}$. Δ est un fermé de $\mathbb{R}^2$, en conséquence, $\Delta \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{R})$ (on peut aussi vérifier directement à titre d'exercice que $\Delta \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$ en notant que $\Delta := \{\pi_X = \pi_Y\}$). Il est immédiat que $\Delta_x = \{x\}$ et $\Delta^y = \{y\}$.

$$\text{D'où :}\qquad m(\Delta) = \int_{\mathbb{R}} \nu(\Delta_x)\,\lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}\,\lambda(dx) = +\infty,$$

$$\text{alors que :}\qquad m'(\Delta) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(\Delta^y)\,\nu(dy) = \int_{\mathbb{R}} 0\,\nu(dy) = 0.$$

• Il reste que, dans certains cas, la mesure produit peut exister en dehors du cadre σ-fini. Ainsi, considèrons deux espaces mesurables quelconques $(X, \mathscr{P}(X))$ et $(Y, \mathscr{P}(Y))$ munis chacun de leur mesure de comptage respective m_X et m_Y. Il est clair que l'unique mesure m sur $(X \times, Y, \mathscr{P}(X \times Y))$ vérifiant en particulier $m(\{x\} \times \{y\}) = m_X(\{x\})\,m_Y(\{y\}) = 1^2 = 1$ est la mesure de comptage sur $X \times Y$ qui affecte une masse 1 à tous les couples (x,y) !

évidemment, le théorème 11.1 établi ci-dessus s'étend *directement* à un produit $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_d$ de d de mesures σ-finies sur des espaces mesurables $(X_i, \mathscr{A}_i)$, $1 \le i \le d$. En particulier, la mesure $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_d$ est entièrement caractérisée par le fait que

$$\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_d(A_1 \times \ldots \times A_d) = \mu_1(A_1) \ldots \mu_d(A_d), \quad A_i \in \mathscr{A}_i,\ 1 \le i \le d.$$

***Proposition* 11.6.** *L'opération $\otimes$ sur les mesures σ-finies est associative au sens où*

$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3) = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3. \tag{11.2}$$

DÉMONSTRATION : En effet ces trois mesures sont définies sur la tribu produit $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \mathscr{A}_3$ d'après la proposition 11.3. En outre, elles coïncident clairement sur les parallélépipèdes à côtés mesurables $A_1 \times A_2 \times A_3$ où toutes trois valent $\mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2)\,\mu_3(A_3)$. Elles sont donc égales. $\diamondsuit$

***Application* 11.2.** Soit μ une mesure σ-finie sur $(X, \mathscr{A})$ et $f : (X, \mathscr{A}) \to \mathbb{R}_+$. Alors

$$\int_X f\,d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\})dt.$$

En effet, posons $C := \{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times X : f(x) > t\}$. Il est clair que

$$C = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_+^*} \underbrace{[0, r[}_{\in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)} \times \underbrace{\{f \geq r\}}_{\in \mathscr{A}} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{A}.$$

D'autre part, $C_t := \{x \in X : f(x) > t\}$ et $C^x := \{t \in \mathbb{R}_+ : f(x) > t\}$. L'identité (b) du théorème de la mesure produit appliqué à $\lambda \otimes \mu$ (λ désigne ici la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$) entraîne, d'une part,

$$\lambda \otimes \mu(C) = \int_X \left(\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{f(x) > t\}} \lambda(dt) \right) \mu(dx) = \int_X \left(\int_0^{f(x)} dt \right) \mu(dx) = \int_X f(x)\,\mu(dx)$$

et, d'autre part,

$$\lambda \otimes \mu(C) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_X \mathbb{1}_{\{f(x) > t\}} \mu(dx) \right) \lambda(dt) = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\})dt. \quad \diamondsuit$$

11.2.2 Construction de la mesure de Lebesgue λ_d, $d \geq 2$

Soit $d \geq 2$. Désignons par λ_d la mesure produit $\underbrace{\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_1}_{d \text{ fois}}$ de la mesure de Lebesgue λ_1 sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ par elle-même. Rappelons une fois encore que λ_d ainsi définie est bien une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ car $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) = \mathscr{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$.

Pour établir que λ_d est effectivement la mesure de Lebesgue, on s'appuie sur un lemme de changement de variable élémentaire.

***Lemme* 11.1.** *Soit $f : (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{\mathbb{R}} f(u - a)\,\lambda_1(du) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\,\lambda_1(du).$$

DÉMONSTRATION : Pour tout borélien A et tout réel a l'invariance par translation $\lambda_1(A + a) = \lambda_1(A)$ s'écrit $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(u)\,\lambda_1(du) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(u - a)\,\lambda_1(du)$. L'identité s'étend par linéarité aux fonctions étagées puis, *via* le lemme fondamental d'approximation, aux fonctions mesurables positives. $\diamondsuit$

***Proposition* 11.7.** *La mesure produit $\lambda_d := \lambda_1^{\otimes d}$ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$.*

DÉMONSTRATION : Il nous faut simplement vérifier les hypothèses (i)-(ii) du théorème d'existence et de caractérisation de la mesure de Lebesgue (théorème 6.1). D'après la proposition 11.6, les mesures λ_d vérifient la relation de récurrence $\lambda_d = \lambda_1 \otimes \lambda_{d-1}$, $d \geq 2$. On raisonne alors par récurrence sur d, supposant la mesure de Lebesgue λ_1 construite.
Supposons donc que λ_{d-1} est bien la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^{d-1}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^{d-1}))$ *i.e.* $\lambda_{d-1}([0,1]^{d-1}) = 1$ et λ_{d-1} est invariante par translation. Il vient alors :

– $\lambda_d([0,1]^d) = \lambda_1([0,1])\, \lambda_{d-1}([0,1]^{d-1}) = 1^2 = 1$.

– Soient $a := (a_1, a_2, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ et $C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^{d-1})$; on vérifie que, pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $(a+C)_{x_1} = (a_2, \ldots, a_d) + C_{x_1 - a_1}$ donc

$$\begin{aligned}
\lambda_d(a+C) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{d-1}((a_2, \ldots, a_d) + C_{x_1-a_1})\, \lambda_1(dx_1) \ \text{(mesure produit)},\\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{d-1}(C_{x_1-a_1})\, \lambda_1(dx_1) \ (\lambda_{d-1} \text{ est invariante par translation}),\\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{d-1}(C_{x_1})\, \lambda_1(dx_1) \ \textit{via} \text{ le lemme ci-dessus},\\
&= \lambda_d(C).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. $\Diamond$

11.3 Théorèmes de Fubini

Il y a, selon la terminologie usuelle deux théorèmes de Fubini : l'un pour les fonctions positives, l'autre pour les fonctions intégrables. Dans les applications, il est généralement nécessaire de s'appuyer sur le premier pour vérifier les hypothèses du second.

***Théorème* 11.2** (Fubini-Tonelli)**.** *Soient $f : (X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable, μ et ν deux mesures σ-finies, respectivement sur $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$.*
(a) Les fonctions partout définies $x \mapsto \displaystyle\int_Y f(x,y)\, \nu(dy)$ et $y \mapsto \displaystyle\int_X f(x,y)\, \mu(dx)$ sont respectivement $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$-mesurables.
(b) $\displaystyle\int_{X\times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, \nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, \mu(dx) \right) \nu(dy)$.
(Ces égalités ont lieu dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.)

DÉMONSTRATION : (a) D'après le corollaire 11.1 ci-avant, la section de f d'abscisse x, $f_x(y) := f(x,y)$, est $\mathscr{B}$-mesurable (positive). Par suite, pour tout $x \in X$, $\displaystyle\int_Y f(x,y)\, \nu(dy)$ existe. Si $f := \mathbb{1}_C$, $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, on a vu dans l'étape 1 de la démonstration du théorème 11.1(b) que $x \mapsto \nu(C_x) = \displaystyle\int_Y \mathbb{1}_C(x,y)\, \nu(dy)$ est $\mathscr{A}$-mesurable.

Si f est étagée positive (donc finie) le résultat découle de la linéarité de l'intégrale et de la stabilité de la mesurabilité par somme de fonctions mesurables (finies). On conclut en approchant toute fonction $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$-mesurable positive par une suite croissante de fonctions étagées positives *via* le lemme fondamental d'approximation et le théorème de Beppo Levi.

(b) D'après le point (a), les intégrales considérées ont un sens ; en outre, si $f := \mathbb{1}_C$, $C \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$, l'identité annoncée s'écrit

$$\mu\otimes\nu(C) = \int_X \nu(C_x)\,\mu(dx) = \int_Y \mu(C^y)\,\nu(dy).$$

Ceci a été établi dans le théorème 11.1. On conclut alors comme en (a) *via* le procédé d'approximation standard . $\Diamond$

***Application* 11.3.** Soient $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda, \mathbb{R}_+)$ et $F(x) := \int_{[0,x]} f(t)\,dt$. Alors, pour tout $a > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{F(ax)-F(x)}{x}\,dx = \ln a \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\,dx.$$

DÉMONSTRATION : étape 1 : Commençons par un résultat préliminaire – cas particulier du théorème de changement de variables qui sera établi au chapitre 12 –

$$\forall\,\alpha > 0,\ \forall\,A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(\alpha A) = \alpha\,\lambda(A).$$

Il est en effet facile de vérifier que l'application définie sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ par $\mu(A) := \alpha^{-1}\lambda(\alpha A)$ est une mesure sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, invariante par translation et que $\mu([0,1]) = 1$. Donc par unicité de la mesure de Lebesgue, $\mu = \lambda$. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$. On en déduit ensuite que, pour toute fonction étagée positive, puis, *via* le théorème 7.1, pour toute fonction borélienne positive g

$$\int_A g(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha A} g(x)\,dx.$$

étape 2 : Revenons au problème. On se ramène au cas où f est positive grâce à la décomposition canonique $f = f^+ - f^-$. On applique alors le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 11.2) à la fonction Φ définie sur l'espace produit $([1,a]\times\mathbb{R}_+, \mathscr{B}([1,a])\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ par $\Phi(t,x) := f(tx)$. La fonction Φ est la composée de la fonction continue – donc $\mathscr{B}([1,a]\times\mathbb{R}_+)$-mesurable – $(t,x)\mapsto tx$ par la fonction borélienne f. Comme $\mathscr{B}([1,a]\times\mathbb{R}_+) = \mathscr{B}([1,a])\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$, la fonction Φ est $\mathscr{B}([1,a])\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable. Il vient alors

$$\int_{\mathbb{R}_+}\left(\int_{[1,a]} f(tx)\,dt\right)dx = \int_{[1,a]}\left(\int_{\mathbb{R}_+} f(tx)\,dx\right)dt.$$

D'après le résultat préliminaire,

$$\int_{\mathbb{R}_+}\left(\int_{[1,a]} f(tx)\,dt\right)dx = \int_{\mathbb{R}_+}\frac{1}{x}\left(\int_{[x,ax]} f(t)\,dt\right)dx = \int_{\mathbb{R}_+}\frac{F(ax)-F(x)}{x}\,dx.$$

D'autre part, par le même argument

$$\int_{[1,a]}\left(\int_{\mathbb{R}_+} f(tx)\,dx\right)dt = \int_{[1,a]}\left(\int_{\mathbb{R}_+} f(x)\,dx\right)\frac{1}{t}\,dt = \ln a\int_{\mathbb{R}_+} f(x)\,dx,$$

d'où l'égalité cherchée. $\Diamond$

***Théorème* 11.3** (Fubini-Lebesgue)**.** *On considère à nouveau les espaces mesurés du théorème 11.2. Soit* $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu \otimes \nu)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$)*. Alors :*

$$(a) \begin{cases} \mu(dx)\text{-p.p.} \quad y \mapsto f(x,y) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\nu), \\ \nu(dy)\text{-p.p.} \quad x \mapsto f(x,y) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu). \end{cases}$$

(b) $x \mapsto \displaystyle\int_Y f(x,y)\nu(dy) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ *et* $y \mapsto \displaystyle\int_X f(x,y)\,\mu(dx) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\nu)$*, ces fonctions étant définies respectivement* μ*-p.p. et* ν*-p.p.*

$$(c) \quad \begin{aligned} \int_{X\times Y} f d\mu\otimes\nu &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\nu(dy) \right) \mu(dx) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx) \right) \nu(dy). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION : *Cas réel* : (a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on applique le théorème de Fubini-Tonelli aux fonctions f^+ et f^-. Or, d'après le corollaire 7.2, si $g \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}_+}(m)$, m mesure positive quelconque, alors $\{g = +\infty\}$ est mesurable de m-mesure nulle. Ainsi, pour le point (a),

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_Y f^{\pm}(x,y)\,\nu(dy) \right) \mu(dx) &= \int_{X\times Y} f^{\pm}\, d(\mu\otimes\nu) \\ &\leq \int_{X\times Y} |f|\, d(\mu\otimes\nu) < +\infty \end{aligned} \tag{11.3}$$

donc $\left\{ x \in X : \displaystyle\int_Y f^{\pm}(x,y)\,\nu(dy) = +\infty \right\}$ est $\mathscr{A}$-mesurable de μ-mesure nulle.

(b) Ce point découle immédiatement de l'inégalité (11.3) car, pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} \left| \int_Y f(x,y)\,\nu(dy) \right| &\leq \int_Y |f(x,y)|\,\nu(dy) \\ &\leq \int_Y f^+(x,y)\,\nu(dy) + \int_Y f^-(x,y)\,\nu(dy) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu(dx)). \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_Y f(x,y)\,\nu(dy)$ est donc μ-intégrable. On procède de façon analogue pour les affirmations symétriques.

(c) Ce point s'établit en faisant la différence terme à terme dans l'identité (11.3).

Cas complexe : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on se ramène au cas réel par les méthodes habituelles en considérant $\Re(f)$ et $\Im(f)$. $\Diamond$

Remarque : L'hypothèse d'intégrabilité de la fonction f dans le théorème de Fubini-Lebesgue est cruciale. En effet, on peut avoir l'intégrabilité des fonctions “intermédiaires” de l'assertion (b) du théorème 11.3 sans que l'égalité (c) soit vérifiée pour autant. *A fortiori* aucune forme de “réciproque” n'est non plus valable : on peut avoir intégrabilité des diverses fonctions “intermédiaires” de l'assertion (b) du théorème 11.3 et l'égalité (c) sans que la fonction f soit pour autant intégrable par rapport à la mesure produit. Ces situations sont illustrées par les contre-exemples ci-après.

Contre-exemples : 1. Soit f la fonction définie sur l'espace produit $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ par $f(x,y) := 2\,e^{-2xy} - e^{-xy}$. La fonction f est continue de $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$, donc borélienne, donc $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{B}([0,1])$-mesurable. D'autre part, pour tout $y > 0$ (donc $a\ fortiori\ dy$-$p.p.$ sur $[0,1]$),

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)\,dx = \left[-\frac{e^{-2xy}}{y} + \frac{e^{-xy}}{y}\right]_{x=0}^{x=+\infty} = 0$$

et pour tout $x > 0$ (donc dx-$p.p.$ sur $\mathbb{R}_+$),

$$\int_{[0,1]} f(x,y)\,dy = \left[-\frac{e^{-2xy}}{x} + \frac{e^{-xy}}{x}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}.$$

Cette dernière fonction, convenablement prolongée en 0, est continue, strictement positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Finalement,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)\,dx\right) dy = 0 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)\,dy\right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\right) = \ln 2, \end{cases}$$

d'après l'application 11.3.

2. Soit la fonction f définie sur le pavé $[-1,1]^2$ par $f(x,y) := xy/(x^2+y^2)^2$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Cette fonction est continue sur $[-1,1]^2 \setminus \{(0,0)\}$ qui est un borélien, donc est borélienne sur $[-1,1]^2$ et donc $\mathscr{B}([-1,1])^{\otimes 2}$-mesurable. On vérifie sans peine que pour tout $x \in [-1,1]$, la fonction $\big(y \mapsto f(x,y)\big)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[-1,1]$, d'intégrale nulle. De même, pour tout $y \in [-1,1]$, la fonction $\big(x \mapsto f(x,y)\big)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[-1,1]$ d'intégrale nulle. En conséquence, les deux intégrales “doubles” de l'assertion (c) du théorème 11.3 existent et sont égales parce que nulles. Cependant, il est immédiat, *via* le théorème de Fubini-Tonelli 11.2, que

$$\int_{[-1,1]^2} |f(x,y)|\,dx\,dy = +\infty.$$

Ainsi, la fonction f n'est pas intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue-produit sur $([-1,1]^2, \mathscr{B}([-1,1])^{\otimes 2})$.

Conventions courantes d'écriture : • Pour éviter l'introduction excessive de parenthèses, on acolle parfois la mesure au signe d'intégrale. Ainsi, de préférence à l'écriture originelle des théorèmes 11.2(b) ou 11.3(c), on écrira plutôt :

$$\int_{X\times Y} \mu\otimes\nu(dx,dy) f(x,y) = \int_X \mu(dx)\int_Y \nu(dy) f(x,y) = \int_Y \nu(dy)\int_X \mu(dx) f(x,y).$$

Enfin, lorsque la positivité ou l'intégrabilité de f est acquise, on trouvera souvent la notation $\displaystyle\int_X\int_Y \mu(dx)\,\nu(dy)\,f(x,y)$. Ceci est particulièrement courant en présence d'intégrales multiples. D'autre part, on s'abstiendra d'introduire des symboles d'intégrales multiples (doubles, triples, n-uples) pour intégrer par rapport à une mesure produit.

• La mesure de Lebesgue λ_d sur $\mathbb{R}^d$ étant (*cf.* l'application de la section 11.2) le produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ par elle-même, on note souvent cette mesure $dx_1\ldots dx_d$ et les intégrales associées

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\lambda_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1,\ldots,x_d)\,dx_1\ldots dx_d = \int_{\mathbb{R}^d} dx_1\ldots dx_d\,f(x_1,\ldots,x_d),$$

voire, plus simplement,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\lambda_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

***Application* 11.4.** *Formule d'intégration par parties sur* $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\lambda)$:
Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$, *i.e.* intégrables sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$, alors les fonctions définies – avec les conventions habituelles (*cf.* application 8.5) – par

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad F(x) := \int_0^x f(t)\,dt \quad\text{et}\quad G(x) := \int_0^x g(t)\,dt,$$

vérifient la formule d'intégration par parties généralisée :

$$\int_0^x f(t)\,G(t)\,dt = F(x)\,G(x) - \int_0^x F(t)\,g(t)\,dt.$$

DÉMONSTRATION : Pour simplifier nous allons traiter le cas $x\geq 0$ où

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt := \int_{[0,x]} \varphi(t)\,dt.$$

La preuve consiste à appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue à la fonction

$$\Phi(t,s) := \mathbb{1}_{\{0\leq s\leq t\leq x\}}(t,s)\,f(t)\,g(s)$$

définie sur l'espace produit $\big([0,x]^2,\mathscr{B}([0,x])^{\otimes 2}\big)$. Φ est mesurable par rapport à la tribu produit $\mathscr{B}([0,x])^{\otimes 2}$ car f et g sont mesurables par rapport à la tribu $\mathscr{B}([0,x])$ et l'ensemble $\{(s,t)\in[0,x]^2\;:\;0\leq s\leq t\leq x\}$ est un fermé de $[0,x]^2$ donc un élément de $\mathscr{B}([0,x]^2) = \mathscr{B}([0,x])\otimes\mathscr{B}([0,x])$.

En outre, Φ est intégrable sur $[0,x]^2$. En effet, $|\Phi(t,s)|\leq|f(t)|\,|g(s)|$ et le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 11.2) montre que

$$\int_{[0,x]^2}|\Phi(t,s)|\,dt \leq \int_{[0,x]^2}|f(t)|\,|g(s)|\,dt\,ds = \int_{[0,x]}|f(t)|\,dt\times\int_{[0,x]}|g(s)|\,ds < +\infty.$$

La fonction Φ étant $dt \otimes ds$-intégrable, il est possible d'appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue (théorème 11.3) qui conduit à l'identité

$$\int_{[0,x]} \left(\int_{[0,x]} \Phi(t,s)\, ds \right) dt = \int_{[0,x]} \left(\int_{[0,x]} \Phi(t,s)\, dt \right) ds. \tag{11.4}$$

Or, l'intégrale de gauche dans (11.4) est égale à

$$\begin{aligned} \int_{[0,x]} \left(\int_{[0,x]} \Phi(t,s)\, ds \right) dt &= \int_{[0,x]} f(t) \left(\int_{[0,x]} \mathbb{1}_{[0,t]}\, g(s)\, ds \right) dt, \\ &= \int_{[0,x]} f(t) \left(\int_{[0,t]} g(s)\, ds \right) dt, \\ &= \int_{[0,x]} f(t)\, G(t)\, dt. \end{aligned}$$

En notant que $\{(s,t) \in [0,x]^2 : 0 \leq s \leq t \leq x\} = \{(s,t) \in [0,x]^2 : 0 \leq s \leq x,\ s \leq t \leq x\}$, on vérifie que l'intégrale de droite de (11.4) vaut

$$\begin{aligned} \int_{[0,x]} \left(\int_{[0,x]} \Phi(t,s)\, dt \right) ds &= \int_{[0,x]} g(s) \left(\int_{[0,x]} \mathbb{1}_{[s,x]}(t)\, f(t)\, dt \right) ds, \\ &= \int_{[0,x]} g(s) \left(\int_{[0,x]} \mathbb{1}_{]s,x]}(t)\, f(t)\, dt \right) ds. \end{aligned}$$

La seconde égalité s'appuie sur le fait que la mesure de Lebesgue ne charge pas les points. Enfin, comme pour tout $s \in [0,x]$, $\mathbb{1}_{]s,x]} = \mathbb{1}_{[0,x]} - \mathbb{1}_{[0,s]}$, cette intégrale est aussi égale à

$$\int_{[0,x]} g(s) ds \left(\int_{[0,x]} \left(1 - \mathbb{1}_{[0,s]}(t)\right) f(t)\, dt \right) = F(x)\, G(x) - \int_{[0,x]} g(s)\, ds \left(\int_{[0,s]} f(t)\, dt \right)$$

d'où la formule d'intégration par parties. $\Diamond$

***Application* 11.5.** *Séries doubles* :

Soit $(a_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}}$ une suite indexé par $\mathbb{N}^2$. Par définition – mais ceci n'est qu'un cas particulier de la théorie des familles sommables – on dira que la série double de terme général $a_{p,q}$ est absolument convergente si l'application $(p,q) \mapsto a_{p,q}$ est intégrable par rapport à la mesure de décompte m_2 sur $\mathbb{N}^2$. Dans ce cas on pose ([3]),

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}} a_{p,q} := \int_{\mathbb{N}^2} a_{p,q}\, dm_2(p,q).$$

3. Cette définition coïncide avec les définitions élémentaires.

Or, comme cela a été établi dans le seconde remarque qui suit le théorème 11.1, la mesure de comptage m_2 s'écrit $m_2 = m_1 \otimes m_1$ où m_1 désigne la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. En outre, on a vu (*cf.* chapitre 7 au fil des remarques) qu'une série de terme général a_n est absolument convergente si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est m_1-intégrable et qu'alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \int_{\mathbb{N}} a_n\, dm_1(n)$.

Comme le mesure m_1 est σ-finie puisque $\mathbb{N}$ est dénombrable, les deux théorèmes de Fubini s'appliquent dans ce cadre et fournissent un procédé efficace de sommation des séries doubles :

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}} |a_{p,q}| = \sum_{p\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{q\in\mathbb{N}} |a_{p,q}|\Big) = \sum_{q\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{p\in\mathbb{N}} |a_{p,q}|\Big) \leq +\infty,$$

et, si $\displaystyle\sum_{p,q\in\mathbb{N}} |a_{p,q}| < +\infty$, alors

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}} a_{p,q} = \sum_{p\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{q\in\mathbb{N}} a_{p,q}\Big) = \sum_{q\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{p\in\mathbb{N}} a_{p,q}\Big).$$

11.4 ♣ Produit infini de mesures de probabilité

***Théorème* 11.4** (Ionescu-Tulcea-Kolmogorov))**.** *On considère une suite d'espaces de probabilité $(X_n, \mathscr{A}_n, \mu_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ (*i.e.* $\mu_n(X_n)=1$) et l'on se place sur l'espace produit*

$$X := \prod_{n\geq 1} X_n = \big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ x_n \in X_n,\ n \in \mathbb{N}^*\big\}.$$

On munit X de l'algèbre de Boole

$$\mathscr{C} := \Big\{A \times \prod_{k\geq n+1} X_k\,,\ A_1 \in \mathscr{A} \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n,\ n \in \mathbb{N}^*\Big\}.$$

et l'on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $A \in \mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n$,

$$\nu\Big(A \times \prod_{k\geq n+1} X_k\Big) = (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)(A). \tag{11.5}$$

Ceci définit une mesure de probabilité sur l'algèbre de Boole $\mathscr{C}$ qui se prolonge de façon unique en une mesure de probabilité sur la tribu engendrée

$$\mathscr{A} = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{A}_n := \sigma(\mathscr{C}).$$

Ce théorème n'est en fait qu'un cas particulier du théorème général de Ionescu-Tulcea (*e.g.* [26], chapitre V-I) dont l'objet est la construction d'une chaîne de Markov sur son espace canonique.

DÉMONSTRATION : étape 1 : Dans un premier temps on vérifie que la définition 11.5 est cohérente. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $A \in \mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n$,

$$\begin{aligned}\nu\Big(A \times X_{n+1} \times \prod_{k \geq n+2} X_k\Big) &= (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{n+1})(A \times X_{n+1})\\ &= (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)(A)\, \mu_{n+1}(X_{n+1})\\ &= (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)(A) = \nu\Big(A \times \prod_{k \geq n+1} X_k\Big).\end{aligned}$$

étape 2 : Le fait que ν définisse une mesure sur l'algèbre $\mathscr{C}$ est immédiat, puisque l'on peut toujours supposer que deux éléments C et C' de $\mathscr{C}$ sont de la forme $A \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \cdots$, $A \in \mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n$ pour un n suffisamment grand.

étape 3 : Le seul point délicat est donc l'obtention de la propriété de Carathéodory. À cette fin, on introduit des mesures de probabilité auxiliaires sur $\mathscr{C}$. En l'occurrence, on définit, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in X_1 \times \cdots \times X_p$ la mesure de probabilité $\nu^{(x_1,\ldots,x_p)}$ par :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $A \in \mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n$,

$$\nu^{(x_1,\ldots,x_p)}\Big(A \times \prod_{k \geq n+1} X_k\Big) = \int_{X_{p+1} \times \cdots \times X_n} \mathbb{1}_A(x_1, \ldots, x_n)\, \mu_{p+1}(dx_{p+1}) \cdots \mu_n(dx_n).$$

On convient en outre que $\nu^{\varnothing} := \nu$ lorsque $p = 0$. Les probabilités $\nu^{(x_1,\ldots,x_p)}$ vérifient les deux propriétés essentielles suivantes :

– si $p \geq n$, $\nu^{(x_1,\ldots,x_p)}\Big(A \times \prod_{k \geq n+1} X_k\Big) = \mathbb{1}_A(x_1, \ldots, x_n)$,

– pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $(x_1, \ldots, x_p) \in X_1 \times \cdots \times X_p$,

$$\forall\, C \in \mathscr{C},\ \nu^{(x_1,\ldots,x_p)}(C) = \int_{X_{p+1}} \nu^{(x_1,\ldots,x_p,x_{p+1})}(C)\, \mu_{p+1}(dx_{p+1}). \qquad (11.6)$$

Cette dernière égalité est une conséquence immédiate du théorème de Fubini-Tonelli.

Soit $(C_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathscr{C}$ décroissante pour l'inclusion. La suite $(\nu(C_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante positive donc converge vers $\ell \geq 0$. Supposons $\ell > 0$. D'après l'identité (11.6)

$$\nu(C_n) = \int_{X_1} \nu^{(x_1)}(C_n)\, \mu_1(dx_1).$$

Mais, si, pour tout $x_1 \in X_1$, $\nu^{(x_1)}(C_n) \downarrow 0$, alors le théorème de convergence dominée entraîne $\nu(C_n) = 0$. Il existe donc x_1 tel que $\inf_{n \in \mathbb{N}} \nu^{(x_1)}(C_n) > 0$.

De la même façon, $\nu^{(x_1)}(C_n) = \displaystyle\int_{X_2} \nu^{(x_1,x_2)}(C_n)\, \mu_2(dx_2)$, donc il existe $x_2 \in X_2$ tel que $\inf_{n \in \mathbb{N}} \nu^{(x_1,x_2)}(C_n) > 0$. On construit ainsi de proche en proche une suite

$(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall\, p\in \mathbb{N}^*, \qquad \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \nu^{(x_1,\ldots,x_p)}(C_n) > 0.$$

Soit alors, $n\in\mathbb{N}$ fixé et $C_n = A_{\ell_n}\times X_{\ell_n+1}\times X_{\ell_n+2}\times\ldots,\ A_{\ell_n}\in\mathscr{A}_1\otimes\cdots\otimes\mathscr{A}_{\ell_n}$. Dès que $p\geq\ell_n$,

$$\mathbb{1}_{A_{\ell_n}}(x_1,\ldots,x_{\ell_n}) = \nu^{(x_1,\ldots,x_p)}(C_n) > 0$$

i.e. $(x_1,\ldots,x_{\ell_n})\in A_{\ell_n}$. En conséquence, $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}\in C_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ ce qui entraîne que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$. $\Diamond$

11.5 Exercices

$(X,\mathscr{A},\mu)$ désigne un espace mesuré σ-fini, *i.e.*

$$X = \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} E_n \ \text{ où } \ E_n\in\mathscr{A} \ \text{ et } \ \mu(E_n) < +\infty.$$

11.1 On considère les deux espaces mesurés $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et $(\mathbb{R},\mathscr{P}(\mathbb{R}),\mu)$ où μ est la mesure définie sur $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ par $\mu(A) := 0$ si A est dénombrable et $\mu(A) := +\infty$ sinon. Soient K un compact de $\mathbb{R}$ non dénombrable et de mesure de Lebesgue nulle (par exemple *l'ensemble de Cantor* au chap. 13, et $C := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y\in K\}$).

a) Montrer que $C\in\mathscr{B}(\mathbb{R})\otimes\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

b) Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\lambda(dx)\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_C(x,y)\mu(dy)$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\mu(dy)\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_C(x,y)\lambda(dx)$ et conclure.

11.2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\displaystyle f(x) := \sum_{n\geq 1}\frac{d}{dx}\Big(\frac{x}{n^2+x^2}\Big)$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ est *semi-convergente* et calculer sa valeur.

b) Calculer la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}\frac{d}{dx}\Big(\frac{x}{n^2+x^2}\Big)$ et comparer au résultat du a).

11.3 Soit f définie sur $[0,1]^2$ par $\displaystyle f(x,y) := \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ et $f(0,0) := 0$.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy$ et $\displaystyle\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx$.

b) En déduire que $f\notin\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1]^2)$.

11.4 Soient $f\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ et $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction croissante, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, nulle en 0. Montrer que $\displaystyle\int_X g\circ f\,d\mu = \int_0^{+\infty} g'(t)\,\mu(\{f\geq t\})\,dt$.

11.5 Soient μ et ν deux mesures σ-finies définies sur la tribu borélienne de $X := \mathbb{R}$.

$a)$ Montrer que l'ensemble $D := \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ est dénombrable.

$b)$ Montrer que $\mu \otimes \nu(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\})\, \nu(\{x\})$ où Δ est la diagonale de $\mathbb{R}^2$.

11.6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne positive.

$a)$ Montrer que l'ensemble $A_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq f(x)\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$ et calculer $\lambda_2(A_f)$.

$b)$ Même question pour le graphe de f défini par $G_f := \big\{(x, f(x)),\, x \in \mathbb{R}\big\}$.

$c)$ En déduire que $\lambda\big(\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}\big) = 0$ $\lambda(dy)$-p.p.

11.7 Soit $(\mathbb{R}, \mathscr{A}, \mu)$ un espace probabilisé ($\mu(\mathbb{R}) = 1$) ; soient f et g deux fonctions de $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ vérifiant $fg \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ et f, g monotones de même sens. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg\, d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f d\mu \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu.$$

11.8 *Théorème de Schwarz*

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue ayant des dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continues sur Ω. Montrer qu'elles sont égales dans Ω.

11.9 Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([a, b]^2)$.

$a)$ Montrer que $I := \displaystyle\int_a^b dx \int_a^x f(x, y)\, dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y)\, dx$.

$b)$ Si $f(x, y) = f(y, x)$ λ_2-p.p., montrer que $I = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{[a,b]^2} f(x, y)\, dx\, dy$.

11.10 *Problème de Bâle* 7

$a)$ Calculer de deux façons différentes l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{dx\, dy}{(1 + y)\,(1 + x^2 y)}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1}\, dx$.

$b)$ Déduire du $a)$ et d'un développement en série l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$,

puis en séparant les termes pairs et impairs retrouver la formule $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

11.11 $a)$ Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + \cos x)}{\cos x}\, dx$ à l'aide de $(x, y) \mapsto \dfrac{1}{1 + y \cos x}$.

$b)$ Montrer que $\forall\, y \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{1 + y\, \cos^2(x)}\, dx = \frac{\pi}{2}\, \frac{1}{1 + y + \sqrt{y + 1}}$.

$c)$ En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1+\cos^2(x)\right) dx$.

11.12 Soient f, g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\, dx$ et $g(t) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, e^{-tx}\, dx$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

$a)$ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et g sur $\mathbb{R}_+$.

$b)$ Calculer $f(t)$ pour tout $t > 0$, en partant de l'égalité $\dfrac{\sin x}{x} = \displaystyle\int_0^1 \cos(xy)\, dy$.

$c)$ Calculer $g(t)$ pour tout $t > 0$, en partant de l'égalité $\dfrac{\sin^2 x}{x^2} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(2xy)}{x}\, dy$.

$d)$ En déduire la valeur de $g(0)$.

11.13 On rappelle que pour tout $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\widehat{f}(t) := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-itx}\, dx$ pour $t \in \mathbb{R}$.

$a)$ Calculer, pour $a > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-a|x|}$.

$b)$ Soient $a > 0$ et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(t) := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itx}}{1+x^2}\, e^{-a|x|}\, dx$.
Montrer que $f_a(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2+(y+t)^2}\, e^{-a|y|}\, dy$.

$c)$ En déduire la transformée de Fourier de la fonction $\left(x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

11.14 *Inégalité de Hardy*

$a)$ Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et $p \in [1, +\infty[$; soient $\varphi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu \otimes \nu)$ et F définie par $F(x) := \displaystyle\int_Y \varphi(x,y)\nu(dy)$ $\mu(dx)$-p.p..
Montrer que F vérifie l'inégalité $\|F\|_{L^p(\mu)} \leq \displaystyle\int_Y \|\varphi(\cdot, y)\|_{L^p(\mu)} \nu(dy)$.

$b)$ En déduire que pour toute fonction $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\lambda)$, la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) := \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ vérifie l'inégalité de Hardy $\|F\|_p \leq \dfrac{p}{p-1}\|f\|_p$.

11.15 *Inégalité de Hardy-Littlewood-Pòlya*

Soit φ une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

$a)$ Soient f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}_+$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Montrer la formule d'intégration par parties

$$\int_{\mathbb{R}_+} f\varphi\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} F\, d(-\varphi),$$

où $d(-\varphi)$ désigne la mesure de Stieltjes sur $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ associée à la fonction croissante $-\varphi$ (*cf.* paragraphe 6.5.2).

$b)$ Soient $p, q, a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p\,a+1 > 0$ et $q\,b+1 > 0$. Déduire du $a)$ *l'inégalité de Hardy-Littlewood-Pòlya* (HLP)

$$\int_0^{+\infty} x^{a+b}\varphi(x)\,dx$$
$$\leq \frac{(pa+1)^{\frac{1}{p}}\,(qb+1)^{\frac{1}{q}}}{a+b+1}\left(\int_0^{+\infty} x^{pa}\varphi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty} x^{qb}\varphi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$c)$ On suppose que toutes les intégrales sont finies et $p\,a \neq q\,b$. Montrer que l'inégalité (HLP) est une égalité si et seulement si il existe $c, x \in \mathbb{R}_+$ tels que $\varphi \equiv c$ sur $]0, x[$ et $\varphi \equiv 0$ sur $]x, +\infty[$.

11.16 *Inégalité de Pòlya-Szegö*

Soit φ une fonction croissante sur $[0, 1]$.

$a)$ On suppose dans cette question que φ n'est pas constante sur $[0, 1]$. Soient f une fonction borélienne positive sur $[0, 1]$ et F la fonction définie sur $[0, 1]$ par $F(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Montrer la formule d'intégration par parties

$$\int_0^1 f\,\varphi\,d\lambda = \int_0^1 \big(c_\varphi F(1) - F\big)\,d\varphi, \quad c_\varphi := \frac{\varphi(1)}{\varphi(1)-\varphi(0)},$$

où $d\varphi$ désigne la mesure de Stieltjes sur $\mathscr{B}([0, 1])$ associée à la fonction croissante φ (*cf.* section 6.5.2).

$b)$ Soient $p, q, a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p\,a+1 > 0$, $q\,b+1 > 0$. Montrer *l'inégalité de Pòlya-Szegö* (PS)

$$\int_0^1 x^{a+b}\varphi(x)\,dx \geq \frac{(pa+1)^{\frac{1}{p}}\,(qb+1)^{\frac{1}{q}}}{a+b+1}\left(\int_0^1 x^{pa}\varphi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 x^{qb}\varphi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$c)$ On suppose que $p\,a \neq q\,b$. Montrer que l'inégalité (PS) est une égalité si et seulement si φ est constante sur $]0, 1[$.

11.17 On se place sur l'espace mesuré $([0, 1], \mathscr{B}([0, 1]), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue.

$a)$ Soient $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\lambda)$ et $\widetilde{f}$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $\widetilde{f}(t) := \displaystyle\int_{[0,t]} f\,d\lambda$, $t \in [0, 1]$. Montrer que $\widetilde{f}$ est continue sur $[0, 1]$ et que l'application $f \mapsto \widetilde{f}$ de $(L^2_{\mathbb{R}}(\lambda), \|\cdot\|_2)$ dans $(\mathscr{C}_{\mathbb{R}}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ est continue.

$b)$ Soient $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\lambda)$ et μ une mesure finie sur $\mathscr{B}([0, 1])$. Montrer que $\widetilde{f} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et qu'il existe une fonction $\mathscr{P}(\mu)$ décroissante sur $[0, 1]$, que l'on déterminera, telle que $\displaystyle\int_{[0,1]} \widetilde{f}\,d\mu = \int_{[0,1]} f\,\mathscr{P}(\mu)\,d\lambda$.

c) Soient μ et ν deux mesures finies sur $\mathscr{B}([0,1])$. Montrer que

$$\int_{[0,1]} \mathscr{P}(\mu)\, \mathscr{P}(\nu)\, d\lambda = \int_{[0,1]^2} \inf\,(s,t)\; d(\mu\otimes\nu)(s,t).$$

11.18 *Transformée de Mellin*

Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_+,\lambda)$. On définit la transformée de Fourier en cosinus de la fonction f par

$$F(f)(y) := \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\, \cos(xy)\, dx \quad \text{pour } y \in \mathbb{R}_+.$$

Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ borélienne telle que, pour tout $s \in]0,1[$, $\big(y \mapsto g(y)\, y^{s-1}\big)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (ou éventuellement y possède une intégrale semi-convergente). On définit la *transformée de Mellin* de g par

$$M(g)(s) := \int_0^{+\infty} g(y)\, y^{s-1}\, dy \quad \text{pour } s \in]0,1[\,,$$

et la fonction $\Gamma := M(y \mapsto e^{-y})$. On considère $s \in]0,1[$.

a) Soit $\mathbb{P} := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq 0\}$. Montrer que $z \mapsto z^s\, M(y \mapsto e^{-zy})$ est continue sur $\mathbb{P} \setminus \{0\}$ ($z^s := e^{s \ln z}$ où $\ln$ est la détermination principale du logarithme), holomorphe sur l'intérieur de $\mathbb{P}$. En déduire qu'elle est constante égale à $\Gamma(s)$ sur $\mathbb{P}$.

b) Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_+,\lambda)$ avec $(y \mapsto f(x)\, x^{-s})$, $\big(y \mapsto F(f)(y)\, y^{s-1}\big) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_+,\lambda)$.
Montrer que $M\big(F(f)\big)(s) = \lim\limits_{a\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(x)\, x^{-s}\, M(\mathbb{1}_{[0,ax]} \cos)\, dx.$

c) En déduire l'identité $M\big(F(f)\big)(s) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, \cos\Big(\dfrac{\pi}{2}\, s\Big)\, M(f)(1-s).$

d) On considère la fonction $f(x) := e^{-x}$ et on rappelle que $(F \circ F)(f) = f$ (*cf.* exercice 8.17 b)). Montrer la *formule des compléments*

$$\forall\, s \in]0,1[\quad \Gamma(s)\, \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

11.19 *Inégalité de Schur et inégalité de Hilbert*

On considère une fonction $K : \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*_+$ borélienne, homogène de degré -1, *i.e.*, pour tous $t,x,y \in \mathbb{R}^*_+$, $K(tx,ty) = t^{-1}\, K(x,y)$, et telle que la fonction $\big(t \mapsto K(1,t) + K(t,1)\big)$ soit bornée sur $\mathbb{R}^*_+$. Soient $p,q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}^*_+,\lambda)$ et $g \in \mathscr{L}^q_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}^*_+,\lambda)$.

a) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{R}^*_+} f(x)\, g(y) K(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{+\infty} K(1,t) \left(\int_0^{+\infty} f(x)\, g(tx)\, dx \right) dt.$$

b) En déduire *l'inégalité de Schur*

$$\int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} f(x)g(y)K(x,y)\,dx\,dy \leq I(q)\,\|f\|_p\,\|g\|_q, \quad \text{(S)}$$

où $I(q) := \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{q}} K(1,t)\,dt < +\infty.$

c) Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}_+^*, \lambda)$ vérifiant : pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha(t) \in \mathbb{R}_+$ tel que $\psi(tx) = \alpha(t)\,\varphi(x)$ dx-p.p. sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\varphi = 0$ λ-p.p. sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Déduire que (S) est une inégalité stricte si f et g ne sont pas nulles $p.p.$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

e) Montrer que la constante $I(p)$ dans (S) est optimale.

f) Soient $(a_n)_{n\geq 1} \in \ell^p_{\mathbb{R}_+}$ et $(b_n)_{n\geq 1} \in \ell^q_{\mathbb{R}_+}$. Déduire des formules des exercices 11.18 d) et 12.7 b) *l'inégalité de Hilbert*

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \Big(\sum_{m\geq 1} a_m^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{n\geq 1} b_n^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

11.20 Soit pour $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$, et $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n := \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\Big)^n dx.$

a) Montrer l'égalité $I_n = \displaystyle\int_{[a,b]^n} \frac{dt_1 \cdots dt_n}{t_1 + \cdots + t_n}.$

b) En déduire les valeurs de I_2 et I_3.

11.21 Soit $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2 x}{x^2}\,dx.$

a) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan^2(1/x)\,dx < +\infty.$

b) En déduire que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx.$

c) Montrer que $\forall\, x > 0,\ \displaystyle\frac{\arctan^2 x}{x^2} = \Big(\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}\Big)\Big(\int_0^1 \frac{dz}{1+x^2z^2}\Big).$

d) En déduire que $I = \displaystyle\int_0^1\int_0^1 \Big(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2y^2)\,(1+x^2z^2)}\Big)\,dy\,dz.$

e) Montrer que

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, y \neq z \in]0,1], \quad & \frac{1}{(1+x^2y^2)\,(1+x^2z^2)} \\ & = \frac{1}{y^2 - z^2}\Big(\frac{y^2}{1+x^2y^2} - \frac{z^2}{1+x^2z^2}\Big).\end{aligned}$$

f) Retrouver la valeur de I en écrivant $\arctan x = x\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(tx)^2+1}$ puis en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli.

11.22 Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré *fini* (*i.e.* $\mu(X) < +\infty$) et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions μ-intégrables positives telle que la suite $\big(\mu(\{f_n > t\})\big)_{n\geq 1}$ soit décroissante pour tout $t \geq 0$.

$a)$ Montrer que $\{(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+ : f_1(x) > t\} \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ où $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}_+$.

$b)$ En déduire que la fonction $\big(t \mapsto \mu(\{f_1 > t\})\big)$ est borélienne et que

$$\int_0^{+\infty} \mu(\{f_1 > t\})\, dt = \int_X f_1\, d\mu.$$

$c)$ Montrer que les fonctions g_n définies pour tout $n \geq 1$ par $g_n := \max\limits_{1\leq k\leq n} f_k$ sont mesurables et que, pour tout $t \geq 0$, $\mu(\{g_n > t\}) \leq n\, \mu(\{f_1 > t\})$.

$d)$ Montrer que $\displaystyle \frac{1}{n}\int_X g_n\, d\mu \leq \int_0^{+\infty} \min\big(\mu(X)/n, \mu(\{f_1 > t\})\big)\, dt.$

$e)$ En déduire que $\displaystyle \lim_n \frac{1}{n}\int_X g_n\, d\mu = 0.$

11.23 *Caractérisation de la mesure de Lebesgue*

Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}_d$. On suppose qu'il existe une constante c_d telle que pour toute boule $B(x,r)$ de centre $x \in \mathbb{R}^d$ et de rayon $r > 0$, on ait $\mu(B(x,r)) = c_d\, r^d$.

$a)$ Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, \lambda_d(dx) = \frac{v_d}{c_d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\, \mu(dy),$$

où $v_d := \lambda_d(B(0,1))$ désigne la mesure de Lebesgue de la boule unité de $\mathbb{R}^d$.

$b)$ En déduire que $\mu = \dfrac{c_d}{v_d}\, \lambda_d$.

Chapitre 12

Mesure image. Changement de variables

L'objet principal de ce chapitre est d'établir le théorème de changement de variables général dans les intégrales multiples définies sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. L'importance pratique de ce théorème est immense : il est en effet, avec le théorème de Fubini, à la base de tous les calculs explicites d'intégrales multiples.

Cependant, dans un premier temps, nous allons développer la notion de mesure image que l'on peut assimiler à une forme de changement de variables abstrait. En effet, cette notion permet de transporter une mesure d'un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$ sur un espace mesurable $(Y, \mathscr{B})$ *via* une application mesurable h de $(X, \mathscr{A})$ dans $(Y, \mathscr{B})$. Cette notion se révélera fondamentale en Probabilités puisqu'elle est à la base même de la notion de *loi* d'une *variable aléatoire*.

12.1 Mesure image

***Définition* 12.1.** *Soient $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ deux espaces mesurables et une fonction mesurable $h : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$. Si μ est une mesure sur $(X, \mathscr{A})$, l'application ν définie sur $\mathscr{B}$ par*

$$\begin{aligned} \nu : \quad \mathscr{B} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ B &\longmapsto \nu(B) := \mu\big(h^{-1}(B)\big) \end{aligned}$$

est une mesure sur $(Y, \mathscr{B})$ de même masse que μ.

Par définition, ν est la mesure image *de μ par h. On la note $h(\mu)$ ou μ_h – voire $\mu \circ h^{-1}$ – selon les cas.*

Cette définition nécessite une démonstration afin d'établir que la mesure image est bien une mesure.

DÉMONSTRATION : $\nu(\emptyset) = \mu(h^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties de $\mathscr{B}$ deux à deux disjointes. D'après les formules de Hausdorff, dès que $i \neq j$,

$h^{-1}(B_i)\cap h^{-1}(B_j)=h^{-1}(B_i\cap B_j)=h^{-1}(\emptyset)=\emptyset$, $h^{-1}\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_n\Big) = \bigcup_{n\geq 1} h^{-1}(B_n)$.

D'où

$$\begin{aligned}\nu\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_n\Big) &= \mu\Big(h^{-1}\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_n\Big)\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} h^{-1}(B_n)\Big)\\ &= \sum_{n\geq 1} \big(\mu(h^{-1}(B_n)\big) = \sum_{n\geq 1} \nu(B_n).\end{aligned}$$

ν est donc bien une mesure de masse totale $\nu(Y) = \mu\big(h^{-1}(Y)\big) = \mu(X)$. $\Diamond$

Remarques : • La mesure ν peut être définie sur une tribu *a priori* plus grande que $\mathscr{B}$, en l'espèce la tribu image de $\mathscr{A}$ par h. Cette tribu, introduite au chapitre 4 (section 4.2.2), est définie par $\{B\subset Y : h^{-1}(B)\in\mathscr{A}\}$. C'est *la plus grande tribu* sur Y rendant la fonction h mesurable comme fonction définie sur $(X,\mathscr{A})$.

• La notion de mesure-image est essentielle en Probabilités puisqu'elle est à la base de la notion de *loi* d'une variable aléatoire.

***Théorème* 12.1** (Théorème de transfert)**.** *Soit μ_h la mesure image de μ par h et $f : (Y,\mathscr{B}) \to \mathbb{K}$ une fonction mesurable. Alors f est μ_h-intégrable si et seulement si $f\circ h$ est μ-intégrable (*i.e. $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu_h) \Rightarrow f\circ h \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$*) et, dans ce cas,*

$$\int_Y f\,d\mu_h = \int_X f\circ h\,d\mu.$$

L'égalité ci-dessus a toujours lieu si f est positive (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$).

DÉMONSTRATION : Supposons que $f=\mathbb{1}_B$, $B\in\mathscr{B}$. Dans ce cas

$$\int_Y f\,d\mu_h = \mu_h(B) = \mu\big(h^{-1}(B)\big) = \int_X \mathbb{1}_{h^{-1}(B)}d\mu.$$

Or $\mathbb{1}_{h^{-1}(B)}=\mathbb{1}_B\circ h$ puisque $x\in h^{-1}(B)$ si et seulement si $h(x)\in B$, d'où

$$\int_Y f d\mu_h = \int_X \mathbb{1}_B\circ h\,d\mu = \int_X f\circ h\,d\mu.$$

L'égalité s'étend par linéarité aux fonctions étagées positives puis, *via* le lemme fondamental d'approximation et le théorème de Beppo Levi, aux fonctions mesurables positives (on remarque que si $0 \leq f_n \uparrow f$ alors $0 \leq f_n\circ h \uparrow f\circ h$). L'extension aux fonctions mesurables réelles et complexes μ_h-intégrables se fait *via* les décompositions *ad hoc*. $\Diamond$

***Application* 12.1.** Soit $h : (X,\mathscr{A}) \to (X,\mathscr{A})$. Si μ est invariante par h, *i.e.* $\mu_h = \mu$, alors

$$\forall f\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu),\quad \int_X f\,d\mu = \int_X f\circ h\,d\mu.$$

Ceci constitue une première formule de changement de variables.

Exemple : Par définition de la mesure de Lebesgue λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$, celle-ci est invariante par les translations $\tau_a : x \mapsto x - a$, $a \in \mathbb{R}^d$, puisque, pour tout $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, $\lambda_d(a+B) = \lambda_d(B)$ *i.e.* $\lambda_d(\tau_a^{-1}(B)) = \lambda_d(B)$. Par suite

$$\forall\, a \in \mathbb{R}^d,\ \forall\, f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d), \qquad \int_{\mathbb{R}^d} f(x \pm a)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx.$$

En fait, cet exemple est un cas particulier d'un résultat plus général détaillé dans la proposition ci-après.

***Proposition* 12.1.** *Soient $A \in GL(d, \mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^d$. Alors*

$$\forall\, f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d), \qquad \int_{\mathbb{R}^d} f(Ax + b)\, dx = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx. \tag{12.1}$$

L'égalité s'étend aux fonctions mesurables positives.

La formule (12.1) est une formule de changement de variables affine. Ceci est évident lorsqu'on la met sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(Au + b)\, |\det A|\, du. \tag{12.2}$$

D'autre part, la proposition 12.1 se reformule en termes de mesure image de la façon suivante :

***Corollaire* 12.1.** *Soient $A \in GL(d, \mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^d$. L'image de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ par l'application $(x \mapsto Ax + b)$ est la mesure $|\det A|^{-1}.\lambda_d$.*

DÉMONSTRATION : L'exemple ci-dessus appliqué à la fonction $\big(x \mapsto f(Ax)\big)$ et à $a := A^{-1}(b)$ entraîne que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(Ax + b)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f\big(A(x + A^{-1}b)\big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(Ax)\, dx.$$

On peut donc supposer que $b = 0$.

On s'est ainsi ramené à montrer que la mesure image de λ_d par A n'est autre que $|\det A|^{-1}.\lambda_d$. Soit $\nu := A(\lambda_d)$ cette mesure image.

On constate d'abord que ν est invariante par les translations puisque, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ et tout $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\nu(a + B) = \lambda_d(A^{-1}(a+B)) = \lambda_d(A^{-1}(a) + A^{-1}(B)) = \lambda_d(A^{-1}(B)) = \nu(B).$$

D'autre part $\nu\big([0,1]^d\big) \neq 0$ puisque l'on a à la fois $\nu(\mathbb{R}^d) = \lambda_d(\mathbb{R}^d) = +\infty$ et

$$\nu(\mathbb{R}^d) \leq \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^d} \nu\big(\underline{n} + [0,1]^d\big) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^d} \nu\big([0,1]^d\big).$$

Enfin, $\nu\big([0,1]^d\big) < +\infty$ puisque $\nu\big([0,1]^d\big) = \lambda_d\left(A^{-1}([0,1]^d)\right)$ et $A^{-1}([0,1]^d)$ est compact. Ce dernier point découle de la continuité de l'application linéaire A^{-1} sur l'e.v. de dimension finie $\mathbb{R}^d$.

On pose $\nu' := \nu/\nu\big([0,1]^d\big)$. La mesure ν' est alors invariante par translation et $\nu'([0,1]^d) = 1$ donc, d'après le théorème de caractérisation de la mesure de Lebesgue (théorème 6.1), $\nu' = \lambda_d$. En d'autres termes, il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $\nu = c\lambda_d$. Il reste donc à déterminer c en calculant le rapport $\nu(B)/\lambda_d(B)$ pour un borélien B de mesure de Lebesgue non nulle convenablement choisi. Cette détermination se fait par étapes, selon la nature de la matrice A.

– *A est orthogonale :* Si $A \in \mathscr{O}(d,\mathbb{R}) := \big\{A \in GL(d,\mathbb{R}) \,:\, {}^tAA = I_d\big\}$, il est clair que $A^{-1}(\{x : {}^txx \le 1\}) = \{x : {}^txx \le 1\}$ donc ([1])

$$\nu\big(\{x : {}^txx \le 1\}\big) = \lambda_d\big(\{x : {}^txx \le 1\}\big) > 0.$$

Par suite, dans ce cas, $c = 1 = |\det A|^{-1}$.

– *A est symétrique positive :* Si $A \in \mathscr{S}^+(d,\mathbb{R}) \cap GL(d,\mathbb{R})$, *i.e.* symétrique *définie positive*, A est diagonalisable dans le groupe orthogonal, *i.e.* $A = PD({}^tP)$ où $P \in \mathscr{O}(d,\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $B := PD([0,1]^d)$ ([2]). Le cas précédent et les relations $A^{-1} = PD^{-1}\,{}^tP$ et ${}^tPP = I_d$ entraînent, d'une part, que

$$\nu(B) = \lambda_d\big(A^{-1}(B)\big) = \lambda_d\big(P([0,1]^d)\big) = \lambda_d\big(({}^tP)^{-1}([0,1]^d)\big) = 1.$$

D'autre part, comme $D([0,1]^d) = \displaystyle\prod_{i=1}^d [0,\alpha_i]$,

$$\lambda_d(B) = \lambda_d\left(P\Big(\prod_{i=1}^d [0,\alpha_i]\Big)\right) = \lambda_d\left(\prod_{i=1}^d [0,\alpha_i]\right) = \prod_{i=1}^d \alpha_i = \det A.$$

D'où l'on tire $c = (\det A)^{-1} = |\det A|^{-1}$.

– *Cas général* : On effectue la décomposition polaire de $A \in GL(d,\mathbb{R})$, c'est-à-dire $A = PS$ où $P \in \mathscr{O}(d,\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}^+(d,\mathbb{R})$ (on prend $S := \sqrt{{}^tAA}$ et $P := AS^{-1}$) et on applique les résultats précédents :

$$\begin{aligned}\nu(B) &= \lambda_d\big(A^{-1}(B)\big) = \lambda_d\big(S^{-1}(P^{-1}(B))\big)\\ &= (\det S)^{-1}\lambda_d\big(P^{-1}(B)\big) = (\det S)^{-1}\lambda_d(B)\,,\end{aligned}$$

donc $\nu(B) = |\det A|^{-1}\lambda_d(B)$ car $\det A = (\det P)\,(\det S)$ et $\det P = \pm 1$. $\quad\Diamond$

1. $\lambda_d(\{x : {}^txx \le 1\}) \ge \lambda_d([0,1/\sqrt{d}]^d) \ge d^{-d/2} > 0$.
2. B est borélien car PD est linéaire bijective sur $\mathbb{R}^d$ et $B := ((PD)^{-1})^{-1}([0,1]^d)$.

12.2 Théorème général de changement de variables

Le problème posé est de calculer l'intégrale

$$\int_D f(x_1,\ldots,x_d)\,\lambda_d(dx)$$

où λ_d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, D un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ une fonction borélienne (positive ou intégrable). Outre le théorème de Fubini qui a fait l'objet du chapitre 11, l'autre outil essentiel pour calculer explicitement – lorsque c'est possible – de telles intégrales multiples est le théorème de changement de variables. Celui-ci permet de transporter le domaine d'intégration D sur un autre ouvert Δ homéomorphe à D (en fait difféomorphe).

Rappels et notations : • Si D est un ouvert de $\mathbb{R}^d$,

$$\mathscr{B}(D)=\left\{B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) : B\subset D\right\}$$

car D est borélien en tant qu'ouvert (*cf.* proposition 4.5). Par définition on notera $\lambda_D := \mathbb{1}_D.\lambda_d$ la restriction à D de la mesure de Lebesgue λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$, appelée *mesure de Lebesgue sur D*.

• Soit $\varphi : \Delta \to D$ une application différentiable d'un ouvert Δ de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans D. En tout point $u\in\Delta$, la dérivée $\varphi'(u)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. On appelle *Jacobien* de φ au point u la quantité $J_\varphi(u):=\det\varphi'(u)$.

• Par définition une application $\varphi : \Delta \to D$ est un $\mathscr{C}^1$*-difféomorphisme* si φ est bijective, de classe $\mathscr{C}^1$ sur Δ (*i.e.* continûment différentiable) et si φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.

Rappelons qu'une application est continûment différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$ si et seulement si toutes ses dérivées partielles existent et sont continues en tout point de cet ouvert.

On montre en calcul différentiel les résultats importants suivants (*cf.* [28]) :

***Théorème* 12.2** (Inversion locale)**.** *Soient Δ un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^d$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur Δ. Si x est un élément de Δ tel que $\varphi'(x)$ soit inversible, alors il existe un voisinage ouvert V_x de x dans Δ tel que $\varphi_{|V_x}$ soit un difféomorphisme de V_x sur son image (ouverte) $\varphi(V_x)$.*

***Théorème* 12.3.** *Soit Δ un ouvert de $\mathbb{R}^d$. La fonction $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^d$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme sur son image $D:=\varphi(\Delta)$ si et seulement si elle vérifie*

(i) φ est injective sur Δ,

(ii) φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Δ, i.e. *les dérivées partielles de φ existent et sont continues sur Δ,*

*(iii) $\varphi'(u)$ est inversible en tout point u de Δ (*i.e. *$\varphi'(u)\in GL(d,\mathbb{R})$, ou encore $J_\varphi(u) = \det\varphi'(u) \neq 0$, $u\in\Delta$).*

D est alors un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et, pour tout $x\in D$, $(\varphi^{-1})'(x)=\big(\varphi'(\varphi^{-1}(x))\big)^{-1}$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de changement de variables.

***Théorème* 12.4** (Changement de variables)**.** *Soit φ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre deux ouverts Δ et D de $\mathbb{R}^d$. Les trois assertions équivalentes suivantes sont vérifiées :*

(a) $\lambda_D = \varphi(|J_\varphi|.\lambda_\Delta)$ i.e. *λ_D est la mesure image par φ de $|J_\varphi|.\lambda_\Delta$ (mesure de densité $|J_\varphi|$ par rapport à λ_Δ).*

(b) *Pour toute fonction borélienne $f : D \to \mathbb{R}_+$,*

$$\int_D f(x)\,dx = \int_\Delta f(\varphi(u))\,|J_\varphi|(u)\,du \leq +\infty.$$

(c) *Pour toute fonction borélienne $f : D \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), f est λ_D-intégrable sur D si et seulement si $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ est λ_Δ-intégrable sur Δ et, dans ce cas,*

$$\int_D f(x)\,dx = \int_\Delta f(\varphi(u))\,|\,J_\varphi|(u)\,du. \tag{12.3}$$

L'équivalence entre (a) et (c) découle immédiatement du théorème 12.1. En revanche, établir l'une quelconque des assertions du théorème est difficile et repose pour l'essentiel sur un découpage *ad hoc* de Δ en hypercubes suffisamment petits et sur la formule des accroissements finis pour remplacer localement φ par sa différentielle.

La formule de changement de variables proprement dite est l'assertion (c). On s'attachera dans les applications à ne pas oublier de démontrer que le changement de variables φ est bien un difféomorphisme ce qui suppose de vérifier *très soigneusement* les hypothèses du théorème 12.3 ci-avant, notamment l'injectivité. En pratique, ce point est intimement lié à la détermination du domaine ouvert Δ.
ATTENTION! le fait que $\varphi \in \mathscr{C}^1(\Delta)$ et $J_\varphi(u) \neq 0$ en tout point $u \in \Delta$ n'implique pas que φ soit un difféomorphisme ([3]).

Très souvent, les intégrales multiples auxquelles on est confronté, notamment en Mécanique (moments d'inertie, etc), sont définies sur des ensembles compacts, ou simplement fermés. Pour appliquer le théorème de changement de variables, il faut alors vérifier au préalable que ce fermé F est l'adhérence d'un ouvert D et que $\lambda_d(F \setminus D) = 0$. Sauf situation canularesque, il en sera toujours ainsi en pratique, même s'il est évidemment faux en toute généralité que les fermés ont des frontières de mesure de Lebesgue nulle.

Signalons pour finir que, en pratique, on utilise souvent conjointement le théorème de Fubini et le théorème de changement de variables. Ceci est illustré par plusieurs des applications qui suivent la démonstration.

---

3. Considérer par exemple la fonction $\varphi(u) := u^2$ définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Voir également la remarque qui fait suite à l'application 12.2 pour un exemple en dimension supérieure.

En guise de préliminaire à la démonstration rigoureuse du théorème nous allons – exceptionnellement – en proposer une approche heuristique. Notre but est d'une part de faire ressortir le caractère géométrique de ce théorème et d'autre part de mettre en évidence que les deux outils essentiels sont la formule de changement de variable affine établie au corollaire 12.1 et le théorème des accroissements finis.

APPROCHE HEURISTIQUE : On recouvre de façon minimale l'ouvert Δ par une réunion de "petits" hypercubes "semi-ouverts" C_i, deux à deux disjoints et de mesure de Lebesgue fixée, arbitrairement petite. On note u_i le centre de chaque C_i. Comme φ est bijective et régulière $D = \varphi(\Delta)$ s'écrit à son tour comme réunion disjointe des $\varphi(C_i)$. Les $\varphi(C_i)$ restent des mesure petite et se "concentrent autour" de $\varphi(u_i)$. Il vient alors, pour toute fonction f borélienne positive ou bornée définie sur D,

$$\begin{aligned}\int_D f(x)\,dx &= \sum_i \int_{\varphi(C_i)} f(x)\,dx\\ &\approx \sum_i \int_{\varphi(C_i)} f(\varphi(u_i))\,dx\\ &\approx \sum_i f(\varphi(u_i))\,\lambda_d(\varphi(C_i)).\end{aligned}$$

Le théorème des accroissements finis appliqué à φ entre un point quelconque u de C_i et u_i montre que

$$\varphi(C_i) \approx \{\varphi(u_i) + \varphi'(u_i)(u - u_i),\ u \in C_i\}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_D f(x)\,dx &\approx \sum_i f(\varphi(u_i))\,\lambda_d\big(\{\varphi(u_i) + \varphi'(u_i)(u - u_i),\ u \in C_i\}\big)\\ &= \sum_i f(\varphi(u_i))\,\lambda_d\big(\varphi'(u_i)(\{u - u_i,\ u \in C_i\})\big),\end{aligned}$$

car la mesure de Lebesgue est invariante par translation. Par commodité, notons temporairement $C_i - u_i := \{u - u_i,\ u \in C_i\}$. Comme $\varphi'(u_i)$ est inversible, on peut poser, $A_i = (\varphi'(u_i))^{-1}$. Il vient

$$\begin{aligned}\lambda_d\big(\varphi'(u_i)(C_i - u_i)\big) &= \lambda_d(A_i^{-1}(C_i - u_i))\\ &= A_i(\lambda_d)\,(C_i - u_i)\end{aligned}$$

par définition de la mesure-image de λ_d par A_i. Le corollaire 12.1 entraîne alors que

$$A_i(\lambda_d)\,(C_i - u_i) = |\det A_i|^{-1}\,\lambda_d(C_i - u_i) = |\det \varphi'(u_i)|\,\lambda_d(C_i),$$

puisque $A_i = (\varphi'(u_i))^{-1}$ (la seconde égalité utilise à nouveau que invariance de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ par translation). Il vient alors *via* la continuité de φ'

$$\begin{aligned}\int_D f(x)\,dx &\approx \sum_i f(\varphi(u_i))\,|\mathrm{det}\varphi'(u_i)|\,|\lambda_d(C_i)\\ &\approx \sum_i \int_{C_i} f(\varphi(u))\,|\mathrm{det}\varphi'(u)|\,\lambda_d(du)\\ &\approx \int_\Delta (f\circ\varphi)(u)|\,J_\varphi(u)|\,du.\end{aligned}$$

D'où le résultat ...ou presque. La démonstration ci-dessous consiste pour l'essentiel à mettre en forme rigoureusement le cheminement que nous venons de décrire.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 12.4 (a) : Quelques notations propres à la démonstration pour débuter : pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on notera $\|x\| := \max_{1\le i\le d}|x_i|$ (norme "max"). $Q_{a,\delta} := \{u\in\mathbb{R}^d : \|u-a\|\le\delta\}$ désignera l'hypercube associé de centre $a\in\mathbb{R}^d$ et de côté de longueur $2\delta>0$. Enfin, si $A\subset\mathbb{R}^d$, on notera $\partial A := \overline{A}\setminus\mathring{A}$ la *frontière* de A.

L'application φ^{-1} étant en particulier borélienne, on peut définir la mesure image $\varphi^{-1}(\lambda_D)$. Il est clair que si l'on établit que $\varphi^{-1}(\lambda_D) = |J_\varphi|.\lambda_\Delta$, l'assertion (a) en découlera en prenant l'image par φ de l'égalité. En effet, on vérifie sans peine que $\varphi(\varphi^{-1}(\lambda_D)) = (\varphi\circ\varphi^{-1})(\lambda_D) = \lambda_D$. Or, si $A\in\mathscr{B}(\Delta)$, $\varphi^{-1}(\lambda_D)(A) = \lambda_D((\varphi^{-1})^{-1}(A)) = \lambda_D(\varphi(A))$. Finalement, on se ramène à montrer que, si l'on pose $\mu := \varphi^{-1}(\lambda_D)$,

$$\forall\, A\in\mathscr{B}(\Delta),\;\; \mu(A) = \lambda_D(\varphi(A)) = \int_A |J_\varphi(u)|\,du.$$

Étape 1 *Pour tout $u_0\in\Delta$ et tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que, pour tout hypercube $Q_{a,\eta}$ vérifiant $u_0\in Q_{a,\eta}\subset\Delta$ et $\eta<\delta$, $\left|\dfrac{\mu(Q_{a,\eta})}{\lambda_\Delta(Q_{a,\eta})} - |J_\varphi(u_0)|\right| < \varepsilon$:*

– Supposons d'abord que $u_0 = 0\in\Delta$, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = Id$. Soit $\varepsilon'>0$ tel que $(1+\varepsilon')^d < 1+\varepsilon$; d'après le théorème des accroissements finis appliqué à φ et φ^{-1} en 0, il existe $\delta>0$ tel que $\|\varphi(u)-u\|\le\varepsilon'/2\,\|u\|$ et $\|\varphi^{-1}(u)-u\|\le\varepsilon'/2\,\|u\|$ dès que $\|u\|\le\delta$ (en effet $\varphi'(0) = (\varphi^{-1})'(0) = Id$).

Soit $Q_{a,\eta}$ un hypercube vérifiant : $0\in Q_{a,\eta}\subset\Delta$ et $\eta<\delta$. Il vient, pour tout $u\in Q_{a,\eta}$,

$$\begin{aligned}\|\varphi(u)-a\| &\le \|\varphi(u)-u\| + \|u-a\| \le \varepsilon'/2\,\|u\| + \|u-a\|\\ &\le (1+\varepsilon'/2)\underbrace{\|u-a\|}_{\le\eta} + \varepsilon'/2\,\underbrace{\|a\|}_{\le\eta} \le (1+\varepsilon')\eta.\end{aligned}$$

Par suite $\varphi(Q_{a,\eta}) \subset Q_{a,(1+\varepsilon')\eta}$; de même, comme $\frac{\eta}{1+\varepsilon'} < \eta < \delta$, il vient $\varphi^{-1}(Q_{a,\frac{\eta}{1+\varepsilon'}}) \subset Q_{a,\eta}$, soit encore $Q_{a,\frac{\eta}{1+\varepsilon'}} \subset \varphi(Q_{a,\eta})$. Or, $\lambda_d(Q_{a,\eta}) = (2\eta)^d$, d'où

$$\begin{aligned} 1-\varepsilon < \frac{1}{1+\varepsilon} < \frac{1}{(1+\varepsilon')^d} = \frac{\lambda_d(Q_{a,\frac{\eta}{1+\varepsilon'}})}{\lambda_d(Q_{a,\eta})} &\leq \frac{\lambda_d(\varphi(Q_{a,\eta}))}{\lambda_d(Q_{a,\eta})} \\ &\leq \frac{\lambda_d(Q_{a,(1+\varepsilon')\eta})}{\lambda_d(Q_{a,\eta})} = (1+\varepsilon')^d < 1+\varepsilon. \end{aligned}$$

Soit, finalement : $\left| \dfrac{\mu(Q_{a,\eta})}{\lambda_\Delta(Q_{a,\eta})} - 1 \right| < \varepsilon.$

– Dans le cas général, on pose $\psi(u) := \varphi'(u_0)^{-1}\,(\varphi(u+u_0) - \varphi(u_0))$. ψ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\Delta' := -u_0 + \Delta$ sur $D' := \varphi'(u_0)^{-1}(-\varphi(u_0) + D)$. Soit $Q_{a,\eta}$ un hypercube de Δ contenant u_0 ; d'après le théorème de changement de variables linéaire (proposition 12.1) appliquée à $A := \varphi'(u_0)$:

$$\frac{\mu(Q_{a,\eta})}{\lambda_\Delta(Q_{a,\eta})} = \frac{\lambda_d\left(\varphi'(u_0)\psi(-u_0+Q_{a,\eta}) + \varphi(u_0)\right)}{\lambda_\Delta(Q_{a,\eta})} = |J_\varphi(u_0)| \frac{\lambda_d(\psi(-u_0+Q_{a,\eta}))}{\lambda_d(-u_0+Q_{a,\eta})}.$$

On déduit du cas précédent l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que,

$$\forall\, \eta \in]0,\delta[, \quad \left| \frac{\lambda_d(\psi(-u_0+Q_{a,\eta}))}{\lambda_d(-u_0+Q_{a,\eta})} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{|J_\varphi(u_0)|}.$$

Partant,

$$\left| \frac{\mu(Q_{a,\eta})}{\lambda_\Delta(Q_{a,\eta})} - |J_\varphi(u_0)| \right| < \varepsilon.$$

<u>Étape 2</u> *Pour tout hypercube $Q_{a,\eta}$ de Δ, $\mu(Q_{a,\eta}) \leq \int_{Q_{a,\eta}} |J_\varphi(u)|\, du$:*

Posons $m(Q_{a,\eta}) := \mu(Q_{a,\eta}) - \int_{Q_{a,\eta}} |J_\varphi(u)|\, du$. Supposons qu'il existe un hypercube $Q^{(0)} \subset \Delta$ tel que $m(Q^{(0)}) > 0$. Cet hypercube $Q^{(0)}$ se décompose en 2^d hypercubes de volumes identiques et de côté moitié de celui de $Q^{(0)}$. On note $Q_k^{(0)}$, $1 \leq k \leq 2^d$, ces hypercubes.

$$\begin{aligned} m(Q^{(0)}) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{2^d} Q_k^{(0)}\right) - \int_{Q^{(0)}} |J_\varphi(u)|\, du \\ &\leq \sum_{k=1}^{2^d} \left(\mu(Q_k^{(0)}) - \int_{Q_k^{(0)}} |J_\varphi(u)|\, du\right) = \sum_{k=1}^{2^d} m(Q_k^{(0)}) \end{aligned}$$

car μ est sous-additive et $\lambda_d(Q_k^{(0)} \cap Q_\ell^{(0)}) = 0$ dès que $k \neq \ell$ (la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ ne charge pas les hyperplans de $\mathbb{R}^d$). Par suite, il existe $k \in \{1, \ldots, 2^d\}$ tel que $m(Q_k^{(0)}) \geq \dfrac{m(Q^{(0)})}{2^d}$. Soit $Q^{(1)}$ un tel hypercube. On peut ainsi construire de proche en proche une suite décroissante d'hypercubes $(Q^{(n)})_{n\geq 0}$, telle que

$$m(Q^{(n+1)}) \geq \frac{m(Q^{(n)})}{2^d} \text{ et } \lambda_d(Q^{(n+1)}) = \frac{\lambda_d(Q^{(n)})}{2^d}. \tag{12.4}$$

En particulier, $\lambda_d(Q^{(n)}) = \dfrac{\lambda_d(Q^{(0)})}{2^{dn}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par suite, $\displaystyle\bigcap_{n\geq 0}^{\downarrow} Q^{(n)} = \{u_\infty\}$ d'après la propriété des fermés emboîtés. L'étape 1 entraîne aussitôt que $\displaystyle\lim_n \frac{\mu(Q^{(n)})}{\lambda_d(Q^{(n)})} = |J_\varphi(u_\infty)|$. D'autre part, J_φ étant continue en u_∞, on vérifie sans difficulté que

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_d(Q^{(n)})} \int_{Q^{(n)}} |J_\varphi(u)|\, du = |J_\varphi(u_\infty)|.$$

D'où, par définition de m, $\displaystyle\lim_n \frac{m(Q^{(n)})}{\lambda_d(Q^{(n)})} = 0$. Or, ceci est contradictoire avec la définition des $Q^{(n)}$ car, d'après (12.4),

$$\frac{m(Q^{(n+1)})}{\lambda_d(Q^{(n+1)})} \geq \frac{m(Q^{(n)})}{\lambda_d(Q^{(n)})},$$

i.e. la suite $\left(\dfrac{m(Q^{(n)})}{\lambda_d(Q^{(n)})}\right)$ est croissante de premier terme $\dfrac{m(Q^{(0)})}{\lambda_d(Q^{(0)})} > 0$. Finalement, $m(Q) \leq 0$ pour tout hypercube Q de Δ.

Étape 3 *μ ne charge pas la frontière des hypercubes* :

La frontière $\partial Q_{a,\delta}$ est constituée de $2d$ “hypercarrés” de la forme

$$C_{i,\varepsilon_i} := \{u \in \mathbb{R}^d : u_i = a_i + \varepsilon_i\delta,\ \max_{j\neq i} |u_j - a_j| \leq \delta\}$$

où $i \in \{1, \cdots, d\}$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$.

Soit C_{i,ε_i} un tel “hypercarré”. Pour tout $n \geq 1$,

$$C_{i,\varepsilon_i} \subset P^n_{i,\varepsilon_i} := \{u \in \mathbb{R}^d : |u_j - a_j| \leq \delta,\ j \neq i \text{ et } |u_i - (a_i + \varepsilon_i\delta)| \leq \frac{1}{2n}\}.$$

P^n_{i,ε_i} est un hyperpavé contenu dans au plus $([\delta n]+1)^{d-1}$ hypercubes ($[\,\cdot\,]$ désigne la partie entière) de volumes respectifs $\frac{1}{n^d}$. Il vient, *via* l'étape 2,

$$\mu(C_{i,\varepsilon_i}) \leq \mu(P^n_{i,\varepsilon_i}) \leq ([\delta n]+1)^{d-1} \sup_{u\in P_1} |J_\varphi(u)| \frac{1}{n^d} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc $\mu(C_{i,\varepsilon_i}) = 0$ et partant $\mu(\overset{\circ}{Q}_{a,\delta}) = \mu(Q_{a,\delta})$.

<u>Étape 4</u> *Pour tout hypercube Q de Δ, $\mu(Q)=\displaystyle\int_Q |J_\varphi(u)|\,du$:*

On suppose l'existence d'un hypercube $Q^{(0)}$ tel que $m(Q^{(0)})<0$ et l'on reprend la construction de l'étape 2. Comme $\overset{\circ}{Q}{}_k^{(0)} \cap \overset{\circ}{Q}{}_\ell^{(0)}=\emptyset$ si $k\neq\ell$, l'étape 3 montre que, cette fois, $m(Q^{(0)}) \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{2^d} m(\overset{\circ}{Q}{}_k^{(0)}) = \sum_{k=1}^{2^d} m(Q_k^{(0)})$.

D'où l'existence de $Q^{(1)}\subset Q^{(0)}$ vérifiant $m(Q^{(1)})\leq \dfrac{m(Q^{(0)})}{2^d}$ et $\lambda_d(Q^{(1)}) = \dfrac{\lambda_d(Q^{(0)})}{2^d}$ à la fois. On conclut comme dans l'étape 2.

<u>Étape 5</u> *Pour tout ouvert O de Δ, $\mu(O)=\displaystyle\int_O |J_\varphi(u)|\,du$:*

Soit $(Q_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ un pavage de $\mathbb{R}^d$ par des hypercubes de côtés $1/2^n$: en d'autres termes, $\mathbb{R}^d=\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k^{(n)}$, $\overset{\circ}{Q}{}_k^{(n)}\cap \overset{\circ}{Q}{}_\ell^{(n)}=\emptyset$ si $k\neq\ell$. On suppose en outre que

$$Q_k^{(n)}=\bigcup_{Q_\ell^{(n+1)}\subset Q_k^{(n)}} Q_\ell^{(n+1)},\ n\geq 0.$$

On pose alors $A_n := \displaystyle\bigcup_{Q_\ell^{(n+1)}\subset O} Q_\ell^{(n+1)}$. Par construction on dispose de $A_n\subset A_{n+1}$ et $O=\displaystyle\bigcup_{n\geq 0}^{\uparrow} A_n$. D'après les étapes 3 et 4, il est clair que $\mu(A_n)=\displaystyle\int_{A_n}|J_\varphi(u)|\,du$ pour tout $n\geq 0$ et, partant, $\mu(O)=\displaystyle\int_O |J_\varphi(u)|\,du$. On conclut *via* le corollaire 6.2 sur la caractérisation d'une mesure avec $\mathscr{C} := \mathscr{O}(\Delta)$ et les $E_p :=]-p,p[^d\cap\Delta$ pour $p\geq 1$. $\quad\Diamond$

***Application* 12.2.** *Passage en coordonnées polaires sur* $\mathbb{R}^2$:

Passer en coordonnées polaires consiste à considérer le difféomorphisme

$$\begin{aligned}\varphi :\ \mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}_-\times\{0\})\\ (r,\theta) &\longmapsto \varphi(r,\theta):=(r\cos\theta, r\sin\theta).\end{aligned}\tag{12.5}$$

La fonction φ est bien un difféomorphisme puisque, d'une part, φ est bijective de réciproque donnée par

$$\varphi^{-1}(x_1,x_2)=\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,,\ \mathrm{Arg}\,(x_1+ix_2)\right),$$

où Arg (z) désigne l'argument principal (dans $[-\pi, \pi[$) de $z \in \mathbb{C}^*$([4]). D'autre part, φ est continûment différentiable,

$$\varphi'(r,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \text{ et } J_\varphi(r,\theta) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \neq 0.$$

Par suite, comme $\lambda_2(\mathbb{R}_+ \times \{0\}) = 0$, il vient pour toute $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^2)$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})} f(x)\,dx = \int_{r=0}^{r=+\infty} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta,$$

le second membre s'intégrant dans un ordre indifférent d'après le théorème de Fubini-Lebesgue.

Remarque : Si l'on étend l'application définie par la formule (12.5) en une application φ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on constate que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ avec $J_\varphi(r,\theta) = r \neq 0$. Cependant, φ n'est pas bijective. Ceci montre l'importance des hypothèses dans le théorème 12.3.

***Application* 12.3.** (a) *Calcul de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$:
On duplique l'intégrale sous la forme

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \times \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \right)^{1/2} \quad \textit{via} \text{ le théorème de Fubini-Tonelli.} \end{aligned}$$

D'autre part, il vient par passage en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

D'où, finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(a') *Généralisation* : Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\Re(\alpha) > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha}}$, où $\sqrt{\cdot}$ désigne la détermination principale de la racine carrée, *i.e.* $\sqrt{z} := \sqrt{|z|}\, e^{i\,\mathrm{Arg}(z)/2}$ avec $\mathrm{Arg}(z) \in [-\pi, \pi[$.

Soit $f(\alpha) := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\Re(\alpha) > 0$. La fonction f est bien définie car $x \mapsto e^{-\alpha x^2} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_+)$. En suivant la même démarche que pour le calcul de $f(1)$ ci-dessus, il vient

4. Il est nécessaire d'enlever la demi-droite $\mathbb{R}_- \times \{0\}$ car l'application de passage en coordonnées polaires $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+^* \times [-\pi, \pi[$ n'est pas continue.

successivement, *via* le théorème 11.3 (Fubini-Lebesgue) et la formule de changement de variables en coordonnées polaires,

$$f(\alpha)^2 = \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-\alpha(x^2+y^2)}\, dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\alpha r^2}\, r\, dr = \frac{\pi}{4\,\alpha} = \frac{f(1)^2}{\alpha}.$$

Le problème est à présent d'identifier $f(\alpha)$ à la bonne détermination de la racine carrée. On a $\sqrt{\alpha}\, f(\alpha) = \pm f(1)$. Si l'on montre que f est continue sur l'ouvert connexe $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$, alors $\alpha \mapsto \sqrt{\alpha}\, f(\alpha)$ est constante sur Ω et $\sqrt{\alpha}\, f(\alpha) = \sqrt{1}\, f(1) = f(1)$, d'où l'égalité cherchée.

Montrons que f est continue sur Ω. Soit $a > 0$; la fonction $\alpha \mapsto e^{-\alpha x^2}$ est continue sur l'ouvert $\Omega_a := \{z \in C : \Re(z) \geq a\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto e^{-\alpha x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $\alpha \in \Omega_a$. Enfin, la majoration : pour tout $(\alpha, x) \in \Omega_a \times \mathbb{R}_+$, $|e^{-\alpha x^2}| \leq e^{-a x^2} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}_+)$, fournit la condition de domination. Donc, d'après le théorème 8.5 de continuité sous le signe intégrale, f est continue sur Ω_a pour tout $a > 0$ et, par conséquent, sur Ω.

(b) *Volume de la boule euclidienne unité de* $\mathbb{R}^d$:

La boule euclidienne unité de $\mathbb{R}^d$ est définie par $B_d := \{x \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + \cdots + x_d^2 \leq 1\}$ et son volume v_d est donc défini par $v_d := \lambda_d(B_d)$.

Pour calculer v_d on établit une relation de récurrence. On suppose $d \geq 2$.

$$\begin{aligned} v_d &= \int_{\mathbb{R}^d} dx_1 \cdots dx_d\, \mathbb{1}_{\{x_1^2+\cdots+x_d^2 \leq 1\}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dx_d\, dx_{d-1} \left[\int_{\mathbb{R}^{d-2}} dx_1 \cdots dx_{d-2}\, \mathbb{1}_{\{x_1^2+\cdots+x_{d-2}^2 \leq 1-(x_{d-1}^2+x_d^2)\}} \right] \mathbb{1}_{\{x_{d-1}^2+x_d^2 \leq 1\}}. \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale entre crochets (qui est une fonction de (x_{d-1}, x_d)).

– Si $x_{d-1}^2 + x_d^2 = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx_1 \cdots dx_{d-2} \mathbb{1}_{\{x_1^2+\cdots+x_{d-2}^2 \leq 1-(x_{d-1}^2+x_d^2)\}} = \lambda_{d-2}(\{0_{\mathbb{R}^{d-2}}\}) = 0.$$

– Si $x_{d-1}^2 + x_d^2 < 1$ (fixés), on pose $x_i := u_i \sqrt{1-(x_{d-1}^2+x_d^2)}$, $1 \leq i \leq d-2$. Ceci définit clairement une application *linéaire bijective* A_{d-2} de $\mathbb{R}^{d-2}$ dans $\mathbb{R}^{d-2}$ vérifiant dét $A_{d-2} = \big(1-(x_{d-1}^2+x_d^2)\big)^{\frac{d}{2}-1}$.

D'après la proposition 12.1 et la formule (12.1) appliquées avec la fonction f définie par $f(x_1, \ldots, x_{d-2}) := \mathbb{1}_{\{x_1^2+\ldots+x_{d-2}^2 \leq 1-(x_{d-1}^2+x_d^2)\}}$, il vient

$$\begin{aligned} v_d &= \int_{\mathbb{R}^2} dx_d\, dx_{d-1} \left[\int_{B_{d-2}} du_1 \cdots du_{d-2} \big(1-(x_{d-1}^2+x_d^2)\big)^{\frac{d}{2}-1} \right] \mathbb{1}_{\{x_{d-1}^2+x_d^2 \leq 1\}} \\ &= \int_{\{x_{d-1}^2+x_d^2 \leq 1\}} dx_d\, dx_{d-1} \big(1-(x_{d-1}^2+x_d^2)\big)^{\frac{d}{2}-1} \times v_{d-2} \quad \text{(convention } v_0 = 1\text{)}, \\ &= v_{d-2} \times \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{+\infty} \big(1-r^2\big)^{\frac{d}{2}-1} \mathbb{1}_{\{0 \leq r \leq 1\}} r\, dr\, d\theta \quad \text{(coordonnées polaires)}, \\ &= v_{d-2} \times 2\pi \times \int_0^1 \big(1-r^2\big)^{\frac{d}{2}-1}\, r\, dr \\ &= v_{d-2} \times \frac{2\pi}{d} \times \Big[-(1-r^2)^{\frac{d}{2}} \Big]_0^1 = v_{d-2} \frac{2\pi}{d}. \end{aligned}$$

D'autre part, il est immédiat que $v_1 = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{|x_1|\leq 1\}}\, dx_1 = 2$. Il vient donc finalement

– si d est pair : $v_d = \dfrac{\pi^{\frac{d}{2}}}{(\frac{d}{2})!}$,

– si d est impair : $v_d = \dfrac{2^d \pi^{\frac{d-1}{2}} (\frac{d-1}{2})!}{d!}$.

(c) *Volume de* $D := \varphi(\Delta)$, φ *difféomorphisme* :

Soient donc Δ et D deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, et $\varphi : \Delta \to D$ un difféomorphisme de Δ sur D. Par définition

$$\text{Vol}(D) = \int \mathbb{1}_D(x_1, \ldots, x_d)\, dx_1 \ldots dx_d = \int \mathbb{1}_{\varphi(\Delta)}(x_1, \ldots, x_d)\, dx_1 \ldots dx_d.$$

On considère le changement de variables $x := \varphi(u)$. Il vient

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \int \mathbb{1}_{\varphi(\Delta)}(\varphi(u)) |J_\varphi(u)|\, du_1 \cdots du_d, \\ &= \int \mathbb{1}_\Delta(u) |J_\varphi(u)|\, du_1 \cdots du_d \quad \text{car } \ \varphi(u) \in \varphi(\Delta) \Leftrightarrow u \in \Delta \\ i.e. \quad \text{Vol}(\varphi(\Delta)) &= \int_\Delta |J_\varphi(u)|\, du_1 \cdots du_d. \end{aligned}$$

(d) *Premier théorème de Guldin* :

On se place sur $\mathbb{R}^3$. On note λ_3 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$ et λ_2 la mesure de Lebesgue sur le plan $P := \{(u, v, 0),\ u,\ v \in \mathbb{R}\}$. Soit S un borélien de l'ensemble $\{(u, v, 0),\ \ u > 0\}$ de surface non nulle et finie au sens où $0 < \lambda_2(S) < +\infty$. On considère V le borélien de $\mathbb{R}^3$ obtenu par la rotation de S autour de l'axe des coordonnées v. Soit $G = (u_G, v_G, 0) \in P$ le centre d'inertie de la plaque définie par S, supposée homogène. Le point G est défini par la valeur moyenne

$$(u_G, v_G, 0) = \frac{1}{\lambda_2(S)} \int_S (u, v, 0)\, du\, dv.$$

Le volume de V est alors donné par la *formule de Guldin*

$$\lambda_3(V) = 2\pi\, u_G\, \lambda_2(S) < +\infty.$$

Autrement dit, le volume de V est le produit de l'aire de S par la longueur de la circonférence décrite par G.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la fonction de passage en *coordonnées cylindriques* définie par $\varphi(\theta, u, v) := (u\, \cos\theta, u\, \sin\theta, v)$. La fonction φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z),\ x \leq 0\}$ et $J_\varphi(\theta, u, v) = u > 0$. Par définition, $V = \varphi(]-\pi, \pi] \times S)$ et $\varphi(\{\pi\} \times S) \subset \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ est de mesure nulle car la mesure de Lebesgue ne charge pas les hyperplans. Il vient alors, d'après l'application (c) ci-avant

$$\lambda_3(V) = \lambda_3(\varphi(]-\pi,\pi[\times S)) = \int_{]-\pi,\pi[\times S} |J_\varphi(\theta,u,v)|\,d\theta\,du\,dv = \int_{]-\pi,\pi[\times S} u\,d\theta\,du\,dv.$$

Le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 11.2) entraîne enfin

$$\lambda_3(V) = \int_{]-\pi,\pi[} d\theta \left(\int_S u\,du\,dv\right) = 2\pi \int_S u\,du\,dv = 2\pi\, u_G\, \lambda_2(S),$$

ce qui établit l'égalité désirée.

Remarques : • La formule de changement de variable “élémentaire” dans les intégrales de Riemann sur un intervalle compact (*cf.* théorème 1.2) apparaît essentiellement comme un cas particulier du théorème général ci-avant : le fait que, dans le cadre élémentaire, φ ne soit pas nécessairement un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme est démenti en pratique. En revanche, l'extension de la formule à des fonctions f non nécessairement continues est très utile dans les applications.

Afin de lever toute ambiguïté, assurons-nous cependant de la compatibilité des deux théorèmes, notamment lorsque le changement de variable intervertit les bornes. Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (continue) et $\varphi : [\beta,\alpha] \to [a,b]$ un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. La fonction φ est nécessairement monotone comme bijection continue, donc décroissante. Par suite $J_\varphi(u) = \varphi'(u) \leq 0$. D'autre part, on vérifie que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du &= -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,|\varphi'(u)|\,du \\ &= \int_\beta^\alpha f(\varphi(u))\,|\varphi'(u)|\,du.\end{aligned}$$

• Le théorème 12.4 contient évidemement la proposition 12.1. En effet, par la formule de changement de variables avec le difféomorphisme affine $\varphi(u) := Au + b$ ($\varphi' \equiv A$ et $\det A \neq 0$!), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(Au+b)|\det A|\,du,$$

qui correspond bien à la formule (12.1).

12.3 ♣ Application : le degré topologique de Brouwer

On a vu avec l'exemple du changement de variables en coordonnées polaires, que le fait que le Jacobien d'une application ne s'annule pas n'entraîne pas l'injectivité de celle-ci. Toutefois, dans cet exemple, on obtient un difféomorphisme en enlevant une demi-droite (ensemble de mesure de Lebesgue nulle). On peut se demander plus généralement quelles sont les implications entre la bijectivité de l'application et la non-nullité de son Jacobien. La notion de degré topologique que l'on va définir à présent permet de répondre à cette question. Le but n'est pas de développer ici la théorie du degré qui est par ailleurs un outil fondamental de l'Analyse, mais de le traiter dans le cadre du changement de variables. Pour un exposé complet du degré topologique ainsi que de ses applications en Analyse, on pourra consulter [29].

Dans cette section, $|\cdot|$ désignera toujours la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. La mesure de Lebesgue $\lambda_d(dx)$ sera notée simplement dx et, si O est un ouvert de $\mathbb{R}^d$,

$$\mathscr{C}_K^n(O,\mathbb{R}) := \{\varphi\in\mathscr{C}^n(O,\mathbb{R}^d) : \text{supp}\,\varphi \text{ compact inclus dans } O\}, \quad n\in\mathbb{N}^*.$$

Dans toute la suite, sauf mention contraire, Ω est un ouvert non vide borné de $\mathbb{R}^d$ et $f \in \mathscr{C}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^d)\cap\mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^d)$. On suppose que $0 \notin f(\partial\Omega)$ et on note $\varepsilon_f := \text{dist}(0, f(\partial\Omega)) > 0$. On a la proposition-définition suivante :

***Proposition* 12.2.** *On définit pour toute fonction $\varphi\in\mathscr{C}_K(]0,\varepsilon_f[,\mathbb{R})$,*

$$d_\Omega(f,\varphi) := \int_\Omega \varphi(|f(x)|)\, J_f(x)\, dx.$$

Alors,

$$d_\Omega(f,\varphi) = d_\Omega(f)\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(|x|)\, dx \tag{12.6}$$

où le nombre $d_\Omega(f)$ ne dépend pas de φ et est appelé le degré topologique *de l'application f par rapport à l'ouvert Ω.*

Pour démontrer cette proposition on a besoin du résultat suivant qui est un cas particulier de la formule de Stokes.

***Lemme* 12.1.** *Soit $\psi \in \mathscr{C}_K^1(\Omega,\mathbb{R})$. Alors,*

$$\int_\Omega \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x)\, dx = 0, \quad 1\le i\le n. \tag{12.7}$$

DÉMONSTRATION : La fonction $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}$ est clairement intégrable sur $\mathbb{R}^d$, donc d'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x)\, dx_i\right) dx_1\cdots dx_{i-1}dx_{i+1}\cdots dx_d\\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} [\psi(x)]_{x_i=-\infty}^{x_i=+\infty}\, dx_1\cdots dx_{i-1}dx_{i+1}\cdots dx_d = 0. \quad \diamond\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 12.2 : On se limite pour des raisons techniques au cas $d = 2$; la démonstration générale est détaillée dans [29] et s'appuie sur des manipulations d'algèbre multilinéaire qui s'éloignent de notre propos.

Il suffit en fait de montrer l'implication

$$\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(|x|)\, dx = 0 \implies d_\Omega(f,\varphi) = 0,$$

qui entraîne, pour toutes fonctions $\varphi_i\in\mathscr{C}_K(]0,\varepsilon_f[,\mathbb{R})$, $i=1,2$, telles que $\int_{\mathbb{R}^2}\varphi_i(|x|)\, dx\neq 0$,

$$\frac{d_\Omega(f,\varphi_1)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}\varphi_1(|x|)\, dx} = \frac{d_\Omega(f,\varphi_2)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}\varphi_2(|x|)\, dx} = \text{constante}.$$

Soit donc $\varphi\in\mathscr{C}_K(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ telle que $\text{supp}\,\varphi\subset[a,b]\subset]0,\varepsilon_f[$, $0<a<b$ et $\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(|x|)\, dx = 0$. L'idée est d'écrire, pour $f\in\mathscr{C}^2(\Omega,\mathbb{R}^2)$, la fonction $(\varphi\circ|f|)\, J_f$ comme une somme de dérivées

partielles de fonctions de $\mathscr{C}^2_K(\Omega,\mathbb{R})$ puis d'appliquer le lemme 12.1. On procède en quatre étapes. Dans l'étape 3, on suppose que $f\in\mathscr{C}^{\,2}(\Omega,\mathbb{R}^2)$ et l'étape 4 est consacrée à l'extension au cas $f\in\mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^2)$.

<u>Étape 1</u> supp $(\varphi\circ|f|)$ *est un compact inclus dans* Ω :

L'uniforme continuité de f sur $\overline{\Omega}$ entraîne l'existence de $\delta>0$ tel que pour tout $x\in\Omega$ avec dist $(x,\partial\Omega)<\delta$, on ait dist $(f(x),f(\partial\Omega))<\varepsilon_f-b$. Alors par l'inégalité triangulaire (*cf.* section 3.6),

$$|f(x)|\geq \text{dist}\,(0,f(\partial\Omega))-\text{dist}\,(f(x),f(\partial\Omega))>\varepsilon_f-(\varepsilon_f-b)=b,$$

d'où $\varphi(|f(x)|)=0$ et supp $(\varphi\circ|f|)\subset\{x\in\Omega : \text{dist}\,(x,\partial\Omega)\geq\delta\}$.

<u>Étape 2</u> $\varphi\circ|\cdot|=\text{div}\,\Psi:=\dfrac{\partial\Psi_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\Psi_2}{\partial x_2}$ *où* $\Psi\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$:

D'après le changement de variables en coordonnées polaires, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(|x|)\,dx=2\pi\int_a^b\varphi(r)\,rdr=0.$$

Partant, la fonction θ définie par

$$\theta(r):=\frac{1}{r^2}\int_0^r u\,\varphi(u)\,du$$

est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, à support compact dans $[a,b]$. θ est en outre solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$:

$$r\,\theta'(r)+2\,\theta(r)=\varphi(r).$$

On considère alors la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\Psi(y):=\theta(|y|)\,y$. Ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie les égalités

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi_i}{\partial y_i}(y)&=\frac{y_i^2}{|y|}\,\theta'(|y|)+\theta(|y|),\quad i=1,2,\\ \text{d'où}\quad\text{div}\,\Psi(y)&=\frac{\partial\Psi_1}{\partial y_1}(y)+\frac{\partial\Psi_2}{\partial y_2}(y)=|y|\,\theta'(|y|)+2\,\theta(|y|)=\varphi(|y|).\end{aligned}$$

<u>Étape 3</u> $d_\Omega(f,\varphi)=0$ *si* $f\in\mathscr{C}^{\,2}(\Omega,\mathbb{R})^2$:

L'égalité des dérivées croisées pour une fonction de classe $\mathscr{C}^{\,2}$ entraîne

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\,(\Psi_1\circ f)-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,(\Psi_2\circ f)\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,(\Psi_1\circ f)-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,(\Psi_2\circ f)\right)\\ &=\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial y_1}\circ f+\frac{\partial\Psi_2}{\partial y_2}\circ f\right)J_f=(\varphi\circ|f|)\,J_f.\end{aligned}$$

De plus, la fonction définie par

$$\Phi:=\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\,(\Psi_1\circ f)-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,(\Psi_2\circ f)\,,\;\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,(\Psi_2\circ f)-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,(\Psi_1\circ f)\right)$$

appartient à $\mathscr{C}^1_K(\Omega,\mathbb{R}^2)$ puisque $\Psi\circ f=(\theta\circ|f|)\,f\in\mathscr{C}^1_K(\Omega,\mathbb{R}^2)$ d'après les étapes 1 et 2. D'où $(\varphi\circ|f|)\,J_f=\text{div}\,\Phi$ où $\Phi\in\mathscr{C}^1_K(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$, et donc d'après le lemme 12.1,

$$d_\Omega(f,\varphi)=\int_\Omega\varphi(|f(x)|)\,J_f(x)\,dx=\int_\Omega\text{div}\,\Phi(x)\,dx=0.$$

<u>Étape 4</u> $d_\Omega(f,\varphi)=0$ *si* $f\in\mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})^2$:

D'après l'étape 1, il existe un ouvert ω de $\mathbb{R}^2$ tel que supp $(\varphi\circ|f|)\subset\omega\subset\overline{\omega}\subset\Omega$. La régularisation par convolution (*cf.* théorème 14.8, section 14.5), permet alors d'approcher f par une suite de fonctions $(f_k)_{k\geq 1}$ de $\mathscr{C}_K^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ de sorte que

$$\forall\, k\geq 1,\ \text{supp}\,(\varphi\circ|f_k|)\subset\omega \quad \text{et} \quad \|f_k-f\|_{L^\infty(\omega)}+\|Df_k-Df\|_{L^\infty(\omega)}\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

D'après l'étape 3, on a $d_\Omega(f_k,\varphi)=0$ et, comme la suite $(\varphi\circ|f_k|)\,J_{f_k}$ converge uniformément vers $(\varphi\circ|f|)\,J_f$ sur ω, on obtient donc $d_\Omega(f,\varphi)=0$ en faisant tendre k vers $+\infty$. $\diamondsuit$

Sous certaines hypothèses, on peut exprimer simplement le degré topologique de l'application en fonction de son Jacobien.

***Proposition* 12.3.** (a) *On suppose que J_f garde un signe constant sur Ω, ou bien que la fonction $\mathbb{1}_{\{0<|f|<\varepsilon_f\}}J_f$ est intégrable sur Ω. Alors*

$$d_\Omega(f)=\frac{1}{\varepsilon_f^d v_d}\int_\Omega \mathbb{1}_{\{0<|f|<\varepsilon_f\}}(x)\,J_f(x)\,dx \tag{12.8}$$

où v_d est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$.

(b) *Si $0\notin f(\Omega)$, alors $d_\Omega(f)=0$.*

(c) *Soit $S:=\{x\in\Omega : J_f(x)=0\}$. Si $0\notin f(S)$, alors $f^{-1}(\{0\})$ est fini et*

$$d_\Omega(f)=\sum_{x\in f^{-1}(\{0\})}\text{sgn}\,(J_f(x)) \quad \Big(\textit{convention}\ \sum_{\emptyset}=0\Big), \tag{12.9}$$

où sgn (t) *désigne le signe du réel $t\neq 0$.*

Remarque : Une conséquence immédiate de (c) est que, si J_f ne s'annule pas et garde un signe constant sur Ω, alors

$$|d_\Omega(f)|=\frac{1}{\varepsilon_f^d v_d}\int_\Omega \mathbb{1}_{\{0<|f|<\varepsilon_f\}}(x)\,|J_f(x)|\,dx=\text{card}\,f^{-1}(\{0\}),$$

autrement dit f s'annule exactement $|d_\Omega(f)|$ fois sur Ω.

Démonstration de la proposition 12.3 : (a) On suppose par exemple que $J_f\geq 0$ sur Ω. On considère une suite $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ de $\mathscr{C}_K(]0,\varepsilon_f[,\mathbb{R}_+)$ telle que $0\leq\varphi_k\leq 1$ et $\varphi_k\uparrow 1$ sur $]0,\varepsilon_f[$. Alors, $0\leq(\varphi_k\circ|f|)\,J_f\uparrow\mathbb{1}_{\{0<|f|<\varepsilon_f\}}\,J_f$ sur Ω, et d'après le théorème de Beppo Levi,

$$d_\Omega(f,\varphi_k)=\int_\Omega\varphi_k(|f(x)|)\,J_f(x)\,dx\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\int_\Omega\mathbb{1}_{\{0<|f|<\varepsilon_f\}}(x)\,J_f(x)\,dx$$

$$\text{et}\qquad \int_{\mathbb{R}^d}\varphi_k(|x|)\,dx\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{1}_{\{0<|x|<\varepsilon_f\}}\,dx=\lambda_d(\{0<|x|<\varepsilon_f\})=\varepsilon_f^d\,v_d.$$

La formule (12.6) entraîne donc (12.8). Si $\mathbb{1}_{\{0<|f|<\varepsilon_f\}}J_f$ est intégrable, la relation (12.8) s'obtient comme précédemment en remplaçant le théorème de Beppo Levi par le théorème de convergence dominée.

(b) Si $0\notin f(\Omega)$ alors, par hypothèse, $0\notin f(\overline{\Omega})$ compact et $0<\delta:=\text{dist}(0,f(\overline{\Omega}))\leq\varepsilon_f$. Soit $\varphi\in\mathscr{C}_K(]0,\delta[,\mathbb{R}_+)$ non nulle. Alors, comme $|f|\geq\delta$ sur Ω, on a d'après l'égalité (12.6),

$$d_\Omega(f,\varphi)=\int_\Omega\varphi(|f(x)|)\,J_f(x)\,dx=0=d_\Omega(f)\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(|x|)\,dx,$$

d'où $d_\Omega(f)=0$ puisque $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(|x|)\,dx>0$ (φ est non nulle et positive).

(c) Si $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ alors (b) implique le résultat. Sinon, on considère $x \in \Omega$ tel que $f(x) = 0$. Comme $J_f(x) \neq 0$ et que f est de classe $\mathscr{C}^1$, le théorème d'inversion locale (*cf.* théorème 12.2) entraîne l'existence d'une boule ouverte $B_x \subset \Omega$ de centre x telle que $f_{|B_x}$ soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme sur son image. En particulier, $B_x \cap f^{-1}(\{0\}) = \{x\}$. Donc $f^{-1}(\{0\})$ est constitué de points isolés dans $\overline{\Omega}$ compact, et est par conséquent fini. On pose $f^{-1}(\{0\}) := \{x_1, \ldots, x_p\}$ et on définit l'ouvert $\omega := \bigcup_{i=1}^p \omega_i$ où :

- ω_i est une boule ouverte de centre x_i telle que $\overline{\omega_i} \subset \Omega$,
- $\overline{\omega_i} \cap \overline{\omega_j} = \emptyset$ si $i \neq j$,
- $f_{|\omega_i}$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de ω_i sur son image,
- $f(\partial\omega_i) \cap f(\omega_i) = \emptyset$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $f(\omega_i)$ contient une boule ouverte de centre 0 et de rayon $\varepsilon_i > 0$. On note $\delta := \min\{\varepsilon_f, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$ et on considère $\varphi \in \mathscr{C}_K^1(]0, \delta[, \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(|x|)\, dx = 1$.

Pour montrer la relation (12.9), on procède en trois étapes.

<u>Étape 1</u> $\displaystyle\int_{\omega_i} \varphi(|f(x)|)\, J_f(x)\, dx = \operatorname{sgn}(J_f(x_i))$:

Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$. Le théorème du changement de variables appliqué à $f_{|\omega_i}$ donne

$$\int_{\omega_i} \varphi(|f(x)|)\, J_f(x)\, dx = \operatorname{sgn}(J_f(x_i)) \int_{f(\omega_i)} \varphi(|y|)\, dy.$$

Or, si $y \notin f(\omega_i)$, $|y| \geq \varepsilon_i \geq \delta$ et, partant, $\varphi(|y|) = 0$. D'où

$$\int_{\omega_i} \varphi(|f(x)|)\, J_f(x)\, dx = \operatorname{sgn}(J_f(x_i)) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(|y|)\, dy = \operatorname{sgn}(J_f(x_i)).$$

<u>Étape 2</u> $\displaystyle\int_{\Omega \setminus \overline{\omega}} \varphi(|f(x)|)\, J_f(x)\, dx = 0$:

Comme les $\overline{\omega_i}$ sont deux à deux disjointes et incluses dans Ω, on a

$$f(\partial(\Omega \setminus \overline{\omega})) = f(\partial\Omega) \cup f(\partial\omega_1) \cup \cdots \cup f(\partial\omega_p)$$

d'où $\delta \leq \operatorname{dist}(0, f(\partial(\Omega \setminus \overline{\omega})))$ car $f(\partial\omega_i) \subset \{y : |y| \geq \varepsilon_i\}$. Donc d'après la définition (12.6) du degré topologique,

$$\int_{\Omega \setminus \overline{\omega}} \varphi(|f(x)|)\, J_f(x)\, dx = d_{\Omega \setminus \overline{\omega}}(f).$$

Or, $d_{\Omega \setminus \overline{\omega}}(f) = 0$ d'après (b) car $0 \notin f(\Omega \setminus \overline{\omega})$.

<u>Étape 3</u> *Vérification de la relation (12.9)* :

Comme la mesure de Lebesgue ne charge pas les sphères de $\mathbb{R}^d$, on a

$$\int_{\overline{\omega_i}} \varphi(|f(x)|)\, J_f(x)\, dx = \int_{\omega_i} \varphi(|f(x)|)\, J_f(x)\, dx.$$

De plus, $\overline{\omega}$ est la réunion disjointe des $\overline{\omega_i}$, d'où

$$\begin{aligned} d_\Omega(f) &= \int_{\Omega \setminus \overline{\omega}} \varphi(|f(x)|)\, J_f(x)\, dx + \sum_{i=1}^p \int_{\omega_i} \varphi(|f(x)|)\, J_f(x)\, dx \\ &= \sum_{i=1}^p \operatorname{sgn}(J_f(x_i)) \quad \text{d'après les étapes 1 et 2.} \quad \diamond \end{aligned}$$

Nous sommes à présent en mesure d'établir un lien entre la non-nullité du Jacobien d'une application et l'injectivité de celle-ci.

***Corollaire* 12.2.** *(a) Soit $f \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ telle que J_f ne s'annule pas et garde un signe constant sur Ω. Alors la fonction $y \mapsto \operatorname{card}(f^{-1}(\{y\}))$ est constante et finie dans chaque composante connexe de l'ouvert $\mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$.*

(b) On suppose, en outre, que $f(\Omega)$ est inclus dans une composante connexe Λ de $\mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$ et qu'il existe $y_0 \in \Lambda$ tel que $f^{-1}(\{y_0\})$ soit un singleton. Alors, f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur Λ.

DÉMONSTRATION : (a) On définit pour chaque $y \in \mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$, $\varepsilon_{f-y} := \operatorname{dist}(0, f(\partial\Omega) - y)$. Il est clair que la fonction $y \mapsto \varepsilon_{f-y}$ est continue et strictement positive sur l'ouvert $\mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$; alors il existe un voisinage compact V_0 de y_0 et $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $y \in V_0$, $\varepsilon_{f-y} \geq \varepsilon_0$. Soit $\varphi_0 \in \mathscr{C}^1_K(]0, \varepsilon_0[, \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_0(|x|)\, dx = 1$.

Pour tout $y \in V_0$, supp $(\varphi_0 \circ |f-y|)$ est inclus dans un compact fixé $K_0 \subset \Omega$ (*cf.* l'étape 1 de la démonstration de la proposition 12.2). Alors d'après la relation (12.6),

$$d_\Omega(f-y) = \int_{K_0} \varphi_0(|f(x)-y|)\, J_f(x)\, dx.$$

La fonction $(x, y) \mapsto \varphi_0(|f(x)-y|)\, J_f(x)$ est continue et bornée sur le compact $K_0 \times V_0$, donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégral, la fonction $d_\Omega(f - \cdot)$ est continue en y_0. D'après la formule (12.9) (de la proposition 12.3) et le fait que $|d_\Omega(f-y)| = \operatorname{card}(f^{-1}(\{y\})) < +\infty$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$. On en déduit que la fonction, à valeurs entières, $y \mapsto \operatorname{card}(f^{-1}(\{y\}))$ est continue, donc constante, sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$.

(b) D'après (a), on a pour tout $y \in \Lambda$, $\operatorname{card}(f^{-1}(\{y\})) = \operatorname{card}(f^{-1}(\{y_0\})) = 1$ et $f(\Omega) \subset \Lambda$. Donc f est une bijection de Ω sur Λ et par suite, un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme car J_f ne s'annule pas sur Ω. $\diamondsuit$

Terminons ce paragraphe consacré au degré topologique de Brouwer par deux applications directement liées au changement de variables.

***Application* 12.4.** Soit $f \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ telle que

$$\min_{x \in \partial\Omega} |f(x)| = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \Omega,\ 0 < J_f(x) \leq 1.$$

(a) Si $\lambda_d(\Omega) < \lambda_d(B_d)$ où B_d désigne la boule unité de $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $x \in \Omega$, $|f(x)| \geq 1$.

(b) Si $\lambda_d(\Omega) = \lambda_d(B_d)$ et s'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $|f(x_0)| < 1$, alors la fonction f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur B_d et $J_f \equiv 1$ sur Ω.

DÉMONSTRATION : Étant donné que $\operatorname{dist}(0, f(\partial\Omega)) = 1$ et $0 < J_f \leq 1$ sur Ω, les formules (12.8) et (12.9) de la proposition 12.3 donnent

$$d_\Omega(f) = \operatorname{card}(f^{-1}(\{0\})) = \frac{1}{\lambda_d(B_d)} \int_\Omega \mathbb{1}_{\{0<|f|<1\}}(x)\, J_f(x)\, dx \leq \frac{\lambda_d(\Omega)}{\lambda_d(B_d)}.$$

(a) Si $\lambda_d(\Omega) < \lambda_d(B_d)$ alors

$$\operatorname{card}(f^{-1}(\{0\})) = 0 = \frac{1}{\lambda_d(B_d)} \int_\Omega \mathbb{1}_{\{0<|f|<1\}}(x)\, J_f(x)\, dx,$$

donc, puisque $J_f > 0$ sur Ω, $\lambda_d(\{0 < |f| < 1\}) = 0$, *i.e.* $f = 0$ ou $|f| \geq 1$, λ_d-*p.p.* sur Ω. Comme f est continue sur Ω et ne s'annule pas sur $\partial\Omega$, on en déduit que $|f| \geq 1$ sur $\overline{\Omega}$.

(b) Supposons à présent que $\lambda_d(\Omega) = \lambda_d(B_d)$ et qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $|f(x_0)| < 1$. Comme f n'est pas identiquement nulle sur Ω, on peut même supposer que $0 < |f(x_0)| < 1$. Alors l'ensemble $\{0 < |f| < 1\}$ est un ouvert non vide de Ω et donc $\displaystyle\int_\Omega \mathbb{1}_{\{0<|f|<1\}}(x)\, J_f(x)\, dx > 0$, ce qui entraîne

$$1 \leq \operatorname{card}(f^{-1}(\{0\})) = \frac{1}{\lambda_d(B_d)} \int_\Omega \mathbb{1}_{\{0<|f|<1\}}(x)\, J_f(x)\, dx \leq \frac{\lambda_d(\Omega)}{\lambda_d(B_d)} = 1.$$

Comme $0 \leq \mathbb{1}_{\{0<|f|<1\}} J_f \leq 1$, on en déduit que $\mathbb{1}_{\{0<|f|<1\}} J_f = 1$ λ_d-*p.p.* sur Ω puis, par continuité de J_f, que $J_f \equiv 1$ sur Ω et $0<|f|<1$ λ_d-*p.p.* sur Ω. Alors, par continuité de f, il vient $f(\Omega) \subset \overline{B_d}$. Comme $f(\Omega)$ est un ouvert (c'est une conséquence du théorème d'inversion locale 12.2 du fait que J_f ne s'annule pas), on a également $f(\Omega) \subset \overset{\circ}{\overline{B_d}} = B_d$. Or, B_d est un ouvert connexe inclus dans $\mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$ et $0 \in B_d$ avec $\text{card}\,(f^{-1}(\{0\})) = 1$. Donc d'après le résultat (b) du corollaire 12.2, f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur B_d. $\Diamond$

***Application* 12.5.** Soit Ω un ouvert non vide, borné, connexe de $\mathbb{R}^d$ tel que $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ soit connexe et $\overset{\circ}{\overline{\Omega}} = \Omega$. Soit $f \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ telle que $f(\partial\Omega) \subset \partial\Omega$ et $J_f \neq 0$ sur Ω . On suppose, en outre, qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $f^{-1}(\{y_0\})$ soit un singleton. Alors f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur Ω.

DÉMONSTRATION : On a $f(\partial\Omega) \subset \partial\Omega$ et J_f ne s'annule pas tout en gardant, par continuité, un signe constant dans l'ouvert connexe Ω. Alors, d'après le résultat (b) du corollaire 12.2, la fonction $y \to \text{card}\,(f^{-1}(\{y\}))$ est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$ qui sont, par hypothèse, Ω et $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$. Comme $f(\Omega)$ est borné et $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ est non borné, on a $f(\Omega) \neq \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ et donc, pour tout $y \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$, $\text{card}\,(f^{-1}(\{y\})) = 0$. D'où $f(\Omega) \subset \overline{\Omega}$ et, partant, $f(\Omega) \subset \Omega$ car $f(\Omega)$ est ouvert et $\overset{\circ}{\overline{\Omega}} = \Omega$. Le point y_0 de l'hypothèse appartient donc à Ω, d'où pour tout $y \in \Omega$, $\text{card}\,(f^{-1}(\{y\})) = \text{card}\,(f^{-1}(\{y_0\})) = 1$. Donc f est une bijection de Ω sur Ω et par suite un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur Ω. $\Diamond$

12.4 Exercices

Δ et D désignent deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, muni de la mesure de Lebesgue λ_d.

12.1 Soit φ une application continue de $\overline{\Delta}$ dans $\mathbb{R}^d$ qui soit un homéomorphisme de Δ sur D.

$a)$ Montrer que $\varphi(\partial\Delta) \subset \partial D$.

$b)$ Montrer que si Δ est borné alors $\varphi(\partial\Delta) = \partial D$.

12.2 Soit φ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de Δ sur D de Jacobien J_φ.

$a)$ Montrer que J_φ est intégrable sur Δ si et seulement si $\lambda_d(D) < +\infty$.

$b)$ Montrer que J_φ est borné sur Δ si et seulement si il existe $c > 0$ tel que, pour tout ouvert $\Omega \subset \Delta$, $\lambda_d(\varphi(\Omega)) \leq c\,\lambda_d(\Omega)$.

12.3 *Problème de Bâle* 8, tiré de l'article ([5])

$a)$ Montrer que $\displaystyle\int_{[0,1]^2} \frac{dx\,dy}{1 - x\,y} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

$b)$ Par le changement de variables $(x, y) = (\cos\theta - t, \cos\theta + t)$, montrer que

$$\int_{[0,1]^2} \frac{dx\,dy}{1 - x\,y} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\min(\cos\theta, 1-\cos\theta)} \frac{dt}{t^2 + \sin^2\theta} \right) \sin\theta\, d\theta.$$

5. T.M. Apostol : "A proof that Euler missed. Evaluating $\zeta(2)$ the easy way", *Math. Intelligencer* **5** (1983), 59-60.

$c)$ En déduire la formule $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

12.4 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et la fonction $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi_{a,b}(u,v) := (u + a\,\sin v, v + b\,\sin u) \quad \text{pour } (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

$a)$ Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b pour que $\varphi_{a,b}$ soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

$b)$ Montrer que, sous cette condition, $\varphi_{a,b}(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}^2$.

$c)$ Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Calculer $\displaystyle\lim_{|(a,b)|\to 0} \lambda_2\big(\varphi_{a,b}(\Omega)\big)$.

12.5 Soient $\Delta :=]0,1[^2 \times]-\pi,\pi[$ et $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$\varphi(u,v,w) := (u, uv\cos w, v\sin w) \quad \text{pour } (u,v,w) \in \mathbb{R}^3.$$

$a)$ Montrer que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de Δ sur son image.

$b)$ Calculer $\lambda_3\big(\varphi(\Delta)\big)$.

12.6 $a)$ Déterminer les ouverts connexes maximaux Δ et D de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(u,v) := (u^2{+}v^2, 2uv)$ définisse un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de Δ sur D.

$b)$ En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} |u^4 - v^4| e^{-(u+v)^2}\,du\,dv$.

12.7 *Formule des compléments généralisée*

Soient les intégrales définies pour $a, b > 0$ par

$$\Gamma(a) := \int_0^{+\infty} t^{a-1}\,e^{-t}\,dt \quad \text{et} \quad B(a,b) := \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt.$$

$a)$ Montrer que $\displaystyle\Gamma(a)\,\Gamma(b) = 4\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(u^2+v^2)}\,u^{2a-1}\,v^{2b-1}\,du\,dv$.

$b)$ En déduire la *formule des compléments généralisée*

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a{+}b)}.$$

12.8 À l'aide du changement de variables $(x,y,z) = \big(\sqrt{vw}, \sqrt{uw}, \sqrt{uv}\big)$, calculer la mesure de Lebesgue des domaines suivants :

$a)$ $\big\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 : u,v,w > 0 \text{ et } uv, uw, vw < 1\big\}$,

$b)$ $\big\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 : u,v,w > 0 \text{ et } uv + uw + vw < 1\big\}$.

12.9 *Généralisation de l'application 12.3.*

Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $d \in \mathbb{N}^*$, une matrice réelle $(d \times d)$ symétrique et *positive*, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $A\,x \cdot x \geq 0$, où $\cdot$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$.

$a)$ Montrer que

$$I_A := \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(- A\, x \cdot x\right) dx = \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{\det A}} \in [0, +\infty].$$

$b)$ Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $I_A < +\infty$.

$c)$ Montrer que si A est définie positive et $z \in \mathbb{C}$ avec $\Re(z) > 0$, alors

$$I_A(z) := \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-z\, A\, x \cdot x\right) dx = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}}\right)^d \frac{1}{\sqrt{\det A}}.$$

12.10 Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ convexe (*i.e.* $f'' \geq 0$) et I la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$, pour $d \geq 3$, par

$$I(y) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f''(|x-y|)}{|x-y|} \, \frac{dx}{|x|^{d-2}},$$

où $|\cdot|$ désigne ici la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

$a)$ Montrer, en justifiant l'existence des limites, que $\ell := \lim\limits_{t \to 0^+} f(t) > -\infty$ et que $\ell' := \lim\limits_{t \to +\infty} f'(t) > -\infty$.

$b)$ Soit $\rho \geq 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f'(r+\rho) - f'(|r-\rho|)\big)\, dr$ en fonction de ℓ, ℓ' et $f(\rho)$.

$c)$ Montrer que $I(y)$ ne dépend que de $|y|$.

$d)$ En déduire la valeur de $I(y)$.

12.11 On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ de la norme $\|x\| := \max\limits_{1 \leq i \leq d} |x_i|$ et on désigne par $Q_{a,r}$ la boule de centre a et de rayon r pour cette norme. Soient Δ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi \in \mathscr{C}^1(\Delta, \mathbb{R}^d)$.

$a)$ Montrer que, pour tout ouvert Ω de Δ, $\varphi(\Omega)$ est un borélien de $\mathbb{R}^d$.

$b)$ Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = 0$. Montrer l'existence d'une constante $c_A > 0$ telle que, pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$ et tout $r > 0$, on ait

$$\lambda_d(AK + Q_{0,r}) \leq c_A \left(\text{diam}(K) + \delta\right)^{d-1} \delta.$$

$c)$ Soit $u_0 \in \Delta$. Déduire de l'étape 1 de la démonstration du théorème 12.4 et du $a)$ que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, r \in]0, \delta[, \quad u_0 \in Q_{a,r} \implies \frac{\lambda_d(\varphi(Q_{a,r}))}{\lambda_d(Q_{a,r})} \leq |J_\varphi(u_0)| + \varepsilon.$$

$d)$ En reprenant les étapes 2, 3, 5 de la démonstration du théorème 12.4 à partir du $c)$, montrer que

$$\forall\, \Omega \in \mathscr{O}(\Delta),\ \ \lambda_d\big(\varphi(\Omega)\big) \leq \int_\Omega |J_\varphi(u)|\, du.$$

e) Montrer que l'inégalité du d) est aussi vérifiée par tout compact de Δ.

12.12 Soient Δ et D deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ avec D borné et φ une bijection de Δ sur D de classe $\mathscr{C}^1$ tel que φ^{-1} soit borélienne (on ne fait aucune hypothèse sur le Jacobien de φ). Montrer l'équivalence

$$\varphi^{-1}(\lambda_D) = J_\varphi.\lambda_\Delta \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_d(\varphi(\Delta)) = \int_\Delta |J_\varphi(u)|\, du.$$

12.13 *Théorème de Sard* :
Soient $f \in \mathscr{C}^1(\Delta, \mathbb{R}^d)$ *et* $S := \{x \in \Delta : J_f(x) = 0\}$. *Alors* $f(S)$ *est un borélien de* $\mathbb{R}^d$ *de mesure de Lebesgue nulle.*
Montrer ce résultat à l'aide de l'inégalité d)-e) de l'exercice 12.11.

12.14 Soient B_d la boule euclidienne unité de $\mathbb{R}^d$ et $f \in \mathscr{C}^1(\overline{B_d}, \mathbb{R}^d)$. Montrer, à l'aide du degré topologique, que, pour tout réel a de valeur absolue suffisamment petite, la fonction $a\,f$ possède un unique point fixe dans B_d.

12.15 Soit $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x+1)}{x^2}\, dx$.

a) Montrer que pout tout $x \geq 0$, $\displaystyle\frac{\ln^2(x+1)}{x^2} = \int_{[0,1]^2} \frac{ds\, dt}{(1+s\,x)\,(1+t\,x)}$.

b) Calculer pour $(s,t) \in [0,1]^2$, $s \neq t$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+s\,x)\,(1+t\,x)}$.

c) Montrer que

$$I = \int_{[0,1]^2} \frac{\ln t - \ln s}{t-s}\, ds\, dt = 2\int_{\{0\leq s<t\leq 1\}} \frac{\ln t - \ln s}{t-s}\, ds\, dt.$$

d) Montrer que l'application $\varphi : (u,v) \mapsto \left(\dfrac{u\,v}{1-u}, \dfrac{v}{1-u}\right)$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\{0 < v < 1-u < 1\}$ sur $\{0 < s < t < 1\}$.

e) En déduire, à l'aide du changement de variables φ, que $I = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}\, du$.

12.16 a) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{-x^4} dx$ sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

b) Calculer la valeur de l'intégrale $I := \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{x\,y}{x^2+y^2}\, e^{-(x^4+y^4)}\, dx\, dy$.

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \geq \sqrt{2\,I}$.

12.17 Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. On définit, pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble $B_\alpha := \{x, y > 0 : x^\alpha + y^\alpha < 1\}$.
a) Calculer la limite $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} \lambda(B_\alpha)$.

b) Écrire $\lambda(B_\alpha)$ sous la forme d'une intégrale simple.

c) En déduire la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\int_0^\pi (\sin\,\theta)^{2/\alpha-1}\,d\theta$.

12.18 a) Calculer $\displaystyle I := \lim_{R\to+\infty}\int_{\{x^2+y^2<R^2\}} \left|\frac{\sin\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right| dx\,dy$.

b) Avec $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$, calculer $\displaystyle J := \lim_{R\to+\infty}\int_{\{x^2+y^2<R^2\}} \frac{\sin\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

12.19 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle I_a := \int_{\mathbb{R}^2}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^a}$ pour $a\in\mathbb{R}$.

b) $\displaystyle I := \int_{\mathbb{R}^2}\frac{x^2\,e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

12.20 *Problème de Bâle* 9, tiré de l'article ([6])

a) Montrer que $\displaystyle I := \int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{1-x^2y^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2\,n+1)^2}$.

b) Montrer que l'application $\displaystyle \varphi : (u,v)\mapsto (x,y) := \left(u\sqrt{\frac{1+v^2}{1+u^2}}\,,\ v\sqrt{\frac{1+u^2}{1+v^2}}\right)$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de l'ouvert $\Delta := \big\{u,v>0 : u\,v<1\big\}$ sur l'ouvert $D :=]0,1[^2$, dont le jacobien est $\displaystyle J_\varphi(u,v) = \frac{1-x^2y^2}{(1+u^2)\,(1+v^2)}$.

c) En déduire que $\displaystyle I = \frac{\pi^2}{8}$.

6. F. Beukers, E. Calabi & J. A. C. Kolk, "Sums of generalized harmonic series and volumes", *Nieuw Arch. Wisk.* (4) **11** (1993), no. 3, 217-224.

Chapitre 13

Mesure complétée, tribu de Lebesgue, ensemble de Cantor

13.1 Complétion d'une mesure

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. Par définition, une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est $(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$- mesurable si $f^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) \subset \mathscr{A}$. Ainsi, plus la tribu $\mathscr{A}$ compte d'éléments, plus nombreuses seront les fonctions mesurables.

D'autre part, parmi les parties de X n'appartenant éventuellement pas à $\mathscr{A}$, certains ensembles apparaissent comme des anomalies du point de vue de l'intégration par rapport à une mesure μ sur $(X, \mathscr{A})$. Il s'agit des parties N de X contenues dans un ensemble $A \in A$ de mesure $\mu(A) = 0$. De telles parties, bien qu'intuitivement "μ-négligeables" ne sont pas *a priori* toutes dans la tribu $\mathscr{A}$ (des exemples de tels ensembles sont donnés à la section 13.3).

Une question naturelle se pose alors : peut-on élargir $\mathscr{A}$ en une tribu $\overline{\mathscr{A}}$ contenant ces ensembles μ-négligeables de façon que la mesure μ se prolonge en une mesure $\overline{\mu}$ sur $\overline{\mathscr{A}}$? Ainsi, on augmenterait la quantité de fonctions mesurables sans changer en profondeur la nature de l'espace mesuré initial.

Il existe évidemment une plus petite tribu contenant $\mathscr{A}$ et ces ensembles μ-négligeables, mais rien n'assure *priori* que la structure de cette tribu est simple et que μ s'y prolonge canoniquement. Le but de cette section est d'établir que c'est cependant ce qui se passe.

***Définition* 13.1.** *Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

(a) *Une partie N de X est* négligeable*(ou μ- négligeable) s'il existe $A \in \mathscr{A}$ vérifiant $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$. On définit*

$$\mathscr{N}_\mu := \{N \subset X : N \ \ \mu\text{-}\textit{négligeable}\}$$

l'ensemble des parties μ-négligeables.
(b) Un espace mesuré est complet *si $\mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{A}$ (attention aux confusions induites par cette terminologie !).*

Lorsque l'espace $(X, \mathcal{A}, \mu)$ n'est pas complet, on peut donc le compléter canoniquement. C'est l'objet du théorème suivant.

***Théorème* 13.1.** *(a) La tribu engendrée par $\mathcal{A} \cup \mathcal{N}_\mu$, notée $\overline{\mathcal{A}}$ est de la forme*

$$\overline{\mathcal{A}} := \{A \cup N : A \in \mathcal{A},\ N \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

(b) Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $N \in \mathcal{N}_\mu$, on pose $\overline{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$. La définition de $\overline{\mu}$ est cohérente et définit une mesure sur la tribu $\overline{\mathcal{A}}$ coïncidant avec μ sur $\mathcal{A}$. En outre, l'espace mesuré $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ est complet et $\overline{\mu}_{|\mathcal{N}_\mu} \equiv 0$.

DÉMONSTRATION : On procède en quatre étapes. Les deux premières consistent à montrer que $\overline{\mathcal{A}} := \{A \cup N\,;\ A \in \mathcal{A},\ N \in \mathcal{N}_\mu\}$ est une tribu, alors nécessairement engendrée par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}_\mu$. Les deux suivantes sont consacrées à établir que $\overline{\mu}$ est bien une mesure complète sur $(X, \overline{\mathcal{A}})$ ayant les propriétés attendues.

Étape 1 *Encadrement des éléments de $\overline{\mathcal{A}}$ par des éléments de $\mathcal{A}$* :

On caractérise les éléments de $\overline{\mathcal{A}}$ par

$$A \in \overline{\mathcal{A}} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, A^0, A^1 \in \mathcal{A},\ \ A^0 \subset A \subset A^1 \text{ et } \mu(A^1 \setminus A^0) = 0. \qquad (13.1)$$

$(\Rightarrow)$ Soit $A \in \overline{\mathcal{A}}$; par définition A s'écrit $A = A' \cup N$, $A' \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{N}_\mu$. Soit $C \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset C$ et $\mu(C) = 0$. On pose $A^0 := A'$ et $A^1 := A' \cup C \in \mathcal{A}$. Il est clair que $A^1 \setminus A^0 \subset C$ donc $\mu(A^1 \setminus A^0) = 0$.
$(\Leftarrow)$ On pose $N := A \setminus A^0$. Comme $N \subset A^1 \setminus A^0 \in \mathcal{A}$ et $\mu(A^1 \setminus A^0) = 0$, $N \in \mathcal{N}_\mu$. D'où $A = A^0 \cup N \in \overline{\mathcal{A}}$.

Étape 2 *$\overline{\mathcal{A}}$ est une tribu contenant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}_\mu$* :

$\mathcal{A} \cup \mathcal{N}_\mu \subset \overline{\mathcal{A}}$: Soit $A \in \mathcal{A}$, $\emptyset \in \mathcal{N}_\mu$ donc $A = A \cup \emptyset \in \mathcal{A}$. Par conséquent $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$; en particulier, $\emptyset \in \overline{\mathcal{A}}$. Partant si $N \in \mathcal{N}_\mu$, $N = \emptyset \cup N \in \overline{\mathcal{A}}$.

$\overline{\mathcal{A}}$ est une tribu : Soit $A \in \overline{\mathcal{A}}$, d'après la première étape, il existe $A^0, A^1 \in \mathcal{A}$ tels que $A^0 \subset A \subset A^1$ et $\mu(A^1 \setminus A^0) = 0$. Or,

$${}^cA^1 \subset {}^cA \subset {}^cA^0,\ {}^cA^1, {}^cA^0 \in \mathcal{A} \text{ et } {}^cA^0 \setminus {}^cA^1 = A^1 \setminus A^0$$

d'où ${}^cA \in \overline{\mathcal{A}}$.

Soit $(A_n)_{n \ge 1}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathcal{A}}$. Par définition $A_n = A'_n \cup N_n$, $A'_n \in \mathcal{A}$ et $N_n \in \mathcal{N}_\mu$. Par suite, il existe, pour tout $n \ge 1$, $C_n \in \mathcal{A}$ tel que $N_n \subset C_n$ et $\mu(C_n) = 0$. D'où

$$\bigcup_{n \ge 1} N_n \subset \bigcup_{n \ge 1} C_n$$

et partant

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} C_n\Big) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(C_n) = 0,$$

par σ-sous-additivité de μ. Finalement,

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \underbrace{\Big(\bigcup_{n\geq 1} A'_n\Big)}_{\in\mathscr{A}} \bigcup \underbrace{\Big(\bigcup_{n\geq 1} N_n\Big)}_{\in\mathscr{N}_\mu} \in \overline{\mathscr{A}}.$$

On a en outre établi au passage que $\mathscr{N}_\mu$ est stable par réunion dénombrable.

Étape 3 *$\overline{\mu}$ est une mesure sur $\overline{\mathscr{A}}$ et $\overline{\mu}_{|\mathscr{A}} = \mu$:*

– *Cohérence de la définition* : Soit $A \in \overline{\mathscr{A}}$ auquel on associe A^0, $A^1 \in \mathscr{A}$ comme dans l'étape 1. Si $A = A' \cup N$, $A' \in \mathscr{A}$ et $N \in \mathscr{N}_\mu$, il existe $C \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(C) = 0$ et $A^0 \subset A' \cup C$ et $A' \subset A^1$. D'où il vient

$$\mu(A^0) \leq \mu(A' \cup C) \leq \mu(A') + 0 \leq \mu(A^1) = \mu(A^0)$$

donc $A \mapsto \overline{\mu}(A) := \mu(A')$ est bien définie comme application sur $\overline{\mathscr{A}}$ puisque sa valeur ne dépend pas de la "décomposition" de A en $A = A' \cup N$, ni d'ailleurs de A^0 ou de A^1 puisque $\mu(A') = \mu(A^0) = \mu(A^1)$.

– *$\overline{\mu}$ est une mesure prolongeant μ* : Soit $A \in \mathscr{A}$; $A = A \cup \emptyset$ donc $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$. En particulier, $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$.

Si $N \in \mathscr{N}_\mu$, $N = \emptyset \cup N$ donc $\overline{\mu}(N) = 0$.

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathscr{A}}$ deux à deux disjoints. Par définition, pour tout $n \geq 1$, $A_n = A'_n \cup N_n$, $A_n \in \mathscr{A}$, $N_n \in \mathscr{N}_\mu$. Or, d'après l'étape 2, $N := \bigcup_{n\geq 1} N_n \in \mathscr{N}_\mu$. La cohérence de la définition de $\overline{\mu}$ entraîne alors

$$\overline{\mu}\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \overline{\mu}\Big(\bigcup_{n\geq 1} A'_n \cup \bigcup_{n\geq 1} N_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A'_n\Big) = \sum_{n\geq 1} \mu(A'_n) = \sum_{n\geq 1} \overline{\mu}(A_n).$$

Donc $(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ est bien un espace mesuré.

Étape 4 $(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ *est complet* :

Il s'agit de montrer que $\mathscr{N}_{\overline{\mu}} \subset \overline{\mathscr{A}}$. Soit $N \in \mathscr{N}_{\overline{\mu}}$. Par définition de $\mathscr{N}_{\overline{\mu}}$, il existe $B \in \overline{\mathscr{A}}$ tel que $N \subset B$ et $\overline{\mu}(B) = 0$. Or, B s'écrit $B = B' \cup N'$ avec $B' \in \mathscr{A}$, $N' \in \mathscr{N}_\mu$. En outre, $\overline{\mu}(B) = \mu(B')$, d'où $\mu(B') = 0$. Par suite $N \subset B' \cup N' \in \mathscr{N}_\mu$ donc $\mathscr{N} \in \mathscr{N}_\mu \subset \overline{\mathscr{A}}$. $\diamondsuit$

Remarque : Au vu de l'étape 3, on constate que le prolongement $\overline{\mu}$ est défini de façon équivalente par

$$\overline{\mu}(A) := \sup\big\{\mu(B) : B \in \mathscr{A},\ B \subset A\big\} \quad \text{ou} \quad \inf\big\{\mu(B) : B \in \mathscr{A},\ B \supset A\big\}.$$

***Définition* 13.2.** *La tribu* $\overline{\mathscr{A}}$ *est appelée la* tribu complétée *de* $\mathscr{A}$ *relativement à* μ *et* $\overline{\mu}$ *est appelée la* mesure complétée *de* μ. *En cas d'ambiguïté sur la mesure de référence, on notera* $\overline{\mathscr{A}}^{\mu}$ *au lieu de* $\overline{\mathscr{A}}$.

Il est souvent commode – mais rarement indispensable – de supposer que l'espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$ sur lequel on se place est complet. On prendra cependant garde aux erreurs que l'on peut commettre autour de la notion d'espace mesuré complet, notamment en présence d'espaces produits. La section 13.4 est d'ailleurs consacrée aux liens entre produit de mesures et complétion.

13.2 Tribu de Lebesgue

***Définition* 13.3.** *On appelle* tribu de Lebesgue *la tribu* $\mathscr{L}(\mathbb{R}) := \overline{\mathscr{B}(\mathbb{R})}$ *complétée de la la tribu borélienne sur* $\mathbb{R}$ *par la mesure de Lebesgue. On notera* $\overline{\lambda}$ *la mesure de Lebesgue complétée.*

Le fait de compléter la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ l'élargit considérablement comme le montre le résultat suivant.

***Théorème* 13.2.** (a) $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ *est équipotent à* $\mathbb{R}$.
(b) $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ *est équipotent à* $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ *mais* $\mathscr{L}(\mathbb{R}) \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$ *(*$\mathscr{L}(\mathbb{R})$ *est donc un sous-ensemble strict de* $\mathscr{P}(\mathbb{R})$*).*

Nous admettrons l'assertion (a) du théorème qui repose sur une méthode de récurrence transfinie (voir [6], exercice 2.6.11 p.286). Concernant le point (b), l'assertion $\mathscr{L}(\mathbb{R}) \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$ repose explicitement sur l'axiome du choix rappelé ci-dessous.

Axiome 13.1. *(Axiome du choix) Soient* X *et* Y *deux ensembles non vides et une application* $F : X \to \mathscr{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$. *Il existe une application* $f : X \to Y$ *telle que pour tout* $x \in X$, $f(x) \in F(x)$.

En termes moins formalisés, cela signifie que l'on peut, pour chaque $x \in X$, “choisir” un “représentant” $f(x)$ dans la partie $F(x)$.

Remarque : Bien que d'apparence anodine, l'axiome du choix a des conséquences fondamentales en Analyse, notamment à travers l'une de ses formulations équivalentes, le lemme de Zorn (*cf.* l'appendice de [12], p.377). C'est bien un axiome au sens où, dès que Y est non dénombrable, il est impossible de le démontrer dans le cadre de la théorie des ensembles.

DÉMONSTRATION DE L'ASSERTION (b) DU THÉORÈME : $\mathscr{L}(\mathbb{R}) \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$:

Le problème est ici d'exhiber une partie E de $\mathbb{R}$ qui soit non seulement non borélienne, mais également non contenue dans $\mathscr{L}(\mathbb{R})$. On introduit à cette fin la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie sur $[-1, 1]$ par $x \mathscr{R} y$ si et seulement si $x - y \in$

$\mathbb{Q}$. On note $\dot{x}$ la classe de x modulo $\mathscr{R}$ et $[-1,1]/_{\mathbb{Q}}$ l'ensemble quotient de cette relation d'équivalence. Les classes d'équivalence $\dot{x}$ sont des sous-ensembles de $[-1,1]$ donc $[-1,1]/_{\mathbb{Q}}$ est inclus dans $\mathscr{P}([-1,1])$. En appliquant l'axiome du choix à l'injection canonique

$$F: \begin{array}{rcl} [-1,1]/_{\mathbb{Q}} & \hookrightarrow & \mathscr{P}([-1,1])\backslash\{\emptyset\} \\ \dot{x} & \longmapsto & \dot{x}, \end{array}$$

on fabrique une application $f : [-1,1]/_{\mathbb{Q}} \to [-1,1]$ vérifiant : pour toute classe $\dot{x}\in[-1,1]/_{\mathbb{Q}}$, $f(\dot{x})\in\dot{x}$. On pose alors

$$A := \{f(\dot{x}),\, x\in[-1,1]\},\ r+A := \{r+a,\, a \in A\} \text{ et } L := \bigcup_{r\in[-2,2]\cap\mathbb{Q}} (r+A).$$

Nous allons montrer que $A \notin \mathscr{L}(\mathbb{R})$.

Soient $r,\ s\in\mathbb{Q}$. Les translatés de A vérifient $(r+A)\cap(s+A) = \emptyset$ dès que $r\neq s$; en effet, si z est dans l'intersection, il s'écrit simultanément $z = r+f(\dot{x}) = s+f(\dot{y})$ d'où $f(\dot{x}) - f(\dot{y}) = s - r\in\mathbb{Q}$. Par conséquent, $\dot{x} = \dot{y}$, d'où $f(\dot{x}) = f(\dot{y})$ et partant $r = s$.

Soit $x\in[-1,1]$ et $a := f(\dot{x})\in[-1,1]$. Par construction $r:=x-a\in\mathbb{Q}\cap[-2,2]$. En conséquence, $x = r+a\in r+A$ si bien que $[-1,1] \subset L$. D'autre part, A étant inclus dans $[-1,1]$, L est inclus dans $[-1,1] + [-2,2] = [-3,3]$.

Supposons maintenant que $A\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$. A s'écrit alors $A = B\cup N$ avec $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$ et $N\in\mathscr{N}_\lambda$. Pour tout $r\in\mathbb{Q}$, on observe que $r+A = (r+B)\cup(r+N)\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$: en effet $r+B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$; d'autre part, N étant λ-négligeable, il existe $C\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$ tel que $N\subset C$ et $\lambda(C)=0$, or $r+N\subset r+C$ et $\lambda(r+C)=\lambda(C)=0$ d'où $r+N\in\mathscr{N}_\lambda$. En outre, $\overline{\lambda}(r+A) = \lambda(r+B) = \lambda(B) = \overline{\lambda}(A)$.

Par suite, $[-2,2]\cap\mathbb{Q}$ étant dénombrable et les parties $r+A$, $r\in[-2,2]\cap\mathbb{Q}$, étant deux à deux disjointes, il vient simultanément

$$\overline{\lambda}(L) = \sum_{r\in[-2,2]\cap\mathbb{Q}} \overline{\lambda}(r+A) = \sum_{r\in[-2,2]\cap\mathbb{Q}} \overline{\lambda}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \overline{\lambda}(A) = 0 \\ +\infty & \text{si } \overline{\lambda}(A) > 0 \end{cases}$$

et $2 = \overline{\lambda}([-1,1]) \leq \overline{\lambda}(L) \leq \overline{\lambda}([-3,3]) = 6$.

Ceci est contradictoire. En conclusion, $A\notin\mathscr{L}(\mathbb{R})$ et, *a fortiori*, $A\notin\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Montrons maintenant que $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ *et* $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ *sont équipotents* :

L'idée est la suivante : exhiber un borélien A de mesure de Lebesgue nulle et équipotent à $\mathbb{R}$. En effet, on aura alors d'une part $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ équipotent à $\mathscr{P}(A)$ et d'autre part $\mathscr{P}(A)\subset\mathscr{N}_\lambda\subset\mathscr{L}(\mathbb{R})\subset\mathscr{P}(\mathbb{R})$, d'où $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ équipotent à $\mathscr{P}(\mathbb{R})$. Reste donc à construire A. Les possibilités sont nombreuses, mais, notamment pour des raisons historiques, on construit généralement *l'ensemble de Cantor* K. Cette construction est détaillée dans la section suivante. $\Diamond$

13.3 Ensemble de Cantor, fonction de Lebesgue, applications

La construction de l'ensemble de Cantor est récursive et obéit au principe suivant : on pose

$$A_1 := \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \quad \text{et} \quad A_{n+1} := \frac{A_n}{3} \cup \frac{2 + A_n}{3}, \ n \geq 1. \tag{13.2}$$

On vérifie immédiatement par récurrence que, ainsi défini, A_n est la réunion de 2^n intervalles fermés, deux à deux disjoints, de longueur 3^{-n} ayant pour extrémités les 2^{n+1} points de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3^k} + \frac{\varepsilon_n}{3^n} \quad \text{avec } x_k \in \{0, 2\} \text{ et } \varepsilon_n \in \{0, 1\}.$$

En outre, tous ces points restent des extrémités d'intervalles de tous les A_m pour $m \geq n$ (car $\frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}$). On a donc simultanément

$$A_{n+1} \subset A_n \quad \text{et} \quad \partial A_n \subset \partial A_{n+1}.$$

L'ensemble de Cantor est alors défini par

$$K := \bigcap_{n \geq 1}^{\downarrow} A_n. \tag{13.3}$$

L'ensemble de Cantor K est donc fermé comme intersection de fermés. Il vérifie $\lambda(K) = \lim_n^{\downarrow} \lambda(A_n) = 0$ car $\lambda(A_n) = (2/3)^n$. D'autre part, pour tous n, $p \geq 1$,

$$\partial A_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3^k} + \frac{\varepsilon_n}{3^n}, \ x_k \in \{0, 2\}, \ \varepsilon_n \in \{0, 1\} \right\} \subset \partial A_{n+p} \subset A_{n+p},$$

donc $\partial A_n \subset K = \bigcap_{p \geq 0}^{\downarrow} A_{n+p}$. K étant fermé, on en déduit aussitôt que

$$\widetilde{K} := \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{3^k}, \ x_k \in \{0, 2\} \right\} \subset \overline{\bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} \partial A_n} \subset K.$$

Montrons que $\widetilde{K}$ est équipotent à $\{0, 2\}^{\mathbb{N}^*}$ *i.e.* que la paramétrisation ci-dessus est injective. En effet, si $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{y_k}{3^k}$, x_k, $y_k \in \{0, 2\}$, alors $(x_n)_{n \geq 1} = (y_n)_{n \geq 1}$. Dans le cas contraire $k_0 := \min\{k : x_k \neq y_k\}$ serait fini. Or, quitte à intervertir les deux suites, on peut supposer $x_{k_0} = 0$ et $y_{k_0} = 2$, d'où

$$0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{y_k - x_k}{3^k} = \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{y_k - x_k}{3^k} \geq \frac{2}{3^{k_0}} - \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^{k_0}} \quad \text{ce qui est absurde.}$$

Finalement, $[0,1]\supset K\supset \widetilde{K}$, $\widetilde{K}$ est équipotent à $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ et donc à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Or, on a vu (théorème 2.2) que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $[0,1]$ et à $\mathbb{R}$, donc il en est de même de K. $\diamondsuit$

***Proposition* 13.1.** *L'ensemble de Cantor vérifie (entre autres propriétés)*

$$K=\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{3^n},\ x_n\in\{0,2\}\right\},\ \text{card}\, K=\text{card}\,\mathbb{R},\ \lambda(K)=0,\ K \textit{ compact et } \overset{\circ}{K}=\emptyset.$$

En particulier $K=\partial K$.

DÉMONSTRATION : Comme $\lambda(K)=0$, K ne peut contenir d'intervalle ouvert non vide donc $\overset{\circ}{K}=\emptyset$. Le seul point restant à démontrer est $K=\widetilde{K}$. Soit $x\in K$. Comme $x\in A_n$ pour tout $n\geq 1$, x est donc distant d'au plus 3^{-n} de l'extrémité gauche d'un intervalle de A_n, de la forme $x^{(n)}:=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{(n)}}{3^k}$, $x_k^{(n)}\in\{0,2\}$. Il vient alors

$$-\frac{1}{3^{n+1}}=\big(x-\frac{1}{3^{n+1}}\big)-x\leq x^{(n+1)}-x^{(n)}\leq x+\big(-x+\frac{1}{3^n}\big)=\frac{1}{3^n}.$$

Or, si $k_0:=\min\big\{k: x_k^{(n+1)}\neq x_k^{(n)}\big\}\leq n$, il vient également

$$\big|x^{(n+1)}-x^{(n)}\big|\geq\frac{2}{3^{k_0}}-\frac{2}{3^{n+1}}-\sum_{k=k_0+1}^{n}\frac{2}{3^k}=\frac{1}{3^{k_0}}+\frac{1}{3^{n+1}}>\frac{1}{3^n}.$$

Par suite, k étant fixé, la suite $n\mapsto x_k^{(n)}$ est constante, *i.e.* $x^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{(\infty)}}{3^k}$. Il s'ensuit que $x=\lim_n x^{(n)}=\sum_{k\geq 1}\frac{x_k^{(\infty)}}{3^k}\in\widetilde{K}$. $\diamondsuit$

Remarque : L'écriture $\sum_{n\geq 1}\frac{x_n}{3^n}$, $x_n\in\{0,2\}$, définit évidemment certains éléments de K à travers leur développement impropre. Ainsi, $1=\sum_{n\geq 1}\frac{2}{3^n}$.

***Proposition* 13.2.** *(Construction de la fonction de Lebesgue) Il existe une fonction f continue croissante sur $[0,1]$ telle que $f(0)=0$, $f(1)=1$ et $f'=0$ λ-presque partout dans $[0,1]$. En particulier, on a*

$$\int_0^1 f'(x)\,dx=0<f(1)-f(0)=1.$$

DÉMONSTRATION : On va construire la fonction f par approximation en reprenant les étapes (et les notations) de la construction de l'ensemble de Cantor. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonction définies sur $[0,1]$ par

$$\forall\, n\geq 1,\ \forall\, x\in[0,1],\quad f_n(x) := (3/2)^n \int_0^x \mathbb{1}_{A_n}(t)\,dt. \tag{13.4}$$

Il est clair que $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$ puisque $\lambda(A_n) = (2/3)^n$. De même, la fonction f_n est continue et croissante sur $[0,1]$. Par ailleurs, si I désigne l'un des 2^n intervalles compacts dont A_n est la réunion, on a, par définition de A_n, $\lambda(I) = 3^{-n}$ et $\lambda(I\cap A_{n+1}) = 2/3\,\lambda(I)$, d'où

$$(3/2)^n \int_I \mathbb{1}_{A_n}(t)\,dt = (3/2)^{n+1}\int_I \mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)\,dt = 2^{-n}.$$

En outre, d'après la définition 13.4, la fonction f_n est constante sur chacun des (2^n-1) intervalles ouverts composant ${}^c\!A_n$; il en est de même de la fonction f_{n+1} puisque ${}^c\!A_n \subset {}^c\!A_{n+1}$. L'égalité précédente entraîne alors que

$$\begin{aligned}\forall\, x\in {}^c\!A_n,\quad f_n(x) &= \sum_{I\subset A_n\cap[0,x]} (3/2)^n \int_I \mathbb{1}_{A_n}(t)\,dt\\ &= \sum_{I\subset A_n\cap[0,x]} (3/2)^{n+1}\int_I \mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)\,dt = f_{n+1}(x),\end{aligned}$$

où I est l'un des 2^n intervalles composant A_n. En particulier, pour un tel intervalle I, on a l'égalité $f_{n+1}(\min I) = f_n(\min I)$, d'où

$$\begin{aligned}\forall\, x\in I,\quad &|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\\ &\leq \big|f_{n+1}(x)-f_{n+1}(\min I)\big| + \big|f_n(x)-f_n(\min I)\big|\\ &\leq (3/2)^{n+1}\int_I \mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)dt + (3/2)^n\int_I \mathbb{1}_{A_n}(t)\,dt = 2^{-n+1}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $|f_{n+1}(x)-f_n(x)| \leq 2^{-n+1}$ pour tout $x\in[0,1]$. La suite de fonctions continues croissantes $(f_n)_{n\geq 1}$ converge donc uniformément vers une fonction f nécessairement continue et croissante.

D'autre part, d'après (13.3), sur chacun des intervalles (ouverts) dont ${}^c\!A_n$ est la réunion, $f_{m+1} = f_m$ pour $m\geq n$ puisque ${}^c\!A_n \subset {}^c\!A_m$. Donc, $f = f_n$ sur ${}^c\!A_n$; or, de par sa définition même, la fonction f_n est constante sur chacun de ces intervalles ouverts. En particulier f y est dérivable de dérivée nulle. Finalement, f est dérivable de dérivée nulle sur $\bigcup_{n\geq 1} {}^c\!A_n = {}^c\!K$; donc $f' = 0$ λ-*p.p.* puisque $\lambda(K) = 0$. $\Diamond$

On prendra garde une fois encore à la terminologie qui fait de la fonction de Lebesgue un objet essentiellement lié à l'ensemble de Cantor (et non à la mesure de Lebesgue).

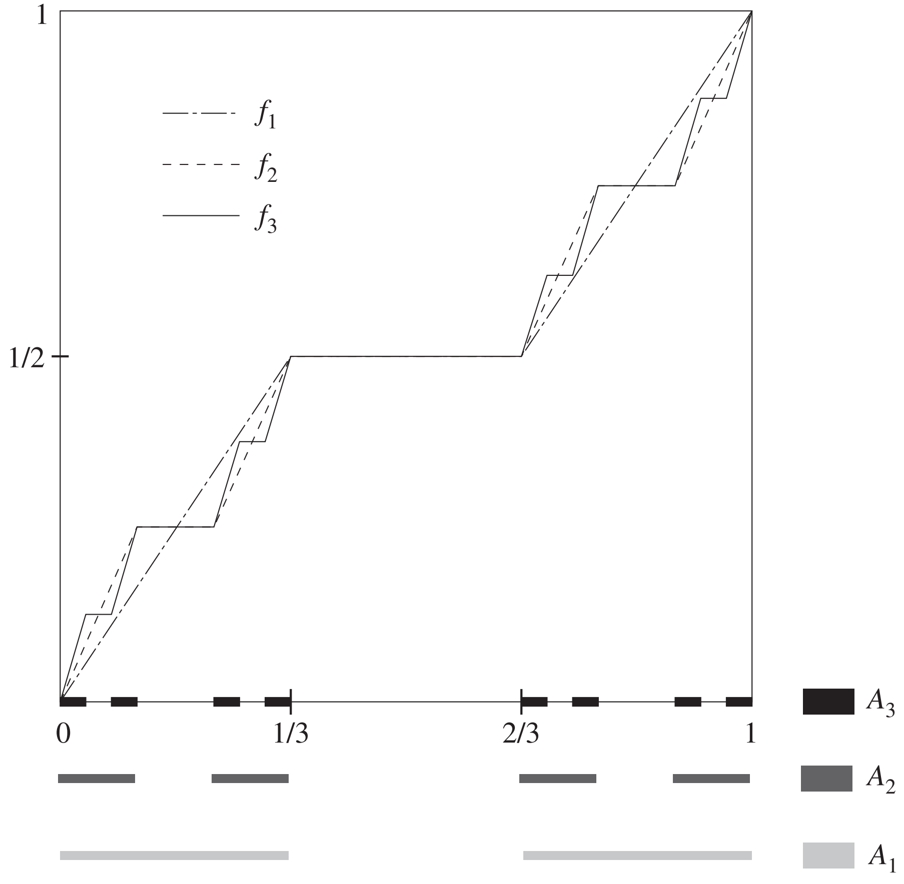

FIGURE 13.1 – Trois premières approximations de la fonction de Lebesgue : l'escalier du diable

Terminons par deux applications, fondées sur l'ensemble de Cantor. L'une précise la démonstration du théorème 13.2(b) dans laquelle était exhibée une partie non Lebesgue-mesurable comme exemple de partie non borélienne. L'autre exhibe une fonction intégrable non borélienne.

Exemple de partie Lebesgue-mesurable non borélienne : Soit φ la fonction définie par

$$\begin{aligned} \varphi : [0,1] &\longrightarrow [0,1] \\ 1 &\longmapsto 1 \\ x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n} &\longmapsto \varphi(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x_n}{3^n} \end{aligned}$$

où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n}$ désigne le développement dyadique propre de x. La fonction φ est strictement croissante. En effet, soient $x, y \in [0,1[$, $x < y$, et $n_0 := \{n \geq 1 : x_n \neq y_n\}$. On a

$$0 < y - x \leq \frac{y_{n_0} - x_{n_0}}{2^{n_0}} + \sum_{n > n_0} \frac{1}{2^n} = \frac{y_{n_0} - x_{n_0}}{2^{n_0}} + \frac{1}{2^{n_0}}$$

d'où $y_{n_0} - x_{n_0} = 1$ et par suite,

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \frac{2}{3^{n_0}} + \sum_{n > n_0} \frac{2\,(y_n - x_n)}{3^n} \geq \frac{2}{3^{n_0}} - \sum_{n > n_0} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^{n_0}} > 0.$$

La fonction φ est donc une bijection de $[0,1]$ sur son image qui est clairement incluse dans l'ensemble de Cantor K d'après la proposition 13.1.

Soit A la partie non Lebesgue-mesurable de $[-1,1]$ définie dans la démonstration du théorème 13.2. On pose $A' = \{\frac{x+1}{2},\, x \in A\} \subset [0,1]$ qui est aussi non Lebesgue-mesurable car $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ est un homéomorphisme. D'une part, $\varphi(A') \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ car $\varphi(A') \subset K$ est Lebesgue-négligeable. D'autre part, $\varphi(A') \notin \mathscr{B}(\mathbb{R})$ car $\varphi^{-1}(\varphi(A')) = A' \notin \mathscr{B}([0,1])$ alors que φ est croissante donc borélienne (*cf.* exercice **5.6**). La partie $\varphi(A')$ est donc Lebesgue-mesurable sans être borélienne.

Exemple de fonctions Riemann-intégrables non boréliennes : Toute fonction indicatrice d'une partie C de l'ensemble de Cantor K est Riemann-intégrable sur $[0,1]$ d'intégrale nulle. En effet, la fonction $\mathbb{1}_C$ vérifie $0 \leq \mathbb{1}_C \leq \mathbb{1}_K \leq \mathbb{1}_{A_n}$ où A_n est défini par l'égalité (13.2). Or, la fonction $\mathbb{1}_{A_n}$ est en escalier et

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{A_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0.$$

Cependant, elle n'est borélienne que si C est lui-même borélien. Ainsi, au vu de l'exemple précédent, la fonction $\mathbb{1}_{\varphi(A')}$ est donc Riemann-intégrable sur $[0,1]$ sans être borélienne.

En fait, il existe une infinité de telles fonctions car, d'après le théorème 13.2 et l'équipotence de K et $\mathbb{R}$,

$$\operatorname{card} \mathscr{B}(K) \leq \operatorname{card} \mathscr{B}(\mathbb{R}) < \operatorname{card} \mathscr{P}(K) = \operatorname{card} \mathscr{P}(\mathbb{R}).$$

13.4 ♣ Produit de mesures complètes. Complétion d'un produit

Le résultat le plus important de cette section est négatif : en général, un produit d'espaces complets n'est pas complet.

***Proposition* 13.3.** *Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et complets (*i.e. *$\mathscr{N}_\mu \subset \mathscr{A}$ et $\mathscr{N}_\nu \subset \mathscr{B}$).*

(a) $(\mathscr{P}(X) \times \mathscr{N}_\nu) \cup (\mathscr{N}_\mu \times \mathscr{P}(Y)) \subset \mathscr{N}_{\mu\otimes\nu}$.

(b) En conséquence, dès que ($\mathscr{A} \neq \mathscr{P}(X)$ et $\mathscr{N}_\nu \neq \{\emptyset\}$) ou ($\mathscr{N}_\mu \neq \{\emptyset\}$ et $\mathscr{B} \neq \mathscr{P}(Y)$), l'espace $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \mu \otimes \nu)$ n'est pas complet.

En particulier, ceci a lieu même si les espaces initiaux sont complets.

DÉMONSTRATION : (a) Soient $A \in \mathscr{P}(X)$ et $B \in \mathscr{N}_\nu$. Le rectangle $A \times B$ vérifie $A \times B \subset X \times B \in \mathscr{A} \otimes B$ et $\mu \otimes \nu(X \times B) = \mu(X)\, \nu(B) = 0$ (ceci découle de la convention habituelle).

(b) Il suffit de montrer que si $A \in \mathscr{P}(X) \setminus \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{N}_\nu \setminus \{\emptyset\}$ alors $A \times B \notin \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. Or, dans le cas contraire, $y \in B$ étant fixé, le théorème de section (*cf.* 11.5) entraîne que $A = (A \times B)^y$ appartient à $\mathscr{A}$. $\Diamond$

Exemple (important) : Comme $\mathscr{L}(\mathbb{R}) \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{N}_\lambda \neq \{\emptyset\}$, il est immédiat que l'espace $\left(\mathbb{R}^2, \mathscr{L}(\mathbb{R})^{\otimes 2}, \overline{\lambda}^{\otimes 2}\right)$ n'est pas complet. Plus généralement, par le même type d'argument, l'espace $\left(\mathbb{R}^d, \mathscr{L}(\mathbb{R})^{\otimes d}, \overline{\lambda}^{\otimes d}\right)$ n'est pas complet.

Le théorème suivant permet d'élucider les liens précis existant entre produit et complétion d'espaces mesurés.

***Théorème* 13.3.** *Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Alors*

$$\overline{\overline{\mathscr{A}}^{\mu} \otimes \overline{\mathscr{B}}^{\nu}}^{\,\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}} = \overline{\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}}^{\,\mu\otimes\nu}, \quad \mathscr{N}_{\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}} = \mathscr{N}_{\mu\otimes\nu} \quad \textit{et} \quad \overline{\overline{\mu} \otimes \overline{\nu}} = \overline{\mu \otimes \nu}.$$

DÉMONSTRATION : Étape 1 *Comparaison tribus, ensembles négligeables* :

$(\supset)$ Il est immédiat que $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \subset \overline{\mathscr{A}}^{\mu} \otimes \overline{\mathscr{B}}^{\nu} \subset \overline{\overline{\mathscr{A}}^{\mu} \otimes \overline{\mathscr{B}}^{\nu}}^{\,\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}}$. D'autre part, soit $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ avec $\mu \otimes \nu(C) = 0$. $(\overline{\mu} \otimes \overline{\nu})_{|\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}} = \mu \otimes \nu$ puisque ces deux mesures σ-finies coïncident sur l'ensemble $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ des rectangles à côtés mesurables ; donc $\overline{\mu} \otimes \overline{\nu}(C) = 0$. Ce qui montre que $\mathscr{N}_{\mu\otimes\nu} \subset \mathscr{N}_{\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}}$ ainsi que l'inclusion annoncée.

($\subset$) Soient $A \cup M \in \overline{\mathscr{A}}^{\mu}$ et $B \cup N \in \overline{\mathscr{A}}^{\nu}$ (avec des notations évidentes).

$$(A\cup M)\times(B\cup N) = \underbrace{A\times B}_{\in \mathscr{A}\times\mathscr{B}} \cup \Big(\underbrace{(A\times N)\cup(M\times B)\cup(M\times N)}_{\in \mathscr{N}_{\mu\otimes\nu}\text{ d'après la proposition 13.3 }(a)}\Big) \subset \overline{\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}}^{\,\mu\otimes\nu}. \tag{13.5}$$

Donc $\overline{\mathscr{A}}^{\mu} \otimes \overline{\mathscr{B}}^{\nu} \subset \overline{\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}}^{\,\mu\otimes\nu}$. Il reste à établir que $\mathscr{N}_{\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}} \subset \mathscr{N}_{\mu\otimes\nu}$ pour obtenir l'inclusion recherchée. Soit $C \in \overline{\mathscr{A}}^{\mu} \otimes \overline{\mathscr{B}}^{\nu}$ avec $\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}(C) = 0$. Comme $C \in \overline{\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}}^{\,\mu\otimes\nu}$, la caractérisation d'un ensemble négligeable (13.1) sur l'espace produit entraîne l'existence de C^0 et C^1 dans $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ vérifiant $C^0 \subset C \subset C^1$ et $\mu\otimes\nu(C^1\backslash C^0)=0$. Par suite $\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}(C^1\backslash C^0) = 0$; mais $\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}(C^0) \leq \overline{\mu}\otimes\overline{\nu}(C)=0$ donc

$$\mu\otimes\nu(C^1) = \overline{\mu}\otimes\overline{\nu}(C^1) = \overline{\mu}\otimes\overline{\nu}(C^0) = 0$$

et, comme $C \subset C^1$, C est donc $\mu\otimes\nu$- négligeable. Ce qu'il fallait démontrer.

Étape 2 *Comparaison des mesures* :

De la relation $(A\cup M)\times(B\cup N) = (A\times B)\cup L$, $L \in \mathscr{N}_{\mu\otimes\nu}$, obtenue en (13.5), on déduit que les deux mesures σ-finies $\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}$ et $\mu\otimes\nu$ coïncident sur $\overline{\mathscr{A}}^{\mu}\times\overline{\mathscr{B}}^{\nu}$ et partant sur $\overline{\mathscr{A}}^{\mu}\otimes\overline{\mathscr{B}}^{\nu}$. Ces deux mesures ont donc même complétée sur $\overline{\overline{\mathscr{A}}^{\mu}\otimes\overline{\mathscr{B}}^{\nu}}^{\,\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}}$. $\Diamond$

***Application* 13.1.** Pour tous $p,\ q \in \mathbb{N}^*$, $\overline{\mathscr{L}(\mathbb{R}^p)\otimes\mathscr{L}(\mathbb{R}^q)}^{\,\overline{\lambda}_p\otimes\overline{\lambda}_q} = \mathscr{L}(\mathbb{R}^{p+q})$.

DÉMONSTRATION : Au vu du théorème 13.3 et des identités établies antérieurement $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{p+q}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}^q)$, $\lambda_p\otimes\lambda_q = \lambda_{p+q}$, il vient

$$\overline{\mathscr{L}(\mathbb{R}^p)\otimes\mathscr{L}(\mathbb{R}^q)}^{\,\overline{\lambda}_p\otimes\overline{\lambda}_q} = \overline{\mathscr{B}(\mathbb{R}^p)\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}^q)}^{\,\lambda_p\otimes\lambda_q} = \overline{\mathscr{B}(\mathbb{R}^{p+q})}^{\,\lambda_{p+q}} = \mathscr{L}(\mathbb{R}^{p+q}).\ \Diamond$$

13.5 ♣ Complétion et fonctions mesurables

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne indifféremment le corps des réels ou des complexes. Il est clair qu'une fonction $f : (X,\mathscr{A}) \to (\mathbb{K},\mathscr{B}(\mathbb{K}))$ mesurable est $(\overline{\mathscr{A}},\mathscr{B}(\mathbb{K}))$-mesurable puisque $\mathscr{A} \subset \overline{\mathscr{A}}$. La proposition suivante fournit une sorte de réciproque.

***Proposition* 13.4.** *Soit* $f : (X,\ \overline{\mathscr{A}},\overline{\mu}) \to (\mathbb{K},\mathscr{B}(\mathbb{K}))$ *une fonction mesurable. Alors il existe une fonction* $\widetilde{f} : (X,\mathscr{A}) \to (\mathbb{K},\mathscr{B}(\mathbb{K}))$, *mesurable, telle que* $f=\widetilde{f}$ $\overline{\mu}$*-p.p.,* i.e. *telle que* $\overline{\mu}(\{f \neq \widetilde{f}\})=0$, *ou encore* $\{f \neq \widetilde{f}\} \in \mathscr{N}_{\mu}$.

En outre, si la fonction f *est réelle positive, on peut choisir* $\tilde{f}$ *de façon que* $0 \leq \widetilde{f} \leq f$.

DÉMONSTRATION : On suit la procédure d'approximation habituelle.

– Si $f := \mathbb{1}_A$, $A \in \overline{\mathscr{A}}$, on pose $\widetilde{f} := \mathbb{1}_{A'}$ où $A = A'\cup N$ avec $A' \in \mathscr{A}$, $N \in \mathscr{N}_{\mu}$. Si f est étagée, on procède de même pour chacune des indicatrices. On vérifie que $\widetilde{f} \leq f$.

– Si f est réelle positive, il existe une suite croissante de fonctions étagées $(f_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers f. Pour tout $n \geq 1$, il existe donc $\tilde{f}_n$ étagée, $\mathscr{A}$- mesurable, telle que $\overline{\mu}(\{f_n \neq \tilde{f}_n\}) = 0$ et $\tilde{f}_n \leq f_n \leq f$. On pose alors $\widetilde{f} := \overline{\lim_n} \tilde{f}_n$. La fonction $\widetilde{f}$ est clairement $\mathscr{A}$- mesurable positive et majorée par f. Enfin $\{f \neq \widetilde{f}\}$ est de $\overline{\mu}$-mesure nulle puisque $\{f \neq \widetilde{f}\} \subset \bigcup_{n\geq 1}\{f_n \neq g_n\}$.

– Dans le cas réel, la fonction $\widetilde{f}$ se décompose en $\widetilde{f} := \widetilde{g}^+ - \widetilde{g}^-$ où les fonctions $\widetilde{g}^\pm$ sont associées à $f^\pm$ comme dans le cas positif. Si f est à valeurs complexes, on la décompose en parties réelle et imaginaire. $\diamondsuit$

***Définition* 13.4.** *Toute fonction* $f : (\mathbb{R}^d, \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)) \to (\mathbb{K}, \mathscr{B}(\mathbb{K}))$ *mesurable est dite* Lebesgue-mesurable.

Il est clair que toute fonction borélienne $f : (\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)) \to (\mathbb{K}, \mathscr{B}(\mathbb{K}))$ est Lebesgue-mesurable. Plus généralement, la proposition 13.4 caractérise les fonctions Lebesgue-mesurables puisqu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ est Lebesgue-mesurable si et seulement si elle est $\overline{\lambda_d}$-*p.p.* égale à une fonction borélienne.

Remarque : Une autre définition naturelle d'une fonction Lebesgue-mesurable eût pu être de munir simultanément l'espace de départ et l'espace d'arrivée de la tribu de Lebesgue. L'objectif d'augmenter le nombre de fonctions mesurables serait alors perdu. Quoi qu'il en soit, on manquerait cruellement de critères de mesurabilité ! Un tel choix serait donc irréaliste.

En contrepartie, la définition ci-dessus de la Lebesgue-mesurabilité a des inconvénients majeurs : ainsi la composée $g \circ f$ de deux fonctions Lebesgue-mesurables, lorsqu'elle est algébriquement possible, n'est en général pas Lebesgue-mesurable, sauf si f est en fait borélienne (pour un contre-exemple *cf.* exercice 12 p. 165 de [7]).

Nous allons maintenant revenir aux espaces produits, avec pour finalité d'énoncer une généralisation (mineure) du théorème de Fubini. Nous allons faire l'hypothèse que chacun des espaces initiaux est (σ- fini) complet ce qui, au vu du théorème 13.3, n'est pas une vraie restriction (quitte à remplacer $\mathscr{A}$ par $\overline{\mathscr{A}}$ et μ par $\overline{\mu}$, etc).

***Proposition* 13.5.** *Soient* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *et* $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ *deux espaces mesurés σ-finis et complets et une fonction* $h : (X \times Y, \overline{\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}}, \overline{\mu \otimes \nu}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ *nulle* $\overline{\mu \otimes \nu}$*-p.p. Alors, pour μ- presque tout $x \in X$, la section* $h_x : y \mapsto h(x, y)$ *est $\mathscr{B}$- mesurable et nulle $\nu(dy)$-p.p. et pour ν- presque tout $y \in Y$, la section* $h^y : x \mapsto h(x, y)$ *est $\mathscr{A}$- mesurable et nulle $\mu(dx)$-p.p.*

DÉMONSTRATION : Soit $N := \{h \neq 0\}$; $\overline{\mu \otimes \nu}(N) = 0$ par hypothèse, donc il existe $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ tel que $N \subset C$ et $\mu \otimes \nu(C) = 0$. D'après le théorème de construction de la mesure produit (théorème 11.1), $C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\} \in \mathscr{B}$

pour tout $x \in X$, $x \mapsto \nu(C_x)$ est $\mathscr{A}$- mesurable et

$$\int_X \nu(C_x)\mu(dx) = \mu\otimes\nu(C) = 0.$$

Donc, pour μ-presque tout $x \in X$, $\nu(C_x) = 0$. Or, $\{y : h(x,y) \neq 0\} \subset C_x$ donc, $\mu(dx)$-*p.p.*, $\{h_x \neq 0\} \in \mathscr{N}_\nu \subset \mathscr{B}$ car la tribu $\mathscr{B}$ est complète. $\quad\lozenge$

On en déduit immédiatement l'extension du théorème de Fubini aux fonctions qui sont $\overline{\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}}$- mesurables.

***Théorème* 13.4** (Fubini)**.** *Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis complets et $f : \big(X \times Y, \overline{\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}}\big) \to \big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\big)$ ou $\big(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)\big)$, une fonction mesurable.*

(a) Si $f \geq 0$, alors $\mu(dx)$-p.p. la section $f_x : y \mapsto f(x,y)$ est $\mathscr{B}$- mesurable et $\nu(dy)$-p.p. la section $f^y : x \mapsto f(x,y)$ est $\mathscr{A}$- mesurable. En outre, les fonctions

$$\varphi(x) := \int_Y f_x(y)\,\nu(dy) \quad \text{et} \quad \psi(y) := \int_X f^y(x)\,\mu(dx)$$

sont respectivement $\mu(dx)$ et $\nu(dy)$-p.p. définies et $\mathscr{A}$- et $\mathscr{B}$- mesurables. Enfin

$$\int_X \varphi\,d\mu = \int_Y \psi\,d\nu = \int_{X\times Y} f\,d\overline{\mu\otimes\nu}. \tag{13.6}$$

(b) Si $f \in \mathscr{L}^1(X\times Y, \overline{\mu\otimes\nu})$, $f_x \in \mathscr{L}^1(Y, \mathscr{B}, \nu)$ $\mu(dx)$-p.p., $f^y \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ $\nu(dy)$-p.p. et les fonctions φ et ψ sont dans $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{B}, \nu)$ respectivement. Enfin, la relation (13.6) est vérifiée.

DÉMONSTRATION : (a) D'après la proposition 13.4 et la remarque qui la suit, il existe une fonction $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$- mesurable g telle que $0 \leq g \leq f$ et $f = g$ $\overline{\mu\otimes\nu}$-*p.p.* Le théorème de Fubini-Tonelli classique s'applique à g et, d'après la proposition 13.5 appliquée à $h := (f - g)\,\mathbb{1}_{\{g<+\infty\}}$, il vient : pour μ- presque tout $x \in X$, $f_x = g_x$ ν-*p.p.* et pour ν- presque tout $y \in Y$, $f^y = g^y$ μ-*p.p.* Donc la relation (13.6), vraie avec g, est vraie avec f, les fonctions intermédiaires relatives à g et f coïncidant *p.p.* relativement aux mesures *ad hoc*.

(b) se déduit du point (a) comme dans le théorème originel. $\quad\lozenge$

Quatrième partie

Convolution. Transformées de Fourier et de Laplace

Chapitre 14

Convolution et applications

La convolution est une nouvelle opération sur les fonctions “raisonnablement” intégrables. Elle joue un rôle fondamental dans les problèmes d’approximation régularisante, c’est-à-dire lorsque l’on souhaite approcher une fonction par des fonctions plus régulières qu’elle.

Notations : (a) Pour toutes parties A et B de $\mathbb{R}^d$, on pose

$$A+B:=\{a+b, a\in A, b\in B\},\ A-B:=\{a-b, a\in A, b\in B\} \text{ et } a+B:=\{a\}+B.$$

(b) Le symbole $|\cdot|$ désignera une norme sur $\mathbb{R}^d$. Lorsqu’un résultat nécessite le caractère euclidien de la norme, cela sera clairement précisé.

Rappels : (a) Une fonction $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ est à support compact si elle est nulle en dehors d’un compact ou si, ce qui revient au même, son support $\mathrm{supp}(f):=\overline{\{f\neq 0\}}$ est compact dans $\mathbb{R}^d$.

(b) Soit $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$ l’ensemble des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{K}$. On fera largement usage du résultat de densité suivant :

$$\forall\, p\in [1,+\infty[, \quad \mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d,\mathbb{K}) \text{ est dense dans } (L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d), \|\cdot\|_p).$$

Ce théorème a été établi au chapitre 7 dans sa version uni-dimensionnelle et dans la section 9.7 (théorème 9.10) dans le cas général.

14.1 Opérateurs de translation sur les fonctions

***Définition* 14.1.** *Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ et pour toute fonction $f : (\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)) \to \mathbb{K}$ borélienne, la a-translatée de f est définie par*

$$\begin{aligned} \tau_a f :\quad \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto (\tau_a f)(x) := f(x-a). \end{aligned} \tag{14.1}$$

Remarques : • Un autre opérateur de translation, défini lui de $\mathbb{R}^d$ dans lui-même par $\tau_a(x)=x-a$ et également noté τ_a, a été introduit à la section 6.1. On prendra garde que $(\tau_a f)(x) = f(x-a) \neq f(x) - a = \tau_a(f(x))$.

En revanche, on a bien $\tau_a f = f \circ \tau_a$. Cette confusion de notation, troublante pour le non initié, est cependant canonique.

• La fonction $\tau_a f = f \circ \tau_a$ est donc borélienne comme composée d'une fonction borélienne et d'une fonction continue.

***Théorème* 14.1.** *(a) Soit $a \in \mathbb{R}^d$. Si deux fonctions boréliennes f et g vérifient $f = g$ λ_d-p.p., alors $\tau_a f = \tau_a g$ λ_d-p.p.. On peut donc définir, l'application "quotient" τ_a sur l'espace $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ par la formule (14.1) pour tout $p \in [1,+\infty]$. En outre, τ_a est une isométrie (linéaire) de $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ dans lui-même.*

(b) Pour tout $p \in [1,+\infty[$ et pour toute $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, $\lim\limits_{a\to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$.

DÉMONSTRATION : (a) On vérifie immédiatement que

$$\big\{x\in\mathbb{R}^d : \tau_a f(x) \neq \tau_a g(x)\big\} = \big\{x\in\mathbb{R}^d : f(x-a) \neq g(x-a)\big\}$$
$$= a + \{f \neq g\}.$$

L'invariance de la mesure de Lebesgue par translation entraîne donc que

$$\lambda_d\big(\{\tau_a f \neq \tau_a g\}\big) = \lambda_d\big(\{f \neq g\}\big) = 0.$$

On peut donc définir τ_a sur $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ puisque la classe de $\tau_a f$ modulo l'égalité λ_d-$p.p.$ ne dépend que de celle de f. Enfin, si $1 \le p < +\infty$,

$$\|\tau_a f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f \circ \tau_a(x)|^p \lambda_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \lambda_d(dx) = \|f\|_p^p.$$

Le cas $p=+\infty$ se traite en notant simplement que

$$\forall\, u\in\mathbb{R},\ \ \{|\tau_a f| > u\} = a + \{|f| > u\}.$$

L'invariance de la mesure de Lebesgue par translation entraîne alors que

$$\|f\|_\infty = \text{supess}\,(|f|) = \inf\{M>0 : \lambda_d(|f|>M) = 0\} = \text{supess}\,|\tau_a f| = \|\tau_a f\|_\infty.$$

(b) Supposons d'abord que $f \in \mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$. La fonction f est donc uniformément continue d'où, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|a| \le \alpha \ \Rightarrow\ \forall\, x\in\mathbb{R}^d,\ |f(x-a) - f(x)| \le \varepsilon.$$

Par suite, dès que $|a| \le \alpha$,

$$\begin{aligned}\|\tau_a f - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-a) - f(x)|^p \lambda_d(dx) &= \int_{(a+\{f\neq 0\})\cup\{f\neq 0\}} |f(x-a) - f(x)|^p \lambda_d(dx)\\ &\le \big(\lambda_d(f\neq 0) + \lambda_d(a+\{f\neq 0\})\big)\,\varepsilon^p\\ &\le 2\,\lambda_d\Big(\overline{\{f\neq 0\}}\Big)\,\varepsilon^p.\end{aligned}$$

Or, $\lambda_d\big(\overline{\{f\neq 0\}}\big)$ est fini car $\overline{\{f\neq 0\}}$ est compact. En conséquence

$$|a|\leq\alpha \implies \|\tau_a f - f\|_p \leq \Big(2\,\lambda_d(\overline{\{f\neq 0\}})\Big)^{\frac{1}{p}}\,\varepsilon.$$

Supposons maintenant $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$. L'ensemble $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$ est $\|\cdot\|_p$-dense dans $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ donc il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues à support compact telle que $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$. Or

$$\begin{aligned}\|\tau_a f - f\|_p &\leq \|\tau_a f - \tau_a f_n\|_p + \|\tau_a f_n - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p\\ &\leq 2\,\|f_n - f\|_p + \|\tau_a f_n - f_n\|_p \qquad \text{d'après le point } (a).\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$; il existe $n_\varepsilon\geq 1$ tel que $\|f_{n_\varepsilon} - f\|_p \leq \varepsilon/4$ et, d'autre part, il existe $\alpha_\varepsilon>0$ tel que $\|\tau_a f_{n_\varepsilon} - f_{n_\varepsilon}\|_p \leq \varepsilon/2$ pour tout $|a|\leq\alpha_\varepsilon$. D'où, finalement

$$\|\tau_a f - f\|_p \leq \varepsilon \ \text{ dès que } \ |a|\leq\alpha_\varepsilon. \quad \Diamond$$

De l'égalité

$$\|\tau_a f - \tau_b f\|_p = \|\tau_b(\tau_{a-b} f - f)\|_p = \|\tau_{a-b} f - f\|_p,$$

on déduit immédiatement le corollaire suivant.

***Corollaire* 14.1.** *Si* $p\in[1,+\infty[$ *et* $f\in L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, $a\mapsto\tau_a f$ *est uniformément continue de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$.

Remarques : • Si $p=+\infty$, l'assertion (b) est fausse car $\overline{\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})}^{\|\cdot\|_\infty}\neq L^\infty_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$.
• Ce théorème s'appuie fortement sur l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation. Ainsi, le résultat tombe en défaut avec $\mu=\delta_0$: $\tau_a f$ converge vers f dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ si et seulement si f est continue en 0 !

14.2 Convolution sur $\mathbb{R}^d$

14.2.1 Le cas positif

***Définition* 14.2.** *Soient* $f,\,g\ :\ (\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}^d))\ \to\ \mathbb{R}_+$ *deux fonctions boréliennes positives. La convolée de* f *et* g*, notée* $f*g$*, est définie par :*

$$\forall\,x\in\mathbb{R}^d,\ \ (f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,\lambda_d(dy). \tag{14.2}$$

***Proposition* 14.1.** (a) *La fonction* $f*g$ *est bien définie. C'est une fonction borélienne positive de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *vérifiant :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f*g\,d\lambda_d = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\lambda_d\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g\,d\lambda_d\right).$$

(b) *La convolution entre fonctions boréliennes positives est*

– *commutative :* $f * g = g * f$,

– *associative :* $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(c) *Enfin,* $\{f * g \neq 0\} \subset \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$.

DÉMONSTRATION : (a) Les fonctions $(u,v) \mapsto f(u)$ et $(u,v) \mapsto g(v)$ sont clairement $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$-mesurables donc, d'après la proposition 5.5, la fonction $(u,v) \mapsto f(u)\,g(v)$ l'est aussi. D'autre part, la fonction $(x,y) \mapsto (x-y,y)$ est continue de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ donc $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d), \mathscr{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$-mesurable. Or, $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ d'après l'application 11.1, d'où, par composition,

$$\begin{aligned}\big(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)\big) &\longrightarrow \big(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\big)\\ (x,y) &\longmapsto f(x-y)\,g(y)\end{aligned}$$

est mesurable. D'après le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 11.2 de la section 11.3) appliqué à la mesure produit $\lambda_d \otimes \lambda_d$, il vient :

– d'une part : $\left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,\lambda_d(dy)\right)$ est partout définie, $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable et,

– d'autre part :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,\lambda_d(dy)\right)\,\lambda_d(dx) &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,\lambda_d(dx)\right)\,\lambda_d(dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,\lambda_d(dx)\right)\,\lambda_d(dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\lambda_d\right)\,\lambda_d(dy)\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\lambda_d\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g\,d\lambda_d\right).\end{aligned}$$

(b) *Commutativité* : Le réel x étant fixé, on procède au changement de variables affine $y := \varphi(u) = x - u$. Il vient

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,\lambda_d(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\,g(x-u)\,\lambda_d(du) = g * f(x).$$

Associativité :

$$\begin{aligned}
f*(g*h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g*h(y)\, \lambda_d(dy)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\Big(\int_{\mathbb{R}^d} g(y-u)h(u)\, \lambda_d(du)\Big)\ \lambda_d(dy)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y-u)\, \lambda_d(dy)\Big)h(u)\lambda_d(du)\ \ \text{(Fubini-Tonelli)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-u-z)\, g(z)\, \lambda_d(dz)\Big)h(u)\lambda_d(du)\ \text{(poser } y:=u+z)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x-u)h(u)\, \lambda_d(du) = (f*g)*h(x).
\end{aligned}$$

(c) Si $x\notin\{f\neq 0\}+\{g\neq 0\}$, alors, pour tout $y\in\mathbb{R}^d$, $g(y)=0$ ou $f(x-y)=0$ et partant $g(y)f(x-y)=0$. D'où $(f*g)(x)=0$. $\quad\Diamond$

Remarque : Nous verrons plus loin (*cf.* corollaire 14.3 et application 14.1 à la section 14.3) que la régularité de $f*g$ peut être affinée.

Exemples : 1. $f*0=0$.

2. $f*\mathbb{1}(x)=\mathbb{1}*f(x)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{1}(x-y)f(y)\,\lambda_d(dy)=\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\lambda_d.$

3. *Dimension* 1 *:* On veut calculer $\mathbb{1}_{[0,1]}*\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

– Si $x\notin[0,1]+[0,1]=[0,2]$, $\mathbb{1}_{[0,1]}*\mathbb{1}_{[0,1]}(x)=0$,

– Si $x\in[0,2]$,

$$\begin{aligned}
\big(\mathbb{1}_{[0,1]}*\mathbb{1}_{[0,1]}\big)(x) &= \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,1]}(x-y)\,\lambda_1(dy) = \int_0^1 \mathbb{1}_{[x-1,x]}(y)\,\lambda_1(dy)\\
&= x\wedge 1-(x-1)\vee 0.
\end{aligned}$$

14.2.2 Cadre général

Soient f et g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). La proposition 14.1 (a), trivialement adaptée au cadre complexe, montre que la fonction $(x,y)\mapsto f(x-y)\,g(y)$ est borélienne de $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{K}$. En outre, par définition de la convolution des fonctions positives, pour tout $x\in\mathbb{R}^d$,

$$\big(y\mapsto f(x-y)\,g(y)\big)\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)\quad\Leftrightarrow\quad(|f|*|g|)(x)<+\infty.$$

On peut alors définir la quantité $(f*g)(x):=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,\lambda_d(dy).$

***Définition* 14.3.** *La quantité* $(f*g)(x)$ *est appelée la* convolée *de* f *et* g *en* x.

***Proposition* 14.2.** *La convolution vérifie les propriétés élémentaires suivantes :*
(a) $(f*g)(x)=(g*f)(x)$ *dès que l'une des deux quantités existe et*

$$|f*g|(x)\leq(|f|*|g|)(x).$$

(b) *Si* $|f|*|g|<+\infty$ *partout, alors la fonction partout définie* $x\mapsto(f*g)(x)$ *est borélienne de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}$.
(c) $\{f*g\neq 0\}\subset\{f\neq 0\}+\{g\neq 0\}$.

(d) *Si* $f_1=f_2$ *et* $g_1=g_2$ λ_d*-p.p.* f_1*g_1 *et* f_2*g_2 *existent simultanément et sont alors égales.*

DÉMONSTRATION : (a) La commutativité est évidente par changement de variables affine. L'inégalité découle de l'inégalité triangulaire $\left|\int_{\mathbb{R}^d}h\,d\mu\right|\leq\int_{\mathbb{R}^d}|h|\,d\mu$.
(b) Traitons le cas réel à titre d'exemple : on décompose les fonctions f et g en $f:=f^+-f^-$ et $g:=g^+-g^-$. Il est immédiat *via* la croissance de l'intégrale que $f^\pm*g^\pm\leq|f|*|g|<+\infty$ d'où, par linéarité cette fois,

$$f*g=f^+*g^++f^-*g^--f^+*g^--f^-*g^+.$$

La mesurabilité découle de la proposition 14.1 (a).
(c) $\{f*g\neq 0\}=\{|f*g|\neq 0\}\subset\{|f|*|g|\neq 0\}\subset\{|f|\neq 0\}+\{|g|\neq 0\}$.
(d) Si $f_1=f_2$ et $g_1=g_2$ λ_d-*p.p.* alors $|f_1|=|f_2|$ et $|g_1|=|g_2|$ λ_d-*p.p.* donc f_1*g_1 et f_2*g_2 existent simultanément et sont alors égales. Soit $x\in\mathbb{R}^d$ fixé.

$$\{y\in\mathbb{R}^d:f_1(x-y)\,g_1(y)\neq f_2(x-y)\,g_2(y)\}\subset(x-\{f_1\neq f_2\})\cup\{g_1\neq g_2\}.$$

Or $\lambda_d\left((x-\{f_1\neq f_2\})\cup\{g_1\neq g_2\}\right)\leq\lambda_d(\{f_1\neq f_2\})+\lambda_d(\{g_1\neq g_2\})=0.$ $\Diamond$

$ATTENTION$! La loi $*$ n'est pas associative dans ce cadre très général.

Contre-exemple : Considérons les fonctions

$$f:=\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+},\quad g:=\mathbb{1}_{[-1,0]}-\mathbb{1}_{[0,1]}\quad\text{et}\quad h:=\mathbb{1}.$$

Il vient $|f|*|g|(x)\leq\mathbb{1}*|g|(x)=\displaystyle\int|g|d\lambda_d=2$, puis

$$(f*g)(x)=\int\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-y)\,g(y)dy=\int_{-\infty}^{x}g(y)dy=\begin{cases}0 & \text{si } x\notin[-1,1]\\ x+1 & \text{si } x\in[-1,0]\\ 1-x & \text{si } x\in[0,1]\end{cases}.$$

D'où : $(f*g)*h(x)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f*g\,d\lambda_d=1$ (*cf.* exemple 2. ci-avant) d'une part,

et $\quad f*(g*h)(x)=f*(u\mapsto\int_{\mathbb{R}}g\,d\lambda_d)(x)=(f*0)(x)=0$ d'autre part.

14.3 Conditions d'existence et propriétés

Nous allons passer en revue quelques conditions naturelles assurant l'existence de la convolée $f * g$ en tout point de $\mathbb{R}^d$ ou λ-*p.p.*.

***Définition* 14.4.** *On désigne par* $\mathscr{L}^1_{loc,\mathbb{K}}(\lambda_d)$ *l'ensemble des fonctions boréliennes* localement intégrables i.e. *les fonctions boréliennes* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ *telles que*

$$\forall\, K \subset \mathbb{R}^d,\ K \textit{ compact},\quad \int_K |f| d\lambda_d < +\infty.$$

L'espace $(\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc},\mathbb{K}}(\lambda_d), +, .)$ est clairement un $\mathbb{K}$-e.v. stable par $\min$ et par $\max$ (finis). D'autre part

$$\forall\, p \in [1, +\infty],\quad \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d) \subset \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc},\mathbb{K}}(\lambda_d)$$

puisque $\displaystyle\int_K |f| d\lambda_d \leq \|f\|_p \lambda_d(K)^{1/q} < +\infty$ (où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) d'après l'inégalité de Hölder (si $p = 1$, on pose $\lambda_d(K)^{1/\infty} = \lambda_d(K)^0 = \|\mathbb{1}_K\|_\infty = 1$).

***Proposition* 14.3.** *Soient* $f \in \mathscr{L}^1_{loc,\mathbb{K}}$ *et* $g \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$*,* g *à* support compact. *Alors* $(f * g)(x)$ *est définie en tout point* $x \in \mathbb{R}^d$*. En outre, l'application* $(f, g) \mapsto f * g$ *est bilinéaire.*

DÉMONSTRATION : Il vient

$$\begin{aligned}(|f| * |g|)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\, |g(y)|\, \lambda_d(dy)\\ &\leq \int_{\{g \neq 0\}} \|g\|_\infty |f(x-y)|\, \lambda_d(dy)\\ &\leq \|g\|_\infty \int_{x - \{g \neq 0\}} |f(y)|\, \lambda_d(dy) < +\infty,\end{aligned}$$

car $\big(x - \{g \neq 0\}\big)$ est borné dans $\mathbb{R}^d$ par hypothèse.

La bilinéarité découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale (on notera au passage que l'ensemble des fonctions λ_d-essentiellement bornées à support compact à valeurs dans $\mathbb{K}$ est bien un $\mathbb{K}$-e.v.). ♢

***Théorème* 14.2** (Convolution L^p-L^q)**.**
Soient $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ *et* $g \in \mathscr{L}^q_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$*, où* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $p, q \in [1, +\infty]$.

(a) $(f * g)(x)$ *est définie en tout point* x *de* $\mathbb{R}^d$*. En outre,* $f * g$ *est uniformément continue et bornée par* $\|f\|_p \|g\|_q$*. Enfin, l'application* $(f, g) \mapsto f * g$ *est bilinéaire.*

(b) *Si, en outre,* $1 < p, q < +\infty$, $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} (f * g)(x) = 0$.

DÉMONSTRATION : (a) On établit à l'aide de l'inégalité de Hölder et du changement de variables $y = \varphi(u) := x - u$ que

$$\begin{aligned} |f| * |g|(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,\lambda_d(dy) \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p \lambda_d(dy) \right)^{\frac{1}{p}} \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Comme p ou q sont finis, on peut supposer p fini. Or

$$\begin{aligned} f * g(x+a) - (f*g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x+a-y) - f(x-y))\, g(y)\,\lambda_d(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (\tau_{-a} f - f)(x-y)\, g(y)\,\lambda_d(dy) \\ &= (\tau_{-a} f - f) * g(x). \end{aligned}$$

D'où
$$\begin{aligned} |f * g(x+a) - (f*g)(x)| &\leq |\tau_{-a} f - f| * |g|(x) \\ &\leq \|\tau_{-a} f - f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Le second membre de l'inégalité ne dépend plus de x et, d'après le théorème 14.1 (b), $\lim_{a \to 0} \|\tau_{-a} f - f\|_p = 0$.

La bilinéarité découle trivialement de la linéarité de l'intégrale.

(b) Étape 1 f *continue à support compact* :

Supposons d'abord que $f \in \mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$. On pose $K := \overline{\{f \neq 0\}}$. K est compact et

$$\begin{aligned} |(f*g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,\lambda_d(dy) &= \int_{x-K} |f(x-y)||g(y)|\,\lambda_d(dy) \\ \leq \lambda_d(x-K)^{\frac{1}{p}} &\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)\, g(y)|^q \lambda_d(dy) \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder. On vérifie immédiatement que

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}^d, & |f(x-y)|^q |g(y)|^q \leq \|f\|_\infty^q\, |g|^q(y) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\lambda_d), \\ \forall\, y \in \mathbb{R}^d, & \lim\limits_{|x| \to +\infty} |f(x-y)\, g(y)|^q = 0. \end{cases}$$

Le théorème de convergence dominée entraîne alors que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)\, g(y)|^q \lambda_d(dy) = 0.$$

D'où le résultat, puisque $\lambda_d(x - K) = \lambda_d(K)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

<u>Étape 2</u> *Cas général,* $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$:

L'exposant p étant fini, il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ vérifiant $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$. Or,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d,\quad |(f*g)(x) - f_n * g(x)| = |(f-f_n)*g|(x),$$

$$\leq \|f-f_n\|_p\|g\|_q,$$

$$\text{d'où}\qquad \|f*g - f_n*g\|_\infty \leq \|f-f_n\|_p\|g\|_q.$$

Finalement,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d,\quad |(f*g)(x)| \leq |f_n * g(x)| + \|f_n - f\|_p\|g\|_q.$$

On choisit alors comme d'habitude $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\|_p\|g\|_q \leq \frac{\varepsilon}{2}$, puis A_ε tel que $|x| \geq A_\varepsilon$ entraîne $|f_{n_\varepsilon} * g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. $\Diamond$

Remarque : • Grâce à la proposition 14.2 (d), on aurait pu énoncer le théorème avec les espaces $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ et $L^q_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ au lieu de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ et $\mathscr{L}^q_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$.
• On observe déjà ici le caractère "régularisant" de l'opération de convolution ; ceci sera également illustré par le corollaire 14.3 ci-après et l'application qui le suit.

***Corollaire* 14.2.** *Si $f, g \in \mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$, alors, d'après la proposition 14.2 (c) et le point (a) du théorème 14.2 ci-dessus, $f*g \in \mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$.*

***Corollaire* 14.3.** *Si f et g sont boréliennes positives, alors $f*g$ est semi-continue inférieurement au sens où* ([1])

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\quad \{f*g \leq a\}\ \textit{est fermé.}$$

Démonstration : Pour tout $n \geq 1$, on pose $K_n := [-n,n]^d$, $f_n := (f \wedge n)\mathbb{1}_{K_n}$ et $g_n := (g \wedge n)\mathbb{1}_{K_n}$. Les fonctions f_n et g_n sont boréliennes positives et forment des suites croissant respectivement vers f et g. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la suite de fonctions $y \mapsto f_n(x-y)\,g_n(y)$ croît vers la fonction $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$. Donc, d'après le théorème de Beppo Levi,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d,\quad f_n*g_n(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x-y)\,g_n(y)\,\lambda_d(dy) \uparrow (f*g)(x)\ \text{ quand } n \to +\infty.$$

Or, d'après le théorème 14.2 (a), les fonctions $f_n * g_n$ sont continues puisque $f_n, g_n \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$. Par suite $\{f_n * g_n \leq a\}$ est fermé d'où, finalement,

$$\{f*g \leq a\} = \bigcap_{n\geq 1}^{\downarrow} \{f_n * g_n \leq a\}\ \text{ est fermé.}\quad \Diamond$$

1. ou encore $x_n \to x \Rightarrow \underline{\lim}_n\, f*g(x_n) \geq (f*g)(x)$.

***Application* 14.1.** *Théorème de Steinhaus :*
Si A est un borélien de $\mathbb{R}^d$ de mesure (de Lebesgue) positive, alors

$$A - A := \{a - a',\, a,\, a' \in A\}$$

est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION : D'après le corollaire 14.3 la fonction $\varphi_A := \mathbb{1}_A * \mathbb{1}_{-A}$ est s.c.i. (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$), donc $\{\varphi_A \neq 0\} = \{\varphi_A > 0\}$ est un ouvert; cet ouvert contient 0 car

$$\varphi_A(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{-A}(-y)\, \mathbb{1}_A(y)\, \lambda_d(dy) = \lambda_d(A) > 0.$$

D'autre part, la proposition 14.2 (c) entraîne que

$$\{\varphi_A \neq 0\} \subset \{\mathbb{1}_A \neq 0\} + \{\mathbb{1}_{-A} \neq 0\} = A + (-A) = A - A.$$

D'où le résultat annoncé. $\Diamond$

***Théorème* 14.3** (L'algèbre $(L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d), +, \cdot, *)$)**.** (a) *Soient* $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$. *Alors, la fonction* $(f * g)(x)$ *est définie pour* λ_d*-presque tout* $x \in \mathbb{R}^d$ *et* $f * g \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ *avec*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \quad \textit{et} \quad \int_{\mathbb{R}^d} f * g \, d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\lambda_d \times \int_{\mathbb{R}^d} g \, d\lambda_d.$$

(b) *Le* $\mathbb{K}$*-e.v.* $(L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d), +, .)$, *muni en outre de l'opération* $*$, *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre commutative (*i.e. $*$ *est commutative, associative et* $*$ *est distributive par rapport à* $+$*)* ne possédant pas d'unité.

DÉMONSTRATION : Au vu de la proposition 14.2 (d) ci-avant, on peut raisonner sur des représentants, éléments de $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, encore notés f et g.
(a) Les fonctions f et g étant dans $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, il vient d'après la proposition 14.1 (a)

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| * |g|(x)\, \lambda_d(dx) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

Par suite, $|f| * |g|(x) < +\infty$ $\lambda_d(dx)$-$p.p.$. On définit alors

$$(f * g)(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, \lambda_d(dy) & \text{si } |f| * |g|(x) < +\infty \\ 0 & \text{si } |f| * |g|(x) = +\infty. \end{cases}$$

Ainsi définie, $f * g$ est borélienne par une adaptation triviale de la proposition 14.2 (b), et intégrable puisque

$$\|f * g\|_1 \leq \||f| * |g|\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

(b) La distributivité est évidente et la commutativité découle de la proposition 14.2 (a).

– *Associativité* : Soient $f, g, h \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$. D'après la proposition 14.1 (b) (cas positif), il vient

$$(|f| * |g|) * |h|(x) := |f| * (|g| * |h|)(x) < +\infty \quad \lambda_d(dx)\text{-}p.p.. \tag{14.3}$$

Pour tout x vérifiant (14.3), il est immédiat d'après le théorème de Fubini-Tonelli que l'application $(y, z) \longmapsto f(x-y)\, g(y-z) h(z)$ est $\lambda_d \otimes \lambda_d$-intégrable. On conclut *via* le théorème de Fubini-Lebesgue en reprenant les calculs formels, maintenant justifiés, de la proposition 14.1 (b).

– *Absence d'unité* : Supposons l'existence d'une telle unité $u \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ (identifiée à l'un de ses représentants dans $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$). La fonction u vérifie donc en particulier, pour tout $\rho \in \mathbb{R}^*_+$, $e^{-\rho|\cdot|^2} * u = e^{-\rho|\cdot|^2}$ λ_d-$p.p.$ où $|\,.\,|$ désigne ici la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^d$. Or, d'après le théorème 14.2 (a) appliqué aux exposants conjugués $p=1$ et $q=+\infty$, la fonction $e^{-\rho|\cdot|^2} * u$ est continue, donc, $e^{-\rho|\cdot|^2}$ l'étant aussi, celles-ci coïncident sur tout $\mathbb{R}^d$ ([2]). En particulier, il vient en $x = 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\rho|y|^2} u(y)\, \lambda_d(dy) = 1$. Or, par convergence dominée,

$$\lim_{\rho \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\rho|y|^2} u(y)\, \lambda_d(dy) = 0.$$

D'où la contradiction. $\Diamond$

Remarque : Plus généralement, l'associativité de la convolution est valable en tout point x vérifiant $|f| * |g| * |h|(x) < +\infty$. Évidemment cette condition n'est pas remplie par le contre-exemple à l'associativité proposé en sous-section 14.2.2.

Le théorème 14.3 (a) est en fait le cas particulier du :

***Théorème* 14.4.** *Si $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, $(1 \le p \le +\infty)$ et $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, alors $(f * g)(x)$ existe pour λ_d-presque tout x et $f * g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$. Plus précisément,*

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1.$$

DÉMONSTRATION : On applique l'inégalité de Hölder avec la mesure μ définie par $\mu(dy) := |g(y)|\lambda_d(dy)$. Il vient

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\lambda_d(dy) \le \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\lambda_d(dy)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)|\lambda_d(dy)\right)^{\frac{1}{p}}$$

où q désigne l'exposant conjugué de p. En élevant à la puissance p (supposée finie) et en intégrant cette inégalité par rapport à la mesure $\lambda_d(dx)$, il vient

$$\||f| * |g|\|_p^p \le \|g\|_1^{\frac{p}{q}}\, \||f|^p * |g|\|_1 = \|g\|_1^{\frac{p}{q}}\, \|f\|_p^p\, \|g\|_1 = \|f\|_p^p\, \|g\|_1^p < +\infty.$$

Lorsque $p = +\infty$, le résultat est évident. $\Diamond$

2. Soit $D \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$; si $\lambda_d({}^cD) = 0$, alors D est dense dans $\mathbb{R}^d$. En effet si $\overline{D} \neq \mathbb{R}^d$ alors ${}^c\mathring{D} = {}^c\overline{D}$ est un ouvert non vide contenu dans ${}^cD$. Ceci est impossible car la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ charge tous les ouverts non vides.

14.4 Approximation de l'unité

Pour pallier l'absence d'élément neutre pour la convolution sur $L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, on introduit des unités approchées *i.e.* des suites de fonctions $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ se comportant asymptotiquement comme une unité. En d'autres termes, on souhaite que

$$\alpha_n * f \text{ ``} \approx \text{'' } f \quad \text{quand } n \to +\infty \quad \text{(en un sens à préciser).}$$

***Définition* 14.5.** *Une suite* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *d'éléments de* $L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ *est une* approximation de l'unité *si elle vérifie*

(i) *pour tout* $n \geq 1$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n \, d\lambda_d = 1$,

(ii) $\displaystyle\sup_{n\geq 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| \, d\lambda_d < +\infty$,

(iii) *pour tout* $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\{|x|\geq\varepsilon\}} |\alpha_n| \, d\lambda_d = 0$.

On notera que la condition (ii) apparaît comme une conséquence directe de (i) lorsque les fonctions α_n sont positives.

Plutôt que des suites, on considère aussi souvent des familles $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}^*_+}$ d'approximations de l'unité indexées par $\mathbb{R}^*_+$. On adapte de façon évidente le point (iii) de la définition en faisant tendre t tend vers 0 au lieu de n vers $+\infty$.

Construction générique : La construction la plus courante d'une telle suite se fait à partir d'un élément quelconque $\alpha \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ d'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \alpha \, d\lambda_d = 1$. On définit alors simplement les α_n par :

$$\alpha_n(x) := n^d \, \alpha(nx), \quad n \geq 1.$$

En effet, le changement de variables linéaire $x = u/n$ entraîne :

$$\forall\, n \geq 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n \, d\lambda_d = \frac{1}{n^d} \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(u/n) \, \lambda_d(du) = \int_{\mathbb{R}^d} \alpha \, d\lambda_d = 1, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| \, d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha| \, d\lambda_d. \end{array} \right.$$

Enfin, pour tout $\varepsilon > 0$, le même changement de variables, associé au théorème de convergence dominé, montre que

$$\int_{\{|x|\geq\varepsilon\}} |\alpha_n(x)| \, \lambda_d(dx) = \int_{\{|u|\geq n\varepsilon\}} |\alpha(u)| \, \lambda_d(du) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemples : Pour des raisons historiques ou liées au domaine d'application (Analyse, Analyse appliquée, Probabilités, etc.), on privilégie souvent les familles d'approximations suivantes (où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^d$) :

Noyau de Laplace sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, t>0,\quad \alpha_t(x) := \frac{1}{2t}\, e^{-\frac{|x|}{t}} \qquad \text{(issu de } \alpha_1(x) := \frac{1}{2} e^{-|x|}\text{).}$$

Noyau de Cauchy sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, t>0,\quad \alpha_t(x) := \frac{t}{\pi\,(t^2+x^2)} \qquad \text{(issu de } \alpha_1(x) := \frac{1}{\pi\,(1+x^2)}\text{).}$$

Noyau de Gauss sur $\mathbb{R}^d$:

$$\forall\, t>0,\quad \alpha_t(x) := \frac{1}{(\sqrt{4\pi}\,t)^d}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t^2}} \qquad \text{(issu de } \alpha_1(x) := \frac{1}{(\sqrt{4\pi})^d}\, e^{-\frac{|x|^2}{4}}\text{).}$$

(on rappelle – *cf.* exemple 2, section 12.2 – que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$).

Noyau à support compact sur $\mathbb{R}$: À toute fonction $\alpha \in \mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ vérifiant $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \alpha\, d\lambda_d = 1$, on peut associer le noyau :

$$\forall\, t>0, \quad \alpha_t(x) := \frac{1}{t^d}\,\alpha\left(\frac{x}{t}\right).$$

***Théorème* 14.5** (Convergence L^p)**.** *Soit* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'approximations de l'unité. Soient* $p\in[1,+\infty[$ *et* $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$*. Alors :*

$$\forall\, n\geq 1,\quad f*\alpha_n \in L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d) \quad \text{\textit{et}} \quad f*\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_p} f.$$

DÉMONSTRATION : Pour tout $n\geq 1$, $\alpha_n \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, donc, d'après le théorème 14.4, $f*\alpha_n$ est λ_d-*p.p.* définie et appartient à $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$. Comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(y)\,\lambda_d(dy) = 1$, il vient, là où $f*\alpha_n(x)$ existe,

$$(f*\alpha_n)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \big(f(x-y) - f(x)\big)\,\alpha_n(y)\,\lambda_d(dy),$$

d'où, en reprenant la démarche du théorème 14.4,

$$|f*\alpha_n(x) - f(x)|^p \leq \|\alpha_n\|_1^{\frac{p}{q}} \times \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p |\alpha_n(y)|\,\lambda_d(dy),$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f*\alpha_n(x) - f(x)|^p \lambda_d(dx) \leq \|\alpha_n\|_1^{\frac{p}{q}} \times \ldots$$

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p |\alpha_n(y)|\,\lambda_d(dy)\,\lambda_d(dx).$$

La constante $M := \sup_{n\geq 1} \|\alpha_n\|_1$ étant finie par hypothèse, le théorème de Fubini-Tonelli entraîne alors

$$\|f * \alpha_n - f\|_p \leq M \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p \, |\alpha_n(y)| \, \lambda_d(dy).$$

On se ramène donc à étudier le membre de droite de l'inégalité. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p \, |\alpha_n(y)| \, \lambda_d(dy) &\leq \int_{\{|y|\geq\varepsilon\}} (\|\tau_y f\|_p + \|f\|_p)^p \, |\alpha_n(y)| \, \lambda_d(dy) \\ &\quad + \sup_{|y|<\varepsilon} \|\tau_y f - f\|_p^p \int_{\{|y|<\varepsilon\}} |\alpha_n(y)| \, \lambda_d(dy), \\ &\leq 2^p \|f\|_p^p \int_{\{|y|\geq\varepsilon\}} |\alpha_n(y)| \, \lambda_d(dy) + M \sup_{|y|\leq\varepsilon} \|\tau_y f - f\|_p^p.\end{aligned}$$

Par suite, la condition (iii) de la définition des α_n entraîne

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \overline{\lim_n} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p \, |\alpha_n(y)| \lambda_d(dy) \leq M \sup_{|y|\leq\varepsilon} \|\tau_y f - f\|_p^p.$$

Or, $\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{|y|\leq\varepsilon} \|\tau_y f - f\|_p = 0$ d'après le théorème 14.1 (b). D'où le résultat. $\diamond$

Nous allons maintenant établir des résultats d'approximation ponctuelle lorsque la fonction f possède, au moins localement, des propriétés de régularité.

***Définition* 14.6.** *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ et B une partie quelconque de $\mathbb{R}^d$. On dira que f est B-*uniformément continue *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in B, \ \forall y \in \mathbb{R}^d, \ \ |x - y| \leq \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

De façon plus concise ceci s'exprime en : $\lim_{\eta\to 0} \sup_{x\in B, \, |h|\leq\eta} |f(x+h) - f(x)| = 0.$

Si f est B-uniformément continue, alors f est en particulier continue en tout point de B et $f_{|B}$ est uniformément continue. En revanche, la réciproque est en général fausse (prendre $f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ et $B := \mathbb{Q}$).

Exemples : 1. f est $\mathbb{R}^d$-uniformément continue si et seulement si f est uniformément continue.

2. f est $\{x_0\}$-uniformément continue si et seulement si f est continue en x_0.

3. Extension du *théorème de Heine* : *Si f est continue en tout point d'un compact $K \subset \mathbb{R}^d$, alors f est K-uniformément continue.*

En effet, dans le cas contraire, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(h_n)_{n\geq 1}$ respectivement à valeurs dans K et $\mathbb{R}^d$ vérifiant

$$|h_n| \leq 1/n \quad \text{et} \quad |f(x_n + h_n) - f(x_n)| > \varepsilon_0.$$

Par compacité de K, on extrait de $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ convergeant vers $x \in K$. Or, la fonction f étant continue en x, les suites $(f(x_{\varphi(n)} + h_{\varphi(n)}))_{n\geq 1}$ et $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\geq 1}$ convergent toutes deux vers $f(x)$. D'où la contradiction.

***Théorème* 14.6** (Convergence ponctuelle). *Soient $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite d'approximations de l'unité et $f \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$. Alors*

(a) *Pour $n\geq 1$, $f*\alpha_n$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée par $\|f\|_\infty\|\alpha_n\|_1$.*

(b) *Si f est B-uniformément continue ($B\subset\mathbb{R}^d$), alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sup_{x\in B}\big|f*\alpha_n(x)-f(x)\big|\Big)=0.$$

DÉMONSTRATION : L'assertion (a) découle du théorème 14.2 (a).

(b) Notons d'abord qu'il est loisible de choisir un représentant dans la classe de f simultanément B-uniformément continu et borné par $\|f\|_\infty$ en remplaçant si nécessaire f par $(-\|f\|_\infty)\vee(f\wedge\|f\|_\infty)$. On le note toujours f par commodité. En effet la fonction $y\mapsto(-\|f\|_\infty)\vee(y\wedge\|f\|_\infty)$ est clairement lipschitzienne de rapport 1. Soit $M:=\sup_n\|\alpha_n\|_1$. Il vient, pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ et tout $n\geq 1$,

$$\begin{aligned}|f*\alpha_n(x)-f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)||\alpha_n(y)|\,\lambda_d(dy),\\ &\leq M\sup_{|y|\leq\eta}|f(x-y)-f(x)|+2\|f\|_\infty\int_{\{|y|>\eta\}}|\alpha_n(y)|\,\lambda_d(dy).\end{aligned}$$

D'où $\overline{\lim_n}\sup_{x\in B}|f*\alpha_n(x)-f(x)|\leq M\times\sup_{x\in B,\,|y|\leq\eta}|f(x-y)-f(x)|\xrightarrow[\eta\to 0]{}0.$ $\Diamond$

En combinant les exemples ci-avant et le théorème 14.6, on obtient immédiatement les résultats suivants.

***Corollaire* 14.4.** *Soit $f\in\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$. Alors :*

(a) *Si f est continue en $x_0\in\mathbb{R}^d$, alors $\lim_{n\to+\infty}(f*\alpha_n)(x_0)=f(x_0)$.*

(b) *Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, alors $\lim_{n\to+\infty}\|f*\alpha_n-f\|_\infty=0$.*

(c) *Si f est continue en tout point d'un compact K, alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sup_{x\in K}\big|(f*\alpha_n)(x)-f(x)\big|\Big)=0.$$

14.5 Régularisation par convolution

Nous avons montré à la section 14.3 l'existence en tout point de $\mathbb{R}^d$ de la convolution $f*\varphi$ dès que f est localement intégrable et φ essentiellement bornée à support compact. Dans cette section, nous allons établir qu'en outre $f*\varphi$ conserve la régularité de φ. En combinant ce résultat avec ceux de la section 14.3, nous en déduirons de puissants théorèmes d'approximation par des fonctions très régulières.

***Définition* 14.7.** (a) *Pour tout $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, on pose*

$$\mathscr{C}^n_K(\mathbb{R}^d,\mathbb{K}):=\{f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{K}\ \textit{à support compact et de classe}\ \mathscr{C}^n\}.$$

(b) *Pour tout* d*-uplet d'entiers* $\underline{p} := (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{N}^d$*, on note* $\|\underline{p}\| := \sum_{i=1}^{d} p_i$.

(c) *On appellera* opérateur différentiel *d'ordre* $p \in \mathbb{N}^*$*, toute application* D^p *définie sur* $\mathscr{C}_K^n(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ *par*

$$D^p(f) := \sum_{\underline{p}:\|\underline{p}\| \leq p} \lambda_{\underline{p}} \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_d}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_d^{p_d}} f, \quad \lambda_p \in \mathbb{K}.$$

Rappel : Une fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si toutes ses dérivées partielles d'ordre $\underline{p}$, $\|\underline{p}\| \leq n$, sont continues sur $\mathbb{R}^d$.

***Théorème* 14.7.** *Soient* $\varphi \in \mathscr{C}_K^n(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$*,* $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *et* $f \in \mathscr{L}^1_{loc,\mathbb{K}}(\lambda_d)$*. Alors la fonction* $f * \varphi$ *est définie en tout point de* $\mathbb{R}^d$ *d'après la proposition 14.3. En outre,* $f * \varphi \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ *et si* D *désigne un opérateur différentiel d'ordre* $p \leq n$*,*

$$D(f * \varphi) = f * D(\varphi).$$

DÉMONSTRATION : On se ramène, *via* une récurrence immédiate sur n, à montrer l'assertion (b) pour les opérateurs élémentaires $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq d$.

Comme $\text{supp}(\varphi) := \overline{\{\varphi \neq 0\}}$ est compact, $K_\varphi := \text{supp}(\varphi) + \overline{B}(0,1)$ l'est aussi (ceci découle de la propriété de Bolzano-Weierstrass). Soit alors e_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et $h \in [-1,1] \setminus \{0\}$.

$$\frac{f * \varphi(x+he_i) - f * \varphi(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \, \frac{\varphi(x+he_i-y) - \varphi(x-y)}{h} \, \lambda_d(dy).$$

Si $h \in [-1,1]$ et $u + he_i \in \text{supp}(\varphi)$, alors, nécessairement,

$$u \in \text{supp}(\varphi) + (-h)e_i \subset \text{supp}(\varphi) + \overline{B}(0;1).$$

Par suite, $x \in \mathbb{R}^d$ étant fixé, l'inégalité des accroissements finis entraîne

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^d, \quad \left| f(y) \frac{\varphi(x-y+he_i) - \varphi(x-y)}{h} \right| \leq |f(y)| \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_\infty \mathbb{1}_{K_\varphi}(x-y).$$

La fonction (de y) à droite de l'inégalité est intégrable puisque, f étant localement intégrable, $\displaystyle\int_{x-K_\varphi} |f(y)| \, \lambda_d(dy) < +\infty$.

D'autre part, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{h \to 0} f(y) \, \frac{\varphi(x-y+he_i) - \varphi(x-y)}{h} = f(y) \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x-y).$$

On conclut par le théorème de convergence dominée. $\Diamond$

Le résultat ci-dessus n'épuise pas les possibilités d'énoncés. Ainsi, on établit sans peine à partir de l'application 8.6.2 de la section 8.3, la variante ci-dessous :

***Proposition* 14.4.** *Si $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ et si φ est une fonction appartenant à*

$$\mathscr{C}^n_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}) := \big\{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K} \text{ de classe } \mathscr{C}^n, \text{ bornée, à dérivées partielles bornées}\big\},$$

$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, alors les conclusions du théorème 14.7 restent valables.

Si l'on souhaite combiner les résultats de régularité ci-avant avec ceux obtenus sur les approximations de l'unité, le cas $n = \infty$ paraît évidemment le plus intéressant ...sous réserve que l'ensemble $\mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ ne soit pas réduit à la fonction nulle ! C'est bien le cas puisque la fonction

$$\varphi : x \longmapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \quad \text{est dans } \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d, [0,1]), \tag{14.4}$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne. Ceci se déduit immédiatement du fait que la fonction

$$u \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{u}\right) & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u \leq 0 \end{cases} \quad \text{est dans } \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}, [0,1]).$$

***Définition* 14.8.** *Une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est dite* régularisante *si*

(i) *la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est une approximation de l'unité,*

(ii) *pour tout $n \geq 1$, $\alpha_n \in \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$.*

Exemple fondamental : Soit $\alpha_n(x) = n^d\alpha(nx)$, $\alpha \in \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \alpha\, d\lambda_d = 1$.
On peut par exemple poser $\alpha := \dfrac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi\, d\lambda_d}$ où $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est définie par (14.4).
Plus généralement, toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ d'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi\, d\lambda_d \neq 0$ convient.

En combinant les résultats de la section 14.4 et du théorème 14.7 ci-dessus, on déduit plusieurs résultats réunis dans le théorème suivant :

***Théorème* 14.8** (Densité)**.** (a) *$\mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ est $\|\cdot\|_{\sup}$-dense dans $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$.*

(b) *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ est $\|\cdot\|_p$-dense dans $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$.*

(c) *L'espace $\mathscr{C}^\infty_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ est $\|\cdot\|_{\sup}$-dense dans $\mathscr{C}_{U,b}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions uniformément continues, bornées, à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

(d) *$\mathscr{C}^\infty_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ pour la convergence uniforme sur les compacts : pour toute fonction f continue bornée, il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de $\mathscr{C}_b{}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$, telle que, pour tout compact , $K \subset \mathbb{R}^d$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)|\Big) = 0.$$

DÉMONSTRATION : On considère une suite régularisante $(\alpha_n)_{n\geq 1}$. Dans tous les cas, $f\in\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc},\mathbb{K}}(\lambda_d)$, assurant ainsi l'existence des convolées $f*\alpha_n$.

(a) $f,\alpha_n\in\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$ donc $f*\alpha_n\in\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$; d'autre part $f*\alpha_n\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$ d'après la proposition 14.7. Donc $f*\alpha_n\in\mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$. Enfin, le théorème 14.6 (b) entraîne, f étant uniformément continue, que $f*\alpha_n \xrightarrow{U^t} f$.

(b) Soit $f\in L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ et f_m définie pour tout $m\geq 1$ par $f_m(x) := f\mathbf{1}_{\{|x|\leq m\}}$. Il est clair que $\|f-f_m\|_p^p = \displaystyle\int_{\{|x|>m\}} |f(x)|^p dx$ tend vers 0 lorsque m tend vers l'infini par convergence dominée. D'autre part, à m fixé, $\alpha_n * f_m$ converge pour la norme $\|\,.\,\|_p$ vers $f_m$lorsque n tend vers l'infini. La densité annoncée en découle.

(c) $f*\alpha_n$ est uniformément continue, bornée d'après le théorème 14.2 (a), et dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$ d'après la théorème 14.7.

(d) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\tilde{f}_n$ la fonction définie par

$$\tilde{f}_n(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } |x|\leq n \\ f\left(n\frac{x}{|x|}\right) & \text{si } |x|\geq n. \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}_n$ est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$. En effet, la fonction $x\mapsto \left(\frac{n}{|x|}\wedge 1\right)$ est 1-lipschitzienne de $\mathbb{R}^d$ dans $B(0,n)$ et $f_{|B(0,n)}$ est uniformément continue (et bornée). D'après le point (c), il existe donc $f_n\in\mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$ telle que $\|\tilde{f}_n - f_n\|_{\sup}\leq \frac{1}{n}$. On vérifie sans peine que f_n converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^d$ vers f. $\diamondsuit$

D'autres usages des propriétés régularisantes de la convolution sont possibles. À titre d'exemple, voici une version “lisse” du lemme d'Urysohn de séparation des fermés sur $\mathbb{R}^d$.

***Théorème* 14.9** (Lebesgue-Urysohn)**.** *Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $K\subset\omega$. Il existe $f\in\mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d,[0,1])$ telle que*

$$f\equiv 1 \ \textit{sur } K \quad \textit{et} \quad f\equiv 0 \ \textit{sur } {}^c\omega.$$

DÉMONSTRATION : La fonction $x\mapsto d(x,{}^c\omega)$ est continue, elle atteint donc son minimum $\rho>0$ sur le compact K. On définit alors, pour tout $\eta>0$, le compact $K_\eta := \{u\in\mathbb{R}^d : d(u,K)\leq\eta\}$ de façon que $K_\eta\subset\omega$ dès que $\eta<\rho$. Soit alors $\alpha_\rho\in\mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(\alpha_\rho)\subset B(0,\frac{\rho}{3})$ et $\|\alpha_\rho\|_1=1$. On construit une telle fonction en posant simplement

$$\alpha_\rho(x) := \frac{\varphi(\frac{3}{\rho}x)}{\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\frac{3}{\rho}x)\,\lambda_d(dx)}$$

où la fonction φ est donnée par (14.4).

Soit alors la fonction f définie

$$f := \mathbb{1}_{K_{\frac{\varrho}{3}}} * \alpha_\rho \in \mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda_d) \quad \text{où} \quad \mathbb{1}_{K_{\frac{\varrho}{3}}} \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{R}}(\lambda_d) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda_d).$$

Notons d'abord que la fonction f est positive et que d'après le théorème 14.2 (a), $\|f\|_{\sup} \leq \|\mathbb{1}_{K_{\frac{\varrho}{3}}}\|_\infty \|\alpha_\rho\|_1 \leq 1 \times 1 = 1$. Donc f est à valeurs dans $[0,1]$.

D'autre part $\{f \neq 0\} \subset K_{\frac{\varrho}{3}} + B(0, \frac{\varrho}{3}) \subset K_{\frac{2\rho}{3}} \subset \omega$. Par suite $f \in \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d, [0,1])$ et $f \equiv 0$ sur ${}^c\omega$. Enfin,

$$\mathbb{1}_{K_{\frac{\varrho}{3}}} * \alpha_\rho(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K_{\frac{\varrho}{3}}}(x-y)\alpha_\rho(y)\,\lambda_d(dy) = \int_{x-K_{\frac{\varrho}{3}}} \alpha_\rho(y)\,\lambda_d(dy).$$

Sur cette écriture, on constate que, si $x \in K$, $B(0; \frac{\varrho}{3}) \subset x - K_{\frac{\varrho}{3}}$; en effet, si $|u| \leq \frac{\varrho}{3}$, $u = x - \underbrace{(x-u)}_{\in K_{\frac{\varrho}{3}}}$. Par suite, $\mathbb{1}_{K_{\frac{\varrho}{3}}} * \alpha_\rho \equiv 1$ sur K. $\Diamond$

14.6 Autres convolutions

14.6.1 … de fonctions

On peut définir une opération ayant des propriétés similaires à la convolution sur $\mathbb{R}^d$ entre des fonctions définies sur d'autres espaces.

Ainsi, sur $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}} := \big\{(u_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ u_n \in \mathbb{K}\big\}$, on peut poser (formellement)

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad (u * v)_n := \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_{n-k}\, v_k.$$

L'existence effective de la suite convolée $u * v$ sera notamment assurée lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et -$(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont dans

$$\ell^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}) := \Big\{(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| < +\infty\Big\}.$$

De même si l'on considère le "tore" $\big([0, 2\pi[, \mathscr{B}([0, 2\pi[), \lambda_{|[0,2\pi[}/(2\pi)\big)$, toute fonction (borélienne) $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{K}$ se prolonge naturellement par périodicité en une fonction, toujours notée f, définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) := f\Big(x - 2\pi\Big[\frac{x}{2\pi}\Big]\Big) \quad \text{(où $[\cdot]$ désigne la partie entière).}$$

On peut alors définir la convolution par

$$(f * g)(x) := \int_0^{2\pi} f(x-y)\, g(y)\, \frac{dy}{2\pi}.$$

Cette quantité existe par exemple dès que $f, g \in L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{1}_{[0,2\pi[}.\lambda_1/2\pi)$. L'adaptation à ce cadre périodique de l'ensemble des résultats obtenus sur $\mathbb{R}^d$ est immédiate en introduisant

$$\mathscr{C}_{\#2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{K}) := \big\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \text{ continue, } 2\pi\text{-périodique}\big\}$$

muni de la norme $\|f\|_{\#2\pi} := \sup_{x\in[0,2\pi[} |f(x)|$.

En outre, tous ces cadres admettent des extensions multi-dimensionnelles.

Plus généralement, l'existence d'une convolution ayant des propriétés analogues à celle définie sur $\mathbb{R}^d$ est liée à la présence d'une structure de groupe abélien sur l'ensemble étudié et à l'invariance de la mesure considérée par les translations relatives à cette addition. Une théorie globale regroupant toutes ces situations a été développée : la convolution sur les groupes abéliens (localement) compacts munis de leur mesure de Haar.

14.6.2 Convolution de mesures positives σ-finies

On peut également définir dans ce même cadre une notion abstraite de convolution entre mesures positives σ-finies définies sur les boréliens d'un groupe abélien localement compact. Pour simplifier plaçons-nous sur $\mathbb{R}^d$. Soient μ et ν deux mesures sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$. On définit la convolée $\mu * \nu$ de μ par ν comme la mesure image de la mesure-produit $\mu \otimes \nu$ par l'application addition $(x, y) \mapsto x + y$. Le théorème 12.1 (théorème de transfert de la mesure-image) montre alors que $\mu + \nu$ est caractérisée par

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\,\mu * \nu(dz) = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f(x + y)\,\mu \otimes \nu(dx, dy)$$

le long des fonctions boréliennes bornées ou positives f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On écrit généralement plus simplement (grâce au théorème de Fubini)

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\,\mu * \nu(dz) = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f(x + y)\,\mu(dx)\nu(dy).$$

On vérifie qu'une telle opération entres mesures σ-finie est commutative, associative et possède la masse de Dirac en 0, δ_0, comme élément neutre.

Le lien avec la notion de convolution de fonctions est des plus naturel : si μ et ν ont respectivement f et g pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$, alors $\mu * \nu$ a une densité par rapport à λ_d donnée par $f * g$. L'exercice 14.15 ci-après reprend ces affirmations de façon plus précise.

Cette notion est essentielle en Probabilités puisque la convolée des lois de deux vecteurs aléatoires indépendants n'est autre que la loi de leur somme.

14.7 Exercices

L'espace mesuré est $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ où $d \geq 1$.

14.1 Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\chi := \mathbb{1}_{[a,b]}$ et, pour $n \geq 1$, $\chi_n := \chi * \cdots * \chi$ (n fois).

a) Représenter le graphe de χ_2 et montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\chi_n \in \mathscr{C}_K^{n-2}(\mathbb{R})$.

b) Calculer $\|\chi_n\|_1$ pour $n \geq 1$. Calculer $\|\chi_2\|_{\sup}$ et montrer que, pour tout $n \geq 3$, $\|\chi_n\|_{\sup} < \|\chi_n\|_1$.

c) Soit la fonction $\varphi := \sum_{n \geq 2} \chi_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$. Montrer que, sous cette condition, $\varphi \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ et vérifie l'équation fonctionnelle $\varphi = \chi * \varphi + \chi_2$. La fonction φ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

14.2 En considérant la convolution par la fonction $\mathbb{1}_{[0,1]}$, montrer que $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ n'a pas d'élément neutre pour l'opération $*$.

14.3 Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$. La transformée de Fourier de f est définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\hat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i(t \cdot x)}\, dx,$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

a) Montrer que $\hat{f} \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

b) Soient $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$. Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f}\ \hat{g}$.

c) En déduire que $L^1_{\mathbb{K}}(\lambda)$ n'a pas d'élément neutre pour l'opération $*$.

14.4 *Inégalité de Young pour la convolution*

Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ et $g \in \mathscr{L}^q_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$. Montrer que $f * g$ est définie λ_d-*p.p.* et vérifie *l'inégalité de Young pour la convolution*

$$f * g \in \mathscr{L}^r_{\mathbb{K}}(\lambda_d) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

14.5 Soient $f \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ et $g \in L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{K}$ tel que $|a| < \|f\|_1^{-1}$, l'équation $h - af * h = g$ possède une unique solution dans $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$.

14.6 Soient $p \in [1, +\infty[$, $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ et $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ une approximation positive de l'unité. Montrer que $\lim_n \|\alpha_n * f - f\|_p = 0$ en appliquant l'inégalité de Jensen avec la mesure de probabilité $\alpha_n(x)(dx)$ (*cf.* exercice 7.10).

14.7 Soient $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ et $g \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ telles que $\lim_{|x| \to +\infty} g(x) = 0$. Montrer que $f * g \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Le résultat subsiste-t-il si l'on omet le contrôle de g à l'infini ?

14.8 Soit $(B_n)_{n \geq 0}$ une suite de boules ouvertes de $\mathbb{R}^d$ centrées à l'origine et de rayon $r_n > 0$ tel que $\lim_n r_n = 0$; soient $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ et $(\overline{f}_n)_{n \geq 0}$ la suite des moyennes de f sur les boules B_n, définies sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\overline{f}_n(x) := \frac{1}{\lambda_d(B_n)} \int_{x+B_n} f(y)\lambda_d(dy).$$

Montrer qu'il existe une sous-suite $(\overline{f}_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ qui converge λ_d-$p.p.$ vers f.

14.9 Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ nulle hors d'un compact, telle que pour toute $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d)$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\Delta\varphi(x)\,dx = 0$, où Δ désigne le laplacien dans $\mathbb{R}^d$.

$a)$ Soit $\alpha \in \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\alpha * f \in \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d)$ et que, pour toute $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d)$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} (\alpha * f)(x)\,\Delta\varphi(x)\,dx = 0$.

$b)$ En déduire que $\alpha * f = 0$ puis que $f = 0$ λ_d-$p.p.$.

14.10 Cet exercice nécessite la notion de support essentiel d'une fonction mesurable étudiée dans l'exercice 6.14.

$a)$ Soient $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ et les ensembles $A := S^\mu_f \cup \{f = 0\}$, $B := S^\mu_g \cup \{g = 0\}$ et $F := S^\mu_f + S^\mu_g$. Montrer que $\lambda_d({}^cA) = \lambda_d({}^cB) = 0$ et que, pour tout $x \in {}^cF$, $\big\{y \in \mathbb{R}^d : f(x-y)\,g(y) \neq 0\big\} \subset (x - {}^cA) \cup {}^cB$.

$b)$ En déduire que $S^\mu_{f*g} \subset \overline{S^\mu_f + S^\mu_g}$.

14.11 Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$. On définit la transformée de Fourier de la fonction f par

$$\hat{f}(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i(t\cdot x)}\,dx, \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction a_n définie par $a_n(x) := (2\pi)^{-d}\,e^{-\frac{1}{n}(|x_1|+\cdots+|x_d|)}$, $x \in \mathbb{R}^d$.

$a)$ Calculer la fonction $\alpha_n := \widehat{a_n}$ et montrer que c'est un noyau de convolution sur $\mathbb{R}^d$ (*cf.* section 14.4).

$b)$ Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(\alpha_n * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_n(t)\,\hat{f}(t)\,e^{i(x\cdot t)}\,dt.$$

$c)$ En déduire la *formule d'inversion de Fourier*

$$(2\pi)^d\,f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\,e^{i(x\cdot t)}\,dt = \hat{\hat{f}}(-x) \quad \lambda_d(dx)\text{-}p.p..$$

14.12 $a)$ Soient $g, h \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ telles que $\hat{g} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ et $\|\hat{h}\|_\infty < 1$. Résoudre dans $\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ l'équation $f = g + h * f$.

$b)$ Soient a, b deux réels tels que $a > b > 0$ et g, h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) := e^{-a|x|}$ et $h(x) := (a-b)\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\,e^{-ax}$, $x \in \mathbb{R}$. Résoudre, à l'aide d'une équation différentielle, l'équation $f = g + h * f$.

c) En déduire la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(a-ix)\,(b+ix)}$.

14.13 Soit μ la mesure définie sur $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+^*)$ par $\mu(dx) := x^{-1}\,dx$. On définit le produit de convolution sur $\mathbb{R}_+^*$ de deux fonctions mesurables $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{K}$, par

$$f\star g(x) := \int_{\mathbb{R}_+^*} f(xy^{-1})\, g(y)\, \mu(dy),$$

lorsque cette intégrale a un sens.

a) Soient $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \overline{\mathbb{R}}_+$ deux fonctions boréliennes. Montrer que $f\star g$ définit une fonction borélienne de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et que

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} f\star g\, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+^*} f d\mu \int_{\mathbb{R}_+^*} g d\mu.$$

b) Soient $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$. Montrer que

$$f\star g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu) \text{ et } \|f\star g\|_{L^1(\mu)} \leq \|f\|_{L^1(\mu)} \|g\|_{L^1(\mu)}.$$

c) Soient $p \in [1, +\infty]$ et $(f, g) \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) \times \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$. Montrer que

$$f\star g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) \text{ et } \|f\star g\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^1(\mu)}.$$

14.14 *Inégalité de Hardy à poids*

On considère la mesure μ définie sur $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+^*)$ par $\mu(dx) := x^{-1}\,dx$ et $\star$ la convolution associée; soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $p \in [1, +\infty[$ et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{K}$ une fonction borélienne vérifiant $id^\alpha f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, où id désigne l'identité sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que la fonction $F(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt & \text{si } \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\, dt & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$ est bien définie pour tout $x > 0$ et qu'il existe $g_\alpha \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ telle que $id^\alpha F = (id^\alpha f)\star g_\alpha$.

b) En déduire *l'inégalité de Hardy à poids* :

$$\int_0^{+\infty} x^{p\alpha-1} |F(x)|^p\, dx \leq \frac{1}{|\alpha - 1|^p} \int_0^{+\infty} x^{p\alpha-1} |f(x)|^p\, dx \quad (\mathrm{H}_p)$$

et montrer que cette inégalité étend l'inégalité de Hardy de l'exercice 9.16.

c) Montrer que la constante $\frac{1}{|\alpha-1|^p}$ dans l'inégalité (H_p) est optimale.

d) Montrer qu'il n'y a pas d'inégalité analogue à (H_p) lorsque $\alpha = 1$.

14.15 Soient μ et ν deux mesures finies définies sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$. On note $\mu * \nu$ la mesure borélienne image de la mesure produit $\mu \otimes \nu$ par la fonction $(u, v) \mapsto u+v$.

a) Soit f une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\, d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(u+v)\, \mu(du)\, \nu(dv).$$

$b)$ Montrer que la loi $*$ ainsi définie est commutative, associative et possède la mesure de Dirac en 0 comme élément neutre.

$c)$ Soient $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\lambda_d)$ et μ, ν les mesures de densités respectives f, g par rapport à λ_d, *i.e.* $\mu := f.\lambda_d$, $\mu := g.\lambda_d$. Montrer que $\mu * \nu = (f * g).\lambda_d$.

$d)$ Soient $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\lambda_d)$ et $\mu := g.\lambda_d$. Montrer qu'il existe $h \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\lambda_d)$ tel que $d(\mu * \nu) = h.d\lambda_d$.

$e)$ Montrer que $\operatorname{supp} \mu * \nu \subset \overline{\operatorname{supp} \mu + \operatorname{supp} \nu}$ (la notion de support d'une mesure est définie à l'exercice 6.15).

Chapitre 15

Transformées de Fourier et de Laplace

La transformée de Fourier est un outil fondamental dans de nombreux domaines des mathématiques, tant pures qu'appliquées. Selon les domaines sa définition varie à la marge selon que l'on privilégie tel ou tel aspect ou champ d'application, notamment par l'introduction d'un facteur 2π dans l'argument de l'exponentielle complexe, voire une normalisation de la mesure dont on considère la transformation par un facteur $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}$. Notre choix s'est arrêté sur la convention la plus en cours en théorie des Probabilités.

Nous étudierons également mais de manière plus rapide, en lien avec la transformée de Fourier, la transformée de Laplace à la fin de ce chapitre.

Notations complémentaires : • Dans ce chapitre la notation $|\cdot|$ désignera exclusivement la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^d$. Le produit scalaire canonique de deux vecteurs $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $x' = (x'_1, \dots, x'_d) \in \mathbb{R}^d$ sera, lui, noté

$$(x|x') := \sum_{i=1}^{d} x_i\, x'_i.$$

• Le conjugué du nombre complexe z sera noté $\bar{z}$ et son module $|z|$.

• On note $\check{Id}$ la symétrie centrale $\check{Id} : x \mapsto \check{x} := -x$ et, pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$, $\check{f} := f \circ \check{Id}$. Ainsi $\check{f}(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. On utilisera sans restriction que $\check{Id} \circ \check{Id} = Id$ ($\check{Id}$ est involutive).

Rappel : Soit $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{K}$. On fera largement usage du résultat de densité suivant :

$$\forall\, p \in [1, +\infty[, \quad \mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}) \text{ est dense dans } (L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d), \|\cdot\|_p).$$

Ce théorème a été établi au chapitre 7 dans sa version uni-dimensionnelle et dans la section 9.7 (théorème 9.10) dans le cas général.

15.1 Définition et premières propriétés

***Définition* 15.1.** (a) *Soit μ une mesure (positive)* finie *sur $\mathbb{R}^d$. La* transformée de Fourier *de μ est une fonction $\widehat{\mu}$ définie en tout point ξ de $\mathbb{R}^d$ par*

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|x)}\mu(dx) \tag{15.1}$$

(b) *Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$. La* transformée de Fourier *de f est une fonction $\widehat{f}$ définie en tout point ξ de $\mathbb{R}^d$ par*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|x)} f(x)\,\lambda_d(dx). \tag{15.2}$$

L'existence des transformées de Fourier de μ et de f découle immédiatement du fait que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, $|e^{i(\xi|.)}| = \mathbb{1}$. En effet, $\mathbb{1} \in \mathscr{L}^1(\mu)$ puisque la mesure μ est finie et

$$\int_{\mathbb{R}^d} |e^{i(\xi|.)}|f(x)|\lambda_d(dx) < +\infty,$$

puisque $|f|$ est λ_d-intégrable par hypothèse.

Notons qu'à toute fonction f positive λ_d-intégrable définie sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$, on peut associer la mesure finie $\mu_f(dx) = f(x)\,\lambda_d(dx)$. On vérifie que les deux définitions de la transformée de Fourier sont consistentes puisque

$$\widehat{f}(\xi) := \widehat{f.\lambda_d}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|x)} f(x)\,\lambda_d(dx). \tag{15.3}$$

Les propriétés suivantes sont évidentes :

$\mathbf{P1}$ Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{\mu}(-\xi) = \overline{\widehat{\mu}(\xi)} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|x)}\check{\mu}(dx) = \widehat{\check{\mu}}(\xi),$$

où $\check{\mu}$ désigne l'image de μ par la symétrie centrale $\check{Id} : x \mapsto \check{x} := -x$. Ceci se reformule en

$$\widehat{\check{\mu}} = \overline{\widehat{\mu}} = \check{\widehat{\mu}}.$$

En particulier, si μ est symétrique, $\widehat{\mu}$ est à valeurs réelles.

$\mathbf{P'1}$ Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{f}(-\xi) = \overline{\widehat{\check{f}}(\xi)} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|x)} f(-x)\,\lambda_d(dx) = \widehat{\check{f}}(\xi)$$

i.e.

$$\widehat{\check{f}} = \overline{\widehat{\check{f}}} = \check{\widehat{f}}.$$

En particulier, si f est à valeurs réelles, $\widehat{f}(-\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$; si en outre f est paire, alors $\widehat{f}$ est à valeurs réelles.

P2 Pour toutes mesures finies μ, μ' sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ et tout $\rho \geq 0$, $\widehat{\rho\mu + \mu'} = \rho\,\widehat{\mu} + \widehat{\mu}'$ et $\widehat{\rho\,\mu} = \rho\,\widehat{\mu}$.

P′2 La transformée de Fourier est une application $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ et $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$.

***Proposition* 15.1.** (a) *Les transformées de Fourier $\widehat{\mu}$ et $\widehat{f}$ sont des fonctions uniformément continues et bornées. Plus précisément*

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\mu}\|_{\sup} &\leq \mu(\mathbb{R}^d),\\
\|\widehat{f}\|_{\sup} &\leq \|f\|_1,\\
|\widehat{\mu}(\xi) - \widehat{\mu}(\xi')| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \min\big(2, |\xi - \xi'|\,|x|\big)\,\mu(dx),\\
|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\xi')| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \min\big(2, |\xi - \xi'|\,|x|\big)\,|f(x)|\lambda_d(dx).
\end{aligned}$$

(b) *Théorème de Riemann-Lebesgue : Pour toute fonction $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$,*

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \big|\widehat{f}(\xi)\big| = 0.$$

En particulier, $\widehat{f} \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) = \{g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) : \lim_{|x| \to +\infty} g(x) = 0\}$.

DÉMONSTRATION : (a) Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{\mu}(\xi) - \widehat{\mu}(\xi') = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(\xi|x)} - e^{i(\xi'|x)})\mu(dx).$$

Or, pour tout u, $v \in \mathbb{R}$, $|e^{iu} - e^{iv}| \leq |u - v|$ d'une part d'après l'inégalité des accroissements finis et $|e^{iu} - e^{iv}| \leq 2$ d'autre part *via* l'inégalité triangulaire. Par conséquent

$$\begin{aligned}
|\widehat{\mu}(\xi) - \widehat{\mu}(\xi')| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \min\big(2, |(\xi - \xi'|x)|\big)\,\mu(dx)\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \min\big(2, |\xi - \xi'||x|\big)\,\mu(dx)
\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(b) Sachant que $e^{i\pi} = -1$, il vient

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|x)} f(x)\,\lambda_d(dx) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\left(\xi|x+\pi\,\xi/|\xi|^2\right)} f(x)\,\lambda_d(dx) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|y)} f\Big(y-\pi\,\xi/|\xi|^2\Big)\,\lambda_d(dy) \end{aligned}$$

via le changement de variable affine $x = y - \pi\,\xi/|\xi|^2$. D'où

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \frac{\widehat{f}(\xi)+\widehat{f}(\xi)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|x)}\big(f(x)-f(x-\pi\,\xi/|\xi|^2)\big)\,\lambda_d(dx) \end{aligned}$$

et partant

$$\begin{aligned} \big|\widehat{f}(\xi)\big| &\le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)-f\big(x-\pi\,\xi/|\xi|^2\big)\big|\,\lambda_d(dx) \\ &= \frac{1}{2}\big\|f-\tau_{\pi\,\xi/|\xi|^2}f\big\|_1 \underset{|\xi|\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

d'après le théorème 14.1 (b). $\diamondsuit$

Remarque : Le théorème de Riemann-Lebesgue (assertion (b)) *n'est pas vérifié par les transformées de Fourier de mesures finies* en général. Ainsi la transformée de Fourier de la masse de Dirac en $a \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{\delta_a}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|x)}\delta_a(dx) = e^{i(\xi|a)}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

est une fonction de module 1.

***Corollaire* 15.1.** *La transformée de Fourier de fonctions intégrables est une application $\mathbb{C}$-linéaire continue de $\big(\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d), \|\cdot\|_1\big)$ dans $\big(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}), \|\cdot\|_{\sup}\big)$.*

On peut aller beaucoup plus loin dans l'analyse de la régularité de la transformée de Fourier.

***Proposition* 15.2.** (a) *Si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}|x|\mu(dx) < +\infty$, alors $\widehat{\mu} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\frac{\partial\widehat{\mu}}{\partial\xi_k}(\xi) = i\int_{\mathbb{R}^d} x_k e^{i(\xi|x)}\mu(dx). \tag{15.4}$$

(b) *Si la fonction $x \mapsto |x||f(x)| \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$ alors $\widehat{f} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\frac{\partial\widehat{f}}{\partial\xi_k}(\xi) = i\int_{\mathbb{R}^d} x_k e^{i(\xi|x)} f(x)\,\lambda_d(dx). \tag{15.5}$$

DÉMONSTRATION : Ces affirmations sont des applications immédiates des théorèmes de dérivation et de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre. $\diamondsuit$

***Corollaire* 15.2.** (a) *Si la mesure finie μ admet des moments polynômiaux à tous les ordres (*i.e. $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^n \mu(dx) < +\infty$ *pour tout $n \in \mathbb{N}$), alors $\widehat{\mu} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

(b) *Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^n |f(x)| \lambda_d(dx) < +\infty$, alors $\widehat{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

***Proposition* 15.3.** *Si f est continûment différentiable sur $\mathbb{R}$, $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$ et $f \in \mathscr{L}^1(\lambda_d)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \in \mathscr{L}^1(\lambda_d)$, $k = 1, \ldots, d$, alors*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi|x)} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) dx_k = -i\, \xi_k \widehat{f}(\xi).$$

D'où, en particulier,

$$\widehat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{|\xi|}\right) \qquad \textit{lorsque } |\xi| \to +\infty.$$

Remarque : Lorsque $d = 1$, l'hypothèse $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$ est redondante car

$$\forall x,\, y \in \mathbb{R}^d, \quad |f(x) - f(y)| \leq \left| \int_x^y |f'(u)| du \right|.$$

Comme f' est intégrable, $x \mapsto \int_0^x |f'(u)| du$ converge vers une limite finie lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. On en déduit immédiatement que f vérifie le critère de Cauchy (fonctionnel) en $\pm\infty$. Donc f admet des limites finies en $\pm\infty$, limites qui sont toutes deux nulles eu égard à l'intégrabilité de f.

DÉMONSTRATION : Par définition de la transformée de Fourier, on a pour tout $k = 1, \ldots, d$,

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|x)} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\, \lambda_d(dx).$$

On fait disparaître la dérivée partielle de f *via* une intégration par parties en la variable x_k

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi|x)} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) dx_k &= \Big[f(x)\, e^{i(\xi|x)} \Big]_{x_k = -\infty}^{x_k = +\infty} - i\, \xi_k \widehat{f}(\xi) \\ &= -i\, \xi_k \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi|x)} f(x) dx_k. \end{aligned}$$

En intégrant cette égalité par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_d$, il vient

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(\xi) \;=\; -i\,\xi_k \widehat{f}(\xi).$$

On procède ainsi pour chacune des d variables, d'où il ressort que, pour tout rśel $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\max\big(|\xi_1|, \ldots, |\xi_d|\big)\,\big|\widehat{f}(\xi)\big| \leq \max\left(\left|\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(\xi)\right|, \ldots, \left|\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_d}}(\xi)\right|\right). \tag{15.6}$$

On se ramène à la norme euclidienne, en notant que $|\xi| \leq \sqrt{d}\max\big(|\xi_1|, \ldots, |\xi_d|\big)$ et l'on conclut *via* le théorème de Riemann-Lebesgue (Proposition 15.1(b)). $\Diamond$

***Corollaire* 15.3.** *Soit $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}^d)$, $n \geq 1$. Si, pour toute paire de multi-indices $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d \leq n$ et $\beta := (\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$, $|\beta| \leq n-1$,*

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} \in \mathscr{L}^1(\lambda_d) \quad \textit{et} \quad \lim_{|x| \to +\infty} \frac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_d} f}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_d^{\beta_d}}(x) = 0,$$

alors $|\widehat{f}(\xi)| = o\big(1/|\xi|^n\big)$.

DÉMONSTRATION : On procède par récurrence rétrograde. On initialise le processus en appliquant la proposition 15.3 ci-dessus aux dérivées partielles d'ordre $n-1$. Puis l'on remonte de proche en proche en s'appuyant sur l'inégalité (15.6) établie dans la démonstration de la proposition 15.3 ci-avant. $\Diamond$

Au vu des résultats qui précèdent on constate une forme de dualité entre régularité et comportement à l'infini d'une fonction et de sa transformé de Fourier. D'où l'idée d'introduire un ensemble qui possèderait les deux types de propriétés et qui *de facto* serait globalement stable par la transformée de Fourier.

***Définition* 15.2.** *On pose*

$$\mathscr{S} := \left\{ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) : \forall\, n \in \mathbb{N}^d,\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_d} f}{\partial x_1^{n_1} \cdots \partial x_d^{n_d}}(\xi) = O\big(1/|\xi|^m\big) \right\}$$

l'ensemble des fonctions régulières à décroissance rapide *(parfois appelé* espace de Schwartz *en référence au mathématicien français Laurent Schwartz).*

En outre, on définit $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}$ comme l'ensemble des fonctions à valeurs complexes dont parties réelles et imaginaires sont éléments de $\mathscr{S}$.

***Corollaire* 15.4.** *Si $f \in \mathscr{S}$, alors $\widehat{f} \in \mathscr{S}$.*

DÉMONSTRATION : Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, il existe une constante réelle $C > 0$, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|x|^m |f(x)| \leq \frac{C}{(|x|^2+1)^d}.$$

Or $|x| \geq |x_k|$ pour tout $k = 1, \ldots, d$, donc

$$(1+|x|^2)^d \geq \prod_{1 \leq k \leq d} (1+x_k^2).$$

Il s'ensuit d'après le théorème de Fubini-Tonnelli que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^m |f(x)| \lambda_d(dx) \leq C \prod_{k=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx_k}{1+x_k^2} = C\pi^d < +\infty,$$

donc $\widehat{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ d'après le Corollaire 15.2. D'autre part, comme f vérifie les hypothèses du Corollaire 15.3 à tout ordre n, il vient :

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| = O\left(\frac{1}{|\xi|^n}\right).$$

Enfin, comme

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_k}(\xi) = i\, \widehat{x_k f(x)}(\xi)$$

et que $x \mapsto x_k f(x)$ est clairement dans $\mathscr{S}$ si f l'est, il apparaît que

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_k} = O\left(\frac{1}{|\xi|^n}\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On conclut *via* une récurrence immédiate. $\diamondsuit$

Parmi toutes les fonctions de $\mathscr{S}$ il en est une qui possède des propriétés d'invariance plus spécifiques dont nous ferons un usage crucial dans la suite. Ceci est illustré par l'exemple suivant.

Exemple : On définit sur $\mathbb{R}^d$ la fonction

$$\varphi_d(x) := e^{-|x|^2}.$$

Il est clair que $\varphi_d \in \mathscr{S}$ et que, par conséquent, $\widehat{\varphi}_d \in \mathscr{S}$. En fait on peut calculer explicitement la transformée de Fourier de cette fonction. Dans un premier temps on se ramène à la dimension 1 en notant que, grâce au théorème de Fubini-Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_d(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|x)} e^{-|x|^2} \lambda_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^{d} e^{i\xi_k x_k} e^{-x_k^2}\, dx_1 \cdots dx_d \\
&= \prod_{k=1}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_k x_k} e^{-x_k^2} dx_k \right) = \prod_{k=1}^{d} \widehat{\varphi}_1(\xi_k).
\end{aligned}$$

Or, d'après la Proposition 15.2(b), pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$(\widehat{\varphi}_1)'(\xi) = i \int_{\mathbb{R}} e^{iu\xi}\, u\, e^{-u^2} du.$$

D'où, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi u}\, u\, e^{-u^2} du &= \left[e^{iu\xi} \left(-\frac{1}{2} e^{-u^2} \right) \right]_{u=-\infty}^{u=+\infty} + i\,\xi/2 \int_{\mathbb{R}} e^{iu\xi} e^{-u^2} du \\ &= i\,\xi/2\, \widehat{\varphi}_1(\xi). \end{aligned}$$

Par conséquent $\widehat{\varphi}_1$ vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$(\widehat{\varphi}_1)'(\xi) + \xi/2\, \widehat{\varphi}_1(\xi) = 0.$$

Cette équation différentielle admet une solution explicite donnée par

$$\widehat{\varphi}_1(\xi) = \widehat{\varphi}_1(0)\, e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

D'autre part $\widehat{\varphi}_1(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ (*cf.* 11). D'où finalement

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{\varphi}_d(\xi) = \pi^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}. \tag{15.7}$$

***Proposition* 15.4.** (a) *Soient μ et ν deux mesures positives finies. Alors*

$$\widehat{\mu * \nu} = \widehat{\mu}\,\widehat{\nu}.$$

(b) *Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$. Alors*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}.$$

DÉMONSTRATION : (a) Par définition de $\mu * \nu$, mesure image de $\mu \otimes \nu$ par l'application $(x, y) \mapsto x + y$, et grâce au théorème de Fubini-Lebesgue, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \widehat{\mu * \nu}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|z)} (\mu * \nu)(dz) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{i(\xi|x)} e^{i(\xi|y)} (\mu \otimes \nu)(dx, dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|x)} \mu(dx) \right] e^{i(\xi|y)} \nu(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(\xi)\, e^{i(\xi|y)} \nu(dy) \\ &= \widehat{\mu}(\xi)\, \widehat{\nu}(\xi). \end{aligned}$$

(b) Ceci découle du point (a) lorsque f et g sont positives. On passe au cas général en s'appuyant sur la bilinéarité du produit de convolution et du produit de deux nombres complexes. On peut également procéder directement en imitant la preuve du point (a). $\Diamond$

15.2 Injectivité et formule d'inversion

Le résultat principal de ce paragraphe est d'établir l'injectivité de la transformée de Fourier. Cette propriété permettra, notamment en Probabilités, de caractériser la loi d'un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ à l'aide d'une seule fonction.

***Théorème* 15.1** (Injectivité de la transformée de Fourier)**.**
(a) *L'application* $\big(\mu \mapsto \widehat{\mu}\big)$ *est injective sur l'ensemble* $\mathscr{M}_f^+$ *des mesures positives finies sur* $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$.
(b) *L'application* $\big(f \mapsto \widehat{f}\big)$ *est injective sur* $L^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. *En d'autres termes, pour toutes fonctions* $f,\ g \in \mathscr{L}^1(\lambda_d)$,

$$\widehat{f} = \widehat{g} \quad \Rightarrow \quad f = g \ \lambda_d\text{-}p.p.$$

Ce théorème repose sur une identité essentielle qui sera établie dans le lemme 15.2 ci-après qui lui-même nécessite un petit lemme préparatoire.

***Lemme* 15.1.** (a) *Soient* $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ *et* $\theta > 0$. *Alors la fonction* $f_\theta(x) := f(x/\theta)$ *vérifie*

$$\widehat{f_\theta}(\xi) = \theta^d \widehat{f}(\theta\xi).$$

(b) *On considère pour tout* $\sigma > 0$, *la fonction* g_σ *définie par*

$$g_\sigma(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\sigma^d} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La fonction g_σ *est une densité de probabilité (*appelée densité gaussienne centrée de variance σ^2*) et, pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{g}_\sigma(\xi) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}. \tag{15.8}$$

DÉMONSTRATION : (a) Le changement de variables homothétique $x := \theta y$ entraîne

$$\widehat{f_\theta}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|x)} f(x/\theta)\, \lambda_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|\theta y)} f(y)\theta^d \lambda_d(dy) = \theta^d \widehat{f}(\theta\xi).$$

(b) Ce point découle du point (a) appliqué avec $\theta = \sqrt{2}\,\sigma$ et de l'identité (15.7). $\diamond$

***Lemme* 15.2.** *Soit* μ *une mesure positive finie. Pour tout* $\sigma > 0$, *on définit la convolution de la fonction* g_σ *et de la mesure* μ ([1]) *par*

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^d, \qquad (g_\sigma * \mu)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} g_\sigma(\xi - x)\mu(dx).$$

1. La fonction $g_\sigma * \mu$ ainsi définie n'est autre que la densité de la mesure absolument continue $(g_\sigma.\lambda_d) * \mu$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$(g_\sigma * \mu)(\xi) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(y) e^{-i(\xi|y)} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|y|^2} \lambda_d(dy). \tag{15.9}$$

L'identité (15.9) reste vraie si l'on remplace formellement la mesure finie μ *et sa transformée de Fourier* $\widehat{\mu}$ *par une fonction* $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ *et sa transformée de Fourier* $\widehat{f}$.

DÉMONSTRATION : On part du constat que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{g}_{\frac{1}{\sigma}}(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2\sigma^2}}.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} g_\sigma * \mu(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\xi - x|^2}{2\sigma^2}} \frac{\mu(dx)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\sigma^d} = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}_{\frac{1}{\sigma}}(\xi - x) \frac{\mu(dx)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\sigma^d} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi - x|y)} e^{-\sigma^2 \frac{|y|^2}{2}} \sigma^d \frac{dy}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\mu(dx)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\sigma^d} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x|y)} \mu(dx)\right] e^{i(\xi|y)} e^{-\sigma^2\frac{|y|^2}{2}} \frac{dy}{(2\pi)^d}. \end{aligned}$$

La dernière égalité découle du théorème de Fubini-Lebesgue qu'il est loisible d'appliquer puisque la fonction

$$(x, y) \mapsto \left| e^{i(\xi - x|y)} e^{-\sigma^2 \frac{|y|^2}{2}} \right| = e^{-\sigma^2 \frac{|y|^2}{2}}$$

est clairement $\mu(dx) \otimes \lambda_d(dy)$-intégrable. Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} g_\sigma * \mu(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(-y)\, e^{i(\xi|y)} e^{-\sigma^2\frac{|y|^2}{2}} \frac{dy}{(2\pi)^d} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(y)\, e^{-i(\xi|y)} e^{-\sigma^2\frac{|y|^2}{2}} \frac{dy}{(2\pi)^d} \end{aligned}$$

car la mesure de Lebesgue est invariante par symétrie centrale. La démonstration dans le cas d'une fonction intégrable est identique. $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 15.1 : (a) Si $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$, il découle de la formule (15.9) du lemme 15.2 que, pour tout$\sigma > 0$,

$$g_\sigma * \mu = g_\sigma * \nu.$$

Nous allons établir que, pour toute fonction $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lipschitzienne bornée,

$$\int_{\mathbb{R}^d} h d\mu = \lim_{\sigma \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} h(x)(g_\sigma * \mu)(x)\, \lambda_d(dx). \tag{15.10}$$

Comme

$$|h(x)g_\sigma(x-y)| \leq \|h\|_{\sup} g_\sigma(x-y) \text{ et } (x,y) \mapsto g_\sigma(x-y) \in \mathscr{L}^1(\lambda_d \otimes \mu),$$

on peut appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue, d'où il ressort que

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(x)(g_\sigma * \mu)(x)\, \lambda_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g_\sigma(x-y)h(x)\, \lambda_d(dx) \right) \mu(dy).$$

Par le changement de variable affine $x := y+z$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(x)(g_\sigma * \mu)(x)\, \lambda_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g_\sigma(z)h(y+z)\, \lambda_d(dz) \right) \mu(dy).$$

D'autre part, g_σ étant une densité de probabilité,

$$\int_{\mathbb{R}^d} h\, d\mu \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h d\mu \right) g_\sigma(z)\, \lambda_d(dz),$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^d} h(x)(g_\sigma * \mu)(x)\, \lambda_d(dx) - \int_{\mathbb{R}^d} h d\mu \right| \\
&\qquad = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} g_\sigma(z)(h(y+z) - h(y))\, \lambda_d(dz)\mu(dy) \right| \\
&\qquad \leq [h]_{\mathrm{Lip}}\, \mu(\mathbb{R}^d) \int_{\mathbb{R}^d} |z|\, g_\sigma(z)\, \lambda_d(dz) \\
&\qquad = [h]_{\mathrm{Lip}}\, \mu(\mathbb{R}^d) \int_{\mathbb{R}^d} \sigma|z|\, \frac{e^{-\frac{|z|^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\, \sigma^d} \sigma^d \lambda_d(dz) \\
&\qquad = \sigma\, [h]_{\mathrm{Lip}}\, \mu(\mathbb{R}^d) \int_{\mathbb{R}^d} |z|\, \frac{e^{-\frac{|z|^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\, \lambda_d(dz) \quad \underset{\sigma \to 0}{\longrightarrow} \; 0.
\end{aligned}$$

Via la convergence (15.10), on déduit que l'égalité $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$ entraîne

$$\int_{\mathbb{R}^d} h\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} h\, d\nu$$

pour toute fonction lipschitzienne bornée. Soit alors F un fermé de $\mathbb{R}^d$ et h_p définie par $h_p(x) := (1 - p\, d(x,F))_+$. Les fonctions h_p sont lipschitziennes bornées et décroissent vers $\mathbb{1}_F$, donc par convergence dominée, on déduit que $\mu(F) = \nu(F)$. Les mesures finies μ et ν coïncident donc sur le π-système des fermés, générateur des boréliens de $\mathbb{R}^d$. Par conséquent $\mu = \nu$.

(b) La démarche adoptée dans le point (a) se transpose de façon immédiate en remplaçant formellement $\mu(dx)$ par $f(x)\, \lambda_d(dx)$, puis par la mesure positive finie $|f(x)|\lambda_d(dx)$. On obtient alors que, pour tout fermé F de $\mathbb{R}^d$,

$$\int_F f(x)\, \lambda_d(dx) = \int_F g(x)\, \lambda_d(dx).$$

Or, on vérifie aisément (à l'aide du théorème de convergence dominée) que

$$\Lambda := \left\{ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d),\ \int_A f(x)\,\lambda_d(dx) = \int_A g(x)\,\lambda_d(dx) \right\}$$

est un λ-système sur $\mathbb{R}^d$. Il contient le π-système des fermés de $\mathbb{R}^d$, générateur des boréliens donc $\Lambda = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$. On en conclut que $f = g\ \lambda_d$-$p.p.$ en considérant successivement les boréliens $\{f > g\}$ et $\{g > f\}$ et en utilisant que si $\int_{\mathbb{R}^d} h d\lambda_d = 0$ et h est borélienne positive alors $h = 0\ \lambda_d$-$p.p.$ $\diamondsuit$

On déduit de ce théorème le corollaire immédiat suivant.

***Corollaire* 15.5.** (a) *Une mesure finie μ est symétrique si et seulement si sa transformée de Fourier $\widehat{\mu}$ est à valeurs réelles.*

(b) *Une fonction à valeurs réelles f est "$\lambda_d(dx)$-p.p." paire ($f(x) = f(-x)$ $\lambda_d(dx)$-p.p.) si et seulement si $\widehat{f}$ est à valeurs réelles (on peut supprimer le $\lambda_d(dx)$-p.p. si f est* a priori *continue).*

Le théorème d'inversion (globale) de la transformée de Fourier s'appuie sur les mêmes ingrédients.

***Théorème* 15.2** (Inversion de Fourier)**.**
(a) *Soit μ une mesure positive finie telle que $\widehat{\mu} \in \mathscr{L}^1(\lambda_d)$. Alors μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et admet une densité (positive) φ, uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$, donnée en tout point x par*

$$\varphi(x) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(\xi) e^{-i(x|\xi)}\,\lambda_d(d\xi) = (2\pi)^{-d}\,\widehat{\widehat{\mu}}(-x).$$

(b) *Si f et $\widehat{f}$ sont dans $\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$, alors*

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{-i(x|\xi)}\,\lambda_d(d\xi) = (2\pi)^{-d}\,\widehat{\widehat{f}}(-x) \quad \lambda_d(dx)\text{-}p.p. \tag{15.11}$$

En particulier, ceci entraîne que l'égalité (15.11) est vérifiée ponctuellement en tout réel x en lequel la fonction f est continue à droite ou à gauche.

Remarque : On déduit du point (b) que si f a une transformée de Fourier intégrable, alors f est λ_d-$p.p.$ égale à une fonction continue bornée tendant vers 0 à l'infini (propriétés vérifiées par toute transformée de Fourier de fonction intégrable).

DÉMONSTRATION : (a) Comme $\widehat{\mu} \in \mathscr{L}^1(\lambda_d)$, le théorème de convergence dominée permet de passer à la limite lorsque $\sigma \to 0$ dans l'identité (15.9) du lemme 15.2 de façon à obtenir

$$\lim_{\sigma \to 0} g_\sigma * \mu(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(\xi)\, e^{-i(x|\xi)}\,\lambda_d(d\xi), \tag{15.12}$$

en utilisant que

$$\left| \widehat{\mu}(\xi) e^{-i(x|\xi)} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2} \right| \leq |\widehat{\mu}(\xi)| \in \mathscr{L}^1\big(\lambda_d(d\xi)\big).$$

Notons φ la fonction en la variable $x \in \mathbb{R}^d$ définie par l'égalité (15.12). Tout d'abord il est clair que $\varphi(x) = (2\pi)^{-d} \,\widehat{\widehat{\mu}}(-x)$. La fonction φ est donc bornée et (uniformément) continue en tant que transformée de Fourier d'une fonction intégrable (la fonction $(2\pi)^{-d}\check{\widehat{\mu}}$). Enfin φ est à valeurs réelles car

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi(x)} &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{\mu}(\xi)\, e^{-i(x|\xi)}}\, \lambda_d(d\xi) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(-\xi)\, e^{i(x|\xi)}\, \lambda_d(d\xi) \\
&= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(\xi')\, e^{-i(x|\xi')}\, \lambda_d(d\xi') \qquad (\xi = -\xi') \\
&= \varphi(x).
\end{aligned}$$

D'autre part, par application du théorème de convergence dominée, on déduit que pour toute fonction h continue à support compact

$$\begin{aligned}
\lim_{\sigma\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} h(x)(g_\sigma * \mu)(x)\, \lambda_d(dx) &= \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \lim_{\sigma\to 0} (g_\sigma * \mu)(x)\, \lambda_d(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\varphi(x)\, \lambda_d(dx).
\end{aligned}$$

Combinant ceci avec la convergence (15.10) obtenue lors de la démonstration du théorème 15.1 (injectivité) on obtient que pour toute fonction $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lipschitzienne à support compact

$$\int_{\mathbb{R}^d} h\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} h\varphi\, d\lambda_d, \tag{15.13}$$

soit encore

$$\int_{\mathbb{R}^d} h d\mu + \int_{\mathbb{R}^d} h\varphi_- \cdot d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} h\varphi_+ \cdot d\lambda_d \tag{15.14}$$

où $\varphi_\pm = \max(\pm\varphi, 0)$ désignent respectivement les parties positive et négative de la fonction φ (ce sont toutes deux, par construction, des fonctions continues positives, bornées par $\|\varphi\|_{\sup}$).

Nous allons établir que $\varphi_- = 0$ et que $\mu = \varphi \cdot \lambda_d$. Chacun des deux membres de l'équation (15.14) définit une forme linéaire positive (en la variable h) sur $\big(\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup}\big)$. Ces deux formes linéaires coïncident donc sur le sous-espace $\mathrm{Lip}_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ qui est dense dans $\big(\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup}\big)$ d'après le théorème 9.10, elles sont donc en fait identiques. D'après le théorème de Riesz (théorème 10.1) la mesure de représentation d'une forme linéaire positive continue est unique donc

$$\mu + \varphi_-.\lambda_d = \varphi_+.\lambda_d.$$

En particulier, sachant $\varphi_- \times \varphi_+ \equiv 0$, il vient

$$\mathbb{1}_{\{\varphi_->0\}}.\mu = -\varphi_-.\lambda_d$$

ce qui entraîne à son tour que la mesure $\varphi_-.\lambda_d$ est à la fois positive et négative donc identiquement nulle ; soit encore que $\varphi_- = 0$ λ_d-*p.p.* La fonction φ_- étant continue, elle est donc identiquement nulle.

Enfin, comme les fonctions $(2\pi)^{-d}\widehat{\widehat{f}}(-.)$ et f sont égales sur une partie partout dense de $\mathbb{R}$, il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}$, une suite x_n convergeant vers x, soit par valeurs strictement supérieures, soit par valeurs strictement inférieures, selon les besoins, où les deux fonctions coïncident. La première fonction étant continue (partout) et la seconde l'étant (à droite ou à gauche) en x, elles sont égales en x. Le même raisonnement s'applique pour les limites à droite et à gauche. $\diamondsuit$

Exemple : Soit $f(x) := 1/(1+x^2)$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{f}(\xi) = \pi\, e^{-|\xi|}.$$

Pour établir cette formule, on prend le problème à l'envers : on part de la transformée de Fourier de l'exponentielle symétrisée qui, elle, se calcule aisément :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-|x|}\, dx &= \int_{-\infty}^{0} e^{(i\xi+1)x} dx + \int_0^{+\infty} e^{(i\xi-1)x}\, dx \\ &= \frac{1}{i\xi+1} - \frac{1}{i\xi-1} = \frac{-2}{-x^2-1} \\ &= \frac{2}{x^2+1}.\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto 2/(x^2+1)$ est intégrable donc par la formule d'inversion, on trouve que

$$\begin{aligned}e^{-|x|} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\,\frac{2}{1+\xi^2}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\,\frac{2}{1+\xi^2}\, d\xi.\end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé.

Le corollaire suivant se déduit immédiatement du théorème précédent, du Corollaire 15.4 (et de la propriété **P'1** $\widehat{\check{f}} = \check{\widehat{f}}$).

***Corollaire* 15.6.** *Pour toute fonction $f \in \mathscr{S}$, $\widehat{f} \in \mathscr{S}$ et*

$$\widehat{\widehat{f}} = (2\pi)^d \check{f}.$$

En particulier si l'on désigne par $\mathscr{F}$ l'opérateur de transformée de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$, il vient $\mathscr{F}(\mathscr{S}) = \mathscr{S}$ et, sur $\mathscr{S}$,

$$\mathscr{F}^{-1} = (2\pi)^{-d}\check{\mathscr{F}} \quad \text{où} \quad \check{\mathscr{F}}(f) := \mathscr{F}(\check{f}).$$

Il existe également un résultat local d'inversion de la transformée de Fourier, énoncé ici pour les fonctions de la variable réelle. On note $f(x^+)$ et $f(x^-)$ les limites à droite et à gauche de la fonction f lorsqu'elles existent.

***Théorème* 15.3.** *Soient $f \in \mathscr{L}^1(\lambda_d)$ et $x \in \mathbb{R}$. Si la fonction f admet une limite à droite et à gauche en x, notées respectivement $f(x^+)$ et $f(x^-)$ et si la fonction*

$$t \longmapsto \frac{f(x+t) + f(x-t) - (f(x^+) + f(x^-))}{t} \tag{15.15}$$

est intégrable au voisinage de 0, alors

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{M \to +\infty} \int_{-M}^{M} \widehat{f}(\xi) e^{-ix\xi}\, d\xi. \tag{15.16}$$

Remarque : Ce résultat est à rapprocher de son analogue plus classique sur les séries de Fourier.

Remarque : La condition (15.15) est notamment vérifiée si f est localement lipschitzienne (voire höldérienne) à droite et à gauche de x. En outre, aucune hypothèse d'intégrabilité n'est requise sur $\widehat{f}$.

***Lemme* 15.3.** *Soit $F \in \mathscr{L}^1\big(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda\big)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ une fonction vérifiant*

$$x \longmapsto \frac{F(x) - F(0^+)}{x}\, \mathbb{1}_{]0,\eta]}(x) \in \mathscr{L}^1\big(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda\big)$$

pour un réel $\eta > 0$. Alors

$$\lim_{M \to +\infty} \int_0^{+\infty} F(x)\, \frac{\sin(Mx)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} F(0^+).$$

DÉMONSTRATION : On sait (*cf.* par exemple Application 1.6, 1) que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(Mx)}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy = \frac{\pi}{2},$$

donc

$$\int_0^{+\infty} F(x)\, \frac{\sin(Mx)}{x}\, dx - \frac{\pi}{2} F(0^+) \quad = \quad \int_0^{+\infty} \frac{F(x) - F(0^+)}{x} \sin(Mx) dx$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ et $a \in]0, \eta]$.

$$\begin{aligned}\left| \int_0^{+\infty} F(x)\, \frac{\sin(Mx)}{x}\, dx - \frac{\pi}{2} F(0^+) \right| \quad &\leq \quad \int_0^a \frac{|F(x) - F(0^+)|}{x}\, dx \\ &\quad + \left| \Im m \left(\widehat{G}_a(M) \right) \right| \\ &\quad + |F(0^+)| \left| \int_{Ma}^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy \right| \end{aligned}$$

où $G_a(x) := F(x)/x\,\mathbb{1}_{]a,+\infty]}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Les fonctions G_a sont dans $\mathscr{L}^1(\lambda)$ pour tout $a > 0$ car $|G_a(x)| \leq \frac{1}{a}|F(x)|$ et $F \in \mathscr{L}^1(\lambda)$ par hypothèse. On choisit alors $a = a_\varepsilon$ de façon que

$$\int_0^{a_\varepsilon} \frac{|F(x) - F(0^+)|}{x}\, dx \leq \varepsilon/3$$

par continuité de l'intégrale de la borne supérieure d'une fonction intégrable. Puis l'on choisit M_ε suffisamment grand pour que l'on ait, pour tout $M \geq M_\varepsilon$, d'une part $|\widehat{G}_{a_\varepsilon}(M)| \leq \varepsilon/3$ (ceci est loisible au vu du théorème de Riemann-Lebesgue (proposition 15.1(b)) et, d'autre part,

$$|F(0^+)| \left| \int_{Ma_\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy \right| \leq \varepsilon/3$$

$\big($compte tenu de la (semi-)convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy\big)$. En combinant ces trois inégalités, on conclut que pour tout $M \geq M_\varepsilon$,

$$\left| \int_0^{+\infty} F(x)\, \frac{\sin(Mx)}{x}\; dx - \frac{\pi}{2} F(0^+) \right| \leq \varepsilon. \qquad \diamondsuit$$

Démonstration du théorème 15.3 : Pour tout $M > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{-M}^{M} e^{-ix\xi}\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi &= \int_{-M}^{M} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{i\xi u} f(u)\, du\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i(u-x)M} - e^{-i(u-x)M}}{i(u-x)} f(u) du
\end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini-Lebesgue. D'où

$$\begin{aligned}
\int_{-M}^{M} e^{-ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi &= 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin((u-x)M)}{u-x} f(u) du \\
&= 2 \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin((u-x)M)}{u-x} f(u) du \\
&\quad + 2 \int_{x}^{+\infty} \frac{\sin((u-x)M)}{u-x} f(u)\, du \\
&= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(Mv)}{v} f(x-v) dv \\
&\quad + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(Mv)}{v} f(u) dv \\
&= 4 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(Mv)}{v} \left(\frac{f(x+v) + f(x-v)}{2} \right) dv.
\end{aligned}$$

On applique alors le lemme précédent à $F(v) := \dfrac{f(x+v) + f(x-v)}{2}$. $\diamondsuit$

15.3 Transformée de Fourier-Plancherel

Le but de ce paragraphe est de “prolonger” la transformée de Fourier des fonctions intégrables à l’espace $\mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ des fonctions de carré intégrable. Le terme “prolonger” est abusif puisque $\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ n’est pas inclus dans $\mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$.

***Lemme* 15.4.** *Soient f, $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$. Alors $\widehat{f}$, $\widehat{g} \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}\, g\, d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} f\, \widehat{g}\, d\lambda_d.$$

DÉMONSTRATION : D’après le théorème de Fubini (qu’il est clairement loisible d’appliquer)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|x)} f(x) dx\right] g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x|\xi)} g(\xi)\, d\xi\right] f(x)\, dx,$$

i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\widehat{g}(\xi)\, d\xi. \qquad \diamondsuit$$

Soient φ, $\psi \in \mathscr{S}_{\mathbb{C}}$. D’après la propriété **P’1**, le lemme précédent et le Corollaire 15.6 on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}\, \overline{\widehat{\widehat{\psi}}}\, d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\, \overline{\widehat{\widehat{\widehat{\psi}}}}\, d\lambda_d = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\, \overline{\psi}\, d\lambda_d.$$

Comme $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$, puisqu’il contient l’espace $\mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ d’après le théorème 14.8 (b), et $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ est une isométrie (linéaire) de $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$, cette application se prolonge donc en une isométrie Φ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ dans lui-même.

***Définition* 15.3.** *L’isométrie Φ est appelée* transformée de Fourier-Plancherel.

***Théorème* 15.4** (Plancherel)**.**
La transformée de Fourier-Plancherel vérifie les propriétés suivantes :
(a) $\Phi \circ \Phi = (2\pi)^d\, \check{\mathrm{Id}}$.

(b) *Pour tous $f, g \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(f)\, \overline{\Phi(g)}\, d\lambda_d = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f\, \bar{g}\, d\lambda_d.$$

(c) $\Phi_{|L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d,\lambda_d)\cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d,\lambda_d)}$ *et $\mathscr{F}$ coïncident sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \lambda_d) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$. En d’autres termes , si $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \lambda_d) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$, alors*

$$\widehat{f} = \Phi(f) \quad \lambda_d\text{-}p.p.$$

DÉMONSTRATION : (a) Les deux applications coïncident sur $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}$ qui est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$.

(b) L'identité est une conséquence évidente de la polarisation de la norme $\|\cdot\|_2$ sur $L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$.

(c) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \lambda_d) \cap L^2(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ et soit $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une suite régularisante construite à partir d'une fonction $\alpha \in \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ au sens de la définition 14.8. Nous allons montrer que $f_n = \rho_n * \big(f\,\mathbb{1}_{[-n,n]^d}\big)$, $n \geq 1$, est une suite de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact convergeant vers f dans L^1 et dans L^2.

Les fonctions f_n sont à support compact car chacune est la convolée de deux fonctions à support compact. Leur différentiabilité $\mathscr{C}^\infty$ est une conséquence immédiate du théorème 14.8.

D'après le théorème 14.5, $\rho_n * f \overset{L^1\,\&\,L^2}{\longrightarrow} f$ lorsque $n \to \infty$. D'autre part, d'après le théorème 14.4, on a pour $p \in \{1, 2\}$,

$$\big\|f_n - \rho_n * f\big\|_p = \big\|\rho_n * \big(f\,\mathbb{1}_{c[-n,n]^d}\big)\big\|_p \leq \big\|\rho_n\big\|_1 \big\|f\,\mathbb{1}_{c[-n,n]^d}\big\|_p.$$

Or $\|\rho_n\|_1 = 1$ et on conclut par convergence dominée.

Comme Φ et $\mathscr{F}$ coïncident sur $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}$, le résultat découle de la continuité respective de $\mathscr{F}$ et Φ pour les convergences dans L^1 et L^2. $\diamondsuit$

***Proposition* 15.5.** *Pour tous $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$*

$$\Phi(f) * \Phi(g) = (2\pi)^d\, \widehat{fg}.$$

DÉMONSTRATION : Si $f, g \in \mathscr{S}$, $\widehat{f}$, $\widehat{g} \in \mathscr{S}$ et la relation

$$\Phi(f) * \Phi(g) = \widehat{f} * \widehat{g} = (2\pi)^d\, \widehat{f\,g}$$

est vraie car

$$\widehat{\widehat{f} * \widehat{g}} = \widehat{\widehat{f}}\,\widehat{\widehat{g}} = (2\pi)^{2d}\check{f}\check{g} = (2\pi)^{2d}(\check{fg}) = (2\pi)^d\,\widehat{\widehat{fg}}.$$

La $\|\cdot\|_2$-densité de $\mathscr{S}$ dans $L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ et la L^2-continuité de la transformée de Plancherel donnent la formule annoncée dans son cadre général. $\diamondsuit$

NOTATION : On note souvent $\widehat{f}$ la transformée de Plancherel d'une fonction de $L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ au détriment de la notation Φ.

Remarque : On peut donner une expression asymptotique semi-explicite de la transformée de Plancherel en notant que pour toute $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$, la suite $f\,\mathbb{1}_{[-n,n]^d}$, $n \geq 1$, est constituée d'éléments de $L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ et converge dans L^2 vers f. Par suite

$$\Phi(f)(\xi) = L^2\text{-}\lim_n \int_{[-n,n]^d} e^{i(\xi|x)} f(x)\,\lambda_d(dx).$$

15.4 Transformée de Laplace

Dans cette partie nous allons étudier la transformée de Laplace, de manière plus succincte que la transformée de Fourier, en faisant un minimum appel aux résultats d'analyse complexe (le théorème de Cauchy notamment) et en restant plus dans l'esprit de l'intégrale de Lebesgue. Nous mettrons l'accent sur les applications au niveau des exercices 15.28 à 15.40 qui sont assez développés et s'apparentent d'ailleurs plutôt à des problèmes. Pour un traité consacré spécifiquement à la transformée de Laplace, nous renvoyons à l'ouvrage [13] qui nous paraît très complet.

15.4.1 Définitions et premiers exemples

***Définition* 15.4.** (a) *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *une fonction* localement intégrable *sur* $\mathbb{R}_+$, i.e. *intégrable sur tout intervalle borné de* $\mathbb{R}_+$. *La* transformée de Laplace *notée* $\mathscr{L}(f)$ *de la fonction* f *est définie par*

$$\begin{cases} \mathscr{L}(f)(z) := \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-z\,t}\, dt \\ \textit{pour } z \in D_{\mathscr{L}(f)} := \big\{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, t \mapsto f(t)\, e^{-\zeta\, t} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+)\big\}. \end{cases} \tag{15.17}$$

L'ensemble $D_{\mathscr{L}(f)}$ *est appelé le* domaine de la transformée de Laplace $\mathscr{L}(f)$.

(b) *Soit* μ *une mesure borélienne positive sur* $\mathbb{R}_+$. *De façon similaire à* (15.17)*, la transformée de Laplace de* μ *est définie par*

$$\begin{cases} \mathscr{L}(\mu)(z) := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-z\,t}\, d\mu(t) \\ \textit{pour } z \in D_{\mathscr{L}(\mu)} := \big\{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, t \mapsto f(t)\, e^{-\zeta\, t} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+, \mu)\big\}. \end{cases} \tag{15.18}$$

(c) *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction* localement intégrable *sur* $\mathbb{R}$. *La* transformée de Laplace bilatérale *notée* $\mathscr{L}_{\mathrm{b}}(f)$ *de la fonction* f *est définie par*

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\mathrm{b}}(f)(z) := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-z\,t}\, dt \\ \textit{pour } z \in D_{\mathscr{L}_{\mathrm{b}}(f)} := \big\{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, f(t)\, e^{-\zeta\, t} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})\big\}. \end{cases} \tag{15.19}$$

Remarque : Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in D_{\mathscr{L}(f)}$. Alors pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $x \geq x_0$, $|f(t)\, e^{-z\,t}| = |f(t)|\, e^{-x\,t} \leq |f(t)|\, e^{-x_0\,t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que le nombre réel x_f défini par

$$x_f := \inf\big\{x \in \mathbb{R} \,:\, t \mapsto f(t)\, e^{-x\,t} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+)\big\}\,, \tag{15.20}$$

(qui appartient ou non à $D_{\mathscr{L}(f)}$) vérifie

$$D_{\mathscr{L}(f)} = \big\{x + iy \,:\, x \in (x_f, +\infty[\text{ et } y \in \mathbb{R}\big\}. \tag{15.21}$$

NOTATION : Dans la suite, on désignera une fonction f par sa valeur $f(t)$. Ainsi, par un abus de notation pratique, la transformée de Laplace de f sera notée $\mathscr{L}(f(t))$ au lieu de $L(f)$, le domaine $D_{f(t)}$ au lieu de D_f et le nombre $x_{f(t)}$ au lieu de x_f.

Exemples : 1. La fonction $f\,:\,t \mapsto e^{t^2}$ n'a pas de transformée de Laplace car d'après (15.17) $D_{\mathscr{L}(f)} = \emptyset$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En intégrant n fois par parties on a $x_{t^n} = 0$ et

$$\mathscr{L}(t^n)(z) = \frac{n!}{z^{n+1}} \quad \text{pour tout } z \in D_{\mathscr{L}(t^n)} = \big\{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, \Re(\zeta) > 0\big\}.$$

La transformée de Laplace $\mathscr{L}(t^n)$ peut s'étendre à $\mathbb{C}^*$.

3. Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors $x_{e^{at}} = \Re(a)$ et

$$\mathscr{L}(e^{at})(z) = \frac{1}{z-a} \quad \text{pour tout } z \in D_{\mathscr{L}(e^{at})} = \big\{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, \Re(\zeta) > \Re(a)\big\}.$$

La transformée de Laplace $\mathscr{L}(e^{at})$ peut s'étendre à $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

4. *Formules d'Euler*. Partant des identités

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \sin(t) = \frac{1}{2i}\,(e^{it} - e^{-it}) \;\text{ et }\; \cos(t) = \frac{1}{2}\,(e^{it} + e^{-it}),$$

on déduit les transformées de Laplace des fonctions sin et cos

$$\left\{\begin{aligned} \mathscr{L}(\sin)(z) &= \frac{1}{z^2+1} \\ \mathscr{L}(\cos)(z) &= \frac{z}{z^2+1} \end{aligned}\right. \qquad \text{pour } z \in D_{\sin} = D_{\cos} = \big\{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, \Re(\zeta) > 0\big\}.$$

15.4.2 Propriétés de la transformée de Laplace

***Proposition* 15.6.** *Soient f, g deux fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Alors on a les propriétés suivantes :*

(a) *$\mathscr{L}(f)$ est une fonction holomorphe dans l'intérieur $\mathring{D}_{\mathscr{L}(f)}$ de $D_{\mathscr{L}(f)}$, et*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big(\mathscr{L}(f)\big)^{(n)} = \mathscr{L}\big((-\,t)^n f(t)\big) \quad \textit{dans } \mathring{D}_{\mathscr{L}(f)}. \tag{15.22}$$

(b) *Si* $D_{\mathscr{L}(f)} \neq \emptyset$ *alors* $\displaystyle\lim_{\Re(z)\to+\infty} \mathscr{L}(f)(z) = 0\,.$

(c) *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a*

$$\forall\, z \in D_{\mathscr{L}(f)}, \quad e^{-az}\,\mathscr{L}(f)(z) = \mathscr{L}\big(f(t-a)\,\mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t)\big)(z).$$

(d) *Par restriction à $\mathbb{R}_+$ la convolée $f * g$ est définie par*

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-s)\,g(s)\,ds \quad \textit{pour } t \in \mathbb{R}_+, \tag{15.23}$$

et on a

$$\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f) \times \mathscr{L}(g) \quad \textit{dans } D_{\mathscr{L}(f)} \cap D_{\mathscr{L}(g)}. \tag{15.24}$$

DÉMONSTRATION : Les propriétés (a) et (c) découlent du théorème de dérivation sous le signe intégrale. L'implication (b) découle du théorème de convergence dominée, car d'après (15.21) il existe $x_0 > x_f$ tel que pour tout z, $\Re(z) \geq x_0$, on a la condition de domination

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad \left|f(t)\, e^{-zt}\right| \leq |f(t)|\, e^{-x_0 t} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+).$$

Enfin, la propriété (d) se déduit du théorème de Fubini comme pour la transformée de Fourier (*cf.* Proposition 15.4). $\Diamond$

Exemple : D'après (15.22) on a $\mathscr{L}(t)(z) = -\mathscr{L}(1)'(z) = z^{-2}$. On obtient donc *via* la définition (15.23), que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 1$,

$$\mathscr{L}\big(e^t - t - 1\big)(z) = \mathscr{L}\big(t * e^t\big)(z) = \mathscr{L}(t)(z)\, \mathscr{L}(e^t)(z) = \frac{1}{z^2\,(z-1)}.$$

Contrairement à la transformée de Fourier, le fait d'intégrer sur $\mathbb{R}_+$ impose de tenir compte des conditions limites en 0 lorsque que l'on calcule la transformée de Laplace des dérivées successives d'une fonction. On dispose ainsi de la formule d'intégration par parties suivante, très utile pour la résolution des équations différentielles linéaires à l'aide de la transformée de Laplace.

***Proposition* 15.7.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, tels que $f^{(n)}$ soit localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que*

$$\Delta_f^n := \bigcap_{k=0}^{n} \mathring{D}_{\mathscr{L}\left(f^{(k)}\right)} \neq \emptyset.$$

Alors la transformée de Laplace de $f^{(n)}$ se déduit de celle de f par la formule

$$\forall\, z \in \Delta_f^n, \quad \mathscr{L}\big(f^{(n)}\big)(z) = z^n\, \mathscr{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}\, f^{(k)}(0). \tag{15.25}$$

DÉMONSTRATION : On procède par récurrence. Supposons que la formule (15.22) soit vérifiée par $f^{(n)}$. En intégrant par parties on obtient pour $z \in \Delta_f^{n+1}$,

$$\mathscr{L}\big(f^{(n+1)}\big)(z) = \big[f^{(n)}(t)\, e^{-zt}\big]_0^{+\infty} + z\, \mathscr{L}\big(f^{(n)}\big)(z).$$

Comme

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial}{\partial t}\big(f^{(n)}(t)\, e^{-zt}\big) = f^{(n+1)}(t)\, e^{-zt} - z\, f^{(n)}(t)\, e^{-zt} =: h_n(t)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ($z \in \Delta_f^{n+1}$), le critère de Cauchy appliqué en $+\infty$ à la fonction $\big(g_n : t \mapsto f^{(n)}(t)\, e^{-zt}\big)$, *i.e.*

$$\forall\, s \leq t \in \mathbb{R}_+, \ \ |g_n(t) - g_n(s)| = \left|\int_s^t g_n'(u)\, du\right| \leq \int_s^{+\infty} |h_n(u)|\, du \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

est vérifié, ce qui combiné avec l'intégrabilité de la fonction g_n sur $\mathbb{R}_+$, implique

$$\lim_{t\to+\infty} f^{(n)}(t)\, e^{-zt} = 0.$$

D'où par l'hypothèse de récurrence à l'ordre n, il vient

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\big(f^{(n+1)}\big)(z) &= z\,\mathscr{L}\big(f^{(n)}\big)(z) - f^{(n)}(0)\\ &= z^{n+1}\,\mathscr{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{1+n-1-k}\, f^{(k)}(0) - f^{(n)}(0)\\ &= z^{n+1}\,\mathscr{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{(n+1)-1} z^{(n+1)-1-k}\, f^{(k)}(0),\end{aligned}$$

qui est la formule (15.22) à l'ordre $n+1$. $\diamondsuit$

Les exemples ci-dessous illustrent la résolution des équations différentielles linéaires par la transformée de Laplace.

Exemples : On admet pour le moment l'injectivité de la transformée de Laplace qui sera obtenue par le corollaire 15.7 ci-après.

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} f''(t) + f(t) = e^{-t}, & t \in \mathbb{R}_+\\ f(0) = \alpha,\ f'(0) = \beta. \end{cases}$$

La formule (15.22) implique que pour $\Re(z)$ assez grande,

$$z^2\,\mathscr{L}(f)(z) - \alpha\, z - \beta + \mathscr{L}(f)(z) = \mathscr{L}(e^{-t})(z) = \frac{1}{z+1}.$$

D'où, en décomposant en éléments simples, il vient

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f)(z) &= \frac{1}{(z+1)\,(z^2+1)} + \frac{\alpha\, z}{z^2+1} + \frac{\beta}{z^2+1}.\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2i-2}\,\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i+2}\,\frac{1}{z-i} + \frac{\alpha\, z}{z^2+1} + \frac{\beta}{z^2+1}.\end{aligned}$$

On en déduit, à partir de la transformée de Laplace de l'exponentielle et de l'injectivité de la transformée de Laplace, que

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{2}\, e^{-t} + \frac{1}{2i-2}\, e^{it} - \frac{1}{2i+2}\, e^{-it} + \frac{i\alpha+\beta}{2i}\, e^{it} + \frac{i\alpha-\beta}{2i}\, e^{-it}\\ &= \frac{1}{2}\, e^{-t} + \Big(\alpha - \frac{1}{2}\Big)\cos t + \Big(\beta + \frac{1}{2}\Big)\sin t.\end{aligned}$$

On peut aussi traiter des équations différentielles linéaires à coefficients non constants.

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} f''(t) + t\,f'(t) - 2\,f(t) = 4, \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ f(0) = -1,\ f'(0) = 0. \end{cases}$$

Puisque d'après les formules (15.22) et (15.25) avec $n = 1$, on a

$$\mathscr{L}\big(tf'(t)\big)(z) = -\big(\mathscr{L}(f')\big)'(z) = -\big(z\,\mathscr{L}(f)(z)\big)',$$

la transformée de Laplace F de f est solution de l'équation différentielle

$$z^2\,F(z) + z - \big(z\,F'(z) + F(z)\big) - 2\,F(z) = \frac{4}{z}$$

$$i.e. \quad F'(z) + \Big(\frac{3}{z} - z\Big)F(z) = -\frac{4}{z^2} + 1.$$

Cette équation linéaire du premier ordre s'intègre, pour $z = x > 0$, en

$$F(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{c}{x^3}\,e^{x^2/2} = \mathscr{L}(t^2 - 1)(x) + \frac{c}{x^3}\,e^{x^2/2}.$$

En supposant que $D_{\mathscr{L}(f)} \neq \emptyset$, on a nécessairement $c = 0$ d'après le point (b) de la proposition 15.6. Donc la solution de l'équation différentielle est $f(t) = t^2 - 1$ par injectivité de la transformée de Laplace.

On conclut cette section par un résultat asymptotique liant une fonction et sa transformée de Laplace.

***Proposition* 15.8.** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ possédant une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en $+\infty$. Si le domaine de la transformée de Fourier de f est non vide alors*

$$\lim_{x\to 0^+} x\,\mathscr{L}(f)(x) = \ell = \lim_{t\to+\infty} f(t). \tag{15.26}$$

DÉMONSTRATION : Comme f est localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et bornée au voisinage de $+\infty$, on a $x_f \leq 0$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors d'après l'inégalité triangulaire, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} \big|x\,\mathscr{L}(f)(x) - \ell\big| &\leq x \int_0^a |f(t) - \ell|\,e^{-xt}\,dt + \sup_{t\geq a}|f(t) - \ell| \int_a^{+\infty} x\,e^{-xt}\,dt \\ &\leq x \underbrace{\int_0^a |f(t) - \ell|\,dt}_{<+\infty} + \sup_{t\geq a}|f(t) - \ell|. \end{aligned}$$

L'avant dernier terme est un $O(x)$ pour $a > 0$ fixé, alors que le dernier terme est arbitrairement petit, uniformément par rapport à x, pour a assez grand, d'où le résultat. $\diamondsuit$

15.4.3 Inversion de Laplace

On dispose d'un résultat d'inversion analogue à celui du théorème d'inversion de Fourier et qui d'ailleurs s'en déduit.

***Théorème* 15.5** (Inversion de Laplace)**.** *Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ valant* 0 *dans $\mathbb{R}_-^*$, de transformée de Laplace F. Soit $x > x_f$ (*cf. (15.20)*) tel que $\big(y \mapsto F(x+2i\pi y)\big)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors on a la* formule d'inversion de Bromwich-Mellin

$$\mathscr{L}^{-1}(F)(t) := f(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\{\Re(z)=x\}} F(z)\, e^{zt}\, dz \quad \lambda\text{-}p.p.\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{15.27}$$

et en tout point $t \in \mathbb{R}$ où f est continue.

DÉMONSTRATION : La fonction $\big(y \mapsto F(x+2i\pi y) = \widehat{f(t)e^{-xt}}(y)\big)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Le théorème d'inversion de Fourier (*cf.* Théorème 15.2) appliqué à la fonction $\big(t \mapsto f(t)\, e^{-x\,t}\big)$ entraîne alors, en posant $z = x + 2i\pi y$,

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} F(x+2i\pi y)\, e^{(x+2i\pi y)\,t}\, dy = \frac{1}{2i\pi}\int_{\{\Re(z)=x\}} F(z)\, e^{zt}\, dz \ \ \lambda\text{-p.p. } t \in \mathbb{R}_+,$$

et en tout point $t \in \mathbb{R}_+$ où f est continue. $\Diamond$

***Corollaire* 15.7** (Injectivité de la transformée de Laplace)**.** *Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$, étendue par la valeur* 0 *sur $\mathbb{R}_-^*$. Si $\mathscr{L}(f) = 0$ sur un segment de $\mathbb{C}$ de longueur > 0, alors $f = 0$ λ-p.p. dans $\mathbb{R}_+$.*

DÉMONSTRATION : On se ramène au cas où le segment noté $[a, b]$ est inclus dans $\mathbb{R}$ (le cas usuel en pratique). La transformée de Laplace de f est holomorphe sur l'intérieur de son domaine $\mathring{D}_{\mathscr{L}(f)}$.

Soit $c\ \in]a, b[$. Alors, d'après le théorème d'analyticité de Cauchy (*cf.* [12, Chap. 10]), la fonction $\mathscr{L}(f)$ est développable en série entière dans un disque ouvert $D(c, r)$ de centre c et de rayon $r > 0$ assez petit. Comme par hypothèse $\mathscr{L}(f)$ est nulle sur $[a, b]$, il vient

$$\forall\, x \in]c-r, c+r[, \quad 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,(x-c)^n,$$

d'où en calculant par cette série les dérivées successives de $\mathscr{L}(f)$ au point c, on a

$$c \in A := \big\{z \in \mathring{D}_{\mathscr{L}(f)} : \forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathscr{L}(f)^{(n)}(z) = 0\big\}.$$

Donc A est une partie non vide ($c \in A$), fermée (par continuité des dérivées successives de $\mathscr{L}(f)$) et ouverte (par le développement en série de $\mathscr{L}(f)$ au voisinage de chaque point de $\mathring{D}_{\mathscr{L}(f)}$) du demi-plan ouvert $\mathring{D}_{\mathscr{L}(f)}$ de $\mathbb{C}$. Comme le demi-plan ouvert $\mathring{D}_{\mathscr{L}(f)}$ est connexe, on en déduit que $A = \mathring{D}_{\mathscr{L}(f)}$, et par suite $\mathscr{L}(f) = 0$ dans $\mathring{D}_{\mathscr{L}(f)}$. On conclut en appliquant le Théorème 15.5 d'inversion. $\Diamond$

Un autre résultat important relatif à l'inversion de Laplace est le théorème de Bernstein-Widder dont la démonstration, tirée de l'article ([2]), fait l'objet de l'exercice 15.39.

***Théorème* 15.6** (Bernstein-Widder)**.** *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *une fonction* complètement monotone, i.e. *vérifiant*

$$f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*) \quad \textit{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ (-1)^n\, f^{(n)}(x) \geq 0. \tag{15.28}$$

Alors f est la transformée de Laplace d'une mesure de Stieljes (cf. & 6.5.2*) s'écrivant comme la dérivée d'une fonction $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ croissante, bornée et nulle dans $\mathbb{R}_-^*$ telle que*

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = f(0),$$

où, par convention, la transformée de Laplace de $d\alpha$, qui étend la formule (15.22) *pour $n = 1$, est définie par* ([3])

$$\mathscr{L}(d\alpha)(z) := z\,\mathscr{L}(\alpha)(z) - \alpha(0^-) \quad \textit{pour } z \in \mathring{D}_{\mathscr{L}(\alpha)}. \tag{15.29}$$

15.4.4 Exemples issus des probabilités

1. *Loi gamma.* La densité $f_{a,b}$ sur $\mathbb{R}_+$ de la loi de probabilité $\gamma(a,b)$ pour $a, b > 0$, est définie par

$$f_{a,b}(t) := \frac{1}{b^a\,\Gamma(a)}\, t^{a-1}\, e^{-t/b},\ \ t > 0, \quad \text{où} \quad \Gamma(a) := \int_0^{+\infty} x^{a-1}\, e^{-x}\, dx.$$

Alors la transformée de Laplace de $f_{a,b}$ est donnée par

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > -1/b, \quad \mathscr{L}(f_{a,b})(z) = \frac{1}{(b\,z+1)^a}.$$

Soit $x > -1/b$. Par le changement de variable $s = (x + 1/b)\,t$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f_{a,b})(x) &= \frac{1}{b^a\,\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^{a-1}\, e^{-(x+1/b)\,t}\, dt \\
&= \frac{(x+1/b)^{-a}}{b^a\,\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} s^{a-1}\, e^{-s}\, ds \\
&= \frac{1}{(b\,x+1)^a\,\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^{a-1}\, e^{-(x+1/b)\,t}\, dt = \frac{1}{(b\,x+1)^a}.
\end{aligned}$$

2. H. Pollard, "The Bernstein-Widder theorem on completely monotonic functions", *Duke Math. J.*, **11** (1944), 427-430.

3. Avec cette convention, la dérivée de la fonction de Heaviside $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$, qui coïncide avec la mesure de Dirac δ_0 en 0 (*cf.* (6.1)), vérifie $\mathscr{L}(d\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}) = \mathscr{L}(\delta_0) = 1$ car $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(0^-) = 0$, de sorte que δ_0 est l'élément neutre de la convolution (15.23) dans $\mathbb{R}_+$.

On conclut par un argument d'analyticité (*cf.* la preuve du Corollaire 15.7).

2. *Loi gaussienne.* La densité $g_{m,\sigma}$ sur $\mathbb{R}$ de la loi de probabilité gaussienne $\mathscr{N}(m,\sigma)$ pour $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, est définie par

$$g_{m,\sigma}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-(t-m)^2/(2\sigma^2)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alors la transformée de Laplace bilatérale (15.19) de $g_{m,\sigma}$ est donnée par

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \mathscr{L}_{\mathrm{b}}(g_{m,\sigma})(z) = e^{-mz}\, e^{\sigma^2 z^2/2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. En mettant en forme l'argument de l'exponentielle, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(g_{m,\sigma})(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{\mathbb{R}} e^{-xt-(t-m)^2/(2\sigma^2)}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-mx}\, e^{\sigma^2 x^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(t+\sigma^2 x - m)^2/(2\sigma^2)}\, dt \\
(s = t + \sigma^2 x - m) \quad &= e^{-mx}\, e^{\sigma^2 x^2/2}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2/(2\sigma^2)}\, ds \\
&= e^{-mx}\, e^{\sigma^2 x^2/2}.
\end{aligned}$$

On conclut à nouveau par un argument d'analyticité.

15.5 Exercices

15.1 Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $f > 0$ $\lambda_d(x)$-p.p.. On a $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ |\widehat{f}(\xi)| < \widehat{f}(0)$.

15.2 Soit μ une mesure positive finie sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Montrer l'équivalence entre

$$(i)\ \exists\, \xi \in \mathbb{R}^*,\ \widehat{\mu}(\xi) = \mu(\mathbb{R}), \quad (ii)\ \exists\, \xi \in \mathbb{R}^*,\ \mu\big({}^c\big\{(2\pi/\xi)\,\mathbb{Z}\big\}\big) = 0.$$

Voir également l'exercice 15.18 pour un développement plus approfondi.

15.3 Soit E un borélien de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue finie tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_E e^{ix/n}\, dx = 0.$$

Montrer que E est de mesure nulle.

15.4 Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f''(x) - f(x) = \big(x^2 - 3/4\big)\, e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Déterminer f en prenant la transformée de Fourier de l'équation différentielle.

15.5 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^2\log(|x|)}\,\mathbb{1}_{\{|\cdot|>2\}}(x),\ x\in\mathbb{R}$.

$a)$ Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|x|f(x)dx=+\infty$.

$b)$ Montrer que la transformée de Fourier de f est dérivable en 0.

15.6 Donner un exemple d'une fonction de $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)\setminus\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ dont la transformée de Fourier-Plancherel appartient à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

15.7 Soit f_a, $a>0$, la fonction définie par $f_a(t):=\dfrac{a}{\pi(t^2+a^2)}$. Montrer que pour tous $a,b>0$, $f_a*f_b=f_{a+b}$.

15.8 On considère les limites lorsqu'elles existent

$$f(x):=\lim_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n}\frac{\sin t}{t}\,e^{ixt}\,dt,\quad x\in\mathbb{R}.$$

$a)$ Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, que $f=f(0)\,\mathbb{1}_{]-1,1[}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ et que $f(\pm1)=f(0)/2$.

$b)$ À l'aide du théorème de Plancherel montrer que $f=\pi\,\mathbb{1}_{]-1,1[}$ λ-$p.p.$ dans $\mathbb{R}$. En déduire la valeur de f en chaque point de $\mathbb{R}$.

15.9 On définit les intégrales

$$I_n:=\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^n t}{t^n}\,dt,\quad n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$$

$a)$ Montrer que $0<I_n\leq I_2=\pi$. On pourra considérer la transformée de Fourier de $f_n:=\big(\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}*\big)^n$ au sens du produit de convolution.

$b)$ Montrer que pour tous $n,p,q\in\mathbb{N}^*$ tels que $n=p+q$, $I_n^2\leq I_{2p}\,I_{2q}$.

15.10 Soit $f\in\mathscr{C}_K^1(\mathbb{R})$. Montrer, par le théorème de Plancherel, que $\widehat{f}$ et la fonction $\big(t\mapsto t\,\widehat{f}(t)\big)$ sont dans $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, puis que $\widehat{f}\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. En déduire que f est la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

15.11 $a)$ Montrer que $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ ssi $f=g\,h$ λ-$p.p.$ avec $g,h\in\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

$b)$ En déduire que φ est la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $\varphi=\phi*\psi$ p.p. avec $\phi,\psi\in\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

$c)$ Montrer que l'ensemble des fonctions $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ telles que $\widehat{f}$ est à support compact est dense dans $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

15.12 ([4]) Soient φ la fonction définie par $\varphi(x):=e^{-|x|^2/2}$, $x\in\mathbb{R}^d$, ϕ une fonction paire de $\mathscr{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$, et $f:=\varphi*(\widehat{\phi})^2$.

$a)$ Calculer $\widehat{f}$ explicitement à l'aide de φ et ϕ.

4. Exercice aimablement communiqué par notre collègue D. Guibourg à l'INSA de Rennes.

b) En déduire l'existence d'une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}^d$ dont la transformée de Fourier est dans $\mathscr{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$.

15.13 Soit $f \in \mathscr{C}_K(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ se prolonge naturellement en une fonction entière sur $\mathbb{C}$. En déduire que f et $\widehat{f}$ ne peuvent être simultanément à support compact que si f est identiquement nulle.

15.14 a) Montrer que dans $L^2_{\mathbb{C}}([-1,1], \lambda)$, muni de la norme hilbertienne L^2 usuelle, la famille $\big(e^{in\pi\,(\cdot)}/\sqrt{2}\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale.

b) Montrer, à l'aide par exemple du théorème de Stone-Weierstrass, que c'est en fait une base orthonormée hilbertienne de $L^2_{\mathbb{C}}([-1,1], \lambda)$.

c) Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \lambda)$. Montrer que, si $\mathrm{supp}(f) \subset [-1,1]$ et $\widehat{f}(n\,\pi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = 0$ λ-*p.p.*.

d) Montrer un résultat analogue pour la transformée de Fourier d'une mesure positive finie sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ portée par $[-1,1]$.

e) Étendre les résultats précédents à un cadre multi-dimensionnel (fonctions et mesures sur $\mathbb{R}^d$).

15.15 ([5]) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) := (1 - |t|)\,\mathbb{1}_{\{|\cdot| \le 1\}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que la transformée de Fourier de φ est donnée par

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^*, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = \frac{2\,(1-\cos\xi)}{\xi^2} \qquad \text{et} \qquad \widehat{\varphi}(0) = 1.$$

b) En déduire que la formule $\mu(d\xi) = \dfrac{1-\cos\xi}{\pi\xi^2}\,d\xi$ définit – avec la convention d'usage – une mesure de probabilité dont on déterminera la transformée de Fourier.

c) On définit maintenant une mesure ν sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ par

$$\begin{cases} \nu\big({}^c(\{0\} \cup \{(2n-1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}\})\big) = 0, \\ \nu(\{0\}) = \dfrac{1}{2}, \quad \nu\big(\{n\pi\}\big) = \dfrac{2}{n^2\pi^2},\ n \in \mathbb{Z},\ n \text{ impair.} \end{cases}$$

Calculer la transformée de Fourier de $\widehat{\nu}$ sous forme d'une série.

d) Calculer la transformée de Fourier de $t \mapsto \widehat{\nu}(t)\,\mathbb{1}_{\{|t|\le 1\}}$. En déduire que $\widehat{\mu}$ et $\widehat{\nu}$ coïncident sur $[-1,1]$ (on pourra s'appuyer sur le résultat de l'exercice 15.14).

15.16 *Formule sommatoire de Poisson*

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ vérifiant pour une constante $C \ge 1$, les inégalités

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2\,|f(x)| \le C, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \le 1,\ |f(x) - f(y)| \le C\,\frac{|x-y|}{1+x^2+y^2}.$$

---

5. D'après la section 8.2 de l'ouvrage *Counterexamples in Probability*, J. Stoyanov, Wiley series in Probability and Mathematical Statistics, Wiley and Sons, Chichester, 1987, 313p.

$a)$ Montrer que la fonction F définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi k),$$

est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

$b)$ Calculer les coefficients de Fourier F, définis par

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\, e^{-inx}\, dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{15.30}$$

$c)$ En déduire la *formule sommatoire de Poisson*,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2\pi k).$$

$d)$ *Problème de Bâle* 10

Appliquer le résultat de la question $c)$ avec $f(x) := e^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ et $\Re(a) > 0$. En déduire les formules sommatoires

$$\forall\, a \in \mathbb{C},\ \Re(a) > 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2a}\Big(\coth(\pi a) - \frac{1}{\pi a}\Big) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

$e)$ Montrer que $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \ \pi \operatorname{cotan}(\pi\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,\alpha}{\alpha^2 - n^2}\,.$

15.17 *Points fixes de la convolution*

$a)$ Déterminer les éléments f de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \lambda)$ tels que $f * f = f$.

$b)$ Résoudre l'équation $f * f = f$ lorsque $f \in \Phi\big(\mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \lambda) \cap \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \lambda)\big)$.

15.18 On considère une mesure (positive) *finie* μ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et sa transformée de Fourier $\widehat{\mu}$, fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour tout $u \in \mathbb{R}$ par

$$\widehat{\mu}(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{iux}\, \mu(dx).$$

$a)$ On suppose qu'il existe $u_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $\widehat{\mu}(u_0) = \mu(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \big(1 - \cos(u_0 x)\big)\, \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \sin(u_0 x)\, \mu(dx) = 0.$$

En déduire d'une part l'existence d'un ensemble dénombrable D que l'on déterminera, tel que $\mu(\mathbb{R} \setminus D) = 0$ et, d'autre part, que $\widehat{\mu}$ est une fonction périodique.

$b)$ Montrer que la fonction $\widehat{\mu}$ est continue. En déduire que si $\mu \neq \mu(\mathbb{R})\,\delta_0$, $\widehat{\mu}$ admet une plus petite période $T > 0$.

$c)$ On suppose maintenant qu'il existe $u_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\widehat{\mu}(u_0)| = \mu(\mathbb{R})$. Montrer l'existence d'un ensemble dénombrable D à déterminer tel que $\mu(\mathbb{R} \setminus D) = 0$.

d) Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\lambda)$ (λ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$) telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda \neq 0$. Montrer que

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^*, \qquad \left|\int_{\mathbb{R}} e^{iux}\, f(x)\,\lambda(dx)\right| < \int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda.$$

15.19 *Inégalité de Berry-Esseen et théorème de Paul Lévy.*
Soit μ une mesure positive finie sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu\big(\{|x| \geq 2/\varepsilon\}\big) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \Big[\mu(\mathbb{R}) - \Re\big(\widehat{\mu}(\xi)\big)\Big]\, d\xi.$$

b) On considère maintenant une suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ de mesures positives finies sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant $\widehat{\mu}_n \xrightarrow{S} \chi$. Montrer que

$$\varlimsup_n \mu_n\big(\{|x| \geq 2/\varepsilon\}\big) \leq 2 \sup_{|\xi|\leq\varepsilon} \big|\chi(\xi) - \chi(0)\big|,$$

puis en déduire que, si χ est continue en 0, la suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est *tendue*, *i.e.*

$$\lim_{A\to+\infty}\Big(\varlimsup_n \mu_n\big(|x| \geq A\big)\Big) = 0.$$

On admettra dans la suite de l'exercice le *théorème de Prohorov* : *si* $(\mu_n)_{n\geq 1}$ *est une suite tendue, alors elle est séquentiellement relativement compacte pour la topologie de la convergence faible (dite aussi "étroite").*
En d'autres termes, de toute suite extraite $(\mu_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ de $(\mu_n)_{n\geq 1}$, on peut extraire une sous-suite $\nu_n = \mu_{\varphi\circ\psi(n)}$, $n \geq 1$, convergeant faiblement vers une mesure positive finie ν dans le sens

$$\forall\, f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f\,d\nu_n = \int_{\mathbb{R}} f\,d\nu.$$

c) Montrer que, si χ est continue en 0, χ est la transformée de Fourier d'une mesure positive finie.

15.20 *Non-surjectivité de la transformée de Fourier*, tirée de ([6])
Soient $\rho \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support inclus dans $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ avec $\rho(0) = 2\pi$ et g la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$g(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\rho(x+n) \quad \text{où} \quad c_n = \frac{\mathrm{sign}(n)}{2i\ln|n|}\,\mathbb{1}_{\{|n|\geq 2\}}.$$

a) Montrer que $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} g(x) = 0$.

---

6. Exemple I.26 de l'ouvrage *Counterexamples in Analysis* de B.R. Gelbaum et M.H. Olmsted, Holden-Day Inc., 1964.

b) On suppose qu'il existe $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $g = \widehat{f}$. Montrer que la série

$$F(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi k)$$

est définie dx-p.p., que $F(x+2\pi) = F(x)\ dx$-p.p. sur $\mathbb{R}$ et que $F \in \mathscr{L}^1([-\pi,\pi])$.
c) Calculer les coefficients de Fourier de F (*cf.* les formules de l'exercice 8.31) et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\sin(nx)\,dx \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k}.$$

d) Déduire des questions précédentes, de la majoration de l'exercice 8.30 *b*) et du théorème de convergence dominée une contradiction. Conclure quant à l'image de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ par la transformée de Fourier.

15.21 *Inégalité de Hausdorff-Young*

a) Montrer que pour chaque $p \in [1,2]$, il existe une constante $C_p \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall\, f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d), \quad \|\hat{f}\|_q \le C_p\,\|f\|_p \quad \text{où} \;\; q := \frac{p}{p-1}.$$

b) Une inégalité tirée de ([7]). Soient $z \in \mathbb{C}$ avec $\Re(z) > 0$, f_z la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par $f_z(x) := e^{-z|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^d$, et $p, q \in [1,+\infty]$. Montrer, à l'aide de la formule (15.7) et de la valeur de l'intégrale de Fresnel (*cf.* exercice 8.29), que

$$\frac{\|\widehat{f_z}\|_q}{\|f_z\|_p} = \left(4^{\frac{1}{q}} p^{\frac{1}{p}} q^{-\frac{1}{q}} \pi^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\, |z|^{\frac{2}{q}-1} \big(\Re(z)\big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right)^{\frac{d}{2}} \quad (\text{convention : } (+\infty)^{\frac{1}{+\infty}} = 1).$$

c) En déduire que la transformée de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ s'étend en une application linéaire continue de $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^q_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $1 \le p \le 2$ et $q = \frac{p}{p-1}$.

15.22 *Formule de Shannon*

a) Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ continue telle que $\operatorname{supp} \hat{f} \subset [-\pi,\pi]$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)| < +\infty$.

Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n\, e^{i(n-x)\xi}\, d\xi$, où les c_n sont les coefficients de Fourier (15.30) de $\hat{f}$.

b) En déduire la formule de Shannon $\forall\, x \in \mathbb{R}, \;\; f(x) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\, \frac{\sin\big(\pi(n-x)\big)}{\pi(n-x)}$.

15.23 *Une formule d'inversion* ([8])

7. D. Serre, Interpolation d'opérateurs ; applications, *Le journal de maths des élèves de l'ENS de Lyon*, Vol. 1, No. 4 (1998), 174-181.

8. En collaboration avec L. Hervé professeur à l'INSA Rennes.

$a)$ Montrer l'extension du lemme 15.4 à $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$:

$$\forall\, f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(f)(x)\, g(x)\, \lambda_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \Phi(g)(x)\, \lambda_d(dx).$$

$b)$ Soient $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ telles que $\widehat{f} = \Phi(g)\ \lambda_d(dx)$-p.p.. Montrer que

$$\forall\, \varphi \in \mathscr{S}_{\mathbb{C}}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \hat{\varphi}(x)\, \lambda_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, \hat{\varphi}(x)\, \lambda_d(dx).$$

En déduire, à l'aide de l'exercice 8.33, que $f = g\ \lambda_d(dx)$-p.p..

$c)$ Soit $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\Phi(f) \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$. Montrer que

$$\forall\, \varphi \in \mathscr{S}_{\mathbb{C}}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\Phi(f)}(-x)\, \bar{\varphi}(x)\, \lambda_d(dx) = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \bar{\varphi}(x)\, \lambda_d(dx).$$

En déduire la formule d'inversion $f(x) = (2\pi)^{-d}\, \widehat{\Phi(f)}(-x)\ \lambda_d(dx)$-p.p.

15.24 *Une formule intégrale-série vérifiée par la fonction sinus cardinal*

Soient $a, \alpha > 0$ tels que $a\alpha < 1$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction C^1 par morceaux et continue en 0 telle que $\varphi = 0$ dans $\mathbb{R}\backslash[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2},]$. Soient ψ la fonction 2π-périodique définie par $\psi(t) := 1/\alpha\, \varphi\big(t/(2\pi\alpha)\big)$ pour $t \in [-\pi, \pi]$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(x) := \hat{\varphi}(2\pi\alpha x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$a)$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\psi) := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t) e^{-int}\, dt = f(n)$.

$b)$ Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \frac{1}{\alpha}\, \varphi(0)$.

$c)$ Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^2 = \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2\, dt = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx$.

$d)$ On considère le cas où $a = 1$, $\alpha := 1/\pi$ et $\varphi := \mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}$.

$i)$ Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

$ii)$ En déduire que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi.$$

15.25 *Généralisation de la formule intégrale-série de l'exercice 15.24*

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction Lebesgue mesurable continue en chaque point de $\mathbb{Z}$, vérifiant l'estimation

$$\exists\, \alpha > 1,\ \exists\, C > 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad 0 \le \varphi(t) \le \frac{C}{(1 + |t|)^{\alpha}},$$

telle que $\phi := \varphi,\ \varphi * \varphi$ vérifie

$$\exists\, a > 0,\ \Big(t \mapsto \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t}\Big) \in \mathscr{L}^1([-a, a]),$$

et telle que la fonction 1-périodique F définie par

$$F(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(t + 2\pi k) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R},$$

soit C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. On suppose en outre que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := 1/2\pi\, \hat{\varphi}(x/(2\pi))$ pour $x \in \mathbb{R}$, vérifie

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)| < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \ \text{ est convergente.}$$

$a)$ Retrouver avec ces conditions la formule sommatoire de Poisson (exercice 15.16) :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(2\pi n).$$

$b)$ Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{-n}^{n} \hat{\varphi}(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \frac{\sin(2\pi n t)}{\pi t}\, dt = \varphi(0).$$

$c)$ Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

$i)$
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^2(n) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)\, dx,$$

$ii)$ $\varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\, (\varphi * \varphi)(0),\ \ \forall\, n \in \mathbb{Z}^*,\ \varphi(2\pi n) = 0,\ \ \varphi(2\pi n - \cdot)\, \varphi(\cdot) = 0$ λ-p.p.

$d)$ Retrouver le résultat $d)\ ii)$ de l'exercice 15.16. avec $\varphi := \pi\, \mathbb{1}_{[-1,1]}$.

$e)$ Montrer que si φ vérifie $i)$ ou, de manière équivalente, $ii)$ et si $\varphi > 0$ λ-p.p. dans $[-\pi, \pi]$, alors $\varphi = 0$ λ-p.p. dans $\mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi]$, *i.e.* φ est à support compact.

15.26 *Inégalité de Heisenberg*

On définit les trois opérateurs $\mathbb{C}$-linéaires $A, B, C : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ (espace de Schwartz) suivants :

$$A(f) := i f', \quad B(f)(x) := x f(x),\ x \in \mathbb{R}, \quad C(f) := f \quad \text{pour } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}),$$

$a)$ Montrer que $A \circ B - B \circ A = i\, C$, et que A, B sont symétriques, *i.e.*

$$\forall\, f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad \big\langle A(f), g \big\rangle = \big\langle f, A(g) \big\rangle \ \text{ et } \ \big\langle B(f), g \big\rangle = \big\langle f, B(g) \big\rangle$$
$$\text{où} \quad \langle f, g\, \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx.$$

b) En déduire l'inégalité $\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}),\ \ \|f\|_2^2 \leq 2\,\|xf(x)\|_2\,\|f'\|_2$.

c) Montrer l'inégalité de Heisenberg

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad \|f\|_2^2 \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\|xf(x)\|_2\,\|x\hat{f}(x)\|_2,$$

impliquant qu'une fonction de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier ne peuvent pas avoir simultanément leur support concentré à l'origine.

Cette inégalité illustre *le principe d'indétermination de Heisenberg* stipulant l'existence d'une limite fondamentale de la précision à laquelle il est possible de connaître simultanément deux propriétés physiques, par exemple la position d'une particule et sa quantité de mouvement.

15.27 Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ une fonction continue en 0 et telle que le support de $\hat{f}$ soit inclus dans $[-a, a]$ pour un certain réel $a > 0$.

a) Montrer que

$$|f(0)| \leq \frac{\sqrt{a\,I}}{\pi}\,\|f\|_2 \quad \text{où} \quad I := \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$$

b) Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité de la question a) si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$|f(x)| = \alpha\left|\frac{\sin(a\,x)}{x}\right| \qquad \lambda(dx)\text{-p.p. } x \in \mathbb{R}.$$

c) En déduire que $I = \pi$.

15.28 *Équations différentielles à coefficients constants par transformée de Laplace*

Soit un polynôme réel de degré $n \in \mathbb{N}^*$, et soit D l'opérateur différentiel associé :

$$P(X) := X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,X^k \quad \text{et} \quad D(x) := x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,x^{(k)}.$$

Pour chaque fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ nulle dans $\mathbb{R}^*_-$, soit $x \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R})$ la solution du problème de Cauchy

$$D(x) = 0 \ \text{ dans } \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad x(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0,\ x^{(n-1)}(0) = \alpha \in \mathbb{R}. \quad \text{(C)}$$

a) On suppose pour le moment qu'il existe $a \geq \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$ et $b > 0$ tels que pour tout $k = 0, \ldots, n$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)| + |x^{(k)}(t)| \leq b\,e^{at}$. Montrer que

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > a, \qquad \begin{cases} \mathscr{L}(x^{(k)})(z) = z^k\,\mathscr{L}(x)(z) & \text{si } k = 0, \ldots, n-1 \\ \mathscr{L}(x^{(n)})(z) = z^n\,\mathscr{L}(x)(z) - \alpha. \end{cases}$$

On suppose désormais que P a n racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

$b)$ Montrer que la solution x_g du problème (C) avec second membre $f = 0$, est donnée par

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \ x_g(t) = \alpha \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, e^{\alpha_j\, t} \quad \text{où} \quad \frac{1}{P(X)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{X - \alpha_j}.$$

$c)$ Montrer que la solution y du problème (C) avec $\alpha = 0$ et second membre f est donnée par

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \ y(t) = \int_0^t f(t-s) \Big(\sum_{j=1}^{n} \beta_j\, e^{\alpha_j\, s} \Big)\, ds.$$

$d)$ En déduire l'expression de la solution générale de (C) et montrer *a posteriori* que l'hypothèse initiale sur les $x^{(k)}$ est vérifiée.

$e)$ Résoudre le problème (C) pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ nulle dans $\mathbb{R}_-^*$.

15.29 *Une famille d'équations différentielles linéaires à coefficients non constants*

Soient $a \in \mathbb{R}$. Soit x une solution du problème de "type" Cauchy (car il y a une singularité en 0),

$$t\, x''(t) + a\, x'(t) + t\, x(t) = 0,\ \ t \geq 0, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0 \quad (\mathrm{C}_a),$$

dont la fonction nulle est clairement solution.

$a)$ On suppose que x possède une transformée de Laplace avec un domaine non vide. Montrer que

$$\forall\, z \in D_{\mathscr{L}(x)}, \quad (z^2+1)\, \mathscr{L}(x)'(z) + (2-a)\, z\, \mathscr{L}(x)(z) = 0.$$

En déduire une expression simple de $\mathscr{L}(x)$.

$b)$ Cas $a \geq 2$.

- $i)$ En déduire que si une solution non nulle $x \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+)$ de (C_a) existe avec $a \geq 2$, alors le domaine de $\mathscr{L}(x)$ est vide.
- $ii)$ Pour $a = 2$, déterminer à l'aide d'un développement en série entière, une base de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle associée à (C_2), puis conclure par rapport à $i)$.

$c)$ On suppose que $a := -2$.

- $i)$ À partir de l'égalité

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2}\, \frac{d}{dz}\Big(\frac{z}{z^2+1}\Big) + \frac{1}{2}\, \frac{1}{z^2+1},$$

  déterminer, en prenant la transformée de Laplace inverse de l'égalité de $ii)$, une solution φ_{-2} simple du problème (C_{-2}).
- $ii)$ En déduire que l'ensemble des solutions du problème (C_{-2}) possédant une transformée de Laplace avec un domaine non vide, est la droite vectorielle engendrée par φ_{-2}.

  $iii)$ Montrer, en utilisant la méthode de la variation de la constante, que l'ensemble des solutions du problème (C_{-2}) est aussi la droite vectorielle engendrée par φ_{-2}.

$d)$ On suppose que $a = 1$.

  $i)$ Déterminer l'unique solution φ_1 de l'équation différentielle associée au problème (C_1) dans $\mathbb{R}_+^*$, développable en série entière dans $\mathbb{R}$ et telle que $\varphi_1(0) = 1$.

  $ii)$ Montrer que la fonction

$$\psi_1(t) := \varphi_1(t) \int_1^t \frac{ds}{s\,\varphi_1^2(s)} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_+^*,$$

  est une solution de l'équation différentielle associée à (C_1) dans $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que la fonction nulle est l'unique solution du problème (C_1).

  $iii)$ En déduire qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+)$ dont la transformée de Laplace a un domaine non vide, et qui vérifie l'égalité $f * f = \sin$ dans $\mathbb{R}_+$ (au sens de la convolution dans dans $\mathbb{R}_+$, *cf.* Proposition 15.6 (c)).

15.30 *Équation des ondes*

$a)$ Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, nulle dans $\mathbb{R}_-^*$, et soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \Re(z) \geq 0, \quad \mathscr{L}(f)(z) = \int_{[a,+\infty[} f(t - a\,x)\, e^{-z\,t}\, dt.$$

$b)$ Déterminer, à l'aide de la transformée de Fourier en t, les fonctions $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ vérifiant la condition : pour tout $a > 0$, il existe $h_a \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, x \in [-a, a],\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad |u(t,x)| + \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \right| + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \right| \leq h_a(t),$$

et solutions de l'équation des ondes pour $c > 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$c)$ Soit $f, g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+) \cap \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+)$, nulles dans $\mathbb{R}_-^*$, et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Déterminer, à l'aide de la transformée de Laplace en t, la fonction sous-linéaire $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^2)$ solution de l'équation des ondes avec conditions aux limites

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(0,x) = \alpha & x \geq 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \beta & x \geq 0, \\ u(t,0) = f(t) & t \geq 0, \\ u(t,+\infty) = g(t) & t \geq 0. \end{cases}$$

15.31 *Équation aux différences finies*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et le polynôme réel $P(X) := X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, X^k$, $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R}$.

On considère une fonction f localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$, possédant une transformée de Laplace de domaine non vide et solution de l'équation aux différences finies

$$f(t+n)+\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f(t+k) = 1 \ \text{ p.p. } t \in \mathbb{R}_+, \quad f = 0 \ \ \lambda(\text{dt})\text{-p.p. dans }]-\infty, n]. \quad \text{(D)}$$

a) Montrer que

$$\forall\, k = 0, \ldots, n,\ \forall\, z \in D_{\mathscr{L}(f)}, \quad \mathscr{L}\big(f(\cdot + k)\big)(z) = e^{k\,z}\mathscr{L}(f)(z).$$

On suppose désormais que P a n racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, et on pose $\alpha := \max\limits_{j=1,\ldots,n} |\alpha_j|$.

b) Montrer qu'avec $\dfrac{1}{P(X)} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{X - \alpha_j}$, on a

$$\forall\, z \in D_{\mathscr{L}(f)},\ \Re(z) > \ln \alpha, \quad L(f)(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j\, e^{-z}}{z\,(1 - \alpha_j\, e^{-z})}\,.$$

c) Montrer que

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^{k-1}\, \mathbb{1}_{[k,\infty[} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1}\right) \mathbb{1}_{[k,k+1[} \quad \lambda(dt)\text{-p.p. sur } \mathbb{R}_+.$$

d) En déduire qu'il existe une unique solution de (D) donnée $\lambda(dt)$-p.p. sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, h_{\alpha_j}(t) \quad \text{où} \quad h_\alpha(t) := \begin{cases} \dfrac{\alpha^{[t]} - 1}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ [t] & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

15.32 *Une caractérisation de la partie entière* $[\cdot]$

a) Montrer que $\forall\, z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > 0,\ \ \mathscr{L}([t])(z) = \dfrac{1}{z(e^z - 1)}$.

b) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$, dont la transformée de Laplace a un domaine non vide et qui vérifie $f(t+1) - f(t) = 1$ $\lambda(dt)$-p.p. $t \in \mathbb{R}_+$, avec $f(t) = 0$ $\lambda(dt)$-p.p. $t \in [0,1]$. Montrer que f coïncide $\lambda(dt)$-p.p. avec la partie entière dans $\mathbb{R}_+$.

15.33 *Encore la partie entière*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ dont la transformée de Laplace a un domaine non vide.

a) Montrer que $\mathscr{L}\Big(\displaystyle\int_0^t f(s)\, ds\Big) = \frac{1}{z}\mathscr{L}(f)(z)$ pour $z \in D_{\mathscr{L}(f)}$.

b) Montrer que $\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad \displaystyle\int_0^t [s]\, ds = \frac{1}{2}\, [t]\, (2t - [t] - 1).$

c) On suppose que f est solution de $f(t+2) - 2\, f(t+1) + f(t) = 1 \;\; \lambda(dt)$-p.p. $t \in \mathbb{R}_+$, avec $f(t) = 0 \;\; \lambda(dt)$-p.p. $t \in [0,2]$. Montrer que

$$\forall z \in D_{\mathscr{L}(f)},\ \Re(z) > 0, \quad \mathscr{L}(f)(z) = -\frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{z(e^z-1)}\Big) - \frac{1}{z^2(e^z-1)} - \frac{1}{z(e^z-1)}.$$

En déduire de l'exercice 15.32 a) et des questions précédentes que $f(t) = \dfrac{[t]\,[t-1]}{2}$ $\lambda(dt)$-p.p. $t \in \mathbb{R}_+$.

15.34 *Suites récurrentes linéaires sur deux termes*

Soient $a, b, \gamma \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, et α, β les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^2 - a\,x - b = 0$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence

$$u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n + \gamma^n, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{avec } u_0, u_1 \text{ donnés dans } \mathbb{C},$$

et on définit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ par $f(t) := u_{[t]}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

a) Soient $\sigma, \tau, \nu \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Montrer, à l'aide du théorème de convergence dominée combiné avec l'inégalité des accroissements finis, que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > \max\big(\ln|\sigma|, \ln|\tau|, \ln|\upsilon|\big)$ (convention : $0^0 = 1$),

$$\mathscr{L}(\sigma^{[t]})(z) = \frac{e^z - 1}{z\,(e^z - \sigma)},$$

$$\begin{cases} \mathscr{L}\Big(\dfrac{\sigma^{[t]} - \tau^{[t]}}{\sigma - \tau}\Big)(z) = \dfrac{e^z - 1}{z\,(e^z-\sigma)\,(e^z-\tau)} \\[2ex] \mathscr{L}\big([t]\,\sigma^{[t]-1}\big)(z) = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{L}\Big(\frac{(\sigma+\varepsilon)^{[t]} - \sigma^{[t]}}{\varepsilon}\Big)(z) = \frac{e^z-1}{z\,(e^z-\sigma)^2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathscr{L}\Big(\dfrac{\sigma^{[t]}}{(\sigma-\tau)\,(\sigma-\upsilon)} + \dfrac{\tau^{[t]}}{(\tau-\sigma)\,(\tau-\upsilon)} + \dfrac{\upsilon^{[t]}}{(\upsilon-\sigma)\,(\upsilon-\tau)}\Big)(z) \\[2ex] = \dfrac{e^z-1}{z\,(e^z-\sigma)\,(e^z-\tau)\,(e^z-\upsilon)} \\[2ex] \mathscr{L}\Big(\dfrac{[t]\,\sigma^{[t]-1}}{\sigma-\tau} + \dfrac{\tau^{[t]} - \sigma^{[t]}}{(\sigma-\tau)^2}\Big)(z) = \dfrac{e^z-1}{z\,(e^z-\sigma)^2\,(e^z-\tau)}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\Big(\frac{[t]\,([t]-1)\,\sigma^{[t]-2}}{2}\Big)(z) &= \lim_{\varepsilon\to 0} l\Big(\frac{(\sigma+\varepsilon)^{[t]} + (\sigma-\varepsilon)^{[t]} - 2\,\sigma^{[t]}}{2\,\varepsilon^2}\Big)(z) \\ &= \frac{e^z-1}{z\,(e^z-\sigma)^3}. \end{aligned}$$

b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > \max\big(\ln|\alpha|, \ln|\beta|, \ln|\gamma|\big)$,

$$\begin{cases} \mathscr{L}\big(f(t+1)\big)(z) = e^z \mathscr{L}(f)(z) + u_0\Big(\dfrac{1-e^z}{z}\Big) \\[2ex] \mathscr{L}\big(f(t+2)\big)(z) = e^{2z}\mathscr{L}(f)(z) + u_0\Big(\dfrac{e^z - e^{2z}}{z}\Big) + u_1\Big(\dfrac{1-e^z}{z}\Big). \end{cases}$$

En déduire que

$$\mathscr{L}(f)(z) = \frac{e^z - 1}{z\,(e^z - \alpha)\,(e^z - \beta)}\Big(u_1 - a\,u_0 + u_0\,e^z + \frac{1}{e^z - \gamma}\Big).$$

$c)$ On suppose que α, β, γ sont deux à deux distincts. Montrer que

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = {}& \frac{u_1 - a\,u_0}{\alpha - \beta}\,(\alpha^n - \beta^n) + \frac{u_0}{\alpha - \beta}\,(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \\ & + \frac{\alpha^n}{(\alpha - \beta)\,(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta^n}{(\beta - \alpha)\,(\beta - \gamma)} + \frac{\gamma^n}{(\gamma - \alpha)\,(\gamma - \beta)}.\end{aligned}$$

$d)$ On suppose que $\alpha = \beta \neq \gamma$. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0\,\alpha^n + (u_1 - a\,u_0 + \alpha\,u_0)\,n\,\alpha^{n-1} + \frac{n\,\alpha^{n-1}}{\alpha - \gamma} + \frac{\gamma^n - \alpha^n}{(\gamma - \alpha)^2}.$$

$e)$ On suppose que $\alpha = \gamma \neq \beta$. Montrer que

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = {}& \Big(\frac{u_1 - a\,u_0 + \alpha\,u_0}{\alpha - \beta}\Big)\,\alpha^n + \Big(\frac{u_1 - a\,u_0 + \beta\,u_0}{\beta - \alpha}\Big)\,\beta^n \\ & + \frac{n\,\alpha^{n-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\beta^n - \alpha^n}{(\beta - \alpha)^2}.\end{aligned}$$

$f)$ On suppose que $\alpha = \beta = \gamma$. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0\,\alpha^n + (u_1 - a\,u_0 + \alpha\,u_0)\,n\,\alpha^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{2}\,\alpha^{n-2}.$$

15.35 *Transformée de Weierstrass*

On définit la *transformée de Weierstrass* d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\mathscr{W}(f)(x) := (f * G)(x), \ \ x \in \mathbb{R}, \quad \text{où} \quad G(y) := \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{4}}, \ \ y \in \mathbb{R},$$

lorsque que $\big(y \mapsto f(x - y)\,G(y)\big) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

$a)$ Calculer la transformée de Weierstrass de la fonction $\big(y \mapsto e^{-ay^2}\big)$ pour a appartenant à un intervalle de $\mathbb{R}$ à déterminer.

$b)$ Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty]$, $\forall\, f \in L^p(\mathbb{R})$, $\big\|\mathscr{W}(f)\big\|_p \leq \|f\|_p$.

$c)$ Montrer que

$$\mathscr{W}(f)(x) = \sqrt{4\pi}\,G(x)\,\mathscr{L}_{\mathrm{b}}(Gf)(-\,x/2),$$

où $\mathscr{L}_{\mathrm{b}}$ est la transformée de Laplace bilatérale de f (*cf.* définition 15.4 (c)), lorsque l'une des deux expressions existent.

$d)$ Si $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n\,x^n$ est une série entière de rayon de convergence infini et si D est l'opérateur dérivée, on note $S(D) := \sum_{n \geq 0} a_n\,D^n$ où D^n est est l'opérateur dérivée n-ième. Soit f une fonction de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ dont la série de Taylor en 0 converge dans $\mathbb{R}$.

$i)$ Montrer que $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \ f(x-y) = \big(e^{-yD}(f)\big)(x)$.

$ii)$ Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y^{2n}\, G(y)\, dy = \frac{(2n)!}{n!}$.

$iii)$ En déduire que $\mathscr{W}(f) = e^{D^2}(f)$ dans $\mathbb{R}$.

15.36 *Transformée de Gauss-Weierstrass et équation de la chaleur*
On définit pour $t > 0$, la transformée de Gauss-Weierstrass $\mathscr{W}_t$ de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\mathscr{W}_t(f)(x) := (f * G_t)(x),\ \ x \in \mathbb{R}, \quad \text{où} \quad G_t(y) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{y^2}{4t}},\ \ y \in \mathbb{R},$$

et la fonction $(t, y) \mapsto G_t(y)$ est appelée *le noyau de la chaleur*.

$a)$ Montrer que $\mathscr{W}_t(f)(x) = \mathscr{W}\big(f(\cdot\sqrt{t})\big)\big(x/\sqrt{t}\big)$, lorsque l'expression est définie.

$b)$ Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ dont la série de Taylor en 0 converge dans $\mathbb{R}$. Montrer, en utilisant l'exercice 15.35 $d)\ iii)$, que $\forall\, t > 0,\ \ \mathscr{W}_t(f) = e^{tD^2}(f)$ dans $\mathbb{R}$.

$c)$ Montrer la *propriété de semi-groupe*

$$\forall\, p \in [1, +\infty[\,,\ \forall\, s, t > 0, \quad \mathscr{W}_s \circ \mathscr{W}_t = \mathscr{W}_{s+t} \ \text{ dans } \mathscr{L}^p(\mathbb{R}).$$

$d)$ Montrer, en utilisant l'inégalité $y\, \mathbb{1}_{\{y>\delta\}} \geq \delta\, \mathbb{1}_{\{y>\delta\}}$, que

$$\forall\, t, \delta > 0, \quad \|G_t\|_{L^q(\{|y|>\delta\})} \leq \begin{cases} \left(\dfrac{4t}{q\delta}\right)^{\frac{1}{q}} G_t(\delta) & \text{si } q \in [1, +\infty[\\ G_t(\delta) & \text{si } q = +\infty. \end{cases}$$

En déduire que pour toute $\varphi \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R})\big(\supset \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R})\big)$, $p \in [1, +\infty]$, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \to 0^+} \mathscr{W}_t(\varphi)(x) = \lim_{t \to 0^+} (\varphi * G_t)(x) = \varphi(x).$$

Autrement dit, la famille $(G_t)_{t>0}$ *converge au sens des distributions*, lorsque t tend vers 0, vers δ_0 la mesure de Dirac en 0, qui est l'élément neutre pour la convolution.

$e)$ Soit une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ dont la série de Taylor en 0 converge dans $\mathbb{R}$. Montrer, en utilisant les notations de l'exercice 15.35, que

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - D^2\Big)\big(\mathscr{W}_t(f)\big) = 0 \ \text{ dans } \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}.$$

Donc la fonction $\mathscr{W}_t(f)$ est solution de *l'équation de la chaleur unidimensionnelle*, avec la condition initiale $\mathscr{W}_{0^+}(f) = f$, si de plus $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty]$ par $d)$.

15.37 *Problème du toboggan d'Abel*, tiré de l'article ([9]).

9. Y. C. de Verdière, J. P. Truc, "Du problème du toboggan d'Abel au problème inverse semi-classique", Hal-00400153, 2009, 18 p.

Soit $\mathscr{A}$ l'opérateur intégral, appelé la transformée intégrale d'Abel, défini pour $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par

$$\mathscr{A}(u)(t) := \int_0^t \frac{u(s)}{\sqrt{t-s}}\,dy \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_+. \tag{15.31}$$

a) Calculer la transformée de Laplace de la fonction $a(t) := \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)/\sqrt{t}$.

b) Calculer la transformée de Laplace de $\mathscr{A}(u)$ et celle de $\mathscr{A}\big(\mathscr{A}(u)\big)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \ \mathscr{A}\big(\mathscr{A}(u)\big)(x) = \pi \displaystyle\int_0^x u(t)\,dt.$

Soit $c \in \mathbb{R}_-^*$ et soit $f : [c, 0] \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. Une particule pesante se déplace sans frottement sur le graphe de f, matérialisé par un toboggan, et est soumise à un potentiel gravitationnel V. Elle est repérée par son abscisse curviligne $x(t)$, $t \geq 0$, le long de ce graphe, et est lâchée à l'abscisse $x = c$ avec une vitesse initial nulle. D'après le principe fondamental de la dynamique (ici la masse est prise égale à 2 par souci de simplification), x est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} 2\,\dfrac{d^2x}{dt^2}(t) = -\,V'(x(t)) \quad \text{si } t \geq 0, \\ V(x(0)) = E, \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = 0, \end{cases}$$

où $V \in C^1\big([c, 0]; \mathbb{R}_+\big)$ vérifie $V' < 0$, $V(0) = 0$, et $E \geq 0$ représente l'énergie totale de la particule. On désigne par $\tau(E)$ le temps d'arrivée de la particule au bas du toboggan repéré par l'abscisse curviligne $x(\tau(E)) = 0$.

On va démontrer le

Théorème d'Abel : La fonction τ détermine de façon unique le potentiel V.

Autrement dit, le temps d'arrivée de la trajectoire détermine la forme du toboggan donnée par son abscisse curviligne x.

d) En utilisant la conservation de l'énergie totale, montrer que

$$\forall\, E \geq 0, \quad \tau(E) = \int_c^0 \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}.$$

e) En notant $W := V^{-1}$, montrer que $\tau = -\,\mathscr{A}(W')$.

f) En déduire que $W = -\dfrac{1}{\pi}\,\mathscr{A}(\tau)$.

15.38 *Point fixe de l'opérateur d'Abel*

Soit $\mathscr{A}$ l'opérateur d'Abel défini par (15.31). Soit pour $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^*$, l'équation $f = a + k\,\mathscr{A}(f)$ dans $\mathbb{R}_+$, où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

a) Montrer, à l'aide de la question 15.35 c), que si f est solution de l'équation, alors $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ f'(x) = \dfrac{a\,k}{\sqrt{x}} + \pi\,k^2\,f(x)$ et $f(0) = a$.

b) En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \ f(x) = a\, e^{\pi k^2 x} + a\, k\, \mathscr{A}\big(e^{\pi k^2 t}\big)(x)$.

c) Montrer que, réciproquement, la fonction f obtenue à la question b) est solution de l'équation $f = a + k\, A(f)$ dans $\mathbb{R}_+$.

15.39 *Démonstration du théorème 15.6 (Bernstein-Widder)*

Soit f une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction complètement monotone au sens de la définition (15.28).

a) Montrer par récurrence l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ de

$$\ell_n := \lim_{x\to\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!}\, x^n\, f^{(n)}(x)\right] \in \mathbb{R}_+,$$

en dérivant la fonction F_n définie par

$$F_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k\, f^{(k)}(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

i) Montrer par récurrence à l'aide de a), que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ f(x) - M_n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} u^{n-1} f^{(n)}(u+x)\, du.$$

ii) Montrer en prenant $x = 1/k$, $k \in \mathbb{N}^*$, dans i), et en utilisant le théorème de Beppo Levi par rapport à k, que

$$f(0) - M_n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} u^{n-1} f^{(n)}(u)\, du.$$

iii) Montrer en prenant $x = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, dans i), et en utilisant le théorème de convergence dominée par rapport à k avec ii), que $\ell := \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = M_n$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Montrer que

$$\max_{x\in[0,1]} \left| e^{-nx} - (1-x)^{n-1} \right| \leq \frac{1}{n-1},$$

en étudiant la fonction $g_n(x) := e^{-nx} - (1-x)^{n-1}$ pour $x \in]0,1[$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

i) Montrer que

$$f(x) - \ell = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_x^{+\infty} \Big(1 - \frac{x}{u}\Big)^{n-1} u^{n-1} f^{(n)}(u)\, du.$$

ii) Montrer, à l'aide de i), b) ii) et de c), que

$$f(x) - \ell = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_x^{+\infty} e^{-n\,x/u}\, u^{n-1} f^{(n)}(u)\, du\right].$$

$iii)$ Montrer par une majoration et à l'aide de $b)$ $ii)$ et $b)$ $iii)$, que

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^x e^{-n\,x/u}\,u^{n-1}f^{(n)}(u)\,du\right]=0.$$

$iv)$ En déduire que

$$f(x)-\ell=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} e^{-n\,x/u}\,u^{n-1}f^{(n)}(u)\,du\right].$$

$e)$ Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$i)$ Montrer, à l'aide du changement de variable $u\to n/u$, que la fonction (discontinue en 0) α_n définie par

$$\alpha_n(t):=\begin{cases}\ell+\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^t\left(\frac{n}{u}\right)^{n+1}f^{(n)}\left(\frac{n}{u}\right)du & \text{si } t\in\mathbb{R}_+^*\\ 0 & \text{si } t\in\mathbb{R}_-,\end{cases}$$

est continue à droite en 0, positive, croissante et $\lim\limits_{t\to+\infty}\alpha_n(t)=f(0)$.

$ii)$ Montrer, à l'aide de $d)$ $iv)$, que

$$\forall\,x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}\,x\,\mathscr{L}(\alpha_n)(x).\tag{15.32}$$

À ce point de l'exercice, on admettra le :
Théorème de sélection de Helly : Toute suite uniformément bornée de fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à variations uniformément bornées, possède une sous-suite qui converge simplement dans cet intervalle vers une fonction bornée à variation bornée.
Il implique en particulier le passage à la limite sous l'intégrale de Stieltjes. Ainsi, à une sous-suite près, la suite de fonctions décroissantes $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une fonction positive décroissante α dans $\mathbb{R}_+^*$. On déduit de la définition de α_n, de la limite (15.32) et de la convention (15.29), l'expression

$$\forall\,x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}\big(\mathscr{L}(d\alpha_n)(x)+\alpha_n(0^-)\big)=\mathscr{L}(d\alpha)(x).$$

Ceci conclut la démonstration du théorème de Bernstein-Widder.

15.40 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville*

Soient $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, et $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$. Pour toute fonction $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ borélienne sur $[a,b]$, on définit l'intégrale de Riemann-Liouville $\mathscr{I}^\alpha(f)$ de f en un point $x\in[a,b]$, par

$$\mathscr{I}^\alpha(f)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt$$

lorsque f est positive ou $\big(t\mapsto f(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\big)$ est intégrable sur $[a,x]$.

$a)$ Soit $p \in [1, +\infty[$. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Jensen (*cf.* exercice 7.10) et du théorème de Fubini-Tonelli, que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{I}^\alpha$ est un opérateur linéaire continu de $\big(L^p([a,b]), \|\cdot\|_p\big)$ sur lui-même, vérifiant

$$\forall\, f \in L^p([a,b]), \quad \big\|\mathscr{I}^\alpha(f)\big\|_p \le \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha\,\Gamma(\alpha)}\,\|f\|_p.$$

$b)$ Soit $p \in [1, +\infty[$.

$i)$ Soit ρ_y^α pour $\alpha > 0$ et $y \in [a, b[$, définie par $\rho_y^\alpha(x) := (x-y)^\alpha/(\alpha\,\Gamma(\alpha))$ pour $x \in [y, b]$. Montrer que pour tout $y \in [a, b[$,

$$\begin{cases} \forall\, x \in]y, b], & \displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \rho_y^\alpha(x) = 1, \\ \forall\, \alpha \in]0, 1], & \|\rho_a^\alpha\|_{L^\infty([a,b])} \le \dfrac{1}{2}\max(1, b-a). \end{cases}$$

$ii)$ Soit $\varphi \in \mathscr{C}^0([a,b])$. Montrer que pour tous $x \in [a,b]$ et $y \in [a, x[$,

$$\begin{aligned} \big|\big(\mathscr{I}^\alpha(\varphi) - \varphi\big)(x)\big| &\le \rho^\alpha(b) \max_{t \in [y,x]} |\varphi(t) - \varphi(x)| \\ &\quad + 2\,\|\varphi\|_{\sup}\big|\rho_a^\alpha(x) - \rho_y^\alpha(x)\big| + |\varphi(x)|\,\big|\rho_a^\alpha(x) - 1\big| \end{aligned}$$

et $|\mathscr{I}^\alpha(\varphi)(x)| \le \|\varphi\|_{\sup}\,\rho_a^\alpha(x)$.

En déduire que $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \big\|\mathscr{I}^\alpha(\varphi) - \varphi\big\|_p = 0$.

$iii)$ Montrer que $\forall\, f \in \mathscr{L}^p([a,b])$, $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \big\|\mathscr{I}^\alpha(f) - f\big\|_p = 0$.

$c)$ Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$. Montrer que $\big(\mathscr{I}^{\alpha+1}(f)\big)' = \mathscr{I}^\alpha(f)$.

$d)$ Montrer que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{I}^\alpha \circ \mathscr{I}^\beta = \mathscr{I}^{\alpha+\beta}$ dans $\mathscr{L}^1([a,b])$.

$e)$ Dans cette question $a = 0$. Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+)$. Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^1\,\mathscr{L}\big(\mathscr{I}^{1-\alpha}(f)\big)(x) = x^\alpha\,\mathscr{L}(f)(x).$$

Interprétation : Si $\alpha \in]0, 1[$ et $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+) \cap \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+)$, alors d'après la Proposition 15.7 on a

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}_+, \ \ \mathscr{L}\big(\mathscr{I}^{1-\alpha}(f)\big)'(x) &= x\,\mathscr{L}\big(\mathscr{I}^{1-\alpha}(f)\big)(x) - \mathscr{I}^{1-\alpha}(f)(0) \\ &= x^1\,\mathscr{L}\big(\mathscr{I}^{1-\alpha}(f)\big)(x), \end{aligned}$$

D'où

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \ \ \mathscr{L}\big(\mathscr{I}^{1-\alpha}(f)\big)'(x) = x^\alpha\,\mathscr{L}(f)(x).$$

Donc la dérivée classique de la fonction $\mathscr{I}^{1-\alpha}(f)$ peut être considérée comme la *dérivée fractionnaire d'ordre* α de la fonction f.

Cinquième partie

QCM et problèmes d’examens

Chapitre 16

Questionnaires à choix multiples

Avertissement

Les questionnaires à choix multiples (QCM) qui suivent sont, pour la plupart d'entre eux, tirés de sujets d'examens du cours de tronc commun 3ème année intitulé : *Analyse pour l'ingénieur*, dispensé à l'INSA de Rennes depuis 2010. Les réponses sont données dans le chapitre 19.

Dans les énoncés de ces QCM, les espaces $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_d, \lambda_d)$ sont notés $L^p(\mathbb{R}^d)$ et la transformée de Fourier est notée $\mathscr{F}$ est définie par

$$\forall\, f \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad \mathscr{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2i\pi(x|\xi)}\, dx$$

avec le facteur -2π par rapport à la définition du chapitre 15. Ainsi, la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}_d)$, notée aussi $\mathscr{F}$, vérifie

$$\forall\, f, g \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (\mathscr{F} \circ \mathscr{F})(f)(x) = f(-x), \quad \mathscr{F}(f) * \mathscr{F}(g) = \mathscr{F}(fg),$$

avec la formule de Plancherel

$$\forall\, f, g \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F}(f)\, \overline{\mathscr{F}(g)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f\bar{g}\, dx,$$

sans le facteur $(2\pi)^d$ présent au chapitre 15.

16.1 QCM 1

1. On a

$\square\ \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ $\square\ \dfrac{x}{x^2+1} \in L^1(\mathbb{R})$ $\square\ \dfrac{\sin x}{x} \in L^1(\mathbb{R})$

$\square\ \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ $\square\ \dfrac{x}{x^2+1} \in L^2(\mathbb{R})$ $\square\ \dfrac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$

2. On a

$\square\ \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 n^2\, x\, e^{-nx}\, dx = 0$ $\square\ \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+x}{2}\right)^n dx = 0$

$\square\ \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\, dx = 0$ $\square\ \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+n)^2}\, dx = 0$

3. L'intégrale double $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ est égale à

$\square\ \pi$ $\square\ \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ $\square\ \dfrac{\pi}{2}$ $\square\ \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ $\square\ \dfrac{\pi}{4}$ $\square\ \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$

4. La transformée de Fourier de la fonction $\left(x \mapsto \begin{cases} x^2\, e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}\right)$ en $\xi \in \mathbb{R}$, est égale à

$\square\ \dfrac{1}{(1+2i\pi\,\xi)^2}$ $\square\ \dfrac{2}{(1+2i\pi\,\xi)^2}$ $\square\ \dfrac{1}{(1+2i\pi\,\xi)^3}$ $\square\ \dfrac{2}{(1+2i\pi\,\xi)^3}$

5. À l'aide de $\mathscr{F}\left(e^{-2\pi|x|}\right)$, le calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2}$ donne

$\square\ \dfrac{1}{2}$ $\square\ 1$ $\square\ 2$ $\square\ \dfrac{\pi}{2}$ $\square\ \pi$ $\square\ 2\pi$

6. À l'aide de $\mathscr{F}\left(1_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}\right)$, le calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 d\xi$ donne

$\square\ \dfrac{1}{2}$ $\square\ 1$ $\square\ 2$ $\square\ \dfrac{\pi}{2}$ $\square\ \pi$ $\square\ 2\pi$

7. Soit $f(x) := e^{-\pi x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. La transformée de Fourier de $f * f$ en $\xi \in \mathbb{R}$, est égale à

$\square\ e^{-\pi\xi^2}$ $\square\ 2\, e^{-\pi\xi^2}$ $\square\ e^{-2\pi\xi^2}$ $\square\ \dfrac{2}{1+\xi^2}$ $\square\ \dfrac{1}{(1+\xi^2)^2}$

16.2 QCM 2

1. On a

☐ $\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{x} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{x^4+x}} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ☐ $\dfrac{\cos x}{x} \in L^1(\mathbb{R})$

☐ $\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{x} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{x^4+x}} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ ☐ $\dfrac{\cos x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$

2. L'intégrale double $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+2xy+3y^2)}\,dx\,dy$ est égale à

☐ π ☐ $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ ☐ $\dfrac{\pi}{3}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$ ☐ $\dfrac{\pi}{4}$ ☐ $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$

3. L'intégrale double $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x(1+y^2)}\,dx\,dy$ est égale à

☐ π ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ ☐ $2\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2$ ☐ $\sqrt{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

4. La transformée de Fourier $\mathscr{F}(f)$ de la fonction $f(x) := x\,e^{-\pi x^2}$, est égale à

☐ f ☐ $-f$ ☐ if ☐ $-if$ ☐ $2f$ ☐ $-2f$

5. La transformée de Fourier $\mathscr{F}(f)$ de la fonction $f : \left(x \mapsto -4\pi^2x^2\,1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)\right)$ en $\xi = 1$, est égale à

☐ $-\pi$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ π ☐ 2π

6. Soit la fonction $f : \left(x \mapsto \begin{cases} x^2\,e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}\right)$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$ est égale à

☐ $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2}$ ☐ $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^3}$ ☐ $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^4}$

☐ $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^5}$ ☐ $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^6}$ ☐ $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^8}$

7. Soit la fonction $f_a(x) := \dfrac{1}{x^2+a^2}$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. La convolée $f_1 * f_1$ coïncide, à une constante multiplicative près, avec

☐ f_1 ☐ f_2 ☐ $(f_1)^2$ ☐ $(f_2)^2$ ☐ $\left(\mathscr{F}(f_1)\right)^2$ ☐ $\left(\mathscr{F}(f_2)\right)^2$

16.3 QCM 3

1. On a

☐ $\dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{x^3+x}} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ☐ $\dfrac{\sin^2 x}{x} \in L^1(\mathbb{R})$

☐ $\dfrac{1}{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{x^3+x}} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ ☐ $\dfrac{\sin^2 x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$

2. L'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ est égale à

☐ 1 ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ ☐ π

3. Soient $\displaystyle I := \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+(x+n)^2}$ et $\displaystyle J := \lim_{n\to+\infty}\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+(x+n)^2}$. Alors

☐ $I = +\infty$ ☐ $I = \pi$ ☐ $I = 0$ ☐ $J = 0$ ☐ $J = \dfrac{\pi}{2}$ ☐ $J = \pi$

4. La transformée de Fourier $\mathscr{F}(f)$ de la fonction $f(x) := x^2\, e^{-\pi x^2}$, est

☐ $= 1+f$ ☐ réelle ☐ $= if$ ☐ $> 1+f$ ☐ $> -f$ ☐ $< -f$

5. Soit $f : \left(x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\right)$. L'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} 4\pi\, f^2(x)\, dx$ est égale à

☐ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$ ☐ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)^2 dt$ ☐ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{t\cos t - \sin t}{t}\right)^2 dt$

☐ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{t\cos t - \sin t}{t^2}\right)^2 dt$ ☐ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1-\cos t + t\sin t}{t^2}\right)^2 dt$

6. Soit $f_a : \left(x \mapsto \begin{cases} e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}\right)$, $a > 0$. Partant de la transformée de Fourier de $f_a * f_a$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(a^2+4\pi^2 t^2)^2}$ est égale à

☐ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ax}\, dx$ ☐ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{-2ax}\, dx$ ☐ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^4\, e^{-2ax}\, dx$

☐ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-2ax}\, dx$ ☐ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2\, e^{-2ax}\, dx$ ☐ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^4\, e^{-2ax}\, dx$

7. Partant de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\, dx$ est égale à

☐ 1 ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ ☐ $\sqrt{\pi}$ ☐ $\sqrt{2\pi}$ ☐ $2\sqrt{\pi}$

16.4 QCM 4

1. On a

☐ $\dfrac{1-e^{-\sqrt{x}}}{x} \in L^1([0,1])$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ☐ $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}} \in L^1(\mathbb{R})$

☐ $\dfrac{1-e^{-\sqrt{x}}}{x} \in L^2([0,1[)$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ ☐ $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}} \in L^2(\mathbb{R})$

2. Soit $f(t) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\,(1+x)}}{1+x}\,dx$, $t > 0$. Alors $f'(1)$ est égale à

☐ $-\,e^2$ ☐ $-\,e$ ☐ $-\dfrac{1}{e}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{e}$ ☐ e ☐ e^2

3. L'intégrale double $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ est égale à

☐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ ☐ π ☐ 2π

4. La transformée de Fourier $\mathscr{F}(f)$ de la fonction $f(x) := x\,e^{-\pi x^2}$, vérifie

☐ $\mathscr{F}(f)(0) = 0$ ☐ $\mathscr{F}(f)(0) = \sqrt{\pi}$ ☐ $\mathscr{F}(f) = -f$

☐ $\mathscr{F}(f) = f$ ☐ $\mathscr{F}(f) = -\,if$ ☐ $\mathscr{F}(f) = if$

5. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} e^{-2\pi x\,(x+iy)}dx \right|^2 dy$ est égale à

☐ $\dfrac{1}{4}$ ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$ ☐ $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ ☐ $\sqrt{\pi}$

6. Soit $f(x) := \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, $x \neq 0$. Alors, $\mathscr{F}$ désignant la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$, $f * f$ est égale à

☐ f^2 ☐ f ☐ $\mathscr{F}(f)$ ☐ $\big(\mathscr{F}(f)\big)^2$ ☐ $\mathscr{F}(f^2)$ ☐ $\mathscr{F}(f) * \mathscr{F}(f)$

7. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+y)} - e^{-2(x+y)}}{x+y}\,dx\,dy$ est égale à

☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{\ln 2}{2}$ ☐ $\ln 2$ ☐ 1 ☐ $2\ln 2$ ☐ $1 + \ln 2$

16.5 QCM 5

1. On a

☐ $\dfrac{1}{\sqrt{x|\ln x|}} \in L^1(]0,1[)$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{x}\ln x} \in L^1(]0,1[)$

☐ $\dfrac{1}{\sqrt{x|\ln x|}} \in L^2(]0,1[)$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{x}\ln x} \in L^2([2,+\infty[)$

☐ $\dfrac{1}{\sqrt{\ln x}\left(1+x\sqrt{\ln x}\right)} \in L^1(]1,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{\ln x}\left(1+x\sqrt{\ln x}\right)} \in L^2(]1,+\infty[)$

2. Soit $f(t) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2\,(x^2+i)}}{x^2+i}\,dx$, $t>0$. Alors $f'(\sqrt{\pi})$ est égale à

☐ $-2\sqrt{\pi}$ ☐ -2 ☐ $-\sqrt{\pi}$ ☐ -1 ☐ 1 ☐ $\sqrt{\pi}$ ☐ 2

3. L'intégrale double $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ est égale à

☐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ ☐ π ☐ 2π

4. La transformée de Fourier $\mathscr{F}(f)$ de la fonction $f(x) := (4\pi^2x^2-\pi)\,e^{-\pi x^2}$, vérifie

☐ $\mathscr{F}(f) = -if$ ☐ $\mathscr{F}(f) = -2f$ ☐ $\mathscr{F}(f) = -f$

☐ $\mathscr{F}(f) = f$ ☐ $\mathscr{F}(f) = 2f$ ☐ $\mathscr{F}(f) = if$

5. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\,dx$, pour $a,b>0$, est égale à

☐ $\pi(a+b)$ ☐ $2\pi(a+b)$ ☐ $\pi\min(a,b)$

☐ $2\pi\min(a,b)$ ☐ $\pi\max(a,b)$ ☐ $2\pi\max(a,b)$

6. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $(f*f)(x) = xf(x)$ pour (presque tout) $x\in\mathbb{R}$, si $f(x)$ est égale à

☐ $e^{-|x|}$ ☐ $1_{\mathbb{R}_+}(x)\,e^{-x}$ ☐ $-1_{\mathbb{R}_+}(x)\,e^{-x}$

☐ $1_{\mathbb{R}_-}(x)\,e^{x}$ ☐ $-1_{\mathbb{R}_-}(x)\,e^{x}$ ☐ $1_{\mathbb{R}_+}(x)\,e^{-2x}$

7. En posant $g(y) := \ln\left(1+2y+2\sqrt{y^2+y}\right)$, $y\geq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+a+ax^2)}{1+x^2}\,dx$, pour $a\geq 0$, est égale à

☐ $\dfrac{1}{2}\,g(a)$ ☐ $g(a)$ ☐ $2\,g(a)$ ☐ $\dfrac{\pi}{2}\,g(a)$ ☐ $\pi\,g(a)$ ☐ $2\pi\,g(a)$

16.6 QCM 6

1. On a

☐ $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\ln\left(e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{1}{x}}\right)dx = +\infty$ ☐ $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}dx = +\infty$

☐ $\displaystyle\int_0^1 x\,\ln^2\left(e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{1}{x}}\right)dx = +\infty$ ☐ $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin^2 x}dx = +\infty$

☐ $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_e^a \frac{\ln x\sin x}{x\,(\ln x+\sin x)}dx = +\infty$ ☐ $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_e^a \frac{\ln x\sin x}{x\,(\ln x-\sin x)}dx = +\infty$

2. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(n\pi x)}{x}\,\varphi(x)\,dx$ est égale à

☐ 0 ☐ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx$ ☐ $\displaystyle\pi\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx$ ☐ $\varphi(0)$ ☐ $\pi\,\varphi(0)$

3. L'intégrale double $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x^2+y^2)^{n-1}}{1+(n+1)^2(x^2+y^2)^{2n}}\right]dx\,dy$ est égale à

☐ 1 ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ 2 ☐ π ☐ $\dfrac{\pi^2}{2}$ ☐ $+\infty$

4. L'équation suivante a au moins une solution réelle non nulle dans $L^1(\mathbb{R})$

☐ $f*f = 1+f$ ☐ $f*f = f$ ☐ $f*f = ixf$ ☐ $f*f = e^{-\pi x^2}$ ☐ $f*f = -e^{-\pi x^2}$

5. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(a+ix)(b+ix)}$, pour $a, b > 0$, est égale à

☐ 0 ☐ $\dfrac{\pi}{a+b}$ ☐ $\dfrac{2\pi}{a+b}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2}(a+b)$ ☐ $\pi(a+b)$ ☐ $2\pi(a+b)$

6. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors pour toute fonction paire $f \in L^1(\mathbb{R})$, $F\big(\mathscr{F}(f)\big) \in \mathscr{F}\big(L^1(\mathbb{R})\big)$ lorsque F est égale à

☐ $1_{[1,+\infty[}(x)$ ☐ e^x ☐ $x\,e^x$ ☐ $\cos x$ ☐ $\sin x$ ☐ $\dfrac{1}{1+x^2}$

7. En utilisant le théorème de Fubini l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\arctan(a\sin x)}{\sin x}dx$, pour $a \in \mathbb{R}$, est égale à

☐ πa ☐ $\dfrac{\pi a}{\sqrt{a^2+1}}$ ☐ $\pi\sin a$ ☐ $\pi\arctan a$ ☐ $\pi\sinh a$ ☐ $\pi\,\mathrm{argsinh}\,a$

Chapitre 17

Quelques problèmes

Avertissement

Les problèmes qui suivent ont fait l'objet de sujets d'examens du cours d'intégration de licence de mathématiques des Universités Paris-Est Créteil (UPEC) et Pierre & Marie Curie (UPMC). Ils sont donc normalement accessibles à un étudiant sans indications préalables autres que celles parfois proposées dans les énoncés eux-mêmes. Leur seconde caractéristique est d'être généralement transversaux, d'où leur regroupement en fin d'ouvrage : les répartir au fil des chapitres aurait nécessité un saucissonnage préjudiciable à leur cohérence.

17.1 Problème 1

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, borélienne. On suppose que $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ (*i.e.* que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|dx < +\infty$). Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$L^f(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx.$$

1.a. Vérifier que la fonction $t \mapsto L^f(t)$ est bien définie en tout point $t \in \mathbb{R}_+$ et que $L^f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

1.b. Montrer que L^f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

1.c. Montrer que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} L^f(t) = 0$.

2. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) := xf(x)$. On suppose que $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$.

2.a. Montrer que L^f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée continue donnée par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+ \qquad (L^f)'(t) = -L^g(t).$$

2.b. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} L^g(t)dt = \int_0^{+\infty} f(x)dx.$

2.c. Montrer que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|f(x)|}{x}dx < +\infty$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} L^f(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx.$

3.a. Pour tout $n \geq 1$ on définit $f_n(x) := \sin(x)\mathbf{1}_{[0,n]}(x)$. Montrer que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+ \qquad L^{f_n}(t) = \frac{1 - e^{-nt}(\cos(n) + t\sin(n))}{1 + t^2}.$$

[<u>Indication :</u> remarquer que $L^{f_n}(t) = \Im\mathrm{m}\left(\displaystyle\int_0^n e^{x(i-t)}dx\right)$ où $i \in \mathbb{C}$ et $i^2 = -1$.]

3.b. Établir rapidement que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$. En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+, \qquad \left|e^{-nt}(\cos(n) + t\sin(n))\right| \leq e^{-(n-1)t} \leq 1.$$

3.c. Établir la majoration : $\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad |L^{f_n}(t)| \leq \dfrac{2}{1+t^2}.$

3.d. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} L^{f_n}(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$

3.e. Montrer à l'aide de la question 2.c. que

$$\int_0^{+\infty} L^{f_n}(t)dt = \int_0^n \frac{\sin(x)}{x}dx.$$

et en conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$

4. On suppose dans cette question que f est positive et que L^f est dérivable en 0.

4.a. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(u) := \dfrac{1 - e^{-u}}{u}$ est décroissante.

4.b. Montrer que la suite de fonctions φ_n définies par

$$\forall\, n \geq 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+ \qquad \varphi_n(x) := n(1 - e^{-\frac{x}{n}})$$

est croissante positive.

4.c. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)dx = -(L^f)'(0).$

17.2 Problème 2

1. Montrer à l'aide du théorème de Fubini et d'un changement de variables que

$$I := \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{(introduire } I^2\text{).}$$

2. On pose pour tout $n\in \mathbb{N}$ et pour tout $x\in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) := \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad \text{et} \quad a_n := \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx.$$

2.a. Montrer que, pour tout $u\in \mathbb{R}_+$ et tout $p\in \mathbb{N}$, $\quad (1+u)^p \geq 1+pu.$

2.b. En déduire que : $\forall\, x\in \mathbb{R},\ f_n(x) \leq \dfrac{2}{1+x^2}.$

2.c. Calculer $\lim\limits_n a_n$.

3. Montrer qu'il existe une fonction intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on déterminera telle que

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f_n(x)}{a_n} - f(x) \right| dx = 0.$$

4. Montrer que, pour tout $\lambda \geq 1/2$, $\lim\limits_n \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x^2} f_n(x)dx = +\infty.$

17.3 Problème 3

On se place sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A}, \mu)$ vérifiant $\mu(X) = 1$ (*i.e.* un espace de probabilités).

On rappelle qu'une fonction dérivable $\varphi : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) est *convexe* si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :
(i) $\forall\, \theta \in [0,1],\ \forall\, u,\, v\in I,\ \varphi(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta\varphi(u) + (1-\theta)\varphi(v),$
(ii) $\forall\, u,\, v\in I,\ \varphi(u) \geq \varphi(v) + \varphi'(v)(u-v).$

1.a. Soient $f : X \to I$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ deux vérifiant respectivement φ est convexe et $f,\ \varphi(f)\in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Établir l'inégalité dite de *Jensen* :

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \varphi(f)d\mu$$

(on pourra utiliser (ii) avec $v := \displaystyle\int_X f d\mu$ et des valeurs de u convenablement choisies).

1.b. Montrer que $\varphi(x) := x^\alpha$, définie sur $I := \mathbb{R}_+$, est convexe si et seulement si $\alpha \geq 1$.

2. On considère une fonction *positive* $g\in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\lambda)$.

2.a. Montrer à l'aide de l'inégalité de Jensen que si $p\geq 2$ et $g\in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, alors

$$g\in \mathscr{L}^{\frac{p}{p-1}}_{\mathbb{R}_+}(\mu) \ \text{ et } \ \left(\int_X g^{\frac{p}{p-1}}\, d\mu\right)^{p-1} \leq \int_X g^p\, d\mu.$$

2.b. Retrouver le résultat obtenu en 2.a. directement à l'aide de l'inégalité de Hölder.

2.c. En conclure que si f et g sont *positives* et dans $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ (toujours avec $p \geq 2$), alors

$$\left(\int_X fg\,d\mu\right)^p \leq \int_X f^p\,d\mu \times \int_X g^p\,d\mu.$$

3. On considère maintenant une fonction $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, croissante, telle que $\psi(0) = 0$ et $\psi(1) > 0$ et vérifiant en outre

$$\forall\, x,\, y \geq 0,\ \psi(xy) \leq \psi(x)\,\psi(y) \ \text{ et } \ \psi\circ\sqrt{} \quad \text{est convexe sur } \mathbb{R}_+.$$

3.a. Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $\psi(x) \geq x^2\psi(1)$.

3.b. Soit $f : (X, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{R}_+$. Montrer que si $\psi(f) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ alors $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}_+}(\mu)$.

3.c. Montrer que pour toutes fonctions boréliennes positives f et g vérifiant $\psi(f)$ et $\psi(g) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, on a

$$\psi\left(\int_X fg\,d\mu\right) \leq \psi(\|f\|_2)\psi(\|g\|_2).$$

En déduire que

$$\psi\left(\int_X fg\,d\mu\right) \leq \int_X \psi(f)\,d\mu \int_X \psi(g)\,d\mu.$$

3.d. Montrer que le résultat ci-dessus admet l'inégalité établie en 2.c. comme cas particulier.

17.4 Problème 4

Dans tout ce problème on se place sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}^*_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^*_+))$ muni de la mesure de Lebesgue λ (la notation $\mathbb{R}^*_+$ désigne ici l'ensemble des réels strictement positifs). On notera indifféremment $\int f\,d\lambda$ ou $\int f(x)\,dx$ pour désigner l'intégrale d'une fonction f par rapport à la mesure de Lebesgue (lorsque celle-ci a un sens).

1.a. Montrer que l'application de $(\mathbb{R}^*_+)^2$ dans lui-même $(u,\, v) \mapsto (\frac{u}{v}, v)$ est borélienne.

1.b. Montrer que si f et g sont deux applications boréliennes de $\mathbb{R}^*_+$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$(u, v) \mapsto f(u/v)\,g(v)$$

est mesurable de $((\mathbb{R}^*_+)^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^*_+)^{\otimes 2})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

2.a. Soient $f,\, g : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions boréliennes positives. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{R}^*_+} f(u/v)g(v)\frac{du\,dv}{v} = \int_{\mathbb{R}^*_+} f(x)dx \int_{\mathbb{R}^*_+} g(x)dx.$$

2.b. En déduire que si $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ par rapport à la mesure de Lebesgue, on peut définir $\lambda(du)$-$p.p.$ sur $\mathbb{R}_+^*$ l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} f(u/v)g(v)\frac{dv}{v}$. On notera cette intégrale $f \odot g(u)$ là où elle existe (on prolonge $f \odot g$ à toute la droite réelle en posant $f \odot g(u) = 0$ en les points $u \in \mathbb{R}_+^*$ où l'intégrale n'est pas définie). Justifier le fait que la fonction $f \odot g$ ainsi définie est borélienne.
2.c. Montrer que si $f,\ g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \lambda)$, alors $f \odot g = g \odot f$.

Avertissement : Dans toute la suite $f \odot g(u)$ désignera l'intégrale définie en 2.b. lorsqu'elle existe.

3.a. Montrer que si f est continue et nulle en dehors d'un intervalle compact $[a, b]$ contenu dans $\mathbb{R}_+^*$ et si g est intégrable sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}_+^*$, alors $f \odot g$ existe et est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.b. Soient $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne vérifiant $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} |f(x)|\frac{dx}{x} < +\infty$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues à support compact (dans $\mathbb{R}_+^*$) vérifiant $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} |f(x) - f_n(x)|\frac{dx}{x} \to 0$ quand $n \to +\infty$ (il n'est pas demandé d'établir l'existence d'une telle suite). Soit g une fonction borélienne, bornée par un réel M. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f \odot g(x)$ est défini et que

$$|f \odot g(x) - f_n \odot g(x)| \leq M \int_{\mathbb{R}_+^*} |f(y) - f_n(y)|\frac{dy}{y}.$$

En déduire que $f_n \odot g$ converge uniformément vers $f \odot g$, puis que $f \odot g$ est continue.

4.a. On pose $g := \mathbf{1}_{[a,b]}$ où $0 < a < b$. Montrer que, pour toute $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \lambda)$, $f \odot g$ existe et est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (on pourra exprimer $f \odot g$ comme une intégrale dépendant de ses bornes).
4.b. Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas de fonction $e \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \lambda)$ telle que, pour toute $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \lambda)$, $e \odot g = g$ λ-$p.p.$.

5. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On suppose que f vérifie la condition

$$(C) \qquad\qquad \exists\, \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x)e^{\alpha x}dx < +\infty.$$

On pose alors, pour tout $t \geq 0$, $L_f(t) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} f(x)\, x^t dx$.

5.a. Montrer que $L_f(t) < +\infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (on pourra établir par exemple que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $u^n \leq n!\, e^u$).
5.b. Montrer que, dès que deux fonctions boréliennes positives f et g vérifient la condition (C), $L_{f\odot g} = L_f L_g$.
5.c. Donner une exemple de fonction borélienne positive f ne vérifiant pas (C) et pour laquelle $L_f(t)$ est cependant fini pour tout $t \geq 0$.

17.5 Problème 5

On se place sur un espace mesuré abstrait $(X, \mathscr{A}, \mu)$ vérifiant $\mu(X) < +\infty$. Le but du problème est d'établir, dans ce cadre, des conditions plus faibles que celles du théorème de convergence dominée pour passer de la convergence μ-$p.p.$ à la convergence dans $L^1(\mu)$.

Une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions $\mathscr{A}$-mesurables de X dans $\mathbb{R}$ est dite *équiintégrable* si

$$\lim_{c\to+\infty} \sup_{n\geq 1} \int_{\{|f_n|\geq c\}} |f_n|\, d\mu = 0.$$

QUESTION PRÉLIMINAIRE : Soit $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$. On pose, pour tout $A \in \mathscr{A}$,

$$\mu^g(A) := \int_A g d\mu.$$

Montrer que μ^g est une mesure finie sur $(X, \mathscr{A})$.

1. On suppose dans cette question que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est équiintégrable.

1.a. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, pour tout $A \in \mathscr{A}$ et tout réel $c > 0$,

$$\int_A |f_n| d\mu \leq \int_{\{|f_n|\geq c\}} |f_n| d\mu + c\mu(A).$$

1.b. En déduire que $\sup_{n\geq 1} \|f_n\|_1 < +\infty$.

1.c. Déduire également de la question 1.a. que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{A}$,

$$\sup_{n\geq 1} \mu(A_n) \leq \eta_\varepsilon \Longrightarrow \sup_{n\geq 1} \int_{A_n} |f_n| d\mu \leq \varepsilon.$$

2. On suppose danc cette question que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ est équiintégrable et converge μ-$p.p.$ vers une fonction f.

2.a. Montrer que $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et $\|f\|_1 \leq \sup_{n\geq 1} \|f_n\|_1$.

2.b. Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\displaystyle\int_A |f| d\mu \leq \sup_{n\geq 1} \int_A |f_n| d\mu$.

2.c. Pour tout $n \geq 1$, on pose $A_{c,n} := \{|f - f_n| \geq c\}$. Montrer que

$$\sup_{n\geq 1} \mu(A_{c,n}) \leq 2\frac{\sup_{n\geq 1} \|f_n\|_1}{c}.$$

2.d. Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout réel $c > 0$,

$$\int |f - f_n| d\mu \leq \int \min(|f - f_n|, c) d\mu + 2 \sup_{n\geq 1} \int_{A_{c,n}} |f_n| d\mu.$$

2.e. Déduire de ce qui précède que $\int |f - f_n| d\mu$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

3.a. Montrer que s'il existe une fonction positive $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ telle que, pour tout $n \geq 1$, $|f_n| \leq g$ μ-$p.p.$, alors la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est équiintégrable.

3.b. En déduire que la suite constante $f_n := f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ est équiintégrable.

4. Montrer que si deux suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ sont équiintégrables, il en est de même de leur somme $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$. On établira à titre préliminaire l'inégalité

$$\begin{aligned} \int_{\{|f_n+g_n|\geq\varepsilon\}} |f_n + g_n| d\mu \quad &\leq \quad \int_{\{|f_n|\geq\varepsilon/2\}} |f_n| d\mu + \int_{\{|g_n|\geq\varepsilon/2\}} |g_n| d\mu \\ &\quad + \int_{\{|f_n|\geq\varepsilon/2\}} |g_n| d\mu + \int_{\{|g_n|\geq\varepsilon/2\}} |f_n| d\mu \end{aligned}$$

et l'on s'appuiera sur la question 1.c.

5. On suppose dans cette question que f_n converge vers f dans $L^1(\mu)$.

5.a. Montrer que $\sup\limits_{n\geq 1} \|f_n\|_1 < +\infty$.

5.b. Montrer que, pour tous réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_\varepsilon \geq 1$ tel que, pour tout réel $c > 0$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|f_n-f|\geq c\}} |f_n - f| d\mu \leq \max\left(\varepsilon, \int_{\{|f_1-f|\geq c\}} |f_1 - f| d\mu, \ldots, \int_{\{|f_{n_\varepsilon}-f|\geq c\}} |f_{n_\varepsilon} - f| d\mu\right).$$

5.c. En déduire que la suite $(f_n - f)_{n\geq 1}$ est équiintégrable, puis, à partir de la question 4., que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ elle-même est équiintégrable.

6. On se place dans cette seule question sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. Montre que la fonction $f(x) := 1/\sqrt{x}$ vérifie $\lim\limits_{c\to+\infty} \int_{\{|f|\geq c\}} f(x)\, dx = 0$ alors que f n'est pas même intégrable.

17.6 Problème 6

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}^*_+$, $\Gamma(t) := \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx.$

PARTIE A : 1.a. Montrer que la fonction $\Gamma(t)$ est bien définie en tout point t de $\mathbb{R}^*_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

1.b. Montrer que, pour tout $t > 0$, $\Gamma(t + 1) = t\,\Gamma(t)$ et en déduire que $\Gamma(n) = (n - 1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.a. Montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$

2.b. Montrer que que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (on pourra, en élevant l'expression au carré, transformer artificiellement l'intégrale simple ci-dessus en intégrale double, puis mettre en œuvre un changement de variables *ad hoc*, le tout soigneusement justifié).

3.a. Montrer, en considérant notamment le changement de variable élémentaire $x = \varphi(u) := \frac{u}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}$, que

$$\Gamma(t+1) = t^t \sqrt{t}\, e^{-t} \int_{-\sqrt{t}}^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-v\sqrt{t}}\,dv.$$

3.b. En déduire que, pour toute suite de réels t_n tendant vers $+\infty$,

$$\varliminf_n \left(\frac{e}{t_n}\right)^{t_n} \frac{\Gamma(t_n+1)}{\sqrt{t_n}} \geq \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \sqrt{2\pi}.$$

(On pourra calculer, pour tout $v \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to+\infty} t\ln(1+\frac{v}{\sqrt{t}}) - v\sqrt{t}$.)

4.a. Montrer que $\int_{-\sqrt{t}}^{0} \left(1 + \frac{v}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-v\sqrt{t}}\,dv = \int_0^{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{w}{\sqrt{t}}\right)^t e^{w\sqrt{t}}\,dw.$

4.b. Montrer que pour tout $x \in]-1, 0]$, $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}$.

4.c. En déduire que pour tout $w,\ t \in \mathbb{R}_+$, $\left(1 - \frac{w}{\sqrt{t}}\right)^t e^{w\sqrt{t}} \mathbf{1}_{[0,\sqrt{t}]}(w) \leq e^{-\frac{w^2}{2}}$.

4.d. En conclure que $\lim_{t\to+\infty} \int_{-\sqrt{t}}^{0} \left(1 + \frac{v}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-v\sqrt{t}}\,dv = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

5.a. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2(1+x)}$ sur $\mathbb{R}_+$.

5.b. En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geq 1$,

$$\left(1 + \frac{u}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-u\sqrt{t}} \leq e^{-\frac{u^2}{2(1+u)}}.$$

5.c. En conclure que $\lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-u\sqrt{t}}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

6. Établir la formule de Stirling étendue : $\Gamma(t+1) \overset{t\to+\infty}{\sim} \left(\frac{t}{e}\right)^t \sqrt{2\pi t}$.

Partie B : 1.a. Montrer que, pour tous $s,\ t > 0$,

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_{\mathbb{R}_+^2} x^{s-1} y^{t-1} e^{-(x+y)}\,dx\,dy.$$

1.b. On pose, pour tous $u,\, v \in \mathbb{R}$, $\varphi(u,v) := (u(1-v), uv)$. Montrer que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme d'un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

1.c. Montrer que , pour tous $s,\, t > 0$,

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \Gamma(s+t)\int_0^1 (1-v)^{s-1}v^{t-1}\,dv.$$

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}} = \pi$.

Remarque : On pourra éventuellement consulter les indications associées à l'exercice 8.18.

17.7 Problème 7

Les trois parties du problème sont indépendantes.

PARTIE A : Soit f la fonction définie par

$$f(t) := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-t\,(x^4+y^4)}}{1+x^4+y^4}\,dx\,dy, \quad t \geq 0.$$

1. Montrer que $f(0) \leq \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{2}{2+(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$ et calculer cette dernière intégrale à l'aide d'un changement de variables classique.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ (<u>Indication</u> : remarquer que $f(0) < +\infty$).

3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que f est solution de l'équation différentielle $f'(t) = f(t) - \frac{I^2}{\sqrt{t}}$ où $I := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-u^4} du$.

4. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = 2\,I^2 \displaystyle\int_{\sqrt{t}}^{+\infty} e^{t-u^2} du$ (montrer que la dernière fonction est une solution particulière de l'équation différentielle de 3. et utiliser la limite obtenue à la question 2.).

PARTIE B : On considère l'espace mesuré $\big([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda\big)$ où λ est la mesure de Lebesgue. On se propose de montrer l'implication

$$\forall\, A \in \mathscr{B}([0,1]), \qquad \int_A \frac{\lambda(dx)}{x} < +\infty \implies \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\lambda(A\cap[0,\varepsilon])}{\varepsilon} = 0.$$

1. Soit $A \in \mathscr{B}([0,1])$ tel que $\displaystyle\int_A \frac{\lambda(dx)}{x} < +\infty$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{A\cap[0,\varepsilon]} \frac{\lambda(dx)}{x} = 0$ (utiliser la caractérisation séquentielle de la limite).

2. Montrer que $(\lambda(A\cap[0,\varepsilon]))^2 \leq \int_{A\cap[0,\varepsilon]} \frac{\lambda(dx)}{x} \int_{A\cap[0,\varepsilon]} x\,\lambda(dx)$.

3. En déduire l'implication cherchée.

4. *Facultatif :* Montrer que la réciproque est fausse à l'aide de l'ensemble A défini par $A := \bigcup_{k\geq 2}[\frac{1}{k}, \frac{1}{k}+a_k]$ où $a_k := \frac{1}{k\ln(k)} - \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}$. (Indication : majorer $\lambda(A\cap[0,\frac{1}{n}])$ à l'aide d'une série et minorer $\int_{A\cap[\frac{1}{n},1]} \frac{\lambda(dx)}{x}$ à l'aide d'une somme puis conclure en notant que $a_k \sim \frac{1}{k^2\ln(k)}$).

PARTIE C : On se place sur un espace mesuré $(X,\mathscr{A},\mu)$. Soit $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante telle que

$$\exists\, a,b>0,\ \forall\, t\in\mathbb{R}_+,\quad a\,t\leq\Phi(t)\leq b\,t.$$

Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ et f des fonctions positives de $\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}_+}(X,\mu)$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X (\Phi(f_n)-\Phi(f))\,(f_n-f)\,d\mu = 0.$$

1. Montrer que l'on peut extraire de chaque sous-suite de $(f_n)_{n\geq 1}$ une sous-suite $(f_{k_n})_{n\geq 1}$ telle que $(\Phi(f_{k_n})-\Phi(f))\,(f_{k_n}-f)$ converge vers 0 μ-$p.p.$ et soit dominée μ-$p.p.$ par une fonction fixe de $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$.

2. Montrer qu'il existe $g\in\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ et $h\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ telles que $(f_{k_n})^2\leq g\,f_{k_n}+h$ μ-$p.p.$ puis que f_{k_n} est dominée μ-$p.p.$ par une fonction fixe de $\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}_+}(\mu)$.

3. Montrer que f_{k_n} converge vers f μ-$p.p.$ (montrer que $f_{k_n}(x)$ possède $f(x)$ comme unique valeur d'adhérence $\mu(dx)$-$p.p.$, à l'aide de 1., de la continuité et de la stricte croissance de Φ).

4. En déduire que f_{k_n} converge vers f dans $L^2_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ (appliquer le théorème de convergence dominée) ainsi que toute la suite f_n.

17.8 Problème 8

La lettre λ désigne la mesure de Lebesgue sur l'intervalle unité $[0,1]$. On se donne une fonction $f_0 : [0,1]\to\mathbb{R}$ fixée et un paramètre $\alpha\in\mathbb{R}_+$. On associe, dès que cela a un sens, à une fonction borélienne $f : [0,1]\to\mathbb{R}$, la fonction $\Phi(f)$ par

$$\Phi(f)(x) := \alpha\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt + f_0(x),\ x\in[0,1].$$

PARTIE A : 1. Montrer que si la fonction f est bornée ou positive, alors la fonction $\Phi(f)(x)$ est bien définie en tout point $x\in[0,1]$.

2. Montrer que, si la fonction f est positive, alors

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt \right) dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1-t}\, f(t)\, dt.$$

3.a. Montrer que si la fonction f est dans $\mathscr{L}^1([0,1],\lambda)$, alors $\Phi(f)(x)$ est défini pour λ-presque tout $x \in [0,1]$. Montrer que tout prolongement de $\Phi(f)$ à l'intervalle $[0,1]$ est dans $\mathscr{L}^1([0,1],\lambda)$. En déduire que, si f_0 est dans $\mathscr{L}^1([0,1],\lambda)$, Φ définit une transformation de $L^1([0,1],\lambda)$ à valeurs dans $L^1([0,1],\lambda)$.

3.b. Montrer que, pour toutes $f,\ g \in \mathscr{L}^1([0,1],\lambda)$,

$$\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_1 \leq 2\alpha \|f-g\|_1.$$

En déduire que si, $\alpha \in]0,1/2[$, il une fonction $f_1 \in \mathscr{L}^1([0,1],\lambda)$ telle que $\Phi(f_1) = f_1$ λ-*p.p.* (on pourra temporairement considérer l'espace $L^1([0,1],\lambda)$). Montrer que si $\Phi(\tilde{f}_1) = \tilde{f}_1$ λ-*p.p.*, ($\tilde{f}_1 \in \mathscr{L}^1([0,1],\lambda)$, alors $f_1 = \tilde{f}_1$ λ-*p.p.*.

4.a. Un réel $x \in [0,1]$ étant fixé, vérifier que la formule

$$\nu_x(A) := \int_{A\cap[0,x]} \frac{dt}{\sqrt{x-t}}, \quad A \in \mathscr{B}([0,1]),$$

définit bien une mesure positive finie sur l'espace $([0,1],\mathscr{B}([0,1]))$. Exprimer la masse totale de ν_x en fonction de x.

4.b. Montrer que si μ désigne une mesure positive finie sur un espace $(X,\mathscr{A})$, alors, pour toute fonction mesurable positive f définie sur X

$$\int_X f\, d\mu \leq \sqrt{\mu(X) \int_X f^2 d\mu}.$$

En déduire que $\mathscr{L}^2(X,\mathscr{A},\mu) \subset \mathscr{L}^1(X,\mathscr{A},\mu)$.

4.c. Montrer que, pour toute fonction mesurable positive f définie sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$,

$$\left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt \right)^2 \leq 2\sqrt{x} \int_0^x \frac{f^2(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt.$$

4.d. En déduire que, si $f_0 \in L^2([0,1],\lambda)$, la transformation Φ envoie $L^2([0,1],\lambda)$ dans lui-même et vérifie pour la norme $\|\,.\,\|_2$ une inégalité analogue à celle établie en 3.b.

5. Que peut-on dire alors du point fixe f_1 de Φ en termes d'intégrabilité ?

PARTIE B : On suppose dans tout ce qui suit que $f_0 \equiv 0$ et $\alpha = 1$.

1.a. Montrer que Φ est linéaire de $L^1([0,1],\lambda)$ dans $L^1([0,1],\lambda)$et que sa norme vérifie $|||\Phi||| \leq 2$ où, par définition, $|||\Phi||| := \sup\{\|\Phi(f)\|_1,\ \|f\|_1 \leq 1\}$.

1.b. On pose, pour tout $n \geq 1$, $f_n := n\mathbf{1}_{[0,1/n]}$. Montrer que $\|f_n\|_1 = 1$ et que $\|\Phi(f_n)\|_1$ est égal à $\frac{4}{3}n\big(1-(1-1/n)^{\frac{3}{2}}\big)$. En déduire que $\|\Phi\| = 2$.

2.a. Soit $f \in \mathscr{L}^1([0,1], \lambda)$. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\Phi(f)(x) = \sqrt{x}\int_0^1 \frac{f(xu)}{\sqrt{1-u}}\, du.$$

2.b. En déduire que, si la fonction f est bornée et continue en 0, alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(f)(x)}{\sqrt{x}} = 2f(0).$$

2.c. Déduire également de la question 2.a que, si f est décroissante positive,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(f)(x)}{\sqrt{x}} = 2f(0^+).$$

2.d. Que subsiste-t-il du résultat de la question 2.c. si la fonction f est seulement positive et admet une limite (à droite) en zéro ?

3. On suppose que f est bornée sur l'intervalle $[0,1]$ et dérivable en 0.

3.a. Montrer l'existence d'un réel $c > 0$ tel que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$|f(t) - f(0)| \leq ct.$$

3.b. On note $\Psi(f)$ la fonction définie par $\Psi(f)(x) := \dfrac{\Phi(f)(x)}{\sqrt{x}}$ si $x \in]0,1]$ et $\Psi(f)(0) := 2f(0)$. Montrer que $\Psi(f)$ est dérivable en 0 et que

$$\Psi(f)'(0) = \frac{4}{3}f'(0).$$

3.c. En déduire un développement asymptotique de $\Phi(f)$ au voisinage de 0.

17.9 Problème 9

On se place sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Pour toute mesure *finie* μ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, on définit la fonction $\widehat{\mu}$ en tout point $u \in \mathbb{R}$ par

$$\widehat{\mu}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux}\mu(dx).$$

La fonction $\widehat{\mu}$ est appelée *transformée de Fourier de* μ. Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de l'application $\mu \mapsto \widehat{\mu}$.

PARTIE A : 1.a. Justifier l'existence de la fonction $\widehat{\mu}$ en tout point de $\mathbb{R}$ et montrer que $\widehat{\mu}$ est continue partout, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1.b. Montrer que si $\int_{\mathbb{R}} |x|\mu(dx) < +\infty$, alors $\widehat{\mu}$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

1.c. En déduire par récurrence que si $\int_{\mathbb{R}} |x|^n \mu(dx) < +\infty$ pour un entier $n \geq 1$, alors μ est n fois continuement dérivable et proposer une expression simple de ses dérivées successives.

1.d. Montrer que si la mesure μ est invariante par symétrie centrale *i.e.* par l'application $x \mapsto -x$, alors $\widehat{\mu}$ est paire et ne prend que des valeurs réelles.

2.a. Montrer que, pour tous $u, v \in \mathbb{R}$,

$$|\widehat{\mu}(u) - \widehat{\mu}(v)| \leq \int_{\mathbb{R}} \min(2, |u - v||x|)\mu(dx).$$

2.b. En déduire que l'application $\widehat{\mu}$ est en fait uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B : On suppose dans cette seule partie que $\mu(dx) = f(x)\lambda(dx)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}, \lambda)$. En d'autres termes μ est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue.

1.a. On suppose que f est en escalier. Montrer que $\lim_{|u| \to +\infty} \widehat{\mu}(u) = 0$.

1.b. Montrer que, dès que $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}, \lambda)$, $\lim_{|u| \to +\infty} \widehat{\mu}(u) = 0$ (on pourra s'appuyer sur un théorème de densité approprié).

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) := e^{-x^2/2}$.

2.a. Calculer $\widehat{\mu}(0)$ par la méthode de votre choix.

2.b. Établir à l'aide d'une intégration par parties une relation simple entre la fonction $\widehat{\mu}$ et sa dérivée $\widehat{\mu}'$. En déduire que $\widehat{\mu}(u) = \sqrt{2\pi}\, e^{-u^2/2}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

PARTIE C : 1.a. Montrer à l'aide du théorème de Fubini et d'un changement de variable élémentaire que, pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\varepsilon}} \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iuv} \widehat{\mu}(v) e^{-\varepsilon \frac{v^2}{2}} \frac{\sqrt{\varepsilon}\, dv}{\sqrt{2\pi}}.$$

1.b. Soient μ et ν deux mesures finies sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. En déduire que si $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$, alors pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à support compact et tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(u) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\varepsilon}} \mu(dx) \right) du = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\varepsilon}} \nu(dx) \right) du \ \in \mathbb{R}$$

2. En déduire à l'aide du théorème de Fubini (approprié) et d'un changement de variable élémentaire que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x - v) e^{-\frac{v^2}{2\varepsilon}} \frac{dv}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x - v) e^{-\frac{v^2}{2\varepsilon}} \frac{dv}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\, \nu(dx)$$

3.a. On suppose en outre que la fonction φ est lipschitzienne. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}|\varphi(x-v)-\varphi(x)|e^{-\frac{v^2}{2\varepsilon}}\frac{dv}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}=0.$$

3.b. En déduire que, pour toute fonction φ lipschitzienne à support compact et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi(x-v)e^{-\frac{v^2}{2\varepsilon}}\frac{dv}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}\varphi(x).$$

4. En conclure à l'aide de la question 2. que $\mu=\nu$.

17.10 Problème 10

Soit $(X,\mathscr{A},\mu)$ et $(Y,\mathscr{B},\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et $p\in[1,+\infty[$ (on notera q son exposant conjugué). Soit $\varphi : X\times Y\to\mathbb{R}_+$ une fonction $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$-mesurable, positive et $\mu\otimes\nu$-intégrable.

1. On pose pour tout $x\in X$,

$$\Phi(x)=\int_Y\varphi(x,y)\,\nu(dy).$$

Justifier (sans calculs) le fait que Φ ainsi définie est une fonction $\mathscr{A}$-mesurable, μ-$p.p.$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$une suite d'éléments de la tribu $\mathscr{A}$, croissante pour l'inclusion et vérifiant $\cup_{n\geq 1}A_n=X$ et $\mu(A_n)<+\infty$ pour tout $n\geq 1$.

2.a. Montrer que pour tout $n\geq 1$,

$$\begin{aligned}&\int_X\mathbf{1}_{\{\Phi\leq n\}\cap A_n}(x)(\Phi(x))^p\,\mu(dx)\\&=\int_{X\times Y}\mathbf{1}_{\{\Phi\leq n\}\cap A_n}(x)(\Phi(x))^{p-1}\varphi(x,y)\,\mu\otimes\nu(dx,dy).\end{aligned}$$

2.b. Montrer que pour tout $n\geq 1$,

$$\begin{aligned}&\int_X\mathbf{1}_{\{\Phi\leq n\}\cap A_n}(x)(\Phi(x))^p\,\mu(dx)\\&\leq\left(\int_X\mathbf{1}_{\{\Phi\leq n\}\cap A_n}(x)(\Phi(x))^p\,\mu(dx)\right)^{1/q}\int_Y\left(\int_X(\varphi(x,y))^p\,\mu(dx)\right)^{1/p}\nu(dy).\end{aligned}$$

2.c. En déduire que pour tout $n\geq 1$,

$$\|\mathbf{1}_{\{\Phi\leq n\}\cap A_n}\Phi\|_{L^p(\mu)}\leq\int_Y\|\varphi_y\|_{L^p(\mu)}\nu(dy).$$

où $\varphi_y(x) := \varphi(x, y)$ désigne la “section de φ au-dessus de y”.

2.d. Établir l’inégalité

$$\|\Phi\|_{L^p(\mu)} \le \int_Y \|\varphi_y\|_{L^p(\mu)} \nu(dy).$$

2.e. Justifier pourquoi on a introduit les $A_n \cap \{\Phi \le n\}$ à la question 2.a..

2.f. Montrer que si $\varphi \in \mathscr{L}^p(\mu \otimes \nu)$ et si ν est une mesure finie, alors

$$\int_Y \|\varphi_y\|_{L^p(\mu)} \nu(dy) < +\infty.$$

La question suivante peut être traitée à partir du résultat de la seule question 2.d..

3. Soit $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Pour tout $A > 0$, on pose $\varphi(x, y) := f(xy)\mathbf{1}_{[0,A]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)$, $\mu = \lambda$, $\nu = \lambda_{|[0,1]}$.

3.a. Montrer que φ est positive et $\lambda \otimes \lambda_{|[0,1]}$-intégrable, puis calculer $\Phi(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$ et $\|\varphi_y\|_{L^p(\lambda)}$ en tout point $y \in]0, 1]$.

3.c. En déduire l’inégalité de Hardy : pour tout $p \in]1, +\infty[$ et pour toute fonction $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$,

$$\|F\|_p \le \frac{p}{p-1} \|f\|_p \qquad \text{où} \qquad F(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(u)du,\ x \in \mathbb{R}_+^*.$$

17.11 Problème 11

Dans ce problème, on se place sur l’espace semi-normé $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ où $p \ge 1$ désigne un paramètre réel fixé et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. On notera $\|\,.\,\|_p$ la semi-norme usuelle sur cet espace.

1. Montrer que si $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$, alors la fonction $u \mapsto f(u)/u$ est intégrable sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, $a > 0$.

Dans la suite on considèrera la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$F(0) = 0 \quad \text{et} \quad F(x) := \int_x^{+\infty} \frac{f(u)}{u} du,\ x > 0.$$

[La valeur de F en 0 est donnée par pure commodité et n’intervient pas dans la suite.]

2. On suppose dans toute cette question que la fonction f est continue nulle en dehors d’un intervalle compact $[a, b]$ contenu dans $]0, +\infty[$.

2.a. Montrer que la fonction F est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, constante au voisinage de 0 et nulle au voisinage de $+\infty$.

2.b. En déduire à l'aide d'une intégration par parties que

$$\int_{\mathbb{R}_+} (F(x))^p dx = p \int_{\mathbb{R}_+} (F(x))^{p-1} f(x) dx.$$

3. On suppose encore dans toute cette question que f est continue nulle en dehors d'un intervalle compact $[a, b]$ contenu dans $]0, +\infty[$.

3.a. On suppose en outre que la fonction f est positive. Montrer qu'il existe une constante C_p (indépendante de f !) que l'on déterminera telle que

$$\|F\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

(On pourra appliquer l'inégalité de Hölder au second membre de l'identité obtenue dans la question 2.b. et vérifier que $F \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$).

3.b. Montrer que l'inégalité précédente reste valide même si f n'est pas positive.

4. Soit $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. On admettra l'existence d'une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions continues, chacune nulle en dehors d'un intervalle compact I_n contenu dans $]0, +\infty[$, telle que $\|f - f_n\|_p$ tende vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

4.a. Montrer à l'aide d'un théorème du cours l'existence d'une suite, que par abus de notation on notera encore $(f_n)_{n\geq 1}$, vérifiant, outre les propriétés ci-dessus, $f_n(x)$ converge $\lambda(dx)$-p.p. vers $f(x)$.

C'est cette suite qui est utilisée dans la suite.

4.b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$,

$$|F(x)| \leq \liminf_n \int_x^{+\infty} \frac{|f_n(u)|}{u} du.$$

4.c. En conclure que $F \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ et que

$$\|F\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

5. Soit $\rho > 1/p$, on pose $f_\rho(x) := x^{-\rho} \mathbf{1}_{\{x\geq 1\}}$. Calculer le rapport

$$\|F\|_p / \|f\|_p.$$

Qu'en déduit-on ?

Sixième partie

Solutions des exercices et réponses aux QCM

Chapitre 18

Solutions des exercices

Exercices du chapitre 1

1.1 $b)$ Se ramener, par approximation uniforme, au cas où g est continûment dérivable sur un intervalle compact et donc lipschitzienne.

1.2 $a)$ Commencer par supposer f en escalier puis utiliser la définition de l'intégrabilité au sens de Riemann.

$b)$ On obtient $\alpha = -1$ et $\beta = \dfrac{1}{2\pi}$.

$c)$ Calculer la somme avec e^{ikx}.

$d)$ D'après $a)$ on a $\displaystyle\lim_n \int_\delta^\pi \left(\alpha\, x + \beta\, x^2\right) \Big(\sum_{k=1}^n \cos(nx)\Big)\, dx = -\frac{1}{2}\int_\delta^\pi \left(\alpha\, x + \beta\, x^2\right) dx$,

et on a l'estimation $\displaystyle\left| \int_0^\delta \left(\alpha\, x + \beta\, x^2\right) \Big(\frac{\sin\big((n+1/2)\, x\big)}{\sin(x/2)} - 1\Big)\, dx \right| = O(\delta) \to 0.$

1.3 $\varphi_n(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x = k/n! \text{ pour } k \in \{0, \ldots, n!\} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ vérifie $\|f - \varphi_n\|_{\sup} \leq \dfrac{1}{n}$.

1.4 Raisonner par l'absurde et construire une suite $(I_n)_{n\geq 1}$ de segments emboîtés tels que $\displaystyle\sup_{x\in I_n} f(x) \leq 1/n$.

1.5 $\displaystyle\ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\Big(1 + \frac{k}{n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(1+x)\, dx = 2\ln 2 - 1.$

1.6 Soit S_n la somme de Riemann de f sur $[0,1]$ associée à la subdivision $(k/n)_{1\leq k\leq n}$. Alors on a

$$S_n + T_n = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{[n/2]} f\Big(\frac{2k}{n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\, dx,$$

à l'aide de la subdivision $(2k/n)_{1\leq k\leq [n/2]}$ de pas $n/2$, sur $[0,1]$. Donc $T_n \to 0$.

1.7 $a)$ Remarquer que, si f est croissante et $x_k := a + k/n\,(b-a)$, $1\leq k\leq n-2$, alors

$$\frac{b-a}{n}\, f(x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx \leq \frac{b-a}{n}\, f(x_{k+1}).$$

$b)$ On prend la valeur en 1 de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \frac{X^n - 1}{X - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}\big(e^{-\frac{ik\pi}{n}}\, X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\big).$

$c)$ On applique la limite de $a)$ avec la fonction $\ln(\sin)$ sur $]0,\pi[$ et monotone sur chacun des intervalles $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $[\frac{\pi}{2}, \pi[$, puis on prend le logarithme de l'égalité du $b)$.

1.8 Montrer que la fonction $H - (F\circ G)$, où F, G, H sont respectivement les primitives nulles en 0 de f, g, fg, est décroissante sur $[0,1]$.

1.9 On a pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$, $q > p$, $\displaystyle N_1(f_q - f_p) \leq \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n^2} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent normalement donc uniformément vers f et f' respectivement, sur tout intervalle $[0,a]$ avec $a\in[0,1[$. On a $f'(x)=1/(1-x)$ d'où $f(x)=-\ln(1-x)$ pour $x\in[0,a]$. Par conséquent, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers g dans $\big(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),N_1\big)$, il vient

$$\begin{aligned}\forall\, a\in[0,1[\quad \int_0^a \big|g(x)+\ln(1-x)\big|\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^a \big|g(x)-f_n(x)\big|\,dx\\ &\le \lim_{n\to+\infty} N_1(g-f_n)=0.\end{aligned}$$

Donc $g(x)=-\ln(1-x)$ pour $x\in[0,1[$, en contradiction avec la continuité de g en 1.

1.10 $a)$ Il y a convergence uniforme sur $[0,a]$ pour $a\in]0,1]$, car on a pour n assez grand, $\max\limits_{[0,1]} f_n = f_n(a)\to 0$.

Elle n'est pas uniforme pas sur $[0,1]$ car $\max\limits_{[0,1]} f_n = f_n\big(1/\sqrt{n\,2^n}\big)=\sqrt{2^{n-2}/n}\to+\infty$.

$b)$ On a $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx=\frac{\ln(n2^n+1)}{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\ln 2}{2}$.

1.11 $a)$ On utilise le développement en série entière de $e^{-x\ln x}$ qui converge uniformément sur $[0,1]$, ce qui permet d'intervertir la série et l'intégrale sur $[0,1]$.

$b)$ Le développement en série entière de $\dfrac{1}{x-1}$ sur $[0,a]$ converge uniformément sur $[0,a]$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{\ln x}{x-1}\,dx &= -\ln a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)^2}\\ &= -\ln a\,\ln(1-a)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)^2}\underset{a\to1}{\longrightarrow}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\ ,\end{aligned}$$

à nouveau par convergence uniforme de la série.

1.12 $a)$ On développe e^x en série entière et utiliser le binôme de Newton. Les coefficients du développement en série de f_n sont

$$\begin{cases}\dfrac{1}{k!}\Big(1-\dfrac{n\,(n-1)\cdot(n-k+1)}{n^k}\Big)\ge 0 & \text{si } k\le n\\ \qquad\qquad 0 & \text{si } k>n.\end{cases}$$

$b)$ D'après $a)$ on obtient pour $a>0$ fixé,

$$\forall\, n\ge a,\quad \begin{cases} 0\le\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,e^{-2x}\,dx=\int_0^a f_n(x)\,e^{-2x}\,dx+\int_a^n f_n(x)\,e^{-2x}\,dx\\ \le a\,f_n(a)+\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-x}\,dx = a\,f_n(a)+e^{-a}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^{-a},\end{cases}$$

qui est arbitrairement petit $a>0$ assez grand. Donc $\displaystyle\lim_n\int_0^n\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n e^{-2x}\,dx=1$.

1.13 Pour la dérivabilité en 0, effectuer une intégration par parties en introduisant la fonction $\big(t\mapsto 1/t^2\,\sin(1/t)\big)$ sur des intervalles $[\varepsilon,1]$, $\varepsilon>0$.

1.14 Pour le prolongement par continuité en 1, estimer la différence $\dfrac{1}{\ln t}-\dfrac{1}{t-1}$.

1.15 $a)$ En dérivant la différence des deux expressions de f, on trouve 0.

$b)$ Comme $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$ et $\lim\limits_{+\infty} f=0$, on en déduit que $I^2=\dfrac{\pi}{4}$.

$c)$ On considèrer la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ définie par $g_n(x) := \displaystyle\int_{-n}^{n} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt.$

La suite g_n converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ et la suite g_n' converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$ car on a pour tout $a > 0$,

$$\forall\, x \in [0,a], \qquad \left| \int_n^{+\infty} g_n'(x)\,dx \right| = 2\,x\,e^{-x^2} \int_n^{+\infty} e^{-x^2t^2} dt \leq 2 \int_{an}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

On peut donc dériver g sous le signe intégrale.

$d)$ On a pour $x > 0$, $g'(x) = -2\,I\,e^{-x^2}$, $g(x) = -2\,I \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}$ et $g(0) = \dfrac{\pi}{2} = 2\,I^2$.

1.16 $a)$ La première égalité s'obtient en intégrant par parties I_n par rapport à la fonction $\big(x \mapsto x/\sqrt{1-x^2}\big)$ qui est une dérivée simple. La seconde égalité s'obtient facilement par récurrence en utilisant la première. Pour l'équivalent, par décroissance de la suite I_n on a $I_n\,I_{n+1} \leq I_n^2 \leq I_{n-1}\,I_n$ et on conclut avec la seconde égalité.

$b)$ On fait une récurrence et on utilise la première égalité de $a)$. Alors d'après la formule de Taylor-Lagrange en 0 et l'équivalent du $a)$, on obtient

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1[, \qquad \left| \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{(2n+1)\,I_{2n+1}} \right| \leq \frac{x^{n+2}\,(1-x)^{-n-\frac{3}{2}}}{(2n+3)\,I_{2n+3}}.$$

$c)$ Pour $x \in [0,1[$, la série du $b)$ converge uniformément sur $[0,x]$. On peut donc intervertir cette série et l'intégrale sur $[0,x]$, ce qui donne le développement en série entière de $\arcsin$.

$d)$ Pour $a \in [0,1[$, on a par convergence uniforme sur $[0,a]$ de la série,

$$\int_0^a \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \underbrace{\frac{1}{I_{2n+1}} \int_0^a \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{\leq 1}.$$

Lorsque $a \to 1^-$, l'intégrale de gauche tend vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\big[\arcsin^2(x)\big]_0^1$,

et par convergence uniforme sur $[0,1]$ la série de droite converge vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

1.17 $a)$ On intègre deux fois par parties I_{2n} par rapport à 1 puis par rapport à θ.

$b)$ On divise l'égalité du $a)$ par $n^2\,I_{2n}$ et 1.16 $a)$ donne $2n\,I_{2n} = (2n-1)\,I_{2n-2}$.

$c)$ On obtient $J_n \leq \dfrac{\pi^2}{4}(I_{2n} - I_{2n+2})$.

$d)$ De l'équivalent de 1.16 $a)$ et de la question $c)$, on déduit que $\dfrac{J_n}{I_{2n}} \to 0$. Une sommation télescopique des égalités de $b)$ implique alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\,J_0}{I_0} = \frac{\pi^2}{6}$.

1.18 $a)$ La dérivée de la fonction est nulle sur $]0,1[$ et sa limite en 0^+ est 0.

$b)$ On intègre la développement en série $\dfrac{\ln(1-t)}{t} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{t}$ (qui converge normalement donc uniformément) sur $[0,x]$ et $[1-x,1]$ pour $x \in]0,1[$.

$c)$ On prend $x = 1/2$ dans la formule de $b)$.

Exercices du chapitre 2

2.3 $a)$ Faire une récurrence sur n.

$b)$ Remarquer que $\operatorname{card} A = \displaystyle\sum_{x\in X} \mathbb{1}_A(x)$.

2.5 Si $\big(n \mapsto x_n := 0, d_n^1 d_n^2 \ldots\big)$ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $[0,1[$, considérer un réel $x := 0, d^1 d^2 \ldots$ tel que, pour tout $n \geq 1$, $d^n \notin \{d_n^n, 9\}$.

2.6 Considérer l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

2.7 Montrer que $\mathbb{A}$ peut s'écrire comme une réunion d'ensembles finis indexés par l'ensemble dénombrable $\mathbb{Z}[X]$.

2.8 Considérer les ensembles $\big\{x \in]-k, k[: |f(x^+) - f(x^-)| \geq 1/n\big\}$ pour $k, n \in \mathbb{N}^*$.

2.9 Partitionner Ω en classes d'équivalence modulo la relation d'équivalence $\sim$ définie sur Ω par : $x \sim y$ si x et y appartiennent à un même intervalle inclus dans Ω.

Exercices du chapitre 3

3.1 $a)$ Effectuer la division euclidienne de n par p fixé et montrer que $\overline{\lim_n} \dfrac{a_n}{n} \leq \dfrac{a_p}{p}$.

3.2 S'inspirer de l'exercice 3.1.

3.3 Adapter l'exercice 3.2.

Exercices du chapitre 4

4.3 Caractériser $\mathscr{B}_n$ et montrer que $\{\frac{1}{2}\}$ n'appartient pas à l'union des $\mathscr{B}_n$.

4.4 Montrer que $\{A \in \mathscr{P}(X) : A \times B \in \mathscr{C} \otimes \mathscr{D}\}$ est une tribu.

4.5 $b)$ Utiliser la stabilité par intersection dénombrable et remarquer que, pour tout $A \in \mathscr{A}$, $A = \bigcup_{x \in A} \dot{x}$.
$c)$ Supposer $\mathscr{A}$ dénombrable et montrer qu'alors, l'application $\Phi : \mathscr{P}(I) \to \mathscr{A}$ définie par $\Phi(J) := \bigcup_{j \in J} \dot{x}_j$ où $X = \bigcup_{i \in I} \dot{x}_i$, est une bijection.

Exercices du chapitre 5

5.3 $b)$ Considérer dans le premier cas $f^{-1}(\{y, -y\})$ et dans le second cas $f^{-1}(\{y\})$, $y \in \mathbb{R}$.

5.4 $b)$ Considérer une approximation de g par une suite de fonctions étagées $(s_n)_{n \geq 0}$; écrire $s_n := t_n \circ f$ et définir h sur l'ensemble de convergence de la suite $(t_n)_{n \geq 0}$.

5.5 $b)$ Utiliser la caractérisation $b)$ de l'exercice 5.4.

5.6 $a)$ Utiliser la définition 1.4.

5.7 Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $z = e^{i\theta}|z|$ avec $\theta = 2 \arctan\left(\dfrac{\Im(z)}{\Re(z) + |z|}\right)$.

5.8 Considérer l'application distance d'un point à un ensemble.

5.9 $a)$ Considérer $A := \underline{\lim}_n f_n^{-1}(\Omega)$.
$b)$ Considérer la réunion des ouverts $\Omega_k := \big\{x \in \Omega : d(x, {}^c\Omega) > 1/k\big\}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercices du chapitre 6

6.4 $a)$ Considérer les ensembles $\{|f| \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

6.5 $a)$ Calculer $\mu([x, y[)$ pour $x \leq y$.
$b)$ Utiliser la continuité à gauche et à droite de la mesure μ.
$c)$ D est dénombrable.

6.6 $b)$ Pour la stabilité par complémentaire, utiliser $a)$.

6.8 $a)$ Considérer une réunion d'intervalles ouverts centrés aux points rationnels.

6.9 Considérer l'ensemble des $x \in [0,1[$ dont le développement dyadique a tous ses coefficients d'indice pair nuls et l'ensemble des $x \in [0,1[$ dont le développement a tous ses coefficients d'indice impair nuls.

6.10 Écrire l'uniforme continuité de f sur un cube fermé de $\mathbb{R}^d$ et considérer un pavage de ce cube en cubes de côtés assez petits.

6.11 $b)$ Adapter la démonstration de la proposition 6.5, section 6.6.

6.12 $a)$ Appliquer le critère de Cauchy.
$b)$ Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $C \subset \lim\limits_{n}{}^{\uparrow} A_n^k$.
$c)$ Considérer l'ensemble $A_\varepsilon := \bigcap_{k\geq 1} A_{n_{k,\varepsilon}}^k$.

6.13 $a)$ Appliquer le théorème d'Egoroff de l'exercice 6.12.
$b)$ Construire une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que, pour tout $k \geq 1$, $\mu(\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\}) < \frac{1}{k^2}$ et considérer l'ensemble $A := \underline{\lim}_k \{|f_{n_k} - f| \leq \frac{1}{k}\}$.

6.14 $a)$ Pour établir l'égalité, montrer que si f est μ-p.p. nulle sur un ouvert Ω alors f est partout nulle sur Ω.
$b)$ Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une base dénombrable d'ouverts de X ; écrire ${}^cS_f^\mu = \bigcup_{x\in {}^cS_f^\mu} U_{n_x}$ où, pour chaque $x \in {}^cS_f^\mu$, il existe $F_{n_x} \in \mathscr{S}_f{}^\mu$ et $n_x \geq 0$ tels que $x \in U_{n_x}$ et $U_{n_x} \subset {}^cF_{n_x}$.
$c)$ Appliquer $b)$.

6.15 $a)$ Considérer ceux des éléments d'une base dénombrable d'ouverts qui sont dans $\mathscr{O}_\mu$ et utiliser la σ-sous-additivité de la mesure μ.
$c)$ Utiliser que, $\displaystyle\int_A f\,d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ μ-p.p. sur A ($i.e.$ $\mu(\{f \neq 0\} \cap A) = 0$).

6.16 $b)$ Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une famille dénombrable de $\mathscr{P}(X)$. Considérer, pour $\delta > 0$, un recouvrement $(B_k^n)_{k\geq 1}$ de $\mathscr{R}_\varepsilon(A)$ tel que $\displaystyle\sum_{k\geq 1} (\mathrm{diam}\, B_k^n)^\alpha - \frac{\delta}{2^n} < \mu_\alpha^\varepsilon(A_n)$.
$c)$ Noter que $\mu_\alpha \leq \mu_\alpha^\varepsilon$.

6.17 $a)$ Considérer un pavage de Q en petits hypercubes de diamètre $\leq \varepsilon$.
$c)$ Utiliser l'exercice 6.16 $d)$.
$d)$ Utiliser $a)$ et montrer qu'il existe une constante $b_d > 0$ telle que $\mu_d(Q) \geq b_d\, \lambda_d(Q)$.

6.18 $b)$ Montrer que, pour tous $A, A', B, B' \in \mathscr{A}$, $A\Delta B \subset (A\Delta A') \cup (B\Delta B') \cup (A'\Delta B')$.
$c)$ Montrer que, pour tous $A, B, C \in \mathscr{A}$, $A\Delta B \subset (A\Delta C) \cup (B\Delta C)$, et que pour tous $x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $\arctan(x+y) \leq \arctan(x) + \arctan(y)$.
$d)$ Soit $(\dot{A}_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathscr{A}/\mathscr{R}$ qui converge vers $\dot{A}$. Montrer que l'on a, pour tout $n \geq 0$, $\nu(A_n) \leq \nu(A) + \nu(A_n \Delta A)$, et passer à la limite supérieure ; raisonner de même avec la limite inférieure.

6.19 $a)$ Exprimer $|A|$ en fonction $A_+ := A \cap \mathbb{R}_+$ et $A_- := (-A) \cap \mathbb{R}_+$.
$b)$ Utiliser une caractérisation de λ et remarquer que $A_- = -(A \cap \mathbb{R}_-)$.

6.20 $a)$ Commencer par montrer que

$$\mu(A \cap B) - \mu(A)\,\mu(B) = \int_X (\mathbb{1}_A - \mu(A))(\mathbb{1}_B - \mu(B))\,d\mu.$$

$b)$ Pour la seconde, utiliser l'égalité $\mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) - \mu(A)$.
$c)$ Utiliser l'inégalité $\min(a, b) \leq \sqrt{ab}$ si $a, b \in \mathbb{R}_+$.

6.21 $b)$ Montrer que l'application λ' définie sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ par $\lambda'(B) := \mu'(e^B)$, est invariante par translation et coïncide avec la mesure de Lebesgue λ.
$c)$ Utiliser la représentation du $b)$.

6.22 $a)$ Établir par récurrence l'additivité de μ pour n éléments de $\mathscr{A}$ deux à deux disjoints puis conclure via la condition (iii).

$b)$ Utiliser que toute suite croissante majorée de réels converge vers sa borne supérieure pour remplacer "$\lim_n$" par "$\sup_n$".

6.23 $a)$ Utiliser la proposition 6.3.

$b)$ Utiliser le lemme fondamental d'approximation par des fonctions étagées.

Exercices du chapitre 7

7.1 $b)$ Écrire ${}^c\!F$ comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts I et montrer, par l'absurde, que $\mu(f^{-1}(I))=0$.

7.2 Considérer la fonction $f := \sum_{n\geq 0} a_n \mathbb{1}_{E_n}$ pour la condition nécessaire et la suite d'ensembles $E_n := \{f \geq \frac{1}{n}\}$ pour la condition suffisante.

7.4 $a)$ Montrer que la partie entière $[|f|]$ de $|f|$ vérifie $[|f|] = \sum_{n\geq 1} n\,\mathbb{1}_{\{n\leq |f|<n+1\}}$.

$c)$ Montrer que, pour tous $p\geq n\geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} u_k - n\,u_{p+1} \leq v_p$.

7.5 $a)$ Appliquer le théorème de Beppo Levi à la suite de fonctions $(|f|\,\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 0}$ où les A_n sont définis par $A_n := \{2^{-n}\leq |f|\leq 2^n\}$.

7.6 Appliquer le résultat de l'exercice 7.5.

7.7 $b)$ Appliquer $a)$ à la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies sur $\mathbb{N}$ par $f_p(q) := a_{p,q}$ avec la mesure de comptage.

7.8 $b)$ Considérer la suite de fonctions définies sur $\mathbb{N}$ par $f_n(k) := \dfrac{1}{k+1}\,\mathbb{1}_{\{k\geq n\}}$.

7.9 $b)$ Soit $x\notin D := \bigcup_{n\geq 1} \sigma_n$; montrer que, pour tout $n\geq 1$, il existe k tel que, pour tout h assez petit, $I_h(x)\subset I_n^k$, et montrer que, pour tout $h>0$ et pour tout n assez grand, il existe k tel que $x\in I_n^k\subset I_h(x)$.
$c)$ Appliquer le théorème de Beppo Levi et le théorème 1.4, chapitre 1, sur les sommes de Riemann aux suites $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ et $(\psi_n)_{n\geq 1}$, puis conclure avec $a)$.

7.10 $b)$ Montrer que $x_0 := \displaystyle\int_X f d\mu \in I$.

7.11 Appliquer à la fonction f/g l'inégalité de Jensen avec la mesure $g\,d\mu$ et la fonction convexe $(x\mapsto x\,\ln x)$.

7.12 Poser $x := n\,t$ et appliquer le théorème de Beppo Levi avec la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ définie par $g_n(x) := \sqrt{\dfrac{n}{n+x}}\;\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$, $x\in\mathbb{R}_+$.

7.13 $a)$ Montrer que $\displaystyle\inf_{t\in]0,1[}\left(\frac{a}{t}+\frac{b}{1-t}\right) = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

$b)$ Appliquer $a)$ avec $a := \left(\dfrac{\|f\|_1}{(\|f\|_1+\|g\|_1)}\right)^2$.

7.14 On a $I_0 = 0$, et si $a>0$ on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\big[(1+x)^a - x^a\big]^2 = +\infty$, d'où $I_a = +\infty$.
D'autre part, si $a<0$ on obtient les équivalents suivants :

$$\big[(1+x)^a - x^a\big]^2 \underset{x\to 0^+}{\sim} x^{2a}$$
$$\big[(1+x)^a - x^a\big]^2 = x^{2a}\big[1-(1+1/x)^a\big]^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} a^2\,x^{2a-2} \quad \text{où} \quad 2a-2<-2.$$

La convergence des intégrales de type Riemann permet de conclure que $I_a < +\infty$ si et seulement si $2a > -1$.

Exercices du chapitre 8

8.1 L'inégalité du lemme de Fatou donne $0 \leq \min\big(\mu(A), \mu({}^c\!A)\big)$.

8.2 $b)$ Considérer la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) := \frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}\,\mathbb{1}_{[n,+\infty[}(x)$.

8.3 $a)$ Appliquer le lemme de Fatou à la suite définie μ-p.p. par $g_n := f_n + f - |f_n - f|$.
$b)$ Considérer la suite de fonctions définies sur $\mathbb{N}$ par $f_n := \mathbb{1}_{\{n\}} - \mathbb{1}_{\{n+1\}}$.

8.4 $a)$ Appliquer le lemme de Fatou à la suite de terme général $g_n := |f_n| + |f| - |f_n - f|$.

8.5 $a)$ Appliquer le théorème 8.4 (b).
$b)$ L'intégrale est égale à $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{e^x + 1} > 0$ et la somme est égale à 0. Donc l'hypothèse de $a)$ n'est pas vérifiée.

8.6 $a)$ Appliquer le théorème 8.4 (b) avec pour μ la mesure de comptage.
$b)$ Part simplification télescopique la première somme est égale $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(p+1)(p+2)} > 0$ et la seconde est égale à 0. Donc l'hypothèse de $a)$ n'est pas vérifiée.

8.7 $a)$ Développer en série $\dfrac{1}{1-e^{-x}}$ pour $x > 0$.

8.8 $b)$ Séparer en intégrale sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$, faire le changement de variable $y = 1/x$ dans la seconde intégrale puis appliquer $a)$.

8.9 Appliquer le théorème de convergence dominée ou le théorème de Beppo Levi selon la monotonie de f.

8.10 $a)$ On a pour tout $x \notin \pi\mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-n\sin^2(x)} = 0$ et $\lambda_1(\pi\mathbb{N}) = 0$. On conclut avec le théorème de convergence dominée.
$b)$ Avec la translation $x \to x - \pi$, il vient $\displaystyle I_n(0) = I_n(0) + \int_{-\pi}^{0} e^{-n\sin^2(x)}\,dx$. Comme $I_n(0)$ et la dernière intégrale sont > 0, on en déduit que $I_n(0) = +\infty$.

8.11 Pour la première égalité, effectuer le changement de variable $x = n\,(1-t)$ et utiliser l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \big((1-t^{n+1})\ln(1-t)\big)'\,dt = 0$. Pour la seconde, adapter l'application 7.1.

8.12 $b)$ Estimer $\displaystyle\lim_n \int_a^1 nx^n\,f(x)\,dx$ pour a proche de 1.
$c)$ Soit la suite $\displaystyle u_n := \int_0^1 x^n\,|f(x)|\,dx$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et vérifie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n < +\infty$, puis en déduire $\displaystyle\lim_n nu_n$.

8.13 $a)$ On a $\displaystyle b_n = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_k(x)\,\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(nx)\,dx.$
$b)$ Par périodicité et parité on se ramène à $x \in [0,\pi]$. Si $nx \leq \pi$, alors la valeur absolue de la somme est majorée par $nx \leq \pi$ car $|\sin u| \leq |u|$ pour $u \in \mathbb{R}$. Sinon, on considère le plus petit $p \in \{1,\ldots,n-1\}$ tel que $px \leq \pi$, et on fait la décomposition

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\sin(kx)}{k} + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$$

La première somme est majorée par π en valeur absolue d'après ce qui précède. Pour la seconde, on effectue une transformation d'Abel avec $S_k(x) := \sum_{j=p+1}^{k} \sin(jx)$ pour $x \in [0,\pi]$ et $k \geq p+1$, qui vérifie $|S_k(x)| \leq 1/\sin(x/2) \leq \pi/x$.

On obtient alors $\displaystyle \left| \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \frac{|S_n(x)|}{n+1} + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{|S_k(x)|}{k(k+1)} \leq \frac{\pi}{(p+1)x} \leq 1,$
d'où la majoration voulue.

$c)$ Appliquer, à l'aide de la majoration du $b)$, le théorème de convergence dominée à

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right) dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k}.$$

$d)$ Par le critère d'Abel la série converge simplement sur $\mathbb{R}$. D'après $c)$ elle ne peut converger dans $\mathscr{L}^1([-\pi,\pi])$ car la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ est divergente.

8.14 $a)$ Montrer que, pour tout intervalle borné I de $\mathbb{R}$, cette relation est vérifiée et que l'ensemble des boréliens de I la vérifiant est une tribu sur I.

$c)$ Calculer, à l'aide du $a)$, les limites

$$\lim_n \int_{E\cap\{g\geq 0\}} \cos(nx)dx, \quad \lim_n \int_{E\cap\{g\leq 0\}} \cos(nx)dx, \quad \lim_n \int_E \cos(2nx)dx.$$

8.16 $a)$ Calculer la limite de f' en 0^+ à l'aide d'un théorème de convergence.

$b)$ Effectuer le changement de variable $u = \mathrm{ch} x$ dans l'expression de $f'(t)$.

8.17 $a)$ Utiliser l'égalité $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

$b)$ $i)$ Faire une intégration par parties dans l'expression de g_n' et effectuer le changement de variable $u = tx$ dans celle de $\widehat{f}'$.

$b)$ $ii)$ Faire une intégration par parties dans l'expression de $(\widehat{f})''$ et effectuer le changement de variable $u = tx$ dans celle de $\hat{f}$.

$b)$ $iii)$ Utiliser l'expression de $\widehat{f}$ comme une intégrale en u.

8.18 $c)$ Effectuer le changement de variable $y := t + \sqrt{t}\,x$.

$d)$ Pour l'inégalité, appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 en 0 à la fonction $\ln(1+\cdot)$.

$e)$ Appliquer le théorème de convergence dominée dans l'intégrale du $c)$ en distinguant, à l'aide du $d)$, les intervalles $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$.

8.19 $b)$ Adapter l'application 8.6 $d)$.

$c)$ Se ramener à $t = 0$, établir $2\,(1 - n|\varphi|)\,\mathbb{1}_{\{n|\varphi|\leq 1\}} \leq |n\varphi + 1| + |n\varphi - 1| - 2n|\varphi|$, puis appliquer le théorème de convergence dominée au membre de gauche.

8.20 $b)$ Si $A \in \mathscr{A}$, $i \in I$ et $c > 0$, alors $\displaystyle\int_A |f_i|\,d\mu \leq \int_{\{|f_i|\geq c\}} |f_i|\,d\mu + c\,\mu(A)$.

$c)$ Appliquer par exemple $b)$.

$d)$ Montrer, à l'aide de $a)$ et $c)$, que la suite $(f_n - f)_{n\geq 1}$ est équiintégrable en probabilité et utiliser la majoration $\displaystyle\int_X |f_n - f|\,d\mu \leq \int_X |f_n - f| \wedge c d\mu + \int_{\{|f_n - f|\geq c\}} |f_n - f|\,d\mu$.

8.21 $a)$ Utiliser les résultats de l'exercice 7.5.

$b)$ Appliquer $a)$ à un nombre fini de f_n et à f.

c) Remarquer que la suite $(f_n - f)_{n\geq 1}$ est aussi équiintégrable et appliquer le théorème d'Egoroff (*cf.* exercice 6.12) à la suite $(f_n - f)_{n\geq 1}$ dans A_ε.
d) Considérer la suite définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) := \sin(nx)$.

8.22 b) Utiliser l'exercice 6.13 b) et le théorème de convergence dominée.
c) iv) Utiliser l'exercice 6.13 b) et la question b).

8.23 a) Montrer que $\{|f|>2\} \subset \{|f - \mathbb{1}_{A_n}|>1\}$ et appliquer l'inégalité de Markov.
b) Montrer que $\lim\limits_n \int_X |\,\mathbb{1}_{A_n} - f^2|\,d\mu = 0$.
c) Considérer $\varliminf\limits_n {}^c(A_n \Delta A)$ et montrer que son complémentaire est de mesure nulle.

8.24 a) Utiliser l'exercice 8.23 c).
b) Appliquer le théorème de convergence dominée.

8.25 a) Appliquer le lemme de Fatou avec la suite $n\big(f(\cdot+\frac{1}{n}) + f(\cdot-\frac{1}{n}) - 2f\big)$, puis l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation.
b) Appliquer le théorème de convergence dominée pour montrer que la limite du a) est 0.

8.27 a) Appliquer le théorème de convergence dominée avec la majoration $|\sin x| \leq |x|$ pour $x \in [0,1]$.
a) Appliquer le théorème de convergence dominée en utilisant $\ln(1+x^n) \leq \ln(2\,x^n)$ pour $x \in [1,+\infty]$.
c) Appliquer le théorème de convergence dominée sur les intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.

8.28 b) Appliquer le théorème de continuité sous le signe intégral.
b) Appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral "local" (en un point donné).

8.29 a) Appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale, le théorème de dérivation sous l'intégrale et le théorème de convergence dominée.
b) Faire un calcul direct (assez long) en posant $z = a + ib$, ou appliquer le théorème des résidus à l'aide du contour formé par le segment $[-R,R]$ et le demi-cercle de centre 0 et de rayon $R \gg 1$. On peut aussi remarquer que l'identité est vérifiée pour $z \in \mathbb{R}_+^*$ et appliquer le théorème du prolongement analytique.
c) D'après l'exercice 1.15 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{t}$ pour $t>0$, d'où $f'(t) = -2\sqrt{\pi}\,e^{-z\,t^2}$.
d) La convergence et la valeur de l'intégrale sont données par

$$f(0) - \lim_{t\to+\infty} f(t) = -\int_0^{+\infty} f'(t)dt = \sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\,t^2}dt.$$

8.30 a) Appliquer une transformation d'Abel.
b) D'après le critère d'Abel, la majoration de l'exercice 8.13 b) et la décroissance vers 0 de la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ impliquent la convergence uniforme de la série sur $[0,\pi]$.
c) On découpe l'intégrale sur $[0,\delta]$ et $[\delta,\pi]$. Sur $[\delta,\pi]$ la convergence uniforme du a) permet d'intervertir la série et l'intégrale, d'où

$$2\int_\delta^\pi f(x)\,\sin(nx)\,dx = 2\,b_n\int_\delta^\pi \sin^2(nx)\,dx + \sum_{k\neq n} b_k\left(\frac{\sin(k+n)\delta}{k+n} - \frac{\sin(k-n)\delta}{k-n}\right)$$

qui tend vers πb_n lorsque $\delta\to 0$, par continuité en 0 de la série donnée par b).
d) En utilisant les questions a), b), c) et l'intégrabilité de f, appliquer le théorème de convergence dominée à $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\left(\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}\right)dx = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k}$.
e) Appliquer la contraposée de d) sachant que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$ est divergente.

f) Si f existe alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\ln k}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}\right)dx$ possède une limite par le théorème de convergence dominée, ce qui conduit à une contradiction.

8.31 a) Soit $b_n := a_n - a_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et la série de terme général b_n est convergente, d'où la suite $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et

$$\sum_{k=1}^{n}k\,(b_{k-1}-b_k)=a_0-a_n-nb_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}a_0.$$

b) Changer le produit des cosinus en somme des cosinus dans $(1-\cos x)\,F_n(x)$. Appliquer le théorème de Beppo Levi à $(f_n)_{n\geq 1}$ en notant que $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F_n(x)\,dx=1$ et en utilisant a).

c) On a pour tous $n,k\geq 1$,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F_n(x)\cos(kx)dx=\begin{cases}0 & \text{si } k>n,\\ 1-k/n & \text{si } k\leq n,\end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_n(x)\cos(kx)dx=\begin{cases}0 & \text{si } k>n,\\ a_k+(n-k)a_{n+1}-(n+1-k)a_n & \text{si } k\leq n,\end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f_n(x)dx=a_0+na_{n+1}-(n+1)a_n.$$

Conclure en notant que f_n est une combinaison linéaire de $1,\cos(x),\ldots,\cos(nx)$.

d) En utilisant $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)\right|\leq\frac{1}{|\sin(x/2)|}$, $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n}k\cos(kx)\right|\leq\frac{n}{|\sin(x/2)|}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}na_n=0$, le critère d'Abel appliquée à l'expression du c) entraîne que

$$\forall\, x\in\,]0,\pi],\qquad \lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\cos(kx),$$

limite qui coïncide dx-p.p. sur $[0,\pi]$ avec la limite f de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathscr{L}^1([0,\pi])$.

e) Appliquer d) avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0:=4/\ln 2$, $a_1:=2/\ln 2$ et $a_n:=1/\ln n$ si $n\geq 2$, en notant que la fonction $1/\ln$ est convexe sur $]1,+\infty[$.

8.32 a) Appliquer le lemme de Fatou aux suites f_n et g_n-f_n.

b) $f=0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f_n(x)\,dx=\pi$. Le lemme de Pratt ne s'applique pas car $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}\notin\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

8.33 a) Considérer $T\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ telle que $T(t)=t$ pour $t\in[-1,1]$ et une suite (ψ_n) de $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers $f/|f|\,1_{\{f\neq 0\}}$ dans $\mathscr{L}^1(\Omega)$ et $\lambda_d(dx)$-p.p. sur Ω. Montrer que $\varphi_n:=T(\psi_n)$ convient.

b) Appliquer le théorème de convergence dominée dans $\displaystyle\int_{\Omega}f(x)\,\varphi_n(x)\,\lambda_d(dx)$.

8.34 a) On applique le théorème de Dirichlet dans $\mathbb{R}^2$ qui donne le développement en série demandé avec les coefficients de Fourier $\displaystyle\alpha_n=\int_{[0,1]^2}\frac{e^{-2i\pi\,(y\cdot n)}}{a(y)}\,dy$ pour $n\in\mathbb{Z}^2$.

D'après l'identité de Parseval appliquée à la fonction matricielle (hessienne) $\mathbb{Z}^2$-périodique $\nabla^2(1/a)$, il existe $c>0$ telle que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^2}|n|^4\,|\alpha_n|^2\leq c\,\|\nabla^2(1/a)\|^2_{L^2([0,1]^4}<+\infty$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0_{\mathbb{R}^2}\}}|\alpha_n|\leq\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0_{\mathbb{R}^2}\}}\frac{1}{|n|^4}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0_{\mathbb{R}^2}\}}|n|^4|\alpha_n|^2\Big)^{1/2}<+\infty.$$

b) Par unicité de la solution $X(\cdot, x)$ du système différentiel, il suffit de dériver et d'utiliser la formule de la dérivée de la fonction réciproque de F_x.
c) Remplacer dans l'expression intégrale de F_x, la fonction $a^{-1}(s\,\xi+x)$ par son développement en série de Fourier de la question a), puis intervertir l'intégrale sur $[0, t]$ et la série de Fourier. en utilisant le théorème de convergence dominée et le fait que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}^2} \in \ell^1(\mathbb{Z}^2)$.
d) On a pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\xi \cdot n \neq 0$,

$$0 \underset{t\to+\infty}{\longleftarrow} \left| \alpha_n\, e^{2i\pi\,(x\cdot n)}\, e^{i\pi\, t\,(\xi\cdot n)}\, \frac{\sin\big(\pi\, t\,(\xi \cdot n)\big)}{\pi\, t\,(\xi\cdot n)} \right| \leq |\alpha_n| \in \ell^1(\mathbb{Z}^2).$$

Donc d'après le théorème de convergence dominée pour les séries (*cf.* exercice 8.5 a)) on a

$$\lim_{t\to+\infty} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^2\,:\,\xi\cdot n\neq 0} \alpha_n\, e^{2i\pi\,(x\cdot n)}\, e^{i\pi\, t\,(\xi\cdot n)}\, \frac{\sin\big(\pi\, t\,(\xi\cdot n)\big)}{\pi\, t\,(\xi\cdot n)} \Big) = 0.$$

L'expression de $F_x(t)$ de la question c) donne immédiatement $\lim_{+\infty} F_x(t)/t$. D'après la question a) on a aussi $\lim_{+\infty} F_x(t)/t \geq \min_{[0,1]^2}(1/a) > 0$. Finalement, la croissance stricte de la fonction F_x implique que $\forall\, x \in \mathbb{R}^2, \quad \lim_{+\infty} \dfrac{F_x^{-1}(t)}{t} = \lim_{+\infty} \dfrac{s}{F_x(s)}$.
e) L'incommensurabilité de ξ se lit : $\xi \cdot n = 0 \Leftrightarrow n = 0_{\mathbb{R}^2}$. D'où la limite de d) se réduit à $\alpha_0^{-1}\,\xi = \overline{a}\,\xi$.

8.35 a) Par convergence normale ($0 \leq r < 1$) des séries on peut dériver deux fois sous le signe somme, ce qui donne $f_r''(x) := 2\,\Re\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\, e^{2int}\right] = \dfrac{2r\,\big(\cos(2t) - r\big)}{1 + r^2 - 2r\,\cos(2t)}$.
On vérifie que cette expression est aussi la dérivée de la fonction en $\arctan$ sur $\mathbb{R}$.
b) On intègre deux fois l'expression du a) remarquant que $f_r'(0) = f_r(0) = 0$.
c) On fait tendre r vers 1 dans l'expression de b) et on applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue ($\arctan$ est bornée).
d) On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = f_1\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\frac{\pi}{2} - t\Big)\, dt = \frac{\pi^2}{8}$.

On conclut en séparant les termes pairs et impairs dans $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

8.36 a) On intègre sur $[\theta, \frac{\pi}{2} - \theta]$ la dérivée $C_n'(t) = \dfrac{\cos\big((2n+1)\,t\big) - \cos(t)}{\sin(t)}$.
b) Une intégration par parties donne $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\,\big(C_n(\tfrac{\pi}{2}-\theta) - C_n(\theta)\big)\, d\theta = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-(-1)^k))^2}{4\,k^3}$.
c) La majoration se déduit de l'inégalité $\dfrac{1}{\sin(t)} \leq \dfrac{\pi}{2\,t}$ qui s'intègre en $\ln(t)$.
d) D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, la suite de fonctions intégrandes en θ converge vers 0 pour tout $\theta \in [\delta, \frac{\pi}{2}]$. De plus, elle est bornée par une constante sur $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ car la fonction $1/\sin$ est continue sur $[\delta, \frac{\pi}{2}]$. Donc, le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique sur $[\delta, \frac{\pi}{2}]$.
d) On déduit de a) et c), d) que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\,\big(C_n(\tfrac{\pi}{2} - \theta) - C_n(\theta)\big)\, d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\, \Big(\Big[\ln\big(\sin(t)\big)\Big]_{t=\theta}^{t=\frac{\pi}{2}-\theta}\Big),$$

qui combinée avec b) permet de conclure à la formule intégrale de $\zeta(3)$.

8.38 $a)$ Développer en série $\ln(1+x)$ sur $[0,1]$ et appliquer le théorème de convergence dominée à l'aide de la majoration $\forall\, x\in[0,1],\quad \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}\right|\leq 2\,\ln(1+x)$.

$b)$ On applique le théorème de continuité sous l'intégrale à l'aide de la majoration

$$\forall\, x\in[0,1[\,,\ \ \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{\ln(1-2\,x\cos t+x^2)}{x}\right|\leq 2\max_{\pm}\left|\frac{\ln(1\pm x)}{x}\right|\in\mathscr{L}^1\big([0,1]\big).$$

$c)$ Par le théorème de dérivabilité sous l'intégrale $f'(t)=2\left[\arctan\left(\dfrac{x-\cos t}{\sin t}\right)\right]_{x=0}^{x=1}$.

$d)$ D'après $a)$ on a $f(\pi/2)=I/2$ et $f(\pi)=2\,I$ et d'après $c)$ on a $f(t)=c+\pi\,t-\dfrac{t^2}{2}$, d'où $c=2\,I-\dfrac{\pi^2}{2}=\dfrac{I}{2}-\dfrac{3\,\pi^2}{8}$. On en déduit donc que $I=\dfrac{\pi^2}{12}=\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Exercices du chapitre 9

9.1 $a)$ Appliquer l'inégalité de Hölder.
$b)$ Remarquer que si $\|x\|_p=1$ alors $\|x\|_\infty\leq 1$ et, pour tout $i\in\{1,\ldots,d\}$, $|x_i|^q\leq|x_i|^p$.
$c)$ Appliquer le cas d'égalité de l'inégalité de Minkowski.

9.3 $a)$ Appliquer l'inégalité de Hölder et son cas d'égalité.
$b)$ Utiliser la seconde inégalité de l'exercice 9.1 $a)$.

9.4 $a)$ Soit $f\in\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)\Delta\mathscr{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$. Soit $B_n:=\{2^n\leq|f|<2^{n+1}\}$ pour $n\in\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe une infinité d'ensembles B_n tels que $0<\mu(B_n)<+\infty$.

$b)$ Considérer $b_n:=\begin{cases}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_k\Big)^{-1/p} & \text{si } \sum_{n=0}^{+\infty}a_n=+\infty\\ \Big(\sum_{k=n}^{+\infty}a_k\Big)^{-1/q} & \text{si } \sum_{n=0}^{+\infty}a_n<+\infty.\end{cases}$

$c)$ Considérer $f:=\sum_{n\geq 0}b_n\mathbb{1}_{A_n}$ où la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ vérifie $b)$ avec $a_n:=\mu(A_n)$.

9.7 Montrer que $\forall\, r>1,\ \forall\, x,y\geq 0,\quad |x^r-y^r|\leq r\,|x-y|\,(x+y)^{r-1}$ et utiliser l'inégalité de Hölder avec r.

9.8 Appliquer le lemme de Fatou à la suite $g_n:=2^p(|f_n|^p+|f|^p)-|f_n-f|^p$.

9.9 $a)$ Appliquer le lemme de Fatou si $p<+\infty$.
$b)$ On pourra appliquer, soit le théorème d'Egoroff à la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ (ex. 6.12) et l'inégalité de Hölder avec la fonction indicatrice d'un ensemble de mesure petite, soit s'appuyer sur l'exercice 8.20 sur l'équiintégrabilité probabiliste.

9.10 $a)$ Adapter la démonstration de l'application 9.2.
$b)$ Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}^*$ telle que $\lim_n|y_n|=+\infty$ et, pour tout $n\geq 1$, $|g(y_n)|>n|y_n|^{\frac{r}{s}}$, puis considérer la fonction $f:=\sum_{n\geq N}y_n\mathbb{1}_{I_n}$ où les I_n sont des intervalles deux à deux disjoints de $[0,1]$ de longueur $(n^{s+1}|y_n|^r)^{-1}$.

9.11 Raisonner par l'absurde; considérer une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $[0,1]$ qui converge vers 0 dans $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}([0,1])$ mais qui ne converge simplement en aucun point de $[0,1]$ (*cf.* l'exemple qui suit le théorème 9.3) et montrer qu'alors, l'ensemble $\{f_n,\ n\geq 0\}\cup\{0\}$ est un compact pour l'éventuelle métrique de la convergence λ-p.p., puis conclure.

9.12 $a)$ Utiliser l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation.

b) Commencer par le cas où $f \in \mathscr{C}_K(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ puis utiliser la densité de $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ dans $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda)$.
c) Considérer $f := \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ si $a \to 0$ et $f := \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ si $a \to +\infty$.

9.14 a) Montrer que, pour tous $p, q \in I$, $p \le q$, et tout $r \in [p, q]$, $|f|^r \le |f|^p + |f|^q$; considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) := (x(\ln x)^2)^{-1}\big(\mathbb{1}_{[0,1/2]}(x) + \mathbb{1}_{[2,+\infty[}(x)\big)$.
b) Soient $p, q \in I$, $p < q$ et $tp + (1-t)q \in]p, q[$ où $t \in]0, 1[$, utiliser l'inégalité de Hölder avec l'exposant $\frac{1}{t}$; pour la continuité de θ aux bornes de I, utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité avec des suites monotones et appliquer les théorèmes de convergence sur les ensembles $\{|f| \le 1\}$ et $\{|f| > 1\}$.

9.15 a) Appliquer l'inégalité de Jensen (*cf.* exercice 7.10) avec la fonction $-\ln$.
b) Appliquer le théorème de convergence dominée en notant que si $0 < p \le q$, $|f|^p \le |f|^q + 1$.
c) Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite avec des suites décroissant vers 0, puis appliquer le théorème de Beppo Levi sur l'ensemble $\{|f| \le 1\}$ et le théorème de convergence dominée sur l'ensemble $\{|f| > 1\}$.
d) Utiliser le résultat du a) et si $\mu(\{f = 0\}) = 0$, appliquer la limite du c).

9.16 a) Intégrer F^p par parties et appliquer l'inégalité de Hölder dans (H^+).
b) Approcher $|f|$ à l'aide du théorème 9.4 de densité par une suite $(\varphi_n)_{n \ge 0}$ de $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^*_+, \mathbb{R}_+)$ et passer à la limite dans l'inégalité (H) vérifiée par φ_n, en utilisant le lemme de Fatou.
c) Considérer une suite $(\varphi_n)_{n \ge 0}$ de $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^*_+, \mathbb{R}_+)$ ($(\Phi_n)_{n \ge 0}$ est la suite associée) convergeant vers f dans $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ et dominée par une fonction $g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}_+)$ (G est la fonction associée) ; montrer, en appliquant le lemme de Fatou à la suite $(\Phi_n)_{n \ge 0}$ dans (H), que $F \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}_+)$ (et donc G), puis passer à la limite dans l'inégalité (H^+) vérifiée par φ_n, en appliquant le théorème de convergence dominée aux suites $(\Phi_n)_{n \ge 0}$ et $(\varphi_n \Phi_n^{p-1})_{n \ge 0}$.
d) Montrer que si g vérifie l'égalité, alors la fonction $f := |g|$ également, puis montrer que les fonctions f et F^{p-1} vérifient le cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder appliquée à (H^+) ; montrer enfin que f est λ-p.p. égale à la solution d'une équation différentielle élémentaire.
e) Considérer les fonctions $f_a(x) := x^{-\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{[1,a]}(x)$.
g) Pour l'égalité faire une intégration par parties. Appliquer l'inégalité de Hölder dans le second membre pour obtenir l'inégalité cherchée. Si la fonction $\big(x \mapsto x^r f(x)^p\big)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, considérer pour $0 < a < b < +\infty$, une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathscr{C}_K(]a, b[, \mathbb{R}_+)$ qui converge $\lambda(dx)$-p.p. sur $[a, b]$ et dans $\mathscr{L}^p([a, b])$ vers f. Appliquer le lemme de Fatou dans l'inégalité vérifiée par f_n, puis faire $a \to 0$ et $b \to +\infty$ à l'aide du théorème de Beppo-Levi.

9.17 a) Commencer par supposer f continue ; montrer qu'alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, F^2(x) = 0$ et faire une intégration par parties. Pour passer au cas général, utiliser un argument de densité comme dans l'exercice 9.16 c).
c) Appliquer le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

9.18 b) Appliquer l'inégalité de Young avec f, g, intégrer, puis utiliser la concavité de la fonction $\ln$.

9.19 a) Considérer les suites de rationnels nulles à partir d'un certain rang.
b) Montrer que les boules ouvertes de rayon 1 centrées sur un élément de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjointes.

9.20 a) $X = \bigcup\limits_{n \ge 0}^{\uparrow} X_n$ où $(X_n)_{n \ge 0}$ est une suite croissante d'ouverts d'adhérence compacte ; si $\mathscr{V} := \{V_n\}_{n \ge 0}$ est une base dénombrable d'ouverts, considérer les intersections finies des parties $V_m \cap X_n$ pour $m, n \in \mathbb{N}$.

$b)$ Commencer par le cas d'une réunion finie d'éléments de $\mathscr{U}$ en utilisant l'identité $a)$ de l'exercice 2.3, puis écrire Ω comme la limite croissante de telles réunions et appliquer le théorème de convergence dominée.
$c)$ Utiliser la régularité extérieure de μ (*cf.* théorème 6.10) et appliquer $b)$.
$d)$ Utiliser la densité des fonctions étagées de $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et appliquer $c)$.

9.21 Utiliser l'exercice 8.23.

9.22 $a)$ Montrer d'abord que si f est positive alors $\|M_h(f)\|_1 = \|f\|_1$.
$b)$ Montrer le résultat lorsque $f \in \mathscr{C}_K(\mathbb{R})$ en appliquant le théorème de convergence dominée puis, dans le cas général, utiliser la densité de $\mathscr{C}_K(\mathbb{R})$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ et $a)$.

9.23 $a)$ Utiliser une transformation d'Abel pour l'égalité.
$b)$ Pour la condition nécessaire appliquer $a)$ avec $t = \mu(A)^{-p}$. Pour la condition suffisante considérer $A := \{|f| > t\}$.
$c)$ Appliquer à $|f|^q$ le caractérisation $d)$ de l'exercice 7.4.
$d)$ $(x \mapsto x^{-1/p}) \in \mathscr{L}^p_{\text{faible}} \setminus \mathscr{L}^p$ dans $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue.

9.24 $a)$ S'inspirer de l'exercice 7.13 $a)$ et de l'usage de l'inégalité de Hölder dans la démonstration de l'inégalité de Minkowski.

Exercices du chapitre 10

10.1 Appliquer le cas d'égalité de l'inégalité de Hölder.

10.2 Raisonner par l'absurde :

– si $p < +\infty$, considérer $b_n := |a_n|^{p-1} c_n \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^p\right)^{-1}$ où c_n vérifie $a_n = a_n|\overline{c_n}$,

– si $p = +\infty$, considérer une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ telle que, pour tout $n \geq 1$, $|a_{\varphi(n)}| \geq n$ et la suite définie par $b_{\varphi(n)} := \dfrac{c_{\varphi(n)}}{n\,|a_{\varphi(n)}|}$ et $b_n := 0$ sinon.

10.3 $a)$ Considérer $A_n := E_n \cap \{|f| \leq n\}$ et appliquer le théorème de Beppo Levi.
$b)$ Raisonner par l'absurde et considérer la fonction $g := h|f|^{p-1} \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n a_n^p} \mathbb{1}_{A_n}$ où A_n, a_n sont définis en $a)$ et $f = |f|\overline{h}$.

10.4 $a)$ Considérer pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n := k\mathbb{1}_{B_n}$ où $h = |h|\overline{k}$ et $B_n := E_n \cap \{|h| \leq n\}$.
$b)$ Appliquer le *théorème de Banach-Steinhaus* : : *si* $(T_n)_{n\geq 1}$ *est une suite d'applications linéaires continues d'un espace de Banach* E *dans un e.v.n.* F *telle que pour tout* $x \in E$, $\sup_n \|T_n(x)\| < +\infty$, *alors* $\sup_n \|T_n\| < +\infty$ (*cf.* [22]).
$c)$ Appliquer le théorème sur la dualité L^p-L^q et conclure à l'aide du $a)$.

10.5 Supposer que $f \notin L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ puis considérer, en en justifiant l'existence, la fonction définie par $g := h \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2 \mu(A_n)} \mathbb{1}_{A_n}$ où $A_n := \{|f| \geq n\}$ et $f = |f|\overline{h}$.

10.7 Appliquer à Φ le *théorème de Hahn-Banach* : : *toute forme linéaire continue sur un s.e.v* F *d'un* $\mathbb{K}$*-e.v.* E *se prolonge sur* E *en une forme linéaire continue de même norme* (*cf.* [22]).

10.8 $a)$ Appliquer le théorème de dualité L^p-L^q à la forme linéaire $\Phi(\cdot\,\mathbb{1}_A)$ définie par restriction sur $L^p_{\mathbb{K}}(\mu_{|A})$.
$b)$ Utiliser l'unicité de g_A.
$c)$ Considérer une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ telle que $\lim_n \|g_{A_n}\|_q = \sup_{\mu(A)<+\infty} \|g_A\|_q$, et montrer, à l'aide du $b)$, que la suite $(g_{X_n})_{n\geq 1}$, où $X_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, est de Cauchy dans $L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$.

d) Considérer, pour chaque $n \geq 1$, $Y_n := X_n \cup \{|f| \geq 1/n\}$, et passer à la limite dans la représentation intégrale de $\Phi(f \mathbb{1}_{Y_n})$ en montrant, à l'aide du *b*) et de la définition de X_n, que $\lim_n \int_{Y_n \setminus X_n} f g_{Y_n} \, d\mu = 0$.

10.9 *a*) Commencer par considérer les intersections finies des X_n avec les éléments d'une base dénombrable d'ouverts contenant X.
b) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, les mesures à densité $\mathbb{1}_{U_n} g^{\pm}.\mu$ coïncident sur le π-système $\mathscr{U}$ tel que $\mathscr{B}(X) = \sigma(\mathscr{U})$, puis appliquer le corollaire 6.2, section 6.2.
c) Montrer que $E := \overline{D \cap L^p_{\mathbb{R}}(\mu)}$ est un $\mathbb{R}$-s.e.v. de $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$; raisonner alors par l'absurde et considérer, pour $f_0 \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu) \setminus E$, la forme linéaire Φ_0 définie sur $\mathbb{R}\, f_0 \oplus E$ par $\Phi_0(f_0) := 1$ et $\Phi_{0|E} := 0$, puis appliquer successivement à Φ_0 le théorème de Hahn-Banach (*cf.* exercice 10.7), le théorème de dualité et *b*).

10.10 *a*) Remarquer que, pour chaque $h \in D$, la suite de terme général $\int_X f_{\varphi(n)} \, h \, d\mu$ est bornée et lui appliquer le *procédé d'extraction diagonale* (*cf.* [23] p. 11), en utilisant la dénombrabilité de D, pour obtenir une sous-suite convergente commune à tous les $h \in D$.
b) Montrer que, pour chaque $g \in L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$, la suite de terme général $\int_X f_{\varphi(n)} \, g \, d\mu$ est de Cauchy en utilisant la densité de D et le résultat du *a*).
c) Montrer que l'application Φ définie au *b*) est une forme linéaire continue sur $L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$.
d) Considérer la suite définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n := n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$ et calculer, pour toute fonction $g \in \mathscr{C}_K(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x) \, dx$.

10.11 *b*) Montrer en utilisant le lemme de Fatou pour la mesure de comptage que l'on a $\varliminf_n \nu_n(B) \geq \sum_{k \geq 1} \lim_n \nu_n(B_k)$, puis que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, n, k \geq 1, \quad \nu_n(B) \leq \sum_{j=1}^{k} \nu_n(B_j) + \nu_n\Big(A_\varepsilon \cap \bigcap_{j>k} B_j\Big) + \nu_n({}^c A_\varepsilon \cap B),$$

et remarquer que $\lim_k \mu\Big(A_\varepsilon \cap \bigcap_{j>k} B_j\Big) = 0$.
c) Appliquer le théorème 6.2.

10.12 *a*) Soit $\mathscr{U} := \{U_n\}_{n \geq 0}$ une base dénombrable d'ouverts de X avec $U_0 := X$; considérer la partie $\mathscr{C}$ composée par les intersections finies d'éléments de $\mathscr{U}$.
b) Remarquer que, pour chaque $C \in \mathscr{C}$, les suites $(\nu_n^{\pm}(C))_{n \geq 1}$ sont bornées et leur appliquer le procédé d'extraction diagonale en utilisant la dénombrabilité de $\mathscr{C}$.
c) Appliquer le théorème de Vitali-Saks (exercice 10.11) aux suites de mesures $(\nu^{\pm}_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$, puis le théorème de Radon-Nikodym à leur limite.
e) Considérer la suite définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) := \sin(nx)$.

10.13 *a*) Développer en série l'exponentielle.
b) Faire tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité du *a*).
c) Appliquer le théorème de Hahn-Banach à une forme linéaire nulle sur E.

10.14 *a*) Appliquer le procédé d'extraction diagonale en utilisant la dénombrabilité de la famille $\{\mathbb{1}_A\} \cup \{\mathbb{1}_{A_n}\}_{n \geq 1}$.
b) Appliquer le théorème de Hahn-Banach à la forme linéaire Φ définie sur M.
d) Calculer $\lim_n \int_X \sum_{k=1}^{n} f \, \mathbb{1}_{A_k} \, d\mu$ à l'aide du théorème de convergence dominée.

10.15 Si X est infini, montrer que, pour tout ouvert infini Ω de X, il existe une boule fermée B_f de rayon >0 telle que $B_f \subset \Omega$ et $\Omega \backslash B_f$ infini ; en déduire qu'il existe une suite $(B_k)_{k\geq 1}$ de boules ouvertes non vides et deux à deux disjointes, puis appliquer l'exercice 10.14 avec la suite $(B_k \cap E_{n_k})_{k\geq 1}$ où $(n_k)_{k\geq 1}$ est une suite convenable d'entiers.

10.16 b) En utilisant l'orthogonalité montrer que l'on a pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\Big\| f(x) - \sum_{|n|_\infty \leq N} \widehat{f}(n)\, e^{in\cdot x} \Big\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} - \sum_{|n|_\infty \leq N} |\widehat{f}(n)|^2,$$

où $|n|_\infty := \max_{1\leq k\leq d} |n_k$.

c) En tenant compte des questions a) et b), appliquer le théorème 10.8 de Marcinkiewicz avec les espaces $L^{p_i}(\mathbb{T}^d)$ et $\ell^{q_i}(\mathbb{Z}^d)$, et les exposants $p_1 = q_1 = 2$, $p_2 = 1$ et $q_2 = +\infty$. On obtient ainsi l'estimation pour $f \in L^1(\mathbb{T}^d) \cap L^2(\mathbb{T}^d)$. Pour $f \in L^p(\mathbb{T}^d)$ considérer une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^1(\mathbb{T}^d) \cap L^2(\mathbb{T}^d)$ qui converge vers f dans $L^p(\mathbb{T}^d)$ et appliquer le lemme de Fatou à la suite $\big(\widehat{f_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\ell^{p'}(\mathbb{Z}^d)$.

d) Appliquer le théorème 10.8 de Marcinkiewicz avec les espaces $\ell^{p_i}(\mathbb{Z}^d)$ et $L^{q_i}(\mathbb{T}^d)$, et les exposants $p_1 = q_1 = 2$, $p_2 = 1$ et $q_2 = +\infty$.

10.17 a) Pour montrer la 1ère inégalité multiplier par $\sin(x/2)$. Pour la 2ème inégalité effectuer une transformation d'Abel de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \cos(kx)$ et utiliser la 1ère inégalité.

b) Écrire l'intégrale sur $[0, \pi]$ comme une série d'intégrales sur $[\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n}]$, et montrer que pour $n \geq 1$, $|f(x)| \leq 3A_n$ si $x \in [\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n}]$.

c) Remarquer que

$$\int_0^{+\infty} a(x)\, x^{p-2} dx < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^p\, n^{p-2} < +\infty,$$
$$\int_0^{+\infty} A(x)^p\, x^{-2} dx < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^p\, n^{-2} < +\infty,$$

et que la dernière condition implique $f \in L^p\big([-\pi, \pi]\big)$ d'après b).

d) On a $f \in L^p(\mathbb{T}^1)$ et $\widehat{f} \notin \ell^q(\mathbb{Z})$. Donc l'estimation de l'exercice 10.16 c) est fausse en général si $p > 2$.

Exercices du chapitre 11

11.1 a) Montrer que C est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

11.2 a) $\forall\, a > 0,\ \arctan(a) \leq \displaystyle\int_0^a f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2} \leq \frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{\pi}{2}$.

b) $\forall\, n \geq 1,\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{d}{dx}\Big(\frac{x}{n^2+x^2}\Big) = 0$. Donc le théorème de Fubini ne s'applique pas.

11.4 On applique Fubini-Tonelli en partant de $g\big(f(x)\big) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g'(t)\, \mathbb{1}_{\{t\leq f(x)\}}\, dt$.

11.5 a) Considérer les ensembles $D_n^k := \{x \in X_n : \mu(\{x\}) > \frac{1}{k}\}$, $n, k \in \mathbb{N}^*$.

11.6 a) Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto f(x) - y$ est borélienne.

c) Appliquer le théorème de Fubini-Tonelli à l'expression intégrale de $\lambda_2(G_f)$.

11.7 Considérer la fonction $(x, y) \mapsto (f(x) - f(y))\, (g(x) - g(y))$.

11.8 Appliquer le théorème de Fubini à ces dérivées sur tout pavé compact inclus dans Ω.

11.10 a) Par le théorème de Fubini-Tonelli on a

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dx\, dy}{(1+y)\,(1+x^2 y)} = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}\,(y+1)} = \frac{\pi^2}{2}.$$

$b)$ On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = 2\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ et on développe $\dfrac{1}{1-x^2}$ en série sur $[0,1[$.

11.11 $a)$ Appliquer le théorème de Fubini sur le produit $[0,\pi]\times[0,1]$.
$b)$ Faire le changement de variables $s=\tan x$ dans la première intégrale, puis appliquer le théorème de Fubini sur le produit $[0,\pi]\times[0,1]$ et faire le changement de variables $t=\sqrt{y+1}$.
$c)$ On obtient $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(1+\cos^2(x)\big)\,dx = \pi\,\ln\Big(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\Big)$.

11.13 $b)$ Utiliser le résultat du $a)$ dans la définition de $f_a(t)$ et appliquer le théorème de Fubini.
$c)$ Effectuer le changement de variable $a\,z=y+t$ dans la seconde expression de $f_a(t)$ et faire tendre a vers 0.

11.14 $a)$ Appliquer le théorème de Fubini dans $\displaystyle\int_X F_n g_n d\mu$ où $F_n := |F|\mathbb{1}_{\{\frac{1}{n}\le|F|\le n\}}$ et majorer l'intégrale obtenue à l'aide de l'inégalité de Hölder, pour une fonction $g_n\in\mathscr{L}^q_{\mathbb{R}}(\mu)$ convenable.
$b)$ Appliquer l'inégalité du $a)$ à la fonction $\varphi_a(x,y) := \mathbb{1}_{[0,a]}(x)f(x\,y)$, $a>0$.

11.15 $a)$ Commencer par $f:=\mathbb{1}_A$, $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$, et appliquer le théorème de Fubini-Tonelli. Étendre le résultat à toute fonction étagée par linéarité et à toute fonction borélienne par convergence monotone.
$b)$ Utiliser $a)$ avec la fonction $f(x) := x^{a+b}$ et appliquer l'inégalité de Hölder avec la mesure $d(-\varphi)$, puis utiliser à nouveau $a)$.
$c)$ Appliquer le cas d'égalité de l'inégalité de Hölder et en déduire qu'il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $d(-\varphi)(\mathbb{R}_+\setminus\{x\})=0$.

11.16 $a)$ Procéder comme dans l'exercice 11.15 $a)$.
$b)$ Utiliser $a)$ avec la fonction $f(x) := x^{a+b}$ et appliquer l'inégalité de l'exercice 9.18 $b)$.
$c)$ Appliquer le cas d'égalité de l'exercice 9.18 $b)$ et en déduire $d(\varphi)(]0,1[)=0$.

11.17 $a)$ Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
$b)$ Appliquer le théorème de Fubini.
$c)$ Commencer par calculer $\widetilde{\mathscr{P}(\mu)}$ à l'aide du théorème de Fubini, puis utiliser $b)$.

11.18 $a)$ Montrer que, pour tout $z\in\mathbb{R}_+^*$, $z^s\,M(y\mapsto e^{-zy})=\Gamma(s)$ et en déduire, par un argument d'analyticité, que l'égalité est aussi vérifiée pour $\Re(z)>0$. Pour la continuité en un point $z\in\mathbb{R}^*$, faire une intégration par parties sur $[1,+\infty[$.
$b)$ Appliquer le théorème de Fubini sur $\mathbb{R}_+\times[0,a]$ et poser $u=xy$.
$c)$ Montrer à l'aide d'une intégration par parties sur $[1,ax]$ (si $ax\le 1$) que la fonction $\big(x\mapsto M(\mathbb{1}_{[0,ax]}\cos)\big)$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}_+$, indépendamment de a, puis appliquer le théorème de convergence dominée dans $b)$. Calculer la fonction $M(\cos)$ avec l'égalité du $a)$ pour $z=\pm i$.
$d)$ Appliquer $c)$ avec $M(F(f))(s)$ et $M(F\circ F(f))(1-s)$.

11.19 $a)$ Appliquer le théorème de Fubini-Tonelli et poser $y=tx$.
$b)$ Appliquer l'inégalité de Hölder dans l'égalité du $a)$.
$c)$ Montrer que les fonctions $F(x) := \int_0^x \varphi(u)du$ et $G(x) := \int_0^x \varphi(u)du$ vérifient la même propriété. Montrer que si F n'est pas nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ alors $F>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis que, pour tous $x,y\in\mathbb{R}_+^*$, $F(1)F(xy)=F(x)F(y)$. En déduire, en considérant la fonction $x\mapsto\ln F(e^x)$, qu'il existe $\beta\in\mathbb{R}_+^*$ et $\gamma\in\mathbb{R}$ tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $F(x)=\beta x^\gamma$. Conclure.
$d)$ Appliquer le cas d'égalité de l'inégalité de Hölder et utiliser $d)$ avec $\varphi=f^p$ et $\psi=g^q$.
$e)$ Considérer, pour $a\ge 1$, les fonctions $f_a(x)=\mathbb{1}_{[1,a]}(x)\,x^{\frac{1}{p}}$ et $g_a(x)=\mathbb{1}_{[1,a]}(x)\,x^{\frac{1}{q}}$.

f) Appliquer (S) avec les fonctions $f := \sum_{n\geq 0} a_{m+1}\mathbb{1}_{[m,m+1[}$ et $g := \sum_{n\geq 0} b_{n+1}\mathbb{1}_{[n,n+1[}$.

11.20 a) Écrire $e^{-ax} - e^{-bx} = x\displaystyle\int_a^b e^{-tx}dt$ et appliquer deux fois le théorème de Fubini.

11.21 a) Faire le changement de variable $y = 1/x$.
b) Montrer, à l'aide d'intégrations par parties, que

$$\int (\arctan(1/x))^2\,dx = x\,(\arctan(1/x))^2 + \ln(x^2+1)\arctan(1/x) + \int \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx.$$

11.22 a) Utiliser l'inégalité triangulaire.
b) Utiliser l'égalité $\mathbb{1}^2_{A_n} = \mathbb{1}_{A_n}$.

11.23 a) Appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour obtenir l'égalité

$$\frac{1}{c_d\,r^d}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\,\mu(B(x,r))\,\lambda_d(dx) = \frac{v_d}{c_d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{\lambda_d(B(y,r))}\int_{B(y,r)}\varphi(x)\,\lambda_d(dx)\right)\mu(dy),$$

puis faire tendre r vers 0 à l'aide du théorème de convergence dominée.
b) Appliquer l'unicité du théorème de représentation de Riesz.

Exercices du chapitre 12

12.1 a) Montrer que $\varphi(\partial\Delta)\cap\varphi(\Delta)=\varnothing$ par l'absurde, avec la continuité de φ^{-1} sur D.
b) Partir de $\partial D=\partial(\varphi(\Delta))$ et montrer que $\overline{\varphi(\Delta)}\subset\varphi(\overline{\Delta})$ par un argument de compacité.

12.3 a) Développer en série $(1-x\,y)^{-1}$ et intervertir la série et l'intégrale en utilisant le théorème de Beppo Levi.
b) Montrer que la fonction $\varphi : (\theta,t)\mapsto(\cos\theta - t,\cos\theta + t)$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de l'ouvert $\Delta := \big\{(\theta,t)\in\mathbb{R}^2 : 0<\theta<\pi/2$ et $|t|<\min(\cos\theta, 1-\cos\theta)\big\}$ sur $D :=]0,1[^2$, de Jacobien $J_\varphi(\theta,t) = 2\sin\theta$. Appliquer le théorème du changement de variables avec φ puis le théorème de Fubini-Tonelli.
c) Séparer l'intégrale en θ sur $[0,\pi/3]$ et $[\pi/3,\pi/2]$. Dans la seconde intégrale utiliser que $\arctan(\cot\theta) = \pi/2-\theta$.

12.4 b) Montrer que $\varphi_{a,b}(\mathbb{R}^2)$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^2$.

12.7 a) Poser $u=\sqrt{t}$ dans $\Gamma(a)$ et appliquer le théorème de Fubini-Tonelli.
b) Passer en coordonnées polaires.

12.9 a) Utiliser la réduction de A dans une base orthonormale de vecteurs propres, rappelée dans démonstration du corollaire 12.1, *i.e.* $A = P\,D\,{}^tP$ où $P = ({}^tP)^{-1}$ est une matrice orthogonale et $D = \operatorname{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$ est la matrice diagonale des valeurs propres de A, puis effectuer le changement de variables linéaire orthogonal $x = {}^tPy$. On a par le théorème de Fubini-Tonelli $I_A := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(\alpha_1 y_1^2+\cdots+\alpha_d y_d^2)}\,dy = \prod_{i=1}^d\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha_i y_i^2}\right) = \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{\det A}}$.
b) $I_A<\infty$ ssi pour tout $i = 1,\ldots,d$, $\alpha_i>0$ ssi A est définie positive.
c) Procéder comme dans a) en appliquant le théorème de Fubini-Lebesgue et en utilisant l'application 12.3 (a').

12.10 c) Effectuer un changement de variables linéaire orthogonal.
d) Effectuer le changement de variables en coordonnées sphériques

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 & = r\sin\theta_1 \\ x_2 & = r\cos\theta_1\sin\theta_2 \\ \vdots & \\ x_{d-1} & = r\cos\theta_1\cdots\cos\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1} \\ x_d & = r\cos\theta_1\cdots\cos\theta_{d-2}\cos\theta_{d-1}\end{array}\right.$$

dans l'intégrale $I(z)$ où $z := (0,\ldots,0,|y|,0,0)$, et montrer, par récurrence sur d, que son Jacobien vérifie $|J_d| = r^{d-1}(\cos\theta_1)^{d-2}\cdots(\cos\theta_{d-3})^2\cos\theta_{d-2}$.

12.11 a) Écrire Ω comme une limite croissante de compacts de Δ.
b) Par un changement de variables affine, se ramener au cas où $0\in K$ et AK est inclus dans un hypercarré de $\{x_d=0\}$ de côté $\leq$ diam(AK), puis en déduire que $AK+Q_{0,r}$ est inclus dans le pavé $\displaystyle\prod_{i=1}^{d-1}[-\mathrm{diam}(AK)-\delta,\mathrm{diam}(AK)+\delta]\times[-\delta,\delta]$.
c) Si $J_\varphi(u_0)\neq 0$, appliquer directement l'étape 1. Si $J_\varphi(u_0)=0$, montrer, à l'aide de la formule de Taylor, que $\varphi(Q_{a,r})\subset\varphi(u_0)+\varphi'(u_0)Q_{a-u_0,r}+Q_{0,r\varepsilon'}$, puis utiliser a).
e) Montrer que tout compact de Δ s'écrit comme une limite décroissante d'ouverts de Δ et appliquer le théorème de convergence dominée dans l'inégalité du d).

12.12 Soient Ω un ouvert de Δ et $(K_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de compacts d'union Ω. Montrer que $\lambda_d(\varphi(\Omega))\geq\lambda_d(\varphi(\Delta))-\lambda_d(\varphi(\Delta\setminus K_n))$ et utiliser l'exercice 12.11 d).

12.13 Montrer que S s'écrit comme une suite croissante de compacts de Δ et appliquer le théorème de convergence monotone dans l'inégalité de l'exercice 12.11 e).

12.14 Montrer que pour $|a|$ assez petit, $d_{B_d}(Id-af)\in]0,2[$ et appliquer la proposition 12.3 c).

12.15 a) Écrire $\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{t\,x+1}$ et appliquer le théorème de Fubini-Tonelli.
b) On fait la décomposition $\dfrac{1}{(1+s\,x)\,(1+t\,x)}=\dfrac{1}{s-t}\Big(\dfrac{s}{1+s\,x}-\dfrac{t}{1+t\,x}\Big)$.
c) On intègre l'égalité de a) sur $\mathbb{R}_+$, on applique Fubini-Tonelli sur $\mathbb{R}_+\times[0,1]$ et on utilise b).

12.16 b) Avec le changement de variables $(r,\theta)\mapsto\big(r\sqrt{\cos\theta},r\sqrt{\sin\theta}\big)$, $I=\dfrac{\sqrt{\pi}\,(\pi-1)}{8}$.
c) Remarquer que $\dfrac{xy}{x^2+y^2}\leq\dfrac{1}{2}$ et appliquer Fubini.

12.17 a) Montrer que $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty}(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\max(x,y)$ et en déduire que $\mathbb{1}_{B_\alpha}$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{]0,1[^2}$ lorsque $\alpha\to+\infty$. La limite est égale à 1 d'après le théorème de convergence dominée.
b) Effectuer le changement de variables $(r,\theta)\mapsto\big(r\,(\cos\,\theta)^{2/\alpha},r\,(\sin\,\theta)^{2/\alpha}\big)$.

12.18 a) Effectuer le changement de variables $(x,y)=\sqrt{r}\,(\cos\theta,\sin\theta)$ puis utiliser que la fonction sinus cardinal n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (*cf.* exercice 7.15).
b) Procéder comme dans a) et utiliser la semi-convergence de l'intégrale de sinus cardinal. On obtient $J=\pi^2/2$.

12.19 a) On a $I_a=\dfrac{\pi}{1-a}$ si $a>1$ et $I_a=+\infty$ si $a\leq 1$.
b) Par symétrie on a $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(x^2+y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}\,dx\,dy=\frac{\pi}{2}$.

12.20 a) On fait un développement en série de $\dfrac{1}{1-x^2y^2}$ et on utilise le théorème de Fubini-Tonelli pour l'inversion intégrale-série.
b) En notant que $0<x\,y=u\,v<1$, on a $\varphi^{-1}:(x,y)\mapsto\left(x\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}\,,\,y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}\right)$.
Le calcul de J_φ est un peu long mais sans difficulté.

c) Par le théorème de changement de variables combiné avec Fubini-Tonelli, I est égal à

$$\int_\Delta \frac{du\,dv}{(1+u^2)\,(1+v^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)} \left(\int_0^{\frac{1}{u}} \frac{dv}{(1+v^2)} \right) = \left[-\frac{1}{2} \arctan^2 \left(\frac{1}{u} \right) \right]_0^{+\infty}.$$

Exercices du chapitre 14

14.1 b) Faire une récurrence sur n.
c) Soit $\varphi_n := \sum_{k=2}^{n} \chi_k$. Montrer que, pour tout $n \geq 3$, $\varphi_n = \chi * \varphi_{n-1} + \chi_2$.

14.3 a) Montrer que $\forall \xi \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, $\widehat{f}(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left[f(x) - f\big(x + \pi\xi/|\xi|^2\big) \right] e^{-i(\xi \cdot x)} dx$, et utiliser la continuité de l'opérateur de translation dans $L^1_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$ (*cf.* théorème 14.1).
b) Appliquer le théorème de Fubini.
c) Si h est un élément neutre pour $*$, appliquer b) avec h et $f(x) := e^{-(|x_1| + \cdots + |x_d|)}$.

14.4 Partir de $|f(x-y)\,g(y)| = (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} \, (|f(x-y)|^p)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \, (|g(y)|^q)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}$ et appliquer l'inégalité de Hölder.

14.5 Appliquer le *théorème du point fixe* : : *toute application k-contractante d'un espace métrique complet dans lui-même possède un unique point fixe* (*cf.* [18]).

14.8 Montrer que $\overline{f}_n = \alpha_n * f$ où $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est une approximation (non régulière) de l'unité.

14.9 Utiliser l'égalité $\operatorname{div}(\varphi\,\nabla\varphi) = \varphi\,\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2$, et la formule d'intégration par parties du lemme 12.1 avec $\varphi := \alpha * f$.

14.10 b) Utiliser l'exercice 6.14 b).

14.11 b) Appliquer le théorème de Fubini.

c) Montrer, à partir du b), que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\alpha_n * f(x) \to (2\pi)^{-d} \,\hat{\hat{f}}(-x)$, et montrer, à l'aide du théorème 9.3, qu'il existe une sous-suite $(k_n)_{n \geq 0}$ telle que $\alpha_{k_n} * f(x) \to f(x)$ $\lambda_d(dx)$-p.p..

14.12 a) Utiliser l'exercice 14.3 b) et la formule d'inversion de l'exercice 14.11 c).

14.13 a) Appliquer le théorème de Fubini-Tonelli à $(x, y) \mapsto f(xy^{-1})g(y)$.
c) S'inspirer de l'exercice 14.4.

14.14 a) Considérer $g_\alpha := id^\beta \, \mathbb{1}_I$ avec $I :=]0, 1]$ ou $I :=]0, +\infty]$ selon la position de α par rapport à 1.
b) Appliquer l'inégalité de convolution de l'exercice 14.13.
c) Considérer les fonctions $f_a(x) := x^{-\alpha} \mathbb{1}_{[1,a]}(x)$.
d) Considérer la fonction $f(x) := x\,(\ln x)^{-1-\frac{1}{p}} \, \mathbb{1}_{[2,a]}(x)$ pour a assez grand.

14.15 d) Utiliser l'invariance par translation de λ_d.
e) S'inspirer de l'exercice 14.10.

Exercices du chapitre 15

15.1 Appliquer le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire pour les intégrales.

15.2 a) Pour $\xi \in \mathbb{R}$, $\mu(\mathbb{R}) - \widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \big(1 - \cos(\xi x)\big)\, \mu(d\xi) - i \int_{\mathbb{R}} \sin(\xi x)\, \mu(d\xi) = 0$ si et seulement si $\cos(\xi x) = 1$ $\mu(d\xi)$-p.p. si et seulement si $x \in \frac{2\pi}{\xi}\mathbb{Z}$ $\mu(d\xi)$-p.p..

15.3 Par continuité de $\widehat{1_E}$ en 0, on obtient $\widehat{1_E}(0) = \lambda(E) = 0$.

15.4 On a $\widehat{f}(t) = \sqrt{\pi}/4\, e^{-t^2/4}$, d'où $f(x) = 1/4\, e^{-x^2}$. L'intégrabilité assure l'unicité.

15.5 La transformée de Fourier s'écrit

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{|x|\geq 2} \frac{e^{ix\xi}}{x^2 \log(|x|)}\, dx = 2 \int_{x\geq 2} \frac{\cos(x\xi)}{x^2 \log(x)}\, dx.$$

On vérifie alors que pour tout $\xi \in]0, 1/2[$,

$$\frac{f(0) - f(\xi)}{\xi} = 2 \int_2^{+\infty} \frac{1 - \cos(x\xi)}{\xi\, x^2 \log(x)} dx = 2 \int_{2\xi}^{+\infty} \frac{1 - \cos(y)}{(\log y - \log \xi)\, y^2}\, dy$$

(la dernière expression découle du changement de variable $x = y/\xi$). On note enfin que

$$\forall\, y \geq 2\xi, \quad \frac{1 - \cos(y)}{y^2(\log y - \log \xi)} \leq \frac{1 - \cos(y)}{y^2(\log 2 - \log \xi)},$$

puis on conclut par convergence dominée car $\left(y \mapsto \frac{1-\cos(y)}{\ln 2\, y^2}\right) \in L^1(]0, +\infty[)$.

15.6 On considère la fonction $f := \widehat{1_B}$, où B est la boule unité de $\mathbb{R}^d$. Comme 1_B ne peut coïncider presque partout avec une fonction continue, la fonction f n'est pas dans $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ en vertu du théorème d'inversion. En revanche, on a $\Phi(f) = 1_B \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

15.7 On applique la multiplicativité de la transformée de Fourier pour la convolution en remarquant que $f_a(t) = \frac{1}{2\pi} \widehat{e^{-a|x|}}(t)$.

15.8 $a)$ On découpe l'intégrale sur les intervalles $[a, n]$, $[-n, -a]$ et $[-a, a]$, $0 < a \leq n$, on écrit $\sin t$ sous forme d'exponentielle, et on fait les changement de variables $s = (1 \pm x)\, t$ dans les intégrales sur $[a, n]$ et $[-n, -a]$. On fait alors tendre n vers l'infini puis a vers 0.
$b)$ Soit $\chi := \frac{1}{2}\, 1_{[-1,1]}$. La suite $\Phi\big(1_{[-n,n]}\, \widehat{\chi}\big)$ converge dans $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ vers $\Phi(\widehat{\chi}) = 2\pi\, \chi = \pi\, 1_{[-1,1]}$, et donc presque partout dans $\mathbb{R}$ à une sous-suite près, d'où l'égalité cherchée.

15.9 $a)$ Le calcul de la transformée de Fourier de $1_{[-1/2,1/2]}$ donne $I_n = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_n}(t)\, dt$. On a $I_n = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_{n-1}}(t)\, \widehat{f}_1(t)\, dt$, d'où par Plancherel $I_n = \pi \int_{\mathbb{R}} f_{n-1}(x)\, f_1(x)\, dx$. Une récurrence donne $0 \leq f_n \leq 1$, ce qui permet de conclure.
$b)$ Comme précédemment on a $I_n = \pi \int_{\mathbb{R}} f_p(x)\, f_q(x)\, dx$ et $I_{2p} = \pi \int_{\mathbb{R}} (f_p(x))^2\, dx$. On conclut avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

15.10 On a $\left|t\widehat{f}(t)\right| = \left|\widehat{f'}(t)\right| = \left|\Phi(f')(t)\right| \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $1/t$ et $t\,\widehat{f}(t)$, on obtient que $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Le théorème d'inversion permet de conclure.

15.11 $a)$ On choisit $g := 1_{\{f\neq 0\}}\, f/\sqrt{|f|}$ et $h := \sqrt{|f|}$.
$b)$ On applique $a)$ avec $\varphi = \widehat{f}$, $\phi := (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\, \Phi(g)$ et $\psi = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\, \Phi(h)$.
$c)$ $f = g\, h \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ est la limite dans $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ de $F_n := (2\pi)^d\, \Phi^{-1}(\phi_n)\, \Phi^{-1}(\psi_n)$, où les suites ϕ_n, $\psi_n \in \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d)$ convergent dans $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ vers $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\, \Phi(g)$, $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\, \Phi(h)$ respectivement. On a alors $\widehat{F_n} = (2\pi)^d\, \Phi\big(\Phi^{-1}(\phi_n)\, \Phi^{-1}(\psi_n)\big) = \phi_n * \psi_n \in \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d)$.

15.12 $a)$ On a $\widehat{f} = \widehat{\varphi}\, \widehat{\widehat{\phi * \phi}} = (2\pi)^{3d/2}\, \varphi\, (\phi * \phi) \in \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d)$.

15.13 Il faut vérifier que si f est continue à support dans un intervalle compact I, la fonction $\widehat{f}$ définie sur $\mathbb{C}$ par $\widehat{f}(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{ixz} f(x)\, dx$ est holomorphe. Ceci se vérifie directement par le théorème de dérivation sous le signe intégral (ponctuel) étendu au cas complexe, en effet, pour tous $z, h \in \mathbb{C}$, $|h| \leq 1$,

$$|f(x)e^{i(z+h)x} - f(x)e^{izx}| \leq |hx|e^{|x|(|z|+|h|)}|f(x)| \leq |f(x)||x|e^{|x|(|z|+1)} \in L^1(\mathbb{R})$$

(car f est à support dans I), ce qui assure la condition de domination. La fonction $\widehat{f}$ est donc holomorphe sur tout $\mathbb{C}$. Elle est alors soit constante, soit $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |\widehat{f}(z)| = +\infty$. Donc, si $\widehat{f}_{|\mathbb{R}}$ est à support compact sur $\mathbb{R}$, $\widehat{f}$ est identiquement nulle.

15.14 $b)$ La fonction $x \mapsto e^{i\pi x}$ sépare les points de $[-1,1]$ et ne s'annule jamais, donc, d'après le théorme de Stone-Weierstrass (*cf.* [18], Corollaire 12.5, p.139), l'algèbre stable par conjugaison engendrée par cette fonction, $i.e.$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de la forme $\sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ik\pi\cdot}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, est dense dans l'ensemble des fonctions continues 2-périodiques à valeurs complexes pour la norme uniforme, lui-même classiquement dense dans $L^2_{\mathbb{C}}([-1,1],\lambda)$ pour la norme hilbertienne usuelle.

$c)$ On a $\widehat{f}(n\pi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{in\pi x} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} e^{in\pi x} f(x)\,dx = \langle f|e^{-in\pi\cdot}\rangle_{L^2_{\mathbb{C}}([-1,1],\lambda)}$. D'où, $(e^{in\pi\cdot})_{n\in\mathbb{Z}}$ étant une base (orthonormée) hilbertienne, $f \equiv 0$ dans $L^2_{\mathbb{C}}([-1,1])$.

$d)$ Si $\widehat{\mu}(n\pi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on montre que $\int f\,d\mu = 0$ pour tout polynôme trigonométrique puis on conclut comme à la question $b)$.

15.15 $a)$ Par une double intégration par parties, on trouve

$$\widehat{\varphi}(\xi) = 2\int_0^1 (1-t)\,\cos(t\xi)\,dt = \frac{2}{\xi}\int_0^1 \sin(t\xi)\,dt = \frac{2}{\xi^2}(1-\cos\xi).$$

$b)$ La fonction $\widehat{\varphi}$ est positive et clairement dans $L^1(\mathbb{R})$ donc $\widehat{\widehat{\varphi}} = 2\pi\check{\varphi} = 2\pi\varphi$ par parité, d'où $\mu(d\xi) = \frac{\widehat{\varphi}}{2\pi}\,d\xi$est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ et $\widehat{\mu} = \varphi$.

$c)$ En appariant les entiers impairs opposés $2n+1$ et $-(2n+1)$, $n \geq 0$, on trouve

$$\widehat{\nu}(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n\geq 0}\frac{\cos((2n+1)\xi)}{(2n+1)^2}.$$

$d)$ Pour montrer que $\widehat{\mu}$ et $\widehat{\nu}$ coïncident sur $[-1,1]$ on évalue les transformées de Fourier de $\widehat{\mu}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}$ et $\widehat{\nu}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}$ en les points $n\pi$ (en fait les coefficients de Fourier) puis on s'appuie sur l'exercice 14. Dans les deux cas, le calcul est essentiellement immédiat au vue des questions précédentes.

15.16 $a)$ La série est normalement convergente d'après la seconde inégalité vérifiée par f. Donc la continuité de F se déduit de celle de f qui est localement Lipschitzienne.

$b)$ En intervertissant l'intégrale et la somme on obtient $c_n = \frac{1}{2\pi}\,\widehat{f}(n)$.

$c)$ L'hypothèse de type Lipschitz sur f implique que

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{F(x)-F(0)}{x}\right|dx \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-1}^{1}\left|\frac{f(x+2\pi k)-f(2\pi k)}{x}\right|dx \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{2\,C}{(2k\pi)^2+1}$$

Donc, d'après le théorème de Dirichlet pour les séries de Fourier (*cf.* [31]), F coïncide avec sa série de Fourier en 0, ce qui, compte tenu de $b)$, donne la formule annoncée.

$d)$ La série de gauche se déduit de $\widehat{f}(n) = \dfrac{2a}{a^2+n^2}$. La série de terme général $f(2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, se dédouble et donne une série géométrique de raison $e^{-2\pi a}$. On fait tendre $a > 0$ vers 0 dans l'égalité obtenue, en utilisant l'équivalent $\left(\coth(x) - \dfrac{1}{x}\right) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$.

$e)$ On considère $a = \varepsilon + i\,\alpha$, où $\varepsilon > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, dans la première formule de $d)$ et on fait tendre ε vers 0^+ en utilisant le théorème de convergence dominée pour les séries.

15.17 $a)$ $\widehat{f * f} = (\widehat{f}\,)^2$, donc l'équation se lit en Fourier $(\widehat{f}\,)^2 = \widehat{f}$, $i.e.$ $\widehat{f}$ est à valeurs dans $\{0,1\}$. Par continuité de $\widehat{f}$, celle-ci est donc la fonction nulle ou la fonction 1. Or, d'après le théorème de Riemann-Lebesgue, $\lim_{|\xi|\to+\infty}\widehat{f}(\xi) = 0$, donc f est identiquement nulle.

$b)$ On utilise l'identité de convolution relative à la transformée de Fourier-Plancherel afin de montrer que $f = \frac{1}{2\pi}\Phi(\varphi)$ où $\varphi^2 = \varphi$ et $\varphi \in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$. D'où $\varphi = \mathbb{1}_A$, $\lambda(A) < +\infty$.

15.18 $a)$ Décomposer e^{iux} en parties réelle et imaginaire. Remarquer que $1 - \cos$ est une fonction positive, nulle sur $D = \frac{2\pi}{u_0}\mathbb{Z} = \frac{2\pi}{|u_0|}\mathbb{Z}$. La fonction $\widehat{\mu}$ s'écrit alors (théorème 8.4(b) dit de convergence dominée pour les séries de fonctions)

$$\widehat{\mu}(u) = \int_D e^{iux}\,\mu(dx) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu\big(\{2k\pi/|u_0|\}\big)\, e^{2ik\pi u/|u_0|}.$$

Elle est donc clairement périodique de période (non nécessairement minimale) $|u_0|$.

$b)$ La continuité de $\widehat{\mu}$ s'établit en s'inspirant de l'Application 8.5(b). L'ensemble des périodes de μ – en incluant 0 et les périodes négatives – forme un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Un tel sous-groupe (*cf.* [18]) est soit dense, soit de la forme $T\mathbb{Z}$ où T est la plus petite période (strictement positive) de $\widehat{\mu}$. S'il est dense, on montre que $\widehat{\mu}(u) = \widehat{\mu}(0) = \mu(\mathbb{R})$, donc tout $u > 0$ est période. En particulier 1 et l'irrationnel $\sqrt{2}$ le sont. Donc μ est portée par $2\pi\mathbb{Z}$ et $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\mathbb{Z}$ donc par leur intersection $i.e.$ $\{0\}$. Donc $\mu = \mu(\mathbb{R})\delta_0$.

$c)$ On établit l'existence d'un réel α tel que $e^{-i\alpha}\widehat{\mu}(u_0) = \mu(\mathbb{R})$ et on montre de façon analogue que $D = \frac{\alpha+2\pi}{u_0}\mathbb{Z}$. D'où $\widehat{\mu}(u) = e^{i\alpha u/u_0}\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu\big(\{(\alpha+2k\pi)/u_0\}\big)\, e^{2ik\pi u/u_0}$.

$d)$ On applique ce qui précède à la mesure positive finie $\mu(dx) = f(x)\,\lambda(dx)$. Celle-ci ne peut clairement pas être portée par un ensemble dénombrable D car, nécessairement,

$$\mu(D) = \int_D f(x)\lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{1}_D f)(x)\lambda(dx) = 0.$$

En effet $\mathbb{1}_D f$ est λ-p.p. nulle donc il en est de même de son intégrale. Or ceci est impossible car $\mu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda \neq 0$ par hypothèse.

15.19 $a)$ En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, il vient pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \big(\mu(\mathbb{R}) - \Re e\big(\widehat{\mu}(\xi)\big)\big)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\xi\big(1-\cos(\xi x)\big)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\left[\xi - \frac{\sin(\xi x)}{x}\right]_{\xi=-\varepsilon}^{\xi=\varepsilon} = 2\varepsilon\int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{\sin(x\varepsilon)}{x\varepsilon}\right)\mu(dx)\\
&\geq 2\varepsilon\int_{\{|x|\geq 2/\varepsilon\}}\left(1-\left|\frac{\sin(x\varepsilon)}{x\varepsilon}\right|\right)\mu(dx) \geq 2\varepsilon\int_{\{|x|\geq 2/\varepsilon\}}\left(1-\frac{1}{|x\varepsilon|}\right)\mu(dx)\\
&\geq \varepsilon\mu\Big(|x|\geq 2/\varepsilon\Big).
\end{aligned}$$

$b)$ Par convergence dominée $\displaystyle\lim_n \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \big(\widehat{\mu}_n(0) - \widehat{\mu}_n(\xi)\big)d\xi = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \big(\chi(0)-\chi(\xi)\big)d\xi$. D'où la conclusion en combinant avec $a)$.

$c)$ On extrait $\mu_{\varphi(n)}$ convergeant vers μ. Comme $x \mapsto e^{ix\xi}$ est continue bornée pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, il est clair que $\widehat{\mu}_{\varphi(n)}$ converge simplement vers $\widehat{\mu}$; donc $\widehat{\mu} = \chi$.

15.20 $a)$ Les supports des fonctions $\rho(\cdot - n)$, $n \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux disjoints. Donc en chaque $x \in \mathbb{R}$, la somme qui définit $g(x)$ se réduit à un terme unique et g hérite donc de la régularité de ρ. De même, pour tout $|x| \geq p \in \mathbb{N}^*$, $|g(x)| \leq \frac{1}{2\ln p}$, d'où la limite annoncée.

$b)$ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx.$

$c)$ Le coefficient de Fourier d'ordre $n \in \mathbb{Z}$ de F est

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\rho(k-n) = c_n.$$

Donc $b_1 = 0$ et si $n \geq 2$,

$$b_n = \frac{1}{\ln n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{n}\frac{b_k}{k} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}\right)F(x)\,dx.$$

Notons que la somme partielle dans la dernière intégrale converge pour tout $x \in [-\pi,\pi]$ en vertu du critère d'Abel.

$d)$ Par la majoration de l'exercice 8.30 $b)$ et l'intégrabilité de F, le théorème de convergence dominée s'applique à la dernière intégrale du $c)$. On en déduit que le série de terme général $1/(n \ln n)$ est convergente, ce qui fournit la contradiction.

Donc $g \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \Phi(\mathscr{L}^1(\mathbb{R}))$ et par conséquent $\Phi(\mathscr{L}^1(\mathbb{R})) \subsetneq \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

15.21 $a)$ En tenant compte du théorème de Plancherel et de la continuité de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, appliquer le théorème 10.8 de Marcinkiewicz avec les espaces $L^{p_i}(\mathbb{R}^d)$ et $L^{q_i}(\mathbb{R}^d)$ et les exposants $p_1 = q_1 = 2$, $p_2 = 1$ et $q_2 = +\infty$.
$b)$ D'après la formule (15.7) et la valeur de l'intégrale de Fresnel de l'exercice 8.29, on obtient $\widehat{f_z}(\xi) = (\pi/z)^{d/2}\, e^{-|\xi|^2/(4z)}$, pour $\xi \in \mathbb{R}^d$.
$c)$ Comme $f_z \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, si le résultat de continuité est vrai alors le rapport $\|\widehat{f_z}\|_q / \|f_z\|_p$ est borné uniformément par rapport à z. En prenant $z \in \mathscr{R}_+^*$, $z \to +\infty$, on a nécessairement $1/p + 1/q = 1$. Puis en faisant $\Im(z) \to +\infty$, il vient $p \leq 2$.

15.22 $a)$ Appliquer la formule d'inversion au point x en utilisant la continuité de f.
$b)$ Noter que $c_n = f(n)$ par la formule d'inversion, puis intervertir l'intégrale et la série sachant que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| < +\infty$.

15.23 $a)$ Appliquer le lemme 15.4 dans $\mathscr{S}_\mathbb{C}$ puis utiliser la densité de $\mathscr{S}_\mathbb{C}$ dans $L^2_\mathbb{C}(\mathbb{R}^d)$.
$b)$ Appliquer successivement le lemme 15.4 et $a)$, puis conclure en appliquant l'exercice 8.33 à la fonction $f - g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
$c)$ Appliquer successivement le lemme 15.4 et le théorème 15.4, puis de nouveau conclure avec l'exercice 8.33.

15.24 $b)$ Appliquer le théorème de Dirichlet à ψ.
$c)$ Appliquer l'identité de Parseval à ψ puis le théorème de Plancherel à φ.
$d)$ $i)$ Intégrer par parties.
$ii)$ Montrer que $f(x) = \sin x/x$, puis utiliser les égalités des questions $b)$ et $c)$.

15.25 $b)$ Utiliser le théorème de Fubini-Lebesgue dans $\int_{-n}^n \hat{\varphi}$ pour la 2ème inégalité, puis utiliser le lemme de Borel-Lebesgue avec $\left(t \mapsto \frac{\varphi(t)}{t}\right)$ dans $\{|t| \geq a\}$ et $\left(t \mapsto \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\right)$ dans $[-a, a]$ combiné avec le résultat de la question $d)$ de l'exercice 15.16, pour la troisième égalité.
$c)$ Appliquer la formule de Poisson avec les deux paires (φ, f) et $(\frac{1}{2\pi}\varphi * \varphi, f^2)$.
$d)$ Appliquer la dernière condition de $ii)$.

15.26 $a)$ La symétrie de l'opérateur A se déduite d'une intégration par parties.
$b)$ Montrer à l'aide la question $a)$ que

$$\forall\, f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad \|f\|_2^2 = i\left\langle A(f), B(\bar{f})\right\rangle - i\left\langle B(f), A(\bar{f})\right\rangle,$$

puis appliquer aux deux termes de droite l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
$c)$ Déduire de la proposition 15.3 et du théorème de Plancherel que $\|x\widehat{f}(x)\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f'\|_2$.

15.27 $a)$ En appliquant successivement le théorème d'inversion à f (noter que $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ par la condition de support) en 0, le lemme 15.4, l'inégalité de Cauchy-Schwarz (*i.e.* Hölder pour $p = 2$) puis le théorème de Plancherel, on obtient

$$\begin{aligned} |f(0)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\mathbb{R} \mathbb{1}_{[-a,a]}(t)\,\widehat{f}(t)\,dt\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\mathbb{R} \widehat{\mathbb{1}_{[-a,a]}}(t)\,f(t)\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\left\|\widehat{\mathbb{1}_{[-a,a]}}\right\|_2 \|\widehat{f}\|_2 = \frac{\sqrt{a\,I}}{\pi}\,\|f\|_2. \end{aligned}$$

$b)$ Le cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder (*cf.* théorème 9.1 (b)) implique l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}_+$ telle que $|f| = \alpha\left|\widehat{\mathbb{1}_{[-a,a]}}\right|\ \lambda(dx)$-p.p. sur $\mathbb{R}$.

c) D'après b) pour $\alpha = 1$ et le théorème de Plancherel, on a

$$2\,a = \big|\,\widehat{\mathbb{1}_{[-a,a]}}\big|(0) = \frac{\sqrt{a\,I}}{\pi}\,\big\|\widehat{\mathbb{1}_{[-a,a]}}\big\|_2 = \frac{2\,a\,I}{\pi}\,.$$

15.28 a) Effectuer n des intégrations par parties.
b) D'après a) on a $\mathscr{L}(x_g)(z) = \alpha/P(z)$ et $\mathscr{L}(e^{\alpha_j t})(z) = 1/(z-\alpha_j)$. On conclut avec le théorème d'inversion de Laplace.
c) Soit h est la combinaison linéaire des exponentielles.
D'après la décomposition en éléments simples de $1/P$, on pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > a$, $P(z)\,\mathscr{L}(h)(z) = 1$, d'où $P(z)\,\mathscr{L}(h * f)(z) = P(z)\,\mathscr{L}(h)(z)\,\mathscr{L}(f)(z) = \mathscr{L}(f)(z)$.
Or, d'après a) on a aussi $P(z)\,\mathscr{L}(y)(z) = \mathscr{L}(D(y))(z) = \mathscr{L}(f)(z)$.
Donc par inversion de Laplace il vient $y = h * f = f * h$ qui est l'expression cherchée.
d) Par linéarité on obtient $x = x_g + y$.
e) On peut vérifier par le calcul que l'expression du d) est solution du problème (C) pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+)$ nulle dans $\mathbb{R}_-^*$.

15.29 a) Prendre la transformée de Fourier de (C_a) et utiliser les propriétés de la transformée avec la dérivation. Une solution générale de l'équation différentielle dans $\mathbb{R}_+$ est donnée par $\mathscr{L}(x)(z) = \lambda\,(z^2+1)^{\frac{a}{2}-1}$ pour $z \in \mathbb{R}_+$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Par injectivité de la transformée de Laplace, cette expression s'étend au domaine de $\mathscr{L}(x)$, d'où le résultat.

b) Cas $a \geq 2$.
i) Si $a \geq 2$, alors on ne peut avoir $\lim\limits_{z\to+\infty} F(z) = 0$. Donc F n'est pas la transformée de Laplace à domaine non vide d'une solution non nulle du problème (C_a).
ii) Pour $a = 2$, une base de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$ est donnée par $(\sin t/t, \cos t/t)$. Aucune de ces deux fonctions ne vérifie la condition initiale $x(0) = 0$ de (C_2).

c) Cas $a = -2$.
i) Les solutions du problème (C_{-2}) ayant une transformé de Laplace avec un domaine non vide est la droite vectorielle engendrée par la fonction $\varphi_{_{-2}}(t) := \frac{1}{2}\,(\sin t - t\,\cos t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, obtenue en prenant la transformée inverse de l'égalité proposée et en utilisant l'expression de $\mathscr{L}(x)$ de a) pour $a = -\,2$.
ii) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre associée au problème (C_{-2}) dans $\mathbb{R}_+^*$, est un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est $(\varphi_{_{-2}}, \psi_{_{-2}})$ où la fonction $\psi_{_{-2}}$ est donnée par la méthode de variation de la constante :

$$\psi_{_{-2}}(t) := \varphi_{_{-2}}(t)\int_1^t \frac{s^2}{\varphi_{_{-2}}^2(s)}\,ds \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_+^*.$$

On vérifie que $\psi_{_{-2}} \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_-^*)$ en étudiant $\psi_{_{-2}}$ en chaque point $t_n \in [n\,\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$, $n \in \mathbb{N}^*$, points fixe de la fonction $\tan$, en lesquels s'annule $\varphi_{_{-2}}$. De plus, compte tenu de $\varphi_{_{-2}} \underset{t\to 0}{\sim} t^3/6$, on obtient $\lim\limits_{t\to 0} \psi(t) = -2 \neq 0$. Donc $\psi_{_{-2}}$ n'est pas une solution du problème (C_{-2}). Par conséquent, l'ensemble des solutions du problème (C_{-2}) est aussi la droite vectorielle engendrée par $\varphi_{_{-2}}$.

d) Cas $a = 1$.
i) On obtient $\varphi_{_1}(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}\,(n!)^2}\,t^{2n}$.
ii) La fonction $\psi_{_1}$ se déduit de $\varphi_{_1}$ à l'aide de la méthode de variation de la constante par la formule proposée. On a $\psi_{_1} \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+)$ en vérifiant que d'une part, la limite de $\varphi_{_1}$ en 0 est 0, et que d'autre part, qu'en chaque racine (éventuelle) $\tau > 0$ de $\varphi_{_1}$, les limites de $\psi_{_1}$ et $\psi_{_1}'$ en τ existent dans $\mathbb{R}$. Pour cela, on effectue des développements asymptotiques des deux expressions intégrales au voisinage de τ.

De plus, on a $\lim_{t\to 0} \psi_1(t) = +\infty$. Donc ψ_1 n'est pas une solution de (C_1).

Supposons, par l'absurde, qu'il existe une solution $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+)$ du problème (C_1). Sachant que (φ_1, ψ_1) est une base de solutions de l'équation différentielle associée à (C_1) dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que $f = \lambda\,\varphi_1 + \mu\,\psi_1$ dans $\mathbb{R}_-^*$. Comme f et φ_1 sont continues en 0 alors que ψ_1 n'y a pas de limite, on a $\mu = 0$. D'où $0 = f(0) = \lambda\,\psi_1(0) = \lambda$, *i.e.* f est la fonction nulle.

$iii)$ Si une telle fonction f existe, alors on a

$$\forall\, z \in \mathring{D}_{\mathscr{L}(f)},\quad \mathscr{L}(f * f)(z) = \big(\mathscr{L}(f)\big)^2(z) = \frac{1}{z^2+1} = \mathscr{L}(\sin)(z).$$

D'où par injectivité de la transformée de Laplace et par le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient (au signe près) $\forall\, z \in \mathring{D}_{\mathscr{L}(f)},\ \ \mathscr{L}(f)(z) = (z^2+1)^{-\frac{1}{2}}$.
Il vient donc $\forall\, z \in \mathring{D}_{\mathscr{L}(f)},\ \ (z^2+1)\,\mathscr{L}(f)'(z) + z\,\mathscr{L}(f)(z) = 0$.
En prenant la transformée de Laplace de cette égalité (en remontant les calculs fait en a)), on obtient finalement que f est solution du problème (C_1), ce qui contredit ii) car f ne peut être la fonction nulle.

15.30 b) Prendre la transformée de Fourier de l'équation des ondes et en utilisant le théorème de dérivation sous l'intégrale par rapport au paramètre x, montrer que pour $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) \geq 0$, la fonction $U(s,x) := \widehat{u(\cdot,x)}(s)$ est solution de l'équation différentielle linéaire du 2ème ordre $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(s,x) - c^2\,U(s,x) = 0$ pour $(s,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
En déduire qu'il existe deux fonctions $f, g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall\,(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\quad u(t,x) = f(t - x/c) + g(t + x/c).$$

c) Prendre la transformée de Fourier de l'équation des ondes et en utilisant le théorème de dérivation sous l'intégrale par rapport au paramètre x, montrer que pour $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$, $U(z,x) := \mathscr{L}\big(u(\cdot,x)\big)(z)$ vérifie l'équation différentielle linéaire du 2ème ordre

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(z,x) - z^2/c^2\,U(z,x) = -\,(\alpha\,z + \beta)/c^2 \quad \text{pour } (x,z) \in \mathbb{R}_+ \times \big\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\big\}.$$

Compte tenu des conditions aux limites vérifiées par u et en utilisant la question a), montrer alors qu'il existe $\lambda(z), \mu(z) \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall\,(x,z) \in \mathbb{R}_+ \times \big\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\big\},\quad U(z,x) = \mathscr{L}(g)(z) + \lambda(z)\,e^{z\,x/c} + \mu(z)\,e^{-z\,x/c}.$$

En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) = \alpha + \beta\,t$ et

$$\forall\,(t,x) \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+,\quad u(t,x) = \begin{cases} \alpha + \beta\,t + f(t - x/c) & \text{si } t \geq x/c \\ \alpha + \beta\,t & \text{si } t < x/c. \end{cases}$$

15.31 a) On effectue le changement de variables $s = t + k$.
b) En prenant la transformée de Laplace de l'équation (D) et en utilisant a), on obtient $P(e^z)\,\mathscr{L}(f)(z) = 1/z$. On conclut avec la décomposition en éléments simples de $1/P$.
c) Comparer les deux fonctions aux points $t \in [p, p+1[$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ fixé.
d) Pour chaque $j = 1, \ldots, n$, on utilise le développement en série

$$\frac{e^{-z}}{z\,(1 - \alpha_j\,e^{-z})} = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_j^{k-1}\,\frac{e^{-kz}}{z} = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_j^{k-1} \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{[k,+\infty[}\,e^{-tz}\,dt,$$

puis l'interversion série-intégrale, licite par le théorème de convergence dominée grâce à la condition $\Re(z) > \ln\alpha$. On conclut en utilisant l'égalité de c) et finalement le théorème d'inversion de Laplace.

15.32 a) Utiliser le développement en série $[t] = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbb{1}_{[n,n+1[}(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

b) On a $\mathscr{L}(f)(z) = \mathscr{L}([t])(z)$ et on conclut par l'injectivité de la transformée de Laplace.

15.33 a) Appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue.

b) $\displaystyle\int_0^t [s]\,ds = \int_1^{[t]} [s]\,ds + \int_{[t]}^t [s]\,ds = \sum_{n=1}^{[t]-1} n + [t]\,(t-[t]) = \frac{[t]\,([t]-1)}{2} + [t]\,(t-[t])$.

c) On a $\displaystyle \mathscr{L}(f)(z) = \frac{1}{z(e^z-1)^2} = \frac{e^z}{z(e^z-1)^2} - \frac{1}{z(e^z-1)}$ qui donne bien l'égalité.

Il vient $\displaystyle \mathscr{L}(f)(z) = \mathscr{L}\Big(t\,[t] - \int_0^t [s]\,ds - [t]\Big)$ qui permet de conclure avec $[t]-1 = [t-1]$.

15.34 a) Pour la 1ère égalité utiliser la théorème de convergence dominée avec le développement en série $\displaystyle \sigma^{[t]} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma^n\,\mathbb{1}_{[n,n+1[}(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

Pour la 2ème égalité décomposer en éléments simples $\frac{1}{(X-\sigma)\,(X-\tau)}$ et appliquer la 1ère égalité.

Pour la 3ème égalité utiliser la 2ème égalité avec $\tau = \sigma + \varepsilon$ où

$$0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 \begin{cases} < e^{\Re(z)} - |\sigma| & \text{si } |\sigma| \ge 1 \\ = 1 - |\sigma| & \text{si } |\sigma| < 1, \end{cases} \tag{18.1}$$

et déduire de l'inégalité des accroissements finis la majoration : pour tout $t \ge 1$,

$$\left| \frac{(\sigma+\varepsilon)^{[t]} - \sigma^{[t]}}{\varepsilon}\, e^{-zt} \right| \le t\,(|\sigma| + \varepsilon_0)^{t-1}\, e^{-\Re(z)\,t} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+),$$

puis conclure avec le théorème de convergence dominée.

Pour la 5ème égalité décomposer en éléments simples $\frac{1}{(X-\sigma)\,(X-\tau)\,(X-\upsilon)}$ et appliquer la 1ère égalité.

Pour la 6ème égalité décomposer en éléments simples $\frac{1}{(X-\sigma)^2\,(X-\tau)}$ et utiliser les 1ère et 3ème égalités.

Pour la 7ème égalité utiliser la 5ème égalité avec $\tau = \sigma+\varepsilon$ et $\upsilon = \sigma - \varepsilon$ où ε vérifie (18.1), déduire de l'inégalité des accroissements finis à l'ordre 2 la majoration : pour tout $t \ge 2$,

$$\left| \frac{(\sigma+\varepsilon)^{[t]} + (\sigma-\varepsilon)^{[t]} - 2\,\sigma^{[t]}}{\varepsilon^2}\, e^{-zt} \right| \le t\,(t-1)\,(|\sigma| + \varepsilon_0)^{t-1}\, e^{-\Re(z)\,t} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+),$$

puis conclure à nouveau avec le théorème de convergence dominée.

b) En faisant le changement de variable $s = t+1$, on obtient

$$\mathscr{L}\big(f(t+1)\big)(z) = e^z\,\mathscr{L}(f)(z) - u_0\,e^z \int_0^1 e^{-zs}\,ds.$$

On procède de même pour $\mathscr{L}\big(f(t+2)\big)(z)$ avec le changement de variable $s = t+2$.

c) On prend la transformée de Laplace de l'équation vérifiée par f, *i.e.*
$f(t+2) = a\,f(t+1) + b\,f(t) + \gamma^{[t]}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, et on applique b).

Pour les questions d) à f) on prend la transformation de Laplace inverse de l'expression de $\mathscr{L}(f)$ dans c) en utilisant les différentes égalités de a). On en déduit $f(t)$ pour $\lambda(dt)$ presque tout $t \in \mathbb{R}_+$, puis u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

15.35 a) On a $\mathscr{W}(e^{-ay^2})(x) = (1+4a)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{a}{1+4a}x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$, définie uniquement pour $a > -1/4$.

b) On applique l'inégalité de Jensen avec la fonction convexe $\big(t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^p\big)$ et la mesure de probabilité $G(y)\,dy$, puis le théorème de Fubini-Tonelli.

$c)$ On écrit dans l'intégrale du membre de droite $e^{-\frac{y^2}{4}+\frac{xy}{2}} = e^{\frac{x^2}{4}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4}}$ et on fait le changement de variable $y \to x - y$.

$d)$ $i)$ $\big(e^{-yD}(f)\big)(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, y^n\, f^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\big(f(x-\cdot)\big)^{(n)}(0)}{n!}\, y^n.$

$ii)$ On intègre par parties par rapport à $y\,G(y) = -\,2\,G'(y)$.

$iii)$ Dans $\mathscr{W}(f)(x)$ on remplace $f(x-y)$ par l'expression de $i)$, et on fait une interversion intégrale-série (licite car $e^{|y|}\,G(y) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$), puis on utilise $ii)$ (les intégrales "impaires" sont nulles), d'où $\mathscr{W}(f)(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\,\big(D^{2n}(f)\big)(x)$.

15.36 $a)$ On fait le changement de variable $z = \sqrt{t}\,y$ dans l'intégrale de droite.

$b)$ À l'aide de $a)$ on se ramène à $\mathscr{W}$ et on applique le résultat de l'exercice 15.35 $d)$ $iii)$ avec la fonction $f(\cdot\sqrt{t})$, puis on conclut en notant que $\big(f(\cdot\sqrt{t})\big)^{(2n)} = t^n\, f^{(2n)}(\cdot\sqrt{t})$.

$c)$ D'après $b)$ on a pour $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R})$,

$$(\mathscr{W}_s \circ \mathscr{W}_t)(\varphi) = \mathscr{W}_s\big(e^{tD}(\varphi)\big) = e^{sD}\big(e^{tD}(\varphi)\big) = e^{(s+t)D}(\varphi) = \mathscr{W}_{s+t}(\varphi).$$

L'avant-dernière égalité se déduit du théorème de Fubini-Lebesgue pour les séries doubles et de la formule du binôme de Newton :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{m+n=p} \frac{s^m\, t^n}{m!\, n!} = \sum_{n=0}^{p} \frac{s^{p-n}\, t^n}{(p-n)!\, n!} = \frac{1}{p!}\,(s+t)^p.$$

Alternativement, on peut faire le changement de variable $u = y + z$ dans l'intégrale double $\mathscr{W}_s\big(\mathscr{W}_t(\varphi)\big)(x)$ en $(y,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, et appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue pour obtenir une intégrale avec la fonction $f(x-u)\,G_{s+t}(u)$.

On conclut en utilisant la densité de $\mathscr{C}^\infty_K(\mathbb{R})$ dans $\big(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p\big)$ pour $1 \leq p < +\infty$ (*cf.* théorème 14.8), et l'estimation L^p de l'exercice 15.35 $b)$ combinée avec l'égalité de $a)$.

$d)$ L'inégalité est claire pour $q = +\infty$. Si $q \in [1, +\infty[$, on a pour $\delta > 0$ fixé,

$$\|G_t\|_{L^q(\{|y|>\delta\})} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(\frac{2}{\delta}\int_\delta^{+\infty} y\, e^{-\frac{qy^2}{4t}}\, dy\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{4t}{q\delta}\right)^{\frac{1}{q}} G_t(\delta) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Soient $p \in [1, +\infty[$, $x \in \mathbb{R}$ et $t, \delta > 0$. On a par l'inégalité de Hölder avec $q := \frac{p}{p-1}$,

$$\begin{aligned}
\big|(\varphi * G_t)(x) - \varphi(x)\big| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \big|\varphi(x-y) - \varphi(x)\big|\, G_t(y)\, dy \\
&\leq \int_{-\delta}^{\delta} \big|\varphi(x-y) - \varphi(x)\big|\, G_t(y)\, dy + \int_{\{|y|>\delta\}} \big|\varphi(x-y) - \varphi(x)\big|\, G_t(y)\, dy \\
&\leq \max_{y\in[-\delta,\delta]} \big|\varphi(x-y) - \varphi(x)\big| + \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})}\, \|G_t\|_{L^q(\{|y|>\delta\})} + |\varphi(x)|\, \|G_t\|_{L^1(\{|y|>\delta\})}.
\end{aligned}$$

Le premier terme de la ligne précédente est arbitrairement petit pour δ assez petit, par continuité de φ en x. D'après l'estimation de G_t précédente, les deux derniers termes tendent vers 0 lorsque $t \to 0^+$ à $\delta > 0$ fixé.

Si $p = +\infty$, on applique le théorème 14.6 avec la famille d'approximations de l'unité (*cf.* définition 14.5) $(G_t)_{t>0}$ lorsque $t \to 0^+$.

$e)$ D'après l'égalité de $b)$ on a $\partial_t\big(\mathscr{W}_t(f)\big) = D^2\big(e^{tD^2}(f)\big) = D^2\big(\mathscr{W}_t(f)\big)$ dans $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$.

15.37 $a)$ En faisant le changement de variable $s = \sqrt{t}$ et en utilisant la formule de l'intégrale gaussienne, on obtient $\mathscr{L}(a)(x) = \sqrt{\pi/x}$ pour tout $x > 0$.

$b)$ En prenant la transformée de Laplace du produit de convolution $\mathscr{A}(u) = a * u$ et de $v := \mathscr{A}(\mathscr{A}u) = a * (a * u)$, on obtient $\mathscr{L}(v) = \mathscr{L}(a)^2\, \mathscr{L}(u)$.

$c)$ D'après $a)$ et $b)$ on a

$$\forall\, x > 0, \quad \mathscr{L}(v)(x) = \pi/x\, \mathscr{L}(u)(x) = \pi\, \mathscr{L}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+})(x)\, \mathscr{L}(u)(x) = \mathscr{L}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} * u)(x).$$

On conclut avec l'inversion de Laplace et la continuité des fonctions v et $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} * u$ dans $\mathbb{R}_+$.
$d)$ Remarquer que $x' > 0$.
$e)$ Effectuer le changement de variable $x = W(y)$ dans l'intégrale de $d)$ puis $V(c) = E$.
$f)$ Composer par $\mathscr{A}$ l'égalité de $e)$ puis utiliser $c)$.

15.38 $a)$ Remarquer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$, composer l'équation par $\mathscr{A}$ ce qui donne pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = a + 2\,a\,k\,\sqrt{x} + \pi\,k^2 \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, puis enfin dériver.
$b)$ Résoudre l'équation différentielle d'ordre 1 avec la méthode de la variation de la constante et retrouver l'expression de $\mathscr{A}(e^{\pi k^2 t})$.
$c)$ Remplacer l'expression de f dans $a + k\,\mathscr{A}(f)$ et utiliser à nouveau la question 15.35 $c)$ avec la fonction $\big(t \mapsto e^{\pi k^2 t}\big)$.

15.39 $a)$ On a $F_n(x) \geq 0$ et $F_n'(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!}\,x^n\,f^{(n+1)}(x) \leq 0$, d'où l'existence de $\lim\limits_{x\to\infty} F_n(x)$. En supposant alors par récurrence l'existence des ℓ_k pour $k = 0, \ldots, n-1$, on en déduit celle de ℓ_n.
$b)$ $i)$ Pour passer de n à $n+1$ on fait une intégration par parties de l'expression intégrale de $f(x) - M_n$.
$ii)$ On a $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, u \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq (-1)^n\,f^{(n)}\Big(u + \dfrac{1}{k}\Big) \leq (-1)^n\,f^{(n)}\Big(u + \dfrac{1}{k+1}\Big)$, ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence monotone.
$iii)$ $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, u \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq (-1)^n\,u^{n-1} f^{(n)}(u+k) \leq (-1)^n\,u^{n-1} f^{(n)}(u) =: f_0(u)$, et f_0 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après l'égalité de $ii)$.

$c)$ Si $g_n'(x) = 0$ pour $x \in]0,1[$, alors $|g_n(x)| = \big|\,1/(n-1)\,e^{-nx}\,(nx-1)\big| \leq 1/(n-1)$.

$d)$ $i)$ Effectuer le changement de variable $u + x \to u$ dans l'intégrale de $b)$ $i)$.
$ii)$ À l'aide de $c)$ et de $b)$ $ii)$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_x^{+\infty}\big(e^{-nx/u} - (1-x/u)^{n-1}\big)\,u^{n-1} f^{(n)}(u)\,du\right] = 0.$$

$iii)$ Par $b)$ $ii)$ et $b)$ $iii)$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^x e^{-nx/u}\,u^{n-1} f^{(n)}(u)\,du \\ &\leq \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\,e^{-n}\int_0^x u^{n-1} f^{(n)}(u)\,du \leq e^{-n}\,(f(0) - \ell). \end{aligned}$$

$iv)$ Le résultat s'obtient en sommant les limites de $ii)$ et $iii)$.
$e)$ $i)$ La fonction α_n s'écrit $\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \alpha_n(t) = \ell + \dfrac{(-1)^n}{(n-1)!}\displaystyle\int_{n/t}^{+\infty} u^{n-1} f^{(n)}(u)\,du$,
et est donc positive et croissante. Par l'intégrabilité de $f_0(u) = (-1)^n\,u^{n-1} f^{(n)}(u)$ conséquence de $b)$ $ii)$ et $b)$ $iii)$, on a $\lim\limits_{t\to 0} \alpha_n(t) = \ell$, d'où α_n est continue en 0. De même, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha_n(t) = \ell + f(0) - \ell = f(0)$.
$ii)$ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Partant de l'expression de $i)$ et en utilisant le théorème de Fubini, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
x\,\mathscr{L}(\alpha_n)(x) &= \ell + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} e^{-x\,t}\left(\int_{n/t}^{+\infty} u^{n-1} f^{(n)}(u)\,du\right)dt \\
&= \ell + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} u^{n-1} f^{(n)}(u)\left(x\int_{n/u}^{+\infty} e^{-x\,t}\,dt\right)du \\
&= \ell + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} e^{-nx/u}\,u^{n-1} f^{(n)}(u)\,du,
\end{aligned}$$

d'où par la formule de $d)$ $iv)$, on déduit $\lim_n x\,\mathscr{L}(\alpha_n)(x) = \ell + f(x) - \ell = f(x)$.

15.40 $a)$ En appliquant l'inégalité de Jensen avec $\alpha\,(x-a)^{-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}\,dt$ qui est une mesure de probabilité sur $[a,x]$, on a

$$\left|\mathscr{I}^\alpha(f)(x)\right|^p \le \frac{(x-a)^{\alpha p-\alpha}}{\alpha^p\,\Gamma(\alpha)^p}\int_a^x \alpha\,|f(t)|^p\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt,$$

d'où par le théorème de Fubini-Tonelli, il vient

$$\left\|\mathscr{I}^\alpha(f)\right\|^p \le \frac{(b-a)^{\alpha p-\alpha}}{\alpha^p\,\Gamma(\alpha)^p}\int_a^b |f(t)|^p\left[\int_t^b \alpha(x-t)^{\alpha-1}dx\right]dt \le \frac{(b-a)^{\alpha p}}{\alpha^p\,\Gamma(\alpha)^p}\int_a^b |f(t)|^p\,dt.$$

$b)$ $i)$ Par continuité de la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\alpha\,\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1) \underset{\alpha\to 0^+}{\longrightarrow} \Gamma(1) = 1$ et $(x-y)^\alpha \underset{\alpha\to 0^+}{\longrightarrow} 1$, d'où la limite de ρ_y^α sur $]y,b]$. Avec $\Gamma(\alpha+1) \ge \Gamma(2) = 2$ et en distinguant les cas $b-a\le 1$ et $b-a\ge 1$, on obtient la majoration de ρ_a^α sur $[a,b]$ pour $\alpha\in]0,1]$.

$ii)$ $\big(\mathscr{I}^\alpha(\varphi)-\varphi\big)(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^x \big(\varphi(t)-\varphi(x)\big)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt + \varphi(x)\big(\rho_a^\alpha(x)-1\big),$

qui implique la première inégalité en séparant l'intégrale sur $[x,y]$ et $[a,y]$, puis en majorant par $\|\varphi\|_{\sup}$. De plus, on a $|\mathscr{I}^\alpha(\varphi)(x)| \le \dfrac{\|\varphi\|_{\sup}}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\,dt = \|\varphi\|_{\sup}\,\rho_a^\alpha(x)$. Ces deux inégalités combinées avec celles de $i)$ vérifiées par ρ_a^α et la continuité de φ, permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée à $|\mathscr{I}^\alpha(\varphi)-\varphi|^p$.

$iii)$ On utilise la densité de $\mathscr{C}^0([a,b])$ dans $\big(L^p([a,b]),\|\cdot\|_p\big)$ (*cf.* théorème 9.10) et les deux inégalités de $ii)$.

$c)$ Comme f est continue sur $[a,b]$ et $\big((t,x)\mapsto |t-x|^\alpha\big)$ est continue sur $[a,b]^2$, on a d'après le théorème de continuité sous l'intégrale (*cf.* théorème 8.5)

$$\forall\, x\in[a,b],\quad \big(\mathscr{I}^{\alpha+1}(f)\big)'(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x f(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt = \mathscr{I}^\alpha(f)(x).$$

$d)$ Soient $f\in\mathscr{L}^1([a,b])$ et $x\in[a,b]$. Dans l'expression de $\mathscr{I}^\alpha\big(\mathscr{I}^\beta(f)\big)(x)$ on applique le théorème de Fubini, ce qui conduit à l'intégrale de la fonction intégrale

$$s\in[a,x] \longmapsto \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_s^a (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}\,dt\ ,$$

dans laquelle on effectue le changement de variable affine $t = s+(x-s)\,u$ où $u\in[0,1]$. D'où par la formule des compléments (*cf.* exercice 12.7 $b)$) cette fonction est égale à

$$s\in[a,x] \longmapsto \frac{(x-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}\,u^{\beta-1}\,du = \frac{(x-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

$e)$ Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Dans l'expression de $\mathscr{L}\big(\mathscr{I}^{1-\alpha}(f)\big)(x)$ on applique le théorème de Fubini.

On a pour $s\in[0,t]$, la seconde intégrale $\displaystyle\int_s^{+\infty}(t-s)^{1-\alpha}\,e^{-xt}\,dt \underset{t=u+s}{=} e^{-xs}\,\Gamma(1-\alpha).$

Chapitre 19

Réponses aux QCM

QCM 1

1. 3 bonnes réponses : $\dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $\dfrac{x}{x^2+1} \in L^2(\mathbb{R})$, $\dfrac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$.
2. 2 bonnes réponses, conséquences du théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1+x}{2}\right)^n dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\, dx = 0.$$

3. Par un changement de variables en coordonnées polaires on a

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\, dr = \frac{\pi}{2}.$$

4. En intégrant deux fois par parties, on a $\hat{f}(\xi) = \dfrac{2}{(1+2i\pi\,\xi)^3}$.
5. Par le calcul on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2} = \frac{\pi}{2}$.
6. Par le calcul on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 d\xi = \pi$.
7. Soit $f(x) := e^{-\pi x^2}$. On a $\mathscr{F}(f)(\xi) = f(\xi)$, d'où

$$\mathscr{F}(f * f)(\xi) = \big(\mathscr{F}(f)(\xi)\big)^2 = e^{-2\pi\xi^2}.$$

QCM 2

1. Une bonne réponse : $\dfrac{1}{\sqrt{x^4+x}} \in L^1(\mathbb{R}_+)$.
2. La réponse est $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.
3. 2 bonnes réponses : $\displaystyle\frac{\pi}{2} = 2\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)^2$.
4. La réponse est $\mathscr{F}(f) = -if$ en utilisant la relation entre la dérivée et la transformée de Fourier.
5. La réponse est 2.
6. La réponse est $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^3}$.
7. La réponse est f_2.

QCM 3

1. 2 bonnes réponses : $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x}} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ et $\dfrac{\sin^2 x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$.
2. La réponse est π en faisant un changement de variables en coordonnées polaires.
3. 2 bonnes réponses : $I = \pi$ en utilisant le principe de la bosse glissante, et $J = 0$ par le théorème de convergence dominée.
4. 2 bonnes réponses : $\mathscr{F}(f)$ est réelle et $\mathscr{F}(f) > -f$ en utilisant la relation entre la dérivée et la transformée de Fourier.
5. La réponse est $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{(t\cos t - \sin t)^2}{t^4} dt$ par le théorème de Plancherel.
6. La réponse est $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\, e^{-2ax}\, dx$.
7. La réponse est $2\sqrt{\pi}$.

QCM 4

1. 2 bonnes réponses : $\dfrac{1-e^{-\sqrt{x}}}{x} \in L^1([0,1])$ et $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}} \in L^2(\mathbb{R})$.
2. La réponse est $-\dfrac{1}{e}$.
3. La réponse est 2π en passant en coordonnées polaires.
4. 2 bonnes réponses : $\mathscr{F}(f)(0) = 0$ et $\mathscr{F}(f) = -if$.
5. On reconnaît dans le module la transformée de Fourier de $x \mapsto 1_{\mathbb{R}_+} e^{-2\pi x^2}$ d'où, par le théorème de Plancherel,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi x\,(x+iy)}\, dx \right|^2 dy = \int_0^{+\infty} e^{-4\pi x^2}\, dx = \frac{1}{4}.$$

6. On a $f = \mathscr{F}\big(1_{[-1/2,1/2]}\big)$, d'où $f * f = f$.
7. On part de

$$\frac{e^{-(x+y)} - e^{-2(x+y)}}{x+y} = \int_1^2 e^{-z(x+y)}\, dz,$$

puis on obtient, en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, la valeur $\dfrac{1}{2}$.

QCM 5

1. 2 bonnes réponses : $\dfrac{1}{\sqrt{x|\ln x|}} \in L^1(]0,1[)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}\ln x} \in L^2([2,+\infty[)$.
2. En dérivant sous l'intégrale avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{t}$, on a $f'(\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}$.
3. En passant en coordonnées polaires on obtient π.
4. Une seule bonne réponse $\hat{f} = -f$, en utilisant les relations entre dérivée et transformée de Fourier et le fait que $e^{-\pi x^2}$ est un point fixe de la transformée de Fourier $\mathscr{F}$.
5. En appliquant le théorème de Plancherel avec $\mathscr{F}\big(1_{[-a,a]}\big)(x) = \dfrac{\sin(2\pi a x)}{\pi x}$, on obtient $\pi \min(a,b)$.

6. Trois bonnes réponses $f(x) = 1_{\mathbb{R}_+}(x)\,e^{-x}$, $f(x) = -1_{\mathbb{R}_-}(x)\,e^{x}$ et $f(x) = 1_{\mathbb{R}_+}(x)\,e^{-2x}$, en prenant la transformée de Fourier de l'égalité $(f * f)(x) = xf(x)$.
7. Par le théorème de Fubini-Tonelli on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+a+ax^2)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} dx \int_0^a \frac{dy}{1+y+yx^2} = \frac{\pi}{2}\int_0^a \frac{dy}{\sqrt{y^2+y}} = \frac{\pi}{2}\,g(a).$$

QCM 6

1. 3 bonnes réponses : $\displaystyle\int_0^1 x\,\ln^2\!\left(e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{1}{x}}\right)dx = +\infty$, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}dx = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_e^a \frac{\ln x \sin x}{x\,(\ln x - \sin x)}dx = +\infty$.
Pour la dernière intégrale on utilise le développement

$$\begin{aligned}\frac{\ln x \sin x}{x\,(\ln x - \sin x)} &= \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin^2 x}{x\ln x} + O\left(\frac{1}{x\ln^2(x)}\right)\\ &= \frac{1}{2\,x\ln x} + \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos(2x)}{2\,x\ln x} + O\left(\frac{1}{x\ln^2(x)}\right).\end{aligned}$$

2. La limite est $\pi\,\varphi(0)$ en notant que $\dfrac{\sin(2n\pi\xi)}{\pi\xi} = \mathscr{F}(1_{[-n,n]})(\xi)$, où $x = 2\pi\xi$, et en utilisant l'identité

$$\int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}(1_{[-n,n]})(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = \int_{-n}^{n} \mathscr{F}(\varphi)(\xi)\,d\xi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (\mathscr{F}\circ\mathscr{F})(\varphi)(0) = \varphi(0)$$

par le théorème d'inversion.
3. En utilisant le théorème de Fubini et en passant en coordonnées polaires, on obtient $\dfrac{\pi}{2}$.
4. Une seule bonne réponse : $f * f = e^{-\pi x^2}$ en prenant la transformée de Fourier de l'égalité et du fait que la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ est continue et tend vers 0 à l'infini.
5. Du fait que $\mathscr{F}\big(1_{\mathbb{R}_+}e^{-ax}\big)(\xi) = \dfrac{1}{a+2i\pi\xi}$ et $\mathscr{F}\big(1_{\mathbb{R}_-}e^{bx}\big)(\xi) = \dfrac{1}{b-2i\pi\xi}$, le théorème de Plancherel donne 0.
6. 2 bonnes réponses $x\,e^x$ et $\sin x$ du fait que $\mathscr{F}(f)$ est continue et tend vers 0 à l'infini. Pour $x\,e^x$, la fonction définie par la série convergente dans $L^1(\mathbb{R})$

$$g := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n+1)*}}{n!}, \quad \text{où} \quad f^{(n)*} := \underbrace{f * \cdots * f}_{n \text{ fois}},$$

vérifie l'égalité $\mathscr{F}(f)\,e^{\mathscr{F}(f)} = \mathscr{F}(g)$ du fait de la multiplicativité de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ par rapport à la convolution.
7. *Via* le théorème Fubini-Tonelli et le changement de variables $t = \tan x$, on obtient

$$\int_0^{\pi} \frac{\arctan(a\sin x)}{\sin x}\,dx = 2\int_0^a dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+y^2\sin^2 x} = \pi\int_0^a \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = \pi\,\mathrm{argsinh}\,a.$$

Bibliographie

Textes historiques

[1] E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1898.

[2] H. Lebesgue, Sur une généralisation de l'intégrale définie, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **132**, pp.132-1028, 1901.

[3] H. Lebesgue, Intégrale, longueur, aire, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **7**, pp.231-359, 1902.

[4] H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives*, ≪ Les grands classiques Gauthier-Villars ≫, Éditions Jacques Gabay, 2$^{\text{nd}}$ édition, Paris, 1928.

[5] B. Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Habilitationsschrift, aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1854.

Ouvrages d'intégration

[6] J.M. Arnaudiès, *L'intégrale de Lebesgue sur la droite réelle*, ≪ Les grands cours Vuibert ≫, Vuibert, 1997.

[7] P. Deheuvels, *Intégrale*, P.U.F., 1980.

[8] J. Deny, *Théorie de l'intégration*, Orsay P.U.S., Paris XI édition, 1989.

[9] A. Gramain, *Intégration*, ≪ Méthodes ≫, Hermann, 1988.

[10] N. Lerner, *A Course on Integration Theory*, Birkhaüser, 2014.

[11] D. Revuz, *Mesure et intégration*, ≪ Méthodes ≫, Hermann, 1994.

[12] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mac Graw Hill, 2$^{\text{ème}}$ édition, 1974,
et sa traduction :
W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson, 6$^{\text{ème}}$ édition, 1992.

[13] J. L. Schiff, *The Laplace transform. Theory and applications*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1999, 233 p.

[14] D. Stroock, *A concise Introduction to the Theory of Integration*, Birkhäuser, second edition, 1994.

[15] A. Zygmund, *Trigonometric series, Vol. I, II*, with a foreword by Robert A. Fefferman, third edition, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

Ouvrage de théorie des ensembles

[16] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Théorie des ensembles*, Masson, 1990.

Ouvrage sur les inégalités

[17] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pòlya, *Inequalities*, Cambridge University Press, second edition, 1959.

Ouvrages de topologie

[18] G. Choquet, *Topologie*, Masson, 1995.

[19] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, tome II, Gauthiers Villars, 1968.

[20] J. Dixmier, *Topologie générale*, P.U.F., 1981.

[21] P. Jaffard, *Traité de topologie générale en vue de ses applications*, P.U.F., 1997.

Ouvrages d'analyse fonctionnelle

[22] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1993.

[23] F. Hirsch, G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, ≪ Enseignement des Mathématiques ≫, Masson, 1997.

[24] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear Operators Part I*, Pure and Applied Mathematics Vol. VII, Interscience Publishers Inc., New York, 4^{th} edition, 1967.

[25] L. Schwartz, *Topologie et analyse fonctionnelle*, ≪ Enseignement des Sciences ≫, Hermann, $4^{\text{ème}}$ édition, 1970.

Ouvrage de probabilités

[26] J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, 1964.

Ouvrages de calcul différentiel

[27] A. Avez, *Calcul différentiel*, Masson, 1983.

[28] H. Cartan, *Calcul différentiel*, ≪ Méthodes ≫, Hermann, 1967.

[29] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, ≪ Mathématiques et Applications ≫, 13, Springer Verlag, 1993.

Ouvrages de premier cycle

[30] J.M. Arnaudiès, H. Fraysse, *Cours de Mathématiques 1, algèbre*, Dunod, 1994.

[31] J.M. Arnaudiès, H. Fraysse, *Cours de Mathématiques 2 et 3, analyse et compléments d'analyse*, Dunod, 1994.

[32] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Topologie et éléments d'analyse*, Masson, $2^{\text{ème}}$ édition, 1995.

Ouvrages d'exercices

[33] J.P. Ansel, Y. Ducel, *Exercices corrigés en théorie de la mesure et de l'intégration*, Ellipses, 1995.

[34] K. Vo Khac, *Théorie de la mesure, exercices et problèmes corrigés*, Hermann, 1993.

[35] K. Vo Khac, *Intégration et espaces de Lebesgue, exercices et problèmes corrigés*, Hermann, 1994.

Index

Analyse. Théorie de l'intégration

Le livre présente les bases de la théorie de l'intégration au sens de Lebesgue et ses premières applications. Il s'adresse aux étudiants en Licence 3 et en Master 1 de mathématiques pures ou appliquées, aux candidats à l'agrégation ainsi qu'aux élèves des écoles d'ingénieurs, avec un cours complet et plus de 260 exercices corrigés.

Il propose plusieurs niveaux de lecture où l'on distingue clairement les connaissances indispensables à maîtriser lors d'une première initiation et les applications à aborder lors d'une lecture plus approfondie.

Cette 8e édition revue et augmentée développe toujours la théorie de l'intégration et ses applications et s'enrichit d'un chapitre entièrement refondu consacré aux Transformées de Fourier et de Laplace, ainsi que de 30 exercices supplémentaires inédits.

SOMMAIRE

LES PLUS

- Une sélection de QCM corrigés
- 11 problèmes d'examens
- La note d'Henri Lebesgue aux Comptes rendus de l'Académie des sciences, fondant l'intégrale éponyme

Marc Briane est professeur à l'I.N.S.A. Rennes. Il enseigne l'algèbre en Licence 1, l'intégration, la topologie, l'analyse complexe et les transformées (de Fourier et de Laplace) en Licence 3 et l'analyse hilbertienne en Master 1.

Gilles Pagès est professeur à Sorbonne Université. Il enseigne l'intégration, les probabilités, l'optimisation stochastique et les mathématiques financières en Licence et en Master. Il est responsable du Master 2 « Probabilités & Finance » commun à Sorbonne Université et à l'École polytechnique.

deboeck SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com

Conception graphique : Primo&Primo®